



**Міністерство освіти та науки України**

**Львівський національний університет  
імені Івана Франка**

**Факультет прикладної математики та інформатики**

**ДЕСЯТА ВСЕУКРАЇНСЬКА  
(П'ЯТА МІЖНАРОДНА)  
СТУДЕНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ  
З ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
ТА ІНФОРМАТИКИ  
СНКПМІ-2007**

Львів, 25-27 квітня 2007 року

Тези доповідей

Львів ЛНУ 2007

## ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Ярема Савула	Декан факультету прикладної математики та інформатики ЛНУ
Олександра Гнатишин	Заступник декана факультету прикладної математики та інформатики
Людмила Винницька	Аспірант факультету прикладної математики та інформатики
Наталія Білан	Магістрант факультету прикладної математики та інформатики
Микола Старчак	Магістрант факультету прикладної математики та інформатики
Галина Щербата	Студентка факультету прикладної математики та інформатики
Ольга Білан	Студентка факультету прикладної математики та інформатики
Василь Когут	Студент факультету прикладної математики та інформатики

## НАУКОВИЙ КОМІТЕТ

Михайло Бартіш	Завідувач кафедри теорії оптимальних процесів факультету прикладної математики та інформатики
Василь Височанський	Проректор з навчальної роботи, завідувач кафедри програмування факультету прикладної математики та інформатики
Микола Притула	Завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем факультету прикладної математики та інформатики
Ярема Савула	Завідувач кафедри прикладної математики факультету прикладної математики та інформатики
Георгій Шинкаренко	Завідувач кафедри інформаційних систем факультету прикладної математики та інформатики
Роман Хапко	Завідувач кафедри обчислювальної математики факультету прикладної математики та інформатики
Григорій Цегелик	Завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів факультету прикладної математики та інформатики



## ЗМІСТ

ЗБІЖНІСТЬ Н-АДАПТИВНИХ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	12
СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОЇ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ УЧБОВИХ ЗАНЯТЬ .....	14
VAR-МЕТОДОЛОГІЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФІНАНСОВИХ РИЗИКІВ. VASCTESTING МОДЕЛІ.....	16
МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ ЗА УМОВИ, ЩО ІНТЕНСИВНІСТЬ ВХІДНОГО ПОТОКУ ЗАЛЕЖИТЬ ВІД КІЛЬКОСТІ КЛІЄНТІВ .....	19
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ТРЬОХ ГІЛОК ВЛАДИ.....	21
ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМНОЇ МОДЕЛІ ДВОХСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ .....	23
КОМП'ЮТЕРНА ВІРУСОЛОГІЯ І ПРОБЛЕМИ ЗАХИСТУ	25
ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДУ ТИПУ РУНГЕ ДЛЯ ГЕНЕРАЦІЇ НЕЯВНО ЗАДАНИХ КРИВИХ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ.....	28
АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ НЕРІВНОВАЖНИХ ПРОЦЕСІВ ДРІБЛЕННЯ РІДИНИ .....	30
РОЗРОБКА САПР МЕХАНОСКЛАДАЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА .....	32
ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ «ХИЖАК-ЖЕРТВА» .....	34
ОЦІНКА ІНФОРМАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ АНАЛІЗІ ЗОБРАЖЕНЬ .....	36



КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОЛІФЕРМЕНТНОГО ГІДРОЛІЗУ НЕРОЗЧИННОЇ ЦЕЛЮЛОЗИ.....	38
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВОДЖЕННЯ ГНУЧКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА ОБТИСК, В ОКОЛІ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ .....	40
ІНСТРУМЕНТАЛЬНЕ СЕРЕДОВИЩЕ ДЛЯ РОЗРОБКИ ВЕБ-САЙТІВ .....	42
ТА НАВЧАЛЬНИХ ЕЛЕКТРОННИХ КУРСІВ .....	42
ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНО-ПРОЕКЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	44
ОЦІНКИ ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ В .....	46
БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ .....	46
ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНОГО ЕЛІПСОЇДА, ЩО МІСТИТЬ ПЕРЕТИН ЗАДАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ .....	47
НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОГО ЗРІЗАНОГО КОНУСА ІЗ ЗАГОСТРЕННЯМ ТА ПІВКУЛІ ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ.....	50
РОЗВ'ЗОК ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТРЕТЬОГО РОДУ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ КОНІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	53
ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ ІЗ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ.....	54
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МАРКЕТИНГУ В ПІДПРИЄМНИЦТВІ.....	55



КУБІЧНІ МАТРИЦІ ТА ЇХ ІМОВІРНІСТНІ ВЛАСТИВОСТІ .....	57
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	58
ПОШУКУ ТА ВИДАЛЕННЯ ЕФЕКТУ «ЧЕРВОНИХ ОЧЕЙ» У ФОТОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕННЯХ.....	60
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ЗАБРУДНЕНЬ У ГРУНТАХ .....	62
МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО У ЗАСТОСУВАННІ ДО ЗАДАЧ В НЕСКІНЧЕННИХ ОБЛАСТЯХ ПЕРШОГО ТИПУ .....	64
ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ СИСТЕМИ ПРОФІЛІВ, ЩО ОБТІКАЮТЬСЯ ПОТЕНЦІАЛЬНИМ ПОТОКОМ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ .....	66
ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ... ..	68
ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ТА СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА.....	70
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ГРУНТАХ .....	72
ПОРІВНЯННЯ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ ДЛЯ АВТОМАТИЗОВАНОГО АНАЛІЗУ ГІСТОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ .....	74
ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ.....	76
ДОСЯГНЕННЯ КОМПРОМІСУ ДВОХ ГІЛОК ВЛАДИ В НЕТИПОВОМУ ВИПАДКУ РОЗПОДІЛУ ВЛАДНИХ ПОВНОВАЖЕНЬ.....	78
МЕТОД ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ІТЕРОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ .....	80



МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ .....	82
ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ НА ОДНОМУ КЛАСІ ФУНКЦІЙ .....	84
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУСЛОВОГО СТОКУ ВОЛОГИ .....	86
НАДЛИШКОВИЙ ТИСК НА ФРОНТІ СФЕРИЧНОЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ. ....	88
ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ЦІНОУТВОРЕННЯ ПОХІДНИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ .....	91
ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ .....	93
АЛГОРИТМ ЛЮ ПЕРЕУПОРЯДКУВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ ПАРАЛЕЛЬНОГО ВИКЛЮЧЕННЯ .....	95
ВИНИКНЕННЯ ДИСИПАТИВНИХ СТРУКТУР НА АРЕАЛАХ РІЗНОЇ ФОРМИ .....	97
ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ «ХИЖАК-ЖЕРТВА» .....	100
ОСНОВНІ МЕТОДИ ВЗЛОМУ ОС. ЗАХИСТ ІНФОРМАЦІЇ ВІД ХАКЕРІВ .....	102
МІФИ КОМП'ЮТЕРНОЇ БЕЗПЕКИ .....	102
В ПРОПОНОВАНІЙ ДОПОВІДІ АНАЛІЗУЮТЬСЯ ОСНОВНІ МЕТОДИ ВЗЛОМУ ОС WINDOWS, UNIX, NOVELL NETWARE СЕРЕД ЯКИХ, НАЙПЕРШЕ, ПРИВЕРТАЮТЬ УВАГУ ТІ: .....	102
МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЗАСОБИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УПРАВЛІННІ ІНВЕСТИЦІЙНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ .....	104
АНАЛІЗ СТАЛОГО РЕЖИМУ ЕЕС .....	106



МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО РОСТУ ЗІ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ.....	108
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	109
НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «ВЧИТЕЛЬ VISUAL FOXPRO» .....	111
ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБОЛОНОК, ПІДДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА ОПТИСК .....	113
МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ТЕПЛОПРОВІДНИХ СИСТЕМ ТИПУ “ІМПЛАНТАТ–КІСТКОВА ТКАНИНА ЩЕЛЕПИ ЛЮДИНИ” З ВИКОРИСТАННЯМ ПАКЕТУ FEMLAB 3.3 .....	114
КЛІЄНТ-СЕРВЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ МОБІЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ НА МОВІ JAVA .....	116
ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ .....	117
МЕРЕЖЕВА АРХІТЕКТУРА DNA .....	119
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ СПЛАЙН ФУНКЦІЙ.....	121
АПРОКСИМАЦІЇ Н-АДАПТИВНОГО МСЕ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З РІВНЯННЯМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА .....	123
МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗВИТКУ РИНКУ ТОВАРІВ ПІДПРИЄМСТВА НА ЗАСАДАХ ВИВЧЕННЯ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ ПОКУПЦІВ .....	126
АНАЛІЗ МЕТОДІВ ВИДІЛЕННЯ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ НА ЗОБРАЖЕННЯХ ПІД ДІЄЮ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРОЕКТИВНОЇ ГРУПИ .....	128



АПРОКСИМАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ .....	130
ЧИСТА ТЕПЕРІШНЯ ВАРТІСТЬ ЯК ПОКАЗНИК ОЦІНКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПРОЕКТУ .....	132
СМС-СИСТЕМА КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИМ ВИДАННЯМ .....	135
ПРОГРАМА “ADVANCED AUDIO VOICE” ДЛЯ СИНТЕЗУ УКРАЇНСЬКОЇ МОВИ .....	136
ЛАПЛАСІАН ФУНКЦІЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ .....	138
ВЕКТОРНІ ПРОЦЕСИ РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО НЕСКІНЧЕНОГО ПОРЯДКУ .....	140
СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО ТЕСТУВАННЯ КОНСОЛЬНИХ ПРОГРАМ "АСМ CONTESTER" .....	142
ПОЛІГОНАЛЬНІ РЕГУЛЯРНІ МОЗАЇКИ НА ПЛОЩИНІ	144
РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСКРЕТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДАНИХ У БЕЗПЕЧНОМУ ФОРМАТІ .....	146
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ.....	148
ПРОЕКТУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ У СФЕРІ НАУКИ ТА ОСВІТИ НА ПРИКЛАДІ СТВОРЕННЯ САЙТУ КАФЕДРИ.....	150
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СТРУКТУРАХ З АКТИВНИМ ЕЛЕМЕНТОМ. ....	152
МОДЕЛЮВАННЯ МАШИНИ З НАТУРАЛЬНОЗНАЧНИМИ РЕГІСТРАМИ.....	154



ВИБІР АЛОФОНІВ З БАЗИ ДАНИХ ПІД ЧАС КОМПЛІЯТИВНОГО СИНТЕЗУ УСНОГО МОВЛЕННЯ..	156
РІВНОМІРНІ ДИНАМІЧНІ СІТКИ ПРОСТОРОВИХ ІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ .....	158
ОПТИМІЗАЦІЯ ВИКОНАННЯ ЗАПИТІВ В ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУРАХ ДАНИХ .....	159
ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ БІОТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ .....	161
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВІДКРИТИХ ПЛОСКОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ З МЕТАМАТЕРІАЛОМ УРАХВУЮЧИ ЧАСТОТНУ ДІСПЕРСИЮ.....	164
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ З ПРОЕКЦІЙНИМИ ДАНИМИ ЗА РІЗНИМИ НАПРЯМКАМИ.....	167
ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БУБНОВА-ГАЛЬОРКІНА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ .....	169
ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ПО ТЕПЛОФІЗИЧНИМ ВЛАСТИВОСТЯМ ВОДИ ТА ДІОКСИДУ ВУГЛЕЦЮ ....	171
ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧИСЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	173
РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ РАНЖУВАННЯ СТОРІНОК В ПОШУКОВИХ СИСТЕМАХ МЕРЕЖІ INTERNET.....	175
ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ МІГРАЦІЄЮ ПОЛЮТАНТІВ У РОСЛИНАХ.....	177
ІНСТРУМЕНТАЛЬНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	179



ДВОКРОКОВИЙ ІТЕРАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД ДЛЯ  
НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ..... 181

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БУБНОВА–ГАЛЬОРКІНА ДО  
РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ІІІ  
РОДУ ..... 182



## ЗБІЖНІСТЬ Н-АДАПТИВНИХ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Абрамов Є.М., Ліпіна О.С., Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Побудовано  $h$ -адаптивну схему МСЕ для розв'язування сингулярно збурених одновимірних крайових задач із звичайними диференціальними рівняннями другого порядку вигляду [3]:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)\frac{du(x)}{dx} + \sigma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0, \\ -\mu \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = \alpha[u(1) - \bar{u}]. \end{cases} \quad (1)$$

де  $\mu = \mu(x)$ ,  $\beta = \beta(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  та  $f = f(x)$  – задані функції, а  $\alpha$ ,  $\bar{u}$  – задані сталі.

Запропонована схема базується на класичній процедурі МСЕ з просторами апроксимацій, що породжуються кусково лінійними, кусково квадратичними та кусково кубічними базисними функціями [2]. Адаптування сітки відбувається на основі значень апостеріорного оцінювачі похибки, обчисленого незалежно на кожному скінченному елементі тріангуляції. Такий оцінювач дає можливість отримувати розв'язок з певною наперед гарантованою точністю.

Норму оцінювача на скінченному елементі будемо рахувати за формулою [1]:

$$\|\varepsilon_h\|_{i+\frac{1}{2}}^2 = \frac{5}{6} \left\{ \frac{h^3}{\mu} \frac{(f - \beta \dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad Pe := \frac{h\beta}{\mu}, \quad Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu}$$

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Характер збіжності послідовності побудованих апроксимацій до точного розв'язку крайової задачі (1) будемо аналізувати на основі величини загальної норми похибки на кроці

$$\|\varepsilon_h\|^j = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \|\varepsilon\|_{i+\frac{1}{2}}^2}, \quad (2)$$

де  $j$  – номер кроку (ітерації алгоритму).

Використовуючи норми (2), якість процесу адаптування сітки оцінимо обчисленням апостеріорних порядків швидкості збіжності похибок згідно правила



$$P_1 := \log_2 \frac{\|\varepsilon_h\|^j}{\|\varepsilon_h\|^{j+1}}, \quad P_2 := 2 \frac{\ln \|\varepsilon_h\|^j - \ln \|\varepsilon_h\|}{\ln N^j - \ln N^1} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Показник збіжності  $P_1$  використовують за умов рівномірного згущення сітки, яке призводить до зменшення вдвічі діаметра нової триангуляції. Водночас наведена  $h$ -адаптивна схема допускає генерування триангуляції, яка може відрізнятись від попередньої лише декількома елементами. В цьому випадку доцільніше застосувати  $P_2$ , оскільки показник  $P_1$  може знижувати істинні порядки збіжності похибок чи породжувати їхню нерегулярну зміну від кроку до кроку.

Програмна реалізація алгоритму додатково передбачає розрідження сітки в процесі відшукування розв'язку задачі, який дозволяє відчутно зменшити кількість обчислень за рахунок зменшення порядку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку треба розв'язати на кожному кроці.

Таблиця. Приклад розрахунку показників збіжності  $h$ -адаптивної схеми,  $\mu = 1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\sigma = 0$ ,  $f = 100$ ,  $\alpha = 1000$ ,  $\bar{u} = 0$ ; початкова кількість скінченних елементів  $N = 4$ ; допустима похибка  $\varepsilon = 10\%$ .

№	N	$\ u_h\ $	$\ \varepsilon_h\ $	$\frac{\ \varepsilon_h\ }{\ u_h\ }$	$\frac{\max_i \ \varepsilon_h\ _{i+\frac{1}{2}}}{\ u_h\ _{ave}}$	$\frac{\max_i \ \varepsilon_h\ _{i+\frac{1}{2}}}{\ \varepsilon_h\ _{ave}}$	$P_1$	$P_2$
1	4	90,601	89,749	0,990	1,220	1,232		
2	8	28,240	27,231	0,964	1,886	1,956	1,720	3,440
3	16	14,409	12,633	0,876	3,005	3,428	1,110	2,830
4	22	9,377	6,316	0,673	3,082	4,576	1,000	3,110
5	25	7,616	3,158	0,414	2,057	4,962	1,000	3,650
6	27	7,109	1,582	0,222	1,037	4,661	0,997	4,230
7	30	6,978	0,807	0,115	0,458	3,960	0,971	4,680
8	36	6,944	0,424	0,061	0,194	3,177	0,928	4,870
9	41	6,936	0,277	0,039	0,094	2,377	0,615	4,970

1. *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А.* Кусково-лінійні апроксимації  $h$ -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. 11(2006) 3-18.
2. *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г.* Числовий аналіз кусково лінійних апроксимацій  $h$ -адаптивних схем методу скінченних елементів. // XIII всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладн. математ. інформ." / Тези доповідей. – Львів, 2006. – С. 13.
3. *Козаревська Ю., Шинкаренко Г.* Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок:  $h$ -адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. 5(2002) 153-164.



## СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОЇ ПОБУДОВИ РОЗКЛАДУ УЧБОВИХ ЗАНЯТЬ

Бабіля Руслан Васильович, Шишковський Адріан Ігорович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Одна із основних складових учбового процесу – розклад занять – регламентує трудовий ритм, впливає на творчу віддачу викладачів та студентів. Враховуючи це, його можна розглядати як фактор оптимізації використання обмежених ресурсів: викладачів, аудиторій та часу.

Задачу складання розкладу не варто розглядати тільки як деяку програму, яка реалізує функцію механічної розстановки занять на початку семестру. Економічний ефект від більш ефективного використання ресурсів може бути досягнутий тільки в результаті великої роботи по керуванню цими ресурсами. Розклад тут є лише інструментом такого керування, і для найбільш повного його використання необхідно, щоб програма мала в собі не тільки засоби для складання оптимального розкладу, але і засоби для підтримки його оптимальності у випадку зміни деяких вхідних даних.

В найбільш загальному вигляді задача складання розкладу є наступною. За допомогою деякої множини ресурсів і обслуговуючих пристроїв повинна бути виконана деяка фіксована система завдань. Результат заключається в тому, щоб знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, оптимізовуючий або прямуєчий до певної міри ефективності.

Для кожного побудованого розкладу потрібно вирахувати його ефективність, щоб знати наскільки він нам підходить, щоб його прийняти за результат. Може бути дуже багато факторів, які впливають на ефективність. Головні із них: чи нема накладки аудиторій, зайнятість викладачів, кількість вікон і т.д. Важливим для системи складання розкладу є те, щоб всі фактори, які впливають на ефективність можна було додавати незалежно від програмного коду і встановлювати їхній вплив. Реляційний підхід до цієї проблеми забезпечив можливість реалізації цього моменту.

Для підрахунку кожного фактору створено запит, який повертає кількість невдалих пар по відношенню до цього фактору. Кожен цей запит має свою вартість, яка визначає важливість впливу на ефективність розкладу. І відповідно сума вартостей всіх факторів визначає ефективність розкладу. Це дає можливість добавляти додаткові запити, що впливають на ефективність у процесі пошуку результату.

Поки-що не придумано однозначного алгоритму для цієї проблеми, який працює за час, що вкладається в межі розумного. Це пов'язане в



першу чергу із складною структурою самого розкладу. Недавно з'явився клас алгоритмів, який називається «Генетичні алгоритми», за допомогою них нам вдалося реалізувати системи побудови розкладу.

Під час побудови розкладу, створюється початковий набір довільних розкладів, які сортуються за своєю ефективністю і кращі продовжують своє «життя», а гірші «помирають». Під час побудови наступного розкладу, для деякої пари довільним чином вибираються тільки можливі значення невідомих полів. Процес побудови нових розкладів продовжується доти, доки не буде досягнена необхідна ефективність. Цей процес наближається до ефективного розв'язку, оскільки на кожному кроці відбираються тільки найкращі, і виконуються операції вже над ними.

Також цей алгоритм дає можливість підтримки змін розкладу у процесі його використання. Якщо потрібно змінити декілька пар у готовому розкладі, то значення для інших фіксується, і будуть змінюватися тільки потрібні значення, а враховуватися у ефективності будуть всі, що дасть гарний результат із потрібними змінами.

Гарною властивістю даного алгоритму є те, що його можна в будь-який час зупинити і подивитися на найкращий варіант знайдений до цього часу, який може бути дуже близьким до розв'язку. Після того як проведені всі перевірочні роботи із результатом, який знайдений до зупинки, можна змінити потрібні параметри і продовжити пошук на основі вже знайдених варіантів і введених змін.

На основі цих всіх теоретичних міркувань нам вдалося реалізувати програму, яка на із вхідних даних шукає найбільш ефективний та оптимальний варіант, враховуючи різні фактори. Під час виконання, програму можна зупинити та подивитися на найкращий результат, який на даному етапі вважається оптимальним. Завдяки цьому можна змінити потрібні нам параметри і продовжити пошук, але вже починаючи із знайденого варіанту розкладу.

Для введення початкових даних в систему використовується модуль, який включає в себе набір форм для створення нових, зміни застарілих та видалення непотрібних даних. Для виведення інформації також використовується окремий модуль, який представляє готовий результат у зручному для користувача вигляді.

Нами вже було випробувано програму на основі розкладу для одного курсу. Результат виправдав всі надії - розклад був складений дуже гарно. Ці всі успіхи надихають на подальший розвиток цієї справи. Ми плануємо, що нам вдасться побудувати такий розклад для факультету прикладної математики та інформатики, який буде використаний в реальності.

**VAR-МЕТОДОЛОГІЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФІНАНСОВИХ РИЗИКІВ.  
BACKTESTING МОДЕЛІ.**

Бєбич Юрій Юліанович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Механіко-математичний факультет

Основою коваріаційного (variance-covariance) методу розрахунку величини VaR (Value at Risk, ризикова вартість) є припущення про нормальний закон розподілу змін так званих „факторів ринкового ризику” – цін первинних „нерозкладних” активів, від яких залежить вартість більш складних інструментів і портфеля в цілому. В якості дохідності ( $r_t$ ) зазвичай приймаються логарифмічні прирости значень цін:

$$r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) \approx N(\mu, \sigma^2).$$

У випадку нормально розподіленої випадкової величини довірчий інтервал  $(1 - \alpha)$  завжди характеризується єдиним параметром – квантилем ( $K_{1-\alpha}$ ). Розглянемо спочатку інвестиційну позицію, що складається лише з одної одиниці якого-небудь активу. Очевидно, що розмір денного прибутку (збитку) при такій одиничній позиції буде дорівнювати зміні ціни цього активу за цей день. В такому випадку найменша очікувана ціна активу на наступний день із заданою ймовірністю  $(1 - \alpha)$  буде дорівнювати:

$$P_{(t+1,1-\alpha)} = P_t \exp(E[r_t] - k_{1-\alpha} \sigma_t).$$

VaR відображає не ціну чи вартість як таку, а її очікувану максимальну зміну за один день:

$$VaR_{(t,1-\alpha)} = P_t [\exp(-k_{1-\alpha} \sigma_t) - 1].$$

На практиці величину  $[\exp(-k_{1-\alpha} \sigma_t) - 1]$  зазвичай замінюють наближеним значенням  $-k_{1-\alpha} \sigma_t$ .

Для окремої позиції, що складається з декількох інструментів, що підлягають єдиному фактору ризику, величину ризикової вартості з часовим горизонтом  $T$  днів і довірчим інтервалом  $(1 - \alpha)$  можна розрахувати за формулою:

$$VaR_{(T,1-\alpha)} = k_{1-\alpha} V \sigma_t \sqrt{T},$$

де  $V$ - поточна вартість позиції (добуток поточної ціни на кількість одиниць активу).

В умовах диверсифікованого портфеля для розрахунку показника VaR коваріаційним методом вартості всіх інструментів, що входять в портфель, повинні бути попередньо представлені у вигляді аналітичних



залежностей від деякого набору факторів ринкового ризику, одноденні логарифмічні зміни яких мають сукупний нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням.

Використавши лінійну апроксимацію членами першого порядку ряду Тейлора приросту вартості портфеля в околі його поточного значення, маємо:

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx (r_1 \partial V / \partial r_1) \Delta r_1 / r_1 + (r_2 \partial V / \partial r_2) \Delta r_2 / r_2 + \dots + (r_n \partial V / \partial r_n) \Delta r_n / r_n; \\ \Delta V / V &\approx [(r_1 / V) (\partial V / \partial r_1)] \Delta r_1 / r_1 + [(r_2 / V) (\partial V / \partial r_2)] \Delta r_2 / r_2 + \dots + \\ &+ [(r_n / V) (\partial V / \partial r_n)] \Delta r_n / r_n. \end{aligned}$$

Вирази в дужках є чутливостями (еластичностями) відносних змін вартості портфелю стосовно зміни факторів ризику.

Отже, дисперсію дохідності портфелю можна оцінити так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta V / V}^2 &\approx w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + \dots + w_n^2 \sigma_n^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2} + \dots + 2w_{n-1} w_n \sigma_{n-1} \sigma_n \rho_{n-1,n} \text{ а} \\ \text{дисперсія абсолютних змін вартості портфеля приблизно дорівнює} \\ \sigma_{\Delta V}^2 &\approx s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2 + \dots + s_n^2 \sigma_n^2 + 2s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2} + \dots + 2s_{n-1} s_n \sigma_{n-1} \sigma_n \rho_{n-1,n} = \\ &= V^2 \sigma_{\Delta V / V}^2 \end{aligned}$$

де  $w_j$  - чутливість дохідності портфеля до малих змін дохідності факторів ризику;  $s_j$  - чутливість абсолютних змін вартості портфеля до малих змін дохідності факторів ризику;  $\sigma_j$  - стандартне відхилення дохідності  $j$ -го фактору ризику;  $\rho_{i,j}$  - коефіцієнт кореляції між дохідностями  $i$ -го і  $j$ -го факторів ризику.

В матричному вигляді формула визначення величини VaR матиме вигляд:

$$VaR = k_{1-\alpha} V \sqrt{W^T \Sigma W} = k_{1-\alpha} \sqrt{S^T \Sigma S},$$

де  $V$  - поточна вартість портфеля;  $W$  - вектор-стовбець чутливостей дохідності портфеля відносно факторів ризику;  $S$  - вектор-стовбець чутливостей абсолютних змін вартості портфеля до дохідностей факторів ризику;  $\Sigma$  - коваріаційна матриця дохідностей факторів ризику, розрахована за деякою вибіркою (періоду спостережень).

Для перевірки адекватності і обчислення мір ризику, таких як VaR, фінансові установи застосовують backtesting. Його суть полягає в порівнянні реальних результатів, отриманих при управлінні портфелем, з ризиком, обчисленим за внутрішньою моделлю. Якщо порівнювані показники досить близькі, то модель, що використовується для обчислення ризиків правильна.



1. Risk, information and insurance. *Henri Louberge*. Kluwer Publishers.
2. Risk and insurance. *Judy Feldman Anderson, Robert I. Brown*, SOA, 2005
3. <http://finrisk.ru/>, <http://riskinfo.ru/>



## МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ ЗА УМОВИ, ЩО ІНТЕНСИВНІСТЬ ВХІДНОГО ПОТОКУ ЗАЛЕЖИТЬ ВІД КІЛЬКОСТІ КЛІЄНТІВ

Бевзюк Анна Георгіївна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Діяльність страхової компанії має динамічний характер. В загальному випадку, характеристики капіталу та кількості клієнтів змінюється в залежності від часу, а інтенсивність вхідного потоку клієнтів залежить від розміру тарифної ставки.

До компанії звертається новий клієнт і страхує своє майно на суму  $U$ , яка є випадковою величиною з щільністю ймовірностей  $p_U(u)$ . Вартість страхового внеску складає  $T(U)U$ , де  $T(U)$  - тарифна ставка. Прибуток компанії від одного клієнта складає  $\xi = TU$ .

Математичне сподівання цієї величини:

$$a = M\{\xi\} = T \int_0^{\infty} up_U(u) du.$$

В разі страхового випадку збитки клієнта складають  $X$ . Ця величина також є випадковою з щільністю ймовірностей  $p_X(x)$ . Вартість страхової виплати складає:

$$\eta = \begin{cases} X, & X < U \\ U, & X \geq U \end{cases}.$$

Математичне сподівання цієї величини виглядає наступним чином:

$$b = M\{\eta\} = \int_0^{\infty} p_U(u) du \left( \int_0^u xp_X(x) dx + u \int_0^{\infty} p_X(x) dx \right).$$

Вважається, що стан страхової компанії характеризується її капіталом  $S(t)$  та кількістю застрахованих клієнтів  $k(t)$ . Перейдемо до розглядання середніх значень капіталу  $\overline{S(t)}$  та кількості клієнтів  $\overline{k(t)}$ .

Розглянемо ймовірності подій, які викликають зміни у стані страхової компанії на інтервалі часу  $[t, t + \Delta t]$ .

1. Компанія страхує новий ризик. Будемо вважати потік ризиків марківським потоком зі змінною інтенсивністю, яка залежить від кількості застрахованих ризиків. Ймовірність страхування нового ризику складає  $(\lambda(T) + \beta k(t))\Delta t + o(\Delta t)$ , де  $\lambda(T)$  - інтенсивність вхідного потоку клієнтів.



2. Термін дії контракту завершується, і один із клієнтів залишає компанію. Будемо вважати, що кожен клієнт залишає компанію незалежно від інших клієнтів з інтенсивністю  $\mu$ . Ймовірність цієї події визначається як  $\overline{\mu k(t)}\Delta t + o(\Delta t)$ .
3. Ймовірність страхового випадку з кожним клієнтом дорівнює  $\mu_1 \overline{k(t)}\Delta t + o(\Delta t)$ .

Таким чином, стан страхової компанії в середньому на проміжку часу  $[t, t + \Delta t]$  можна описати системою двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}}{dt} = a\lambda(T) + a\beta\overline{k(t)} - b\mu_1\overline{k(t)} \\ \frac{d\bar{k}}{dt} = \lambda(T) + \beta\overline{k(t)} - \mu\overline{k(t)} \end{cases}.$$

Отримані результати дозволяють досліджувати зміни основних характеристик діяльності страхової компанії та визначати їх оптимальні значення.

- 
1. Горбенко К.А., Терпугов А.Ф. Визначення оптимальної тарифної ставки в моделі функціонування страхової компанії О.А.Змеева // Теоретична та прикладна інформатика. Томск: Видавництво Томського університету, 2004.
  2. Змеев О.А. Модель функціонування страхової компанії, коли інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості клієнтів // Математичне моделювання. Кібернетика. Інформатика. – Томск: Видавництво Томського університету, 1999.
  3. Ельсгольц Л.Е. Диференціальні рівняння та варіаційне числення. – М.:Наука, 1969.
  4. Калашнікова Т.В. Визначення оптимальної тарифної ставки в майновому страхуванні // Обробка даних і керування в складних системах. Томск: Видавництво Томського університету, 1999.



## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ТРЬОХ ГІЛОК ВЛАДИ

Березовська Інесса Володимирівна  
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича  
Факультет прикладної математики

В роботі [1] побудовано й досліджено математичну модель, яка описує динаміку встановлення рівноваги в системі двох конкуруючих за владу політичних сил (гілок влади).

У даній роботі досліджується модель взаємодії трьох політичних сил, які в умовах конкуренції намагаються досягнути “вимушеної рівноваги” – компромісу. Математична модель набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= f_{11}p_1(p_{11} - p_1) + f_{21}p_2(p_{21} - p_1) + f_{31}p_3(p_{31} - p_1), \\ \frac{dp_2}{dt} &= f_{12}p_1(p_{12} - p_2) + f_{22}p_2(p_{22} - p_2) + f_{32}p_3(p_{32} - p_2), \\ \frac{dp_3}{dt} &= f_{13}p_1(p_{13} - p_3) + f_{23}p_2(p_{23} - p_3) + f_{33}p_3(p_{33} - p_3),\end{aligned}\quad (1)$$

де  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  і  $p_3(t)$  – невід’ємні функції, що описують поточні рівні трьох конкуруючих гілок влади,  $t \geq 0$ ;  $p_{ij} = p_{ij}(t) \geq 0$  – рівень владних повноважень, які партнер  $i$  делегує партнеру  $j$ ,  $i, j=1,2,3$ . Зокрема,  $p_{ii}$  – рівень влади, який  $i$ -й партнер визначає для себе. Величини  $f_{ij} = f_{ij}(t, p_i, p_j) \geq 0$  – коефіцієнти компетентного владолюбства партнерів, які акумулюють досвід, фінансову та медійну підтримку партнерів тощо. Надалі вважатимемо, що  $f_{ij}$  і  $p_{ij}$  – додатні числа. Випадок, двох партнерів, коли функції  $f_{ij} = \alpha_{ij}p_i + \beta_{ij}$ ,  $i, j=1,2$ , розглянутий в [2].

Для заданих коефіцієнтів моделі (1) положення рівноваги в розподілі влади вдається знайти чисельно, розв’язавши алгебраїчне рівняння восьмого степеня. Крім тривіального, в явному вигляді можна виписати розв’язки у випадку “рівних партнерів”, тобто коли

$$\begin{aligned}p_{11} &= p_{22} = p_{33}, \quad p_{21} = p_{12} = p_{13} = p_{31} = p_{23} = p_{32}, \\ f_{11} &= f_{22} = f_{33}, \quad f_{21} = f_{12} = f_{13} = f_{31} = f_{23} = f_{32}.\end{aligned}$$

В цьому випадку система (1) має положення рівноваги, яке лежить на діагоналі „владного куба”  $[p_{11}, p_{12}]^3$  і має координати:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{f_{11}p_{11} + 2f_{12}p_{12}}{f_{11} + 2f_{12}}. \quad (2)$$

Система (1) може мати ще сім положень рівноваги, умови асимптотичної стійкості яких знаходяться із умови від’ємності власних значень матриці Якобі  $A=(a_{ij})$ , складеної для правої частини системи (1) й



обчисленої для відповідного положення рівноваги. З формул Вієта одержимо умови  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ :

$$\begin{aligned} a_{11} a_{22} a_{33} < 0, \quad \det A < 0, \\ a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} + a_{31} a_{13} + a_{21} a_{12} + a_{32} a_{23} > 0. \end{aligned}$$

Математична модель (1) взаємодії трьох гілок влади досліджена для загальнішого випадку, коли тільки два партнери „рівні” та одержано умови асимптотичної стійкості положень рівноваги. Проведено числове моделювання у випадку рівних трьох і двох рівних партнерів та типового розподілу владних повноважень.

Наприклад, при таких значеннях коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} p_{11} = 2.1 \quad p_{21} = 1 \quad p_{31} = 1.2 \quad f_{11} = 12/5 \quad f_{21} = 5/4 \quad f_{31} = 1/4 \\ p_{22} = 2 \quad p_{32} = 1.1 \quad p_{12} = 1.5 \quad f_{22} = 1/2 \quad f_{32} = 1/4 \quad f_{12} = 2/7 \\ p_{33} = 2.2 \quad p_{13} = 1 \quad p_{23} = 0.0 \quad f_{33} = 1/2 \quad f_{13} = 1/14 \quad f_{11} = 1/4 \end{aligned}$$

отримано асимптотично стійке положення рівноваги (1.680, 1.839, 1.042).

А у випадку „рівних партнерів”:

$$\begin{aligned} p_{11} = 4 \quad p_{21} = 2 \quad f_{11} = 1 \quad f_{21} = 1/2 \\ p_{22} = 4 \quad p_{32} = 2 \quad f_{22} = 1 \quad f_{32} = 1/2 \\ p_{33} = 4 \quad p_{13} = 2 \quad f_{33} = 1 \quad f_{13} = 1/2 \end{aligned}$$

положення рівноваги (3,3,3) – асимптотично стійке.

- 
1. Михайлов А.П., Южно Д.Ф. Простейшая модель установления равновесия между двумя ветвями власти // Математическое моделирование. – 2001. – Т.13, №1. – С. 65-76.
  2. Бигун Я.И., Снижко Н.В. Математическая модель установления равновесия между двумя ветвями власти // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – №1. – Запоріжжя, 2005. – С.7 – 13.



## ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМНОЇ МОДЕЛІ ДВОХСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ

Бліщ Михайло Васильович  
НУ “Львівська політехніка”

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук

В умовах розвитку сучасної ринкової економіки все більш помітним стає вплив енергетичного фактору, ціни на який зростають дедалі динамічніше. В традиційних економічних моделях не враховується вплив ціни на імпортовану енергію, тому актуальними стають моделі ринкової економіки, які враховують залежність від цін на енергосировину.

Для всебічного опису економіки використовуються системні моделі, які враховують баланси усіх галузей економіки. У моделі, яка описана в [1], виділяється виробництво, держава, населення, банківська система. У виробництві виділяються два сектори. В першому секторі виробляється кінцевий продукт, а в другому – енергія, необхідна для виробництва кінцевого продукту. Крім енергії, виробництво продукту першого сектора вимагає витрат робочої сили. Енергетичний сектор відносно нетрудомісткий, тому витрати робочої сили в ньому не враховуються і покладається, що для виробництва енергії необхідна лише енергетична сировина. Для простоти не описується галузь, що добуває енергетичну сировину; просто вважається, що вона імпортується ззовні в потрібній кількості за заданими цінами. Зауважимо, що це типова ситуація для України.

Після складання системи рівнянь балансів (отримано 13 рівнянь для 13 невідомих) та використання припущень, за яких банківська та виробнича системи стають ізольованими, моїм науковим керівником Гайдучок О.В. отримано систему диференціально-функціональних рівнянь для потужностей секторів та капіталу та цін та для заробітної плати. Система враховує вплив наступних параметрів:

- ціни на електроенергію
- темп списання виробничого устаткування
- норми банківського резервування
- величини нарахування відсотків на кредити
- споживання енергії працівниками на одиницю продукту 1-го сектору.
- темп вибуття потужності внаслідок зношення основних фондів
- темп зростання пропозиції робочої сили
- частку експорту у випущеній продукції

Якщо задано початковий стан економіки (в деякий момент часу  $t=0$ ), то можна обчислити основні макроекономічні показники: функції - розв'язки системи.



Метою даної роботи є чисельне розв'язування системи рівнянь балансів та прогнозування розвитку економіки на основі отриманих результатів. Для виконання поставленого завдання на мові програмування Delphi було створено програму, яка за вказаного значення вищенаведених параметрів обчислює динаміку змін основного капіталу, виробничих потужностей та заробітної плати в залежності від ціни імпортованої енергосировини.

- 
1. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996. – 554 с.
  2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Т.1. - М.: Наука. 1973. 631 с.
  3. *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* Численные методы. М., Наука, 1989

**КОМП'ЮТЕРНА ВІРУСОЛОГІЯ І ПРОБЛЕМИ ЗАХИСТУ**

Брагін Євгеній Вікторович, Україна  
Київський Національний Економічний Університет  
Факультет Інформаційних Систем і Технологій

На сьогоднішній день питання безпеки інформаційно-обчислювальних мереж стоїть досить гостро.

До числа основних механізмів захисту інформації в інформаційно-обчислювальних мережах відносяться: 1) ідентифікація (іменування і впізнання), аутентифікація (підтвердження дійсності) і авторизація (присвоєння повноважень) суб'єктів; 2) контроль (розмежування) доступу до ресурсів системи; 3) реєстрація та аналіз подій, що відбуваються в системі; 4) контроль цілісності ресурсів системи.

Найважливішими методами захисту інформації, які використовуються в інформаційно-обчислювальних мережах є:

- криптографія (потайне написання);
- технічні засоби захисту інформації (пристрої пошуку та знищення технічних засобів розвідки, пасивні засоби захисту приміщень і апаратури, технічні засоби криптографічного захисту інформації, спеціальні технічні засоби впізнання користувачів ПК, блоки безперебійного живлення);

- захист інформації в інформаційно-обчислювальних мережах (обмеження доступу до інформації, контроль доступу до апаратури, розмежування і контроль доступу до інформації, поділ привілеїв на доступ, ідентифікація і аутентифікація суб'єкта, установлення дійсності технічних засобів, установлення дійсності документів, захист інформації від витоку за рахунок побічного електромагнітного випромінювання, захист інформації від випадкових впливів, захист інформації від аварійних ситуацій).

Розповсюдженим методом захисту є криптографічний. Криптографічні методи захисту інформації – це спеціальні методи шифрування, кодування або іншого перетворення інформації, в результаті чого її зміст стає недоступним без пред'явлення ключа криптограми й зворотного перетворення. Криптографічний метод захисту, безумовно, самий надійний метод захисту, тому що охороняється безпосередньо сама інформація, а не доступ до неї. Даний метод захисту реалізується у вигляді програм, що розширюють можливості стандартної операційної системи. Захист на рівні операційної системи, найчастіше, повинен доповнюватися засобами захисту на рівні систем керування базами даних, які дозволяють реалізовувати складні процедури керування доступом. Криптографічне шифрування може бути досягнуто двома зовсім різними шляхами: за допомогою шифрів та за допомогою кодів. Розходження між



ними наступне: шифр завжди визначає символи підстановки для деякого заданого набору букв алфавіту. За допомогою коду можна виразити тільки те, що було обдумано заздалегідь і передбачене для передачі у вигляді секретного списку, такого, наприклад, як кодова книга.

Однак необхідно пам'ятати про один дуже важливий фактор захисту інформації – людину. Недотримання правил безпеки листування, листування мереженої безпеки недбале відношення до зберігання паролів та кодів доступу може завести нанівець використання найостанніших досягнень в галузі захисту інформації. У ПК і обчислювальних мережах зосереджується інформація, виняткове право користування якою належить визначеним особам чи групам осіб, які діють в порядку особистої ініціативи чи відповідно до посадових обов'язків. На сьогодні існують методи захисту, які дозволяють достатньо надійно захищати інформацію, але рух в напрямку створення ще більш надійних методів не припиняється

На сьогодні масове застосування персональних комп'ютерів виявилось пов'язаним з появою програм-вірусів, які перешкоджають нормальній роботі комп'ютера, руйнують файлову структуру дисків і інформацію, збережену в комп'ютері. Але найбільша небезпека складається в можливості змінення або знищення життєво-важливий інформації, що може призвести не тільки до фінансових і тимчасових втрат, але і викликати людські жертви.

Незважаючи на прийняті в багатьох країнах закони про боротьбу з комп'ютерними злочинами і розробку спеціальних програмних засобів захисту від вірусів, кількість нових програмних вірусів постійно росте. Це потребує від користувача персонального комп'ютера знань про природу вірусів, способах зараження вірусами і захисту від них.

На Україні найбільш розповсюдженими антивірусними програмами є Антивірус Касперського, NOD 32 та Антивірусна програма Doctor Web. Щодо першої, то вона дозволяє лікувати файли в архівах найпоширеніших форматів. Крім того, спеціалісти лабораторії пропонують користувачам визначений варіант настроювання програми, при якому антивірус працює ефективно і не завантажує систему. Функція відновлення в Касперського на самому високому рівні.

Останні удосконалення спеціалістів щодо Антивірусу Doctor Web дозволили практично не завантажувати систему при його роботі, у всякому разі, це не відчувається. Націлений зазначений антивірус на вітчизняного користувача. Зокрема, у нього більш доступна ціна у порівнянні з антивірусом Касперського.

Нормативно-законодавче регулювання засобів захисту інформації в Україні керується перш за все згідно ст. 4 Закону України «Про підприємництво», «діяльність, пов'язана з розробкою, виготовленням, ввозом, вивозом, реалізацією й використанням засобів криптографічного



й технічного захисту інформації, а також з наданням послуг по криптографічному й технічному захисті інформації» не може здійснюватися без ліцензії. Таким чином, за змістом зазначеного закону, наявність ліцензії потрібно не тільки для реалізації засобів криптографічного захисту, а також і для використання засобів криптографічного захисту в підприємницькій діяльності.

- 
1. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996. – 554 с.
  2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Т.1. - М.: Наука. 1973. 631 с.
  3. *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* Численные методы. М., Наука, 1989

**ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДУ ТИПУ РУНГЕ ДЛЯ  
ГЕНЕРАЦІЇ НЕЯВНО ЗАДАНИХ КРИВИХ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ**

Васильєв О.М. Україна

Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Розроблено інтервальний метод уточнення розв'язку типу Рунге для задачі апроксимації форми неявно заданої кривої. У залежності від заданої аналітично неявно заданої функції  $F(x, y) = 1$  та векторного інтервалу розмірності два, на екрані монітора активізуються точки, які належать даній функції і лежать у заданому інтервалі.

Основу алгоритму апроксимації форми кривої складають наступні кроки [1]:

- знаходження допустимої області;
- тест на глобальну параметризацію;
- знаходження межових перетинів;
- уточнення розв'язку.

На першому кроці заданий вхідний інтервал алгоритм поділяє на множину інтервалів, які обмежують задану криву і задовольняють функцію включення для допустимого розв'язку. На другому кроці, алгоритм знаходить підмножину інтервалів, які не містять точок перегину. Третій крок характеризується знаходженням перетинів неявно заданої кривої з межами кожного інтервалу. На етапі уточнення координат точок на перетинах застосовується інтервальний метод типу Рунге.

Запропоновані інтервальні методи показали високу точність в обчислювальних дослідженнях. Перевагами використаних інтервальних методів є досить висока швидкість апроксимації, і навіть, виконуючи уточнення, даний алгоритм значно випереджає в швидкодії прямий метод [2].

Для цього на кожному межовому перетині, ми уточнюємо розв'язок за допомогою наступної ітераційної формули.

$$X^{(k+1)} = \left\{ m(X^k) - \frac{f(m(X^k))}{M} \right\} \cap X^k, k \geq 0,$$

$$\text{де } M \in \frac{1}{4} f'(m(X^{(k)})) + \frac{3}{4} f' \left( m(X^{(k)}) + \frac{2}{3} (X^{(k)} - m(X^{(k)})) \right), \quad m(X^k) \in X^k.$$

Особливістю алгоритму є те, що у ньому враховано використання як звичайних так і розширених інтервальних операцій для роботи з нескінченними інтервалами.

Розглянемо приклад неявної функції:



$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(6y) + \cos(6x) + \sin(6y^2) \cos(6y^2) = 1$$

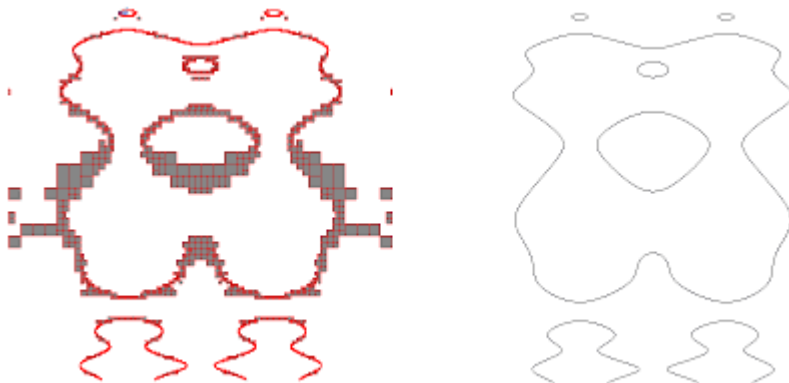


Рис. 1

На рис. 1 зліва показано інтервали, отримані у результаті глобальної параметризації, які лише наближено показують графік, а справа - розв'язок, уточнений методом типу Рунге, який фактично не відрізняється від точного.

Перевагами даного методу, у порівнянні з інтервальним методом Ньютона, є вищий порядок збіжності, швидке відкидання інтервалів, у яких крива невизначена. Для методу типу Рунге загальна кількість інтервальних обчислень не є вищою, ніж у подібних йому методах, таких як інтервальний метод Ньютона, метод поділу відрізка навпіл та інших.

1. Васильєв О., Венгерський П. Застосування інтервальних обчислень для генерації неявно заданих кривих у комп'ютерній графіці. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. (у друці).
2. Васильєв О. Застосування інтервальних обчислень для генерації неявно заданих кривих у комп'ютерній графіці. // IX всеукр. студ. наук. конф. / Тези доповідей. – Львів, 2006. – С. 23.
3. Калмыков С.А., Шокин Ю. И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.
4. Snyder John M. Interval Analysis for Computer Graphics // Computer Graphics. 1992. - 26, № 2. - P. 121-129



## АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ НЕРІВНОВАЖНИХ ПРОЦЕСІВ ДРІБЛЕННЯ РІДИНИ

Волобоєва Вікторія Вікторівна, Україна  
Одеська державна академія холоду  
Факультет інформаційних технологій

Ціллю створення системи «Аналіз та моделювання нерівноважних процесів дріблення рідини» є розробка нового програмного забезпечення для прогнозування поведінки крапель рідини при зіткненні, а також отримання більш широкого діапазону параметрів процесу, що не було досягнуто шляхом досвіду.

Цікавість до розглядаємої проблеми визначається насущними вимогами теплофізики дисперсних серед, зокрема, важливими для промислової теплотехніки та хімічної технології, питаннями тепломасообміну між двухфазними течіями та дотичними з ними поверхнями. Також коагуляційні процеси грають важливу роль в механізмі дощування хмар, оскільки цей механізм збільшення крапель є достатньо ефективним для того, щоб визвати випадіння дощу.

В результаті зіткнення крапель, може статися повне або часткове злиття, або відскік. Для виникнення контакту між краплями, необхідно щоб повітряний прошарок зменшився до критичної товщини. Тобто, якщо  $d_{\min} > d_{\text{ед}}$ , то станеться відскік малої краплі. Повне злиття станеться, якщо виконується нерівність:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\rho \cdot r_1 \cdot V^2}{\sigma} \cdot \cos^2 \alpha < 1,$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $r_1$  – радіус краплі,  $V$  – швидкість руху краплі,  $\sigma$  – поверхнєве натягнення,  $\alpha$  – кут зіткнення крапель.

Система дозволяє розглядати як окремий процес, так і працювати з великою кількістю даних. Після обробки вхідної інформації, розраховуються параметри процесу, робиться висновок відносно результату зіткнення, а також є можливим розглянути графіки залежності радіусів відлітаючої та налітаючої крапель, швидкостей руху крапель до зіткнення та після, та інші. Порівнюючи результати роботи системи з досвідними, можна зробити висновок що до адекватності моделі.

У зв'язку зі специфічністю та недостатньою вивченністю розглядаємої проблеми, програма не має явних аналогів. Але ж у порівнянні з системами схожого спрямування, вона має такі позитивні сторони:

- легкість використання, дружній інтерфейс;
- представлення даних у вигляді графіків



- візуалізація процесів – видео-роліки, створені за допомогою системи 3DS Max 7.
- довідкова система, окрім допоміжних відомостей відносно використання системи, містить інформацію що до сутності, параметрів і основних моментів розглядаємої проблеми.

Таким чином, структура параметрів, які характеризують процес зіткнення крапель, визначається не тільки значеннями цих параметрів, але й взаємодією між ними, що робить кожен випадок зіткнення унікальним, та дозволяє знайти тонку межу переходу між процесами.

Результати роботи програми мають важливе значення, адже вивчення процесу зіткнення крапель рідини вимагає використання спеціального, складного обладнання. Крім того, програма дозволяє значно розширити діапазон значень параметрів процесу.

- 
1. *Jayaretne O.W., Mason B.D.* The coalescence and bouncing of water drops at air/water face. – Proc.Roy.Soc. 1964, v.A280, 545-565.
  2. *Аганин М.А.* Влияние примесей к воде и атмосфере на процесс слияния капель. Изв. АН СССР, сер. Геогр.геофиз., 1940, 3, 305-334.
  3. *Аганин М.А.* Законы слияния капель воды. – Ж. Геофизика, 1935, т.5, №4, 409-443.
  4. *Архангельский А. Я.* Программирование в Delphi 5 - 2-е изд., переработано и доп. - М.: ЗАО "Издательство БИНОМ", 2000 г. - 1072с.:ил.
  5. *Верстак В. А.* 3ds Max 8. Секреты мастерства (+CD). — СПб.: Питер, 2006. — 672 с : ил.
  6. *Н. Культин.* «Delphi. Программирование на Object Pascal» - издательство «БВХ-Петербург», 2001.
  7. *Матосян М.* 3ds max 6 для Windows: Пер. с англ. - М.: ДМК Пресс, 2004. - 624 с.: ил.
  8. Практическое руководство по программированию. Пер. с англ. Б. Мик, П. Хит, Н. Рабши и др.; под ред. Б. Мика, П. Хит, Н. Рабши. - М.: Радио связь, 2002. - 168 с.: ил.
  9. *Соловьёв А.Д.* Слияние капель при соударении. – Труды ЦЛО, 1969, вып.89, 3-25.
  10. *М.М. Соловьёв.* 3DS MAX 6. Мир трехмерной графики. - М.: СОЛОН-Пресс, 2004. - 504 с.: ил.

**РОЗРОБКА САПР МЕХАНОСКЛАДАЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА**

Гаврушко Олена Ігорівна, Україна  
Одеська державна академія холоду  
Факультет інформаційних технологій

Складання - завершальний і визначаючий етап виробничого процесу в машинобудуванні. Від неї багато в чому залежать якість готових машин і їх випуск в планові терміни. Трудомісткість складання сягає 20-30 % загальної трудомісткості виготовлення виробів. Основні напрями розвитку технології складального виробництва: його інтенсифікація, механізація і автоматизація.

Багато розробників програмних продуктів створили базові програмні комплекси для реалізації автоматизованого управління технологічною підготовкою виробництва - так звані процесори технологічної підготовки. Розроблена в дипломній роботі "САПР складання" система функціонує на базі КСАПР «PROject». Основною задачею роботи є: розробка методики і інформаційного забезпечення автоматизованої розробки технологічних процесів виготовлення механоскладальних одиниць (методи роз'ємного складання) і технічного нормування в забезпеченні формування технологічних комплектів.

Процес проектування технологічних процесів складання і їх документування відрізняються від проектування технології обробки різанням. У технології обробки різанням виріб на основі відомих способів обробки приймає безліч проміжних станів від заготовки до готової деталі.

Складання - це процес, при якому здійснюється з'єднання окремих деталей, складальних одиниць з використанням додаткових матеріалів на основі методів і засобів, що забезпечують процес складання. Специфікація складальної одиниці, в якій перераховані всі складові частини, може бути одержана із специфікацій, прикладених до складальних креслень виробу. Для процесу опису операцій існує спеціальна кодувальна карта, форма якої дозволяє скоротити об'єм інформації, заповнюваної проектувальником.

Процес формування технологічних карт складання можна підрозділити на наступні задачі: визначення деталей і складальних одиниць, що підлягають складанню; визначення послідовності складання; формування робочих місць складання; формування допоміжних засобів складання; калькуляція витрат.

Для автоматизації технологічного проектування процесів складання було розроблене програмне забезпечення, що дозволяє формувати карти складання для дрібно- і середньосерійного виробництва. Ця система базується на точному описі задач складання, необхідних функцій складання і умов складання. На основі цих даних формуються параметри



процесу складання з урахуванням логіки проектування і накопиченої інформації.

Вхідною інформацією є опис об'єкту, який підлягає складанню. При цьому встановлюються форма і габарити об'єкту в цілому. Визначення складових деталей, що підлягають складанню, є ключовим моментом, який відображений в специфікаціях на складальну одиницю, по яких вибирається відповідна інформація. Окрім цього, задаються умови виробництва: число деталей, організаційні дані. Вивчення збираемого виробу завершується складанням технологічних схем загального і вузлового складання. Ці схеми, будучи по суті першим етапом розробки технологічного процесу, в наочній графічній формі відображають структуру і послідовність (маршрут) складання виробу і його складових частин. Цей етап відбувається в діалоговому режимі, дозволяючи технологу вирішувати задачі творчого, евристичного змісту.

Решта етапів проектування відбуваються в автоматичному режимі, закінчуючи виведенням технологічної документації. Автоматичне проектування засноване на базі знань, що містить близько ста різних таблиць, які містять правила і довідкові дані.

1. В ході проектування були вирішені наступні задачі:
2. Розроблена мова опису збірки.
3. Розроблений інтерфейс введення опису складання, включаючи автоматизоване (діалогове) проектування конструкторсько-технологічної схеми складального ТП, з використанням графічних конструкторських систем для КТС складального ТП.
4. Допрацьований існуючий алгоритм автоматизованого проектування. Розроблений модуль автоматизованого проектування змісту складальної операції.
5. Заповнена база знань технологічного проектування складання.
6. Розроблені модулі автоматизованого формування вихідної документації на основі вже існуючих документів.

- 
1. Руководство пользователя КСАПР «PROject». Одесса, 2006
  2. Автоматизация проектирования технологических процессов машиностроения. Под общ ред. *Н.М.Капустина*. – М.: Машиностроение, 1985
  3. Проектирование технологии. Под общ. ред. *Ю.М.Соломенцева* – М.Машиностроение, 1990.



## ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ «ХИЖАК-ЖЕРТВА»

Голюк Роман Олександрович, Україна  
Волинський державний університет ім. Лесі Українки  
Математичний факультет

Розглянемо екологічну систему, що складається лише з двох видів: хижака та жертви. При чому популяція жертви залежить лише від кількості хижаків. Математична модель в загальному випадку для даної проблеми матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = F(N_1, N_2, t) \\ \frac{dN_2}{dt} = G(N_1, N_2, t) \end{cases} \quad (1)$$

де  $N_1$   $N_2$  – відповідно кількість жертв та хижаків,  $t$  – момент часу,  $F$  та  $G$  – деякі неперервні функції.

Систему диференціальних рівнянь (1) розв'яжемо методом Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$\begin{aligned} F_i &:= F_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ G_i &:= G_{i-1} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4); \end{aligned} \quad (2)$$

де коефіцієнти  $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, l_4$  рівні:

$$k_1 := h \cdot F(x_i, y_i, z_i);$$

$$l_1 := h \cdot G(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2 := h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right);$$

$$l_2 := h \cdot G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right);$$

$$k_3 := h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right);$$

$$l_3 := h \cdot G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right);$$

$$k_4 := h \cdot F(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3);$$

$$l_4 := h \cdot G(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3).$$

Наведені функціональні залежності проблеми було покладено в основу розробки відповідної інформаційної моделі з елементами візуалізації.



В процесі дослідження було спроектовано та створено програмний продукт Oasis, який дозволяє отримати розв'язок системи «хижак-жертва» в довільний момент часу, і разом з тим спостерігати його імітаційне зображення.

До переваг створеної системи можна віднести:

- введення вхідних функцій F та G в аналітичному вигляді, що дозволяє розв'язувати будь-які системи «хижак-жертва»;
- візуалізація процесу моделювання, що дозволяє використовувати даний програмний продукт в навчальних цілях;
- збереження вихідних даних у форматах MS Excel \*.xls, MS Word \*.doc, що дозволяє використовувати результати дослідження в потужних системах редагування текстової інформації;
- можливість побудови графіків та діаграм зміни кількості хижаків та жертв з часом.

Створена система може використовуватися, в першу чергу, при вивченні відповідних тем в школі та вищому навчальному закладі, а також при дослідженні реальних моделей екологічних систем типу «хижак-жертва».

---



## ОЦІНКА ІНФОРМАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ АНАЛІЗІ ЗОБРАЖЕНЬ

Гороховатський Олексій Володимирович, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Інтегральні перетворення Радона і Хафа, а також перетворення Фур'є часто застосовують у задачах обробки та аналізу зображень [1-3]. Останнього часу вони все частіше застосовуються при побудові множини ознак, що використовуються для інваріантного розпізнавання або оцінки параметрів геометричних перетворень об'єктів [1]. Безсумнівними перевагами інтегральних перетворень при вирішенні таких задач є достатньо висока завадостійкість, хороший рівень швидкодії, інваріантність до деяких геометричних перетворень, здатність до виявлення специфічних властивостей зображень об'єктів [2].

Метою дослідження є оцінка властивостей інформативності ознак, що побудовані на основі перетворень, у залежності від виду зображень, що розпізнаються, для того, щоб виокремити напрямки застосування таких перетворень.

У теорії інформації для оцінки властивостей просторів ознак застосовується термін «ентропія», що характеризує середню невизначеність джерела інформації, або еквівалент корисної інформації, і являє собою кількість інформації відносно одиниці повідомлення, що передається [3].

Ентропія обчислюється за формулою:

$$H = -\sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i)$$

де  $p(i)$  - ймовірності значень,  $n$  - кількість можливих значень зображення чи ознаки. Чим більше значення має ентропія, тим більшим вважається різноманіття значень ознак, і, відповідно, більша ефективність використання такої системи ознак. На практиці ентропія обчислюється на базі побудови гістограми сформованих значень ознак.

Оскільки обчислення базуються на основі гістограми, ентропія вихідного зображення має властивість інваріантності (з урахуванням похибки дискретизації) до поворотів, зсувів та до інвертування яскравості. Зауважимо, що значення ентропії суттєвим чином залежить від кількості рівнів дискретизації значень сигналів, отриманих в результаті інтегрального перетворення.



Як показали дослідження, значення результуючої ентропії після перетворення Фур'є інваріантні до зсувів, до інвертування яскравості, до



обернень на кути, кратні 90 градусам. Експерименти вказують також на високі значення ентропії Фур'є для класичних геометричних об'єктів (прямокутники, трикутники) у порівнянні з об'єктами хаотичної форми.

Ентропії Радона і Хафа у порівнянні з ентропією Фур'є більш чутливо реагують на зображення прямих ліній. Значення ентропії Радона і Хафа більші, ніж величини ентропії Фур'є і вихідного зображення при роботі із складними візуальними об'єктами (зображення підписів, відбитків пальців, т. ін.). Крім того, на відміну від перетворення Фур'є, ентропія Радона і Хафа менш чутлива, наприклад, до розбиття візуального об'єкта на частини. Відмітимо також, що застосування вказаних перетворень до текстурних напівтонових зображень дещо знижує показник вихідної ентропії (до 10 раз). У таблиці наведено приклади бінарних зображень і відповідні значення ентропії.

Таблиця – Приклади зображень та значення ентропії перетворень

Зображення	Ентропія зображення	Ентропія Радона	Ентропія Фур'є	Ентропія Хафа
	0,6794	1,1962	0,0850	0,8135
	0,2266	1,2145	0,1680	0,6605

Можна зробити висновок, що застосування перетворення Радона більш виправдано для аналізу складних бінарних зображень, оскільки воно призводить до суттєво більшої величини інформативності, ніж перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є з точки зору інформативності є більш прийнятним при аналізі об'єктів класичної форми.

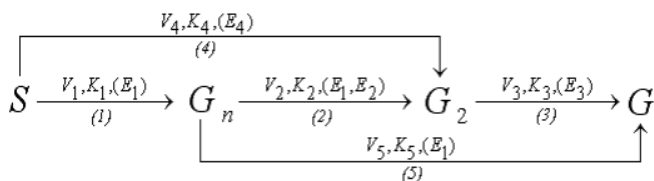
1. *Путятин Е.П., Гороховатский А.В.* Построение инвариантных моментных признаков изображений с использованием одномерных проекций // Вестник НТУ «ХПИ».- Харьков, 2006. -№39 , С.125-132.
2. *Трипольська В.В.* Класифікація підписів на основі інваріантних моментів простору ознак перетворення Радона // Прикладная геометрия и компьютерная графика, 2002, №71, С. 235-239.
3. *Шапиро Л., Стокман Дж.* Компьютерное зрение. – М: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОЛІФЕРМЕНТНОГО  
ГІДРОЛІЗУ НЕРОЗЧИННОЇ ЦЕЛЮЛОЗИ**

Граб Тетяна Іванівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Хімічні процеси у харчовій промисловості мають важливе значення. Вони відбуваються при очищенні соків, освітленні цукрових сиропів, фруктових соків та вина, гідрогенізації жирів, рафінуванні рослинної олії, гідролізі крохмалів тощо[2]. Особливе місце також займає поліферментний гідроліз нерозчинної целюлози. Отримання розв'язку задач оптимізації та управління є неможливим без детального вивчення кінетики процесу та створення на даній основі його математичної моделі, яка дозволяє передбачати хід гідролізу у будь-який момент часу реакції.

Кінетичну схему дії целюлолітичних ферментів на целюлозу можна зобразити у наступному спрощеному вигляді [4,5]:



Тут  $V_i$  і  $K_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) — максимальні швидкості і константи Міхаеліса на окремих стадіях ферментативного гідролізу.

Індекси на схемі відповідають таким діям:

1. глюканази ( $E_1$ ) на целюлозу ( $S$ ) з утворенням целоолігосахаридів ( $G_n$ );
2. целобіогідролази ( $E_2$ ) на олігосахариди з утворенням целобіози ( $G_2$ );
3. целобіази ( $E_3$ ) на целобіозу з утворенням кінцевого продукту, глюкози ( $G$ );
4. екзоглюкогідролази ( $E_4$ ) на олігосахариди з утворенням глюкози;
5. ендоглюканази безпосередньо на вхідну целюлозу з утворенням целобіози.

Математична модель має вигляд:



$$\begin{aligned} \frac{d[S]}{dt} &= -\frac{V_1[S]}{K_1 + [S]} - \frac{V_5[S]}{K_5 + [S]} \\ \frac{d[G_n]}{dt} &= \frac{V_1[S]}{K_1 + [S]} - \frac{V_2[G_n]}{K_2 + [G_n]} - \frac{V_4[G_n]}{K_4 + [G_n]} \\ \frac{d[G_n]}{dt} &= \frac{V_2[G_n]}{K_2 + [G_n]} + \frac{V_5[S]}{K_5 + [S]} - \frac{V_3[G_2]}{K_3 + [G_2]} \\ \frac{d[G_2]}{dt} &= \frac{V_3[G_2]}{K_3 + [G_2]} + \frac{V_4[G_n]}{K_4 + [G_n]} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Початкові умови: } [S] := [S]_0, [G_n] := 0, [G_2] := 0, [G] := 0. \quad (2)$$

В роботі побудовано кінетичні криві зміни концентрацій компонент реакції з часом для різної початкової концентрації целюлози аналітичним методом та шляхом чисельного інтегрування за алгоритмом “предиктор-коректор” із використанням двох методів четвертого порядку: Рунге-Кутта (прогноз) і Гіра (корекція) [3]. Здійснено лінеаризацію системи рівнянь (1) і досліджено вплив нелінійності на вихід продукту реакції. Визначено момент часу максимального насичення розчину цукрами. Знайдений розв’язок задачі Коші (1)-(2) досліджено з точки зору його оптимальності. Проведено якісний аналіз математичної моделі та побудовано границі області стійкості у просторі параметрів за допомогою методу D-розбиттів [1].

1. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования двигателей. Уравнения движения и устойчивость.— М.: Государст. из-во технико-теоретической лит-ры, 1952.—524с.
2. Алексеева І.В., Зінкевич О.П., Клименко Р.К., Михайленко Т.Т., Недашківська О.Д. Математичне моделювання процесів ферментативного гідролізу // Математичні машини і системи.— 2003, № 3,4.
3. Іванків К.С., Щербатий М. В. Математичне моделювання біологічних та еколого-економічних процесів. — Л: ЛНУ ім. І.Франка —2005.
4. Клесов А. А., Григораш С. Ю., Громов А. И. Математическое моделирование кинетики полиферментного гидролиза нерастворимой целлюлозы. // Прикладная биохимия и микробиология.— 1986, Т.22. Вып. 5.
5. Сеницын А. П., Гусаков А. В., Черноглазов В. М. Биоконверсия лигноцеллюлозных материалов: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1995. — 224с.

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВОДЖЕННЯ ГНУЧКИХ ОБОЛОНОК,  
ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА ОБТИСК, В ОКОЛІ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ**

Григоренко Наталія Вадимівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Дослідження напружено-деформованого стану оболонок, які перебувають під дією силових навантажень, має важливе значення для прикладних застосувань, оскільки багато конструкцій містять оболонки як складові елементи. Такі задачі виникають при проектуванні аерокосмічної техніки, в суднобудуванні, машинобудуванні тощо.

Для вивчення поведінки оболонки в околі стійкої рівноваги в роботі використовується методика чисельного дослідження гнучких оболонок з використанням методу скінченних елементів та з врахуванням співвідношень нелінійної теорії пружності, що базується на шестимодальному варіанті теорії тонких оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю. Особливість даної моделі полягає у напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка-Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Результуючі співвідношення моделі містять, як невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень, зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі.

В даній роботі розглядається задача по знаходженню критичного навантаження, при якому оболонка зі стану рівноваги переходить в суміжний стан. За допомогою варіаційного методу із співвідношень нелінійної теорії пружності отримується рівняння стійкості оболонки, яке зводиться до задачі на власні значення. Розв'язком цієї задачі є критичний параметр навантаження, при якому оболонка втрачає стан рівноваги, а відповідними власними векторами – деформації вузлів в початковому післякритичному стані.

Сформульована задача реалізована у вигляді програмного комплексу. Приклади розв'язування низки практичних задач ілюструють ефективність запропонованої методики.

1. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок // Доп. НАН України Сер. Математика, природознавство, технічні науки. – 1999. – № 6. – С. 54-59.
2. Вагін П.П., Шот І.Я. Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. – С. 135-147.



3. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.



## ІНСТРУМЕНТАЛЬНЕ СЕРЕДОВИЩЕ ДЛЯ РОЗРОБКИ ВЕБ-САЙТІВ ТА НАВЧАЛЬНИХ ЕЛЕКТРОННИХ КУРСІВ

Грубій Андрій Михайлович, Україна  
Волинський державний університет ім. Лесі Українки  
Математичний факультет

Велику частину сучасного ринку програмного забезпечення займають продукти, орієнтовані на спрощення та автоматизацію роботи не лише звичайних користувачів персональних комп'ютерів а й професійних програмістів. Переваги таких засобів очевидні: від зменшення часу який потрібно затратити на виконання роботи до зменшення вимог стосовно знань в певній галузі.

Найрозповсюдженішою з послуг мережі Internet є WWW – це частина Internet, що становить величезний набір документів збережених на комп'ютерах по всьому світу. Кожен такий документ представляється у вигляді Web-сторінки, яка може містити інформацію різного роду: малюнки, текст, відео та ін. Основним засобом розробки Web сторінок є HTML – мова гіпертекстової розмітки. Крім того, все більшою популярністю користуються сьогодні дистанційні курси, які головним чином також створюються у вигляді Web-документів. Саме на роботу з HTML орієнтуються програмні засоби для створення Web сайтів[2]. Такі програми можна поділити на дві групи :

- редактори коду ;
- візуальні редактори (WYSIWYG-редактори);

Найкращу ефективність повинні мати програмні засоби, які інтегрують в собі обидва підходи: візуальне проектування та редагування коду. Саме це припущення лягло в основу розробленого середовища «URSA».

На сьогодні практично неможливо при розробці сайту обійтися лише мовою HTML, яка дозволяє створювати лише статичні сторінки. Тому в системі передбачена можливість створення JAVA-скриптів та CSS-сторінок. Це дозволяє додати інтерактивні елементи.

Конструктивно система «URSA» реалізована у вигляді модулів:

- модуля орієнтованого на HTML (також java-скрипти та CSS-сторінки);
- модуля для роботи з XML;
- WML модуля;

При роботі з HTML-модулем робочу область умовно можна поділити на: область редактора та область допоміжних інструментів. До останніх відносяться : панелі інструментів, інспектор тегів, вікно перегляду та візуального редагування. Редактор коду підтримує підсвічування синтаксису, нежорстку перевірку правильності HTML конструкцій,



автозаміщення, створення закладок, вставку основних HTML конструкцій та їх налаштування за допомогою панелей інструментів. Також реалізована функція швидкої вставки тегів та їх атрибутів за допомогою випадаючого списку в вікні редактора.

Середовище «URSA» надає можливість створювати не лише звичайні сайти, а й сайти, орієнтовані на користувачів мобільних телефонів, КПК та іншої техніки що підтримує WAP. Для цього, створено спеціальний модуль, орієнтований саме на розробку такого виду веб-ресурсів. Робота з ним схожа до роботи з HTML-модулем. Редактором підтримується підсвічування синтаксису, вставка тегів та їх атрибутів, вставка основних елементів : карти, малюнки, посилання та ін. [1]

Сьогодні важливе місце отримує мова XML. [3] Можливість зручно працювати з такими документами надає інструментальне середовище «URSA».

Для створення електронних курсів передбачено ряд інструментів, орієнтованих на виконання специфічних дій.

В перспективі передбачається реалізація повної підтримки новітніх технологій та подальше модифікування середовища в напрямку покращення інтерфейсу користувача та спрощення роботи з програмою.

- 
1. Джамса К., Шмаудер Ф. Wap в действии. Доступ к интернет сайтам через сотовый телефон.-М.: Издательство Триумф, 2002.- 416с.
  2. Петюшкин А.В. HTML. Экспресс курс.- С.Пб.: БХВ, 2003.- 256с.
  3. Шеперд Деван, Освой самостоятельно XML за 21 день. - М.: Вильямс, 2002.- 432 с.



**ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНО-ПРОЕКЦІЙНОГО МЕТОДУ  
ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ  
В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Губар Н.В., Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет Прикладної математики та менеджменту

У роботі розглядається задача розрахунку температурного поля  $T(x, y, t)$  в неоднорідному ізотропному тілі  $\Omega$ , що складається із двох тіл  $\Omega_0$  і  $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ , причому  $\partial\Omega_1 = \partial\Omega$ . Вважаємо, що на границі тіла  $\partial\Omega$  відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має температуру  $T_c$ , а на границі  $\partial\Omega_0$  має місце ідеальний тепловий контакт.

Математична модель має вигляд

$$c(x, y)\rho(x, y)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

$$t \in R_+,$$

$$T|_{t=0} = T_c, \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \alpha T \Big|_{\partial\Omega} = \alpha T_c,$$

$$[T] = 0, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right] = 0 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega$ ,  $k(x, y)$  – коефіцієнт теплопровідності тіла  $\Omega$ ,  $c(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$  – теплоємність і густина речовини тіла  $\Omega$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну,  $c, \rho, k = \begin{cases} c_1, \rho_1, k_1 & \text{в } \Omega_1, \\ c_0, \rho_0, k_2 & \text{в } \Omega_0. \end{cases}$

Для розв'язання цієї задачі застосуємо структурний метод академіка НАНУ Рвачова В.Л. [2,3].

У роботі показано, що формула

$$T = \begin{cases} B(\Phi) & \text{в } \Omega_1, \\ B(\Phi) - \frac{k_0 - k_1}{k_0} \omega_0 D_1^{(0)} [B(\Phi)] & \text{в } \Omega_0, \end{cases}$$

де  $B(\Phi) = \Phi + \frac{\omega}{k_1} (\alpha\Phi - k_1 D_1 \Phi - \alpha T_{cp})$ . Незвизначену компоненту  $\Phi$

подамо у вигляді  $\Phi(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x, y)$ , де  $\{\varphi_k(x, y)\}$  – повна в  $W_1^1(\Omega)$



послідовність функцій. Коефіцієнти  $c_k(t)$  визначимо, розв'язавши задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, отриманих за методом Гальоркіна [1].

- 
1. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. - М., Наука, 1966. – 432 с.
  2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. - К.: Наук. думка, 1982. – 551с.
  3. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. – К.: Наук. думка, 1978. – 140 с.

**ОЦІНКИ ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ В  
БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ**

Данилюк Василь Михайлович, Україна  
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

В даній роботі розглядається крайова задача для багаточастотної нелінійної коливної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \sum_{k=0}^r \varepsilon^k a_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r+1} A(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \sum_{k=0}^r \varepsilon^{k-1} b_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^r B(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon), \\ x(\tau, \varepsilon) &= f(\tau) + \int_0^L \eta(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon) d\tau, \\ \varphi(\tau, \varepsilon) &= g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \Omega(t) dt + \int_0^L (C_1(\tau)\varphi + C_2(\tau)\varphi_\Delta + \\ &\quad + \xi(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon)) d\tau, \quad \tau \in [-\Delta, 0],\end{aligned}$$

де  $x_\Delta(\tau) = x(\tau - \Delta)$ ,  $\varphi_\Delta(\tau) = \varphi(\tau - \Delta)$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр.

На підставі оцінок осциляційних інтегралів [1] встановлено достатні умови існування розв'язку задачі й оцінено його відхилення від розв'язку усередненої задачі величиною  $c \cdot \varepsilon^\beta$ , де  $c$  та  $\beta$  – деякі додатні сталі.

- 
1. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.



**ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНОГО ЕЛІПСОЇДА, ЩО МІСТИТЬ ПЕРЕТИН  
ЗАДАНИХ ЕЛІПСОЇДІВ**

Дегтярьов Андрій Андрійович, Україна  
Дніпропетровський національний університет  
Факультет прикладної математики

Задача побудови мінімального за об'ємом еліпсоїда, що містить перетин еліпсоїдів

$$E_i = \left\{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i})^T \mathbf{A}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i}) \leq 1, \quad i = \overline{1, m} \right\} \quad (1)$$

є НР-складною. У роботах [1], [2] розглядається ця задача для двох еліпсоїдів. Будується неперервне відображення одного еліпсоїда в інший. Неперервне відображення є еліпсоїдом, який містить перетин еліпсоїдів. Ця ж процедура може бути використана і у випадку  $m$  еліпсоїдів. Будемо вважати, що перетин еліпсоїдів є непорожнім. Тоді існують такі  $\alpha_i > 0, i = \overline{1, m}$ , що еліпсоїд

$$E = \left\{ \mathbf{x} \mid \sum \alpha_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i})^T \mathbf{A}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i}) \leq 1, \quad \sum \alpha_i = 1, \quad i = \overline{1, m} \right\}$$

буде мати мінімальний об'єм і  $\cap E_i \subset E$ . Знайдемо центр еліпсоїда  $E$ . Для цього необхідно розв'язати лінійну систему рівнянь

$$\sum \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{0i}.$$

Таким чином, центр еліпсоїда залежить від  $\alpha_i$ . Існує декілька різних центрів опуклих тіл і центр  $E$  буде одним з них. Для пошуку центра опуклого тіла існує декілька ефективних алгоритмів [3]. Позначимо через  $x_0$  центр перетину еліпсоїдів  $E_i$ , тоді коефіцієнти  $\alpha_i$  знайдемо, розв'язуючи задачу

$$\min \left\{ \left\| \sum \alpha_i \mathbf{A}_i (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{0i}) \right\|^2 \mid \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\} \quad (2)$$

Лінії рівня цільової функції задачі (2) визначають еліпсоїди з центром у початку координат. Шляхом заміни

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{0i})$$

задача (2) зводиться до задачі вигляду

$$\min \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \mid \mathbf{e}^T \mathbf{a} = 1, \mathbf{a} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (3)$$

де  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $\mathbf{A} = \left\| \mathbf{a}_{ij} \right\| = (\mathbf{y}_i)^T \mathbf{y}_j$ .

Без умови позитивності розв'язок задачі (3) знайдемо у явному вигляді:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}}$$



Якщо деякі з компонент вектора  $\mathbf{a}$  від'ємні, то задача (3) еквівалентна задачі

$$\min \{(\mathbf{a} - r\mathbf{e})^T \mathbf{A}(\mathbf{a} - r\mathbf{e}) \mid \mathbf{e}^T \mathbf{a} = 1\}, \quad (4)$$

де  $r$  - мінімальне додатне значення, при якому розв'язок задачі (4) невід'ємний. Розв'язок задачі (4) дорівнює

$$\mathbf{a} = r\mathbf{e} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}(1 - rn) / \mathbf{e}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e},$$

тому приходимо до розв'язку задачі

$$\min \{r \mid m\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e} - r\mathbf{e}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e} \leq 1\}.$$

Розв'язок цієї задачі тривіальний:  $r = 0$ , тому розв'язком задачі (3) є знайдене  $\mathbf{a}$ .

Таким чином, центр опуклого тіла, що визначається перетином еліпсоїдів  $E_i$ , однозначно визначає еліпсоїд  $E$ . В загальному випадку еліпсоїд  $E$  не буде мати мінімального об'єму. Достатньо розглянути перетин двох шарів. Для них  $E$  також буде шаром, але існує еліпсоїд меншого об'єму, що містить перетин шарів.

Для зменшення об'єму еліпсоїда  $E$  розглянемо його вершини  $\mathbf{x}_i$ . Кожній вершині відповідає гіперплощина, що проходить через центр еліпсоїда  $\mathbf{x}_0$  з нормаллю  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ . Якщо еліпсоїд має кратні власні значення, то в якості точок  $\mathbf{x}_i$  обираємо точки перетину еліпсоїдів  $E_i$ , найменш віддалені від центру  $\mathbf{x}_0$ . Розв'язуючи задачі

$$\min \{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E_i, i = \overline{1, m}\} \quad \text{і} \quad \max \{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in E_i, i = \overline{1, m}\}, \quad (5)$$

визначимо дві паралельні гіперплощини, що відсікають частину еліпсоїда  $E$  разом з його вершиною  $\mathbf{x}_i$ . Нехай  $z_i$  дорівнює відстані від центра еліпсоїда  $E$  до більш віддаленої паралельної гіперплощини. Знаючи довжини  $a_i$  напіввіссей еліпсоїда  $E$ , визначимо довжини напіввіссей еліпсоїда мінімального об'єму, що містить невідсічену частину еліпсоїда  $E$ . Ці довжини будуть дорівнювати

$$b_i = \frac{n^2 a_i (\sqrt{a_j} - z_j)^2}{a_j (n-1)^2}, \quad \forall i \neq j, b_j = n^2 z_j^2$$

Розглянуту процедуру зменшення еліпсоїда  $E$  виконаємо для кожної вершини еліпсоїда, доти, доки об'єм нових еліпсоїдів буде спадати. Знайдений еліпсоїд буде меншого об'єму, ніж еліпсоїд, що визначається неперервним відображенням.

---



1. Circumscribing an Ellipsoid about the Intersection of Two Ellipsoids. *Prof. W. Kahan*, Mathematics Dept., and Elect. Eng. & Computer Science Dept. University of California.
2. ELLIPSOIDAL TOOLBOX. Technical Report. *Alex A. Kurzhanskiy and Pravin Varaiya*, 2006.
3. A weighted projection centering method. *Antonio Carlos Moretti*. Department of Applied Mathematics, State University of Campinas.



**НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОГО ЗРІЗАНОГО КОНУСА ІЗ ЗАГОСТРЕННЯМ ТА ПІВКУЛІ ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ**

Денисенко Ірина Сергіївна, Україна  
 Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова  
 Факультет прикладної математики

В роботі запропонована схема побудови точного розв'язку віссесиметричної задачі теорії пружності для суцільного конуса з урахованням власної ваги.

Розглянемо пружне тіло (з модулем зсуву  $G$ , коефіцієнтом Пуассона  $\mu$ ) у сферичній системі координат  $r, \theta, \varphi$ , яка фіксується співвідношеннями  $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \omega, -\pi \leq \varphi < \pi$ . Одразу перейдемо до безрозмірної задачі за допомогою заміни  $r = a\rho, 0 \leq \rho \leq 1$ . Розглянемо випадок віссесиметричної деформації. Тоді для функцій  $u(\rho)$  та  $v(\rho)$  отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} (\rho^2 u') - 2u + \frac{1}{\mu_*} \frac{(\sin \theta u^*)'}{\sin \theta} - \frac{\mu'}{\mu_*} \frac{(v \sin \theta)'}{\sin \theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*} \rho \frac{(v' \sin \theta)'}{\sin \theta} &= -\frac{2\rho^2}{\mu_*} a^2 q_\rho \\ (\rho^2 v') + \mu_* \left[ \frac{(\sin \theta v^*)'}{\sin \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right] + \mu_0 \rho u' + 2\mu_* u^* &= -2\rho^2 a^2 q_\theta \end{aligned}$$

На сферичній грані  $\rho = 1$  задані умови першої основної задачі, а на конічній поверхні  $\theta = \omega$  - умови слизької заробки.

Для того, щоб задовольнити граничним умовам при  $\theta = \omega$  та перейти до одновимірної задачі, застосуємо до системи рівнянь Ламе та до граничних умов, що залишились, інтегральне перетворення з відомими формулами обернення

$$u_k(\rho) = \int_0^\omega P_v(\cos \theta) u(\rho, \theta) \sin \theta d\theta \quad v_k(\rho) = \int_0^\omega P_v^1(\cos \theta) v(\rho, \theta) \sin \theta d\theta$$

Тоді граничні умови запишуться у вигляді:

$$v_k'(1) - v_k(1) + N u_k(1) = 0 \quad (1 - \mu) u_k'(1) + 2\mu u_k(1) - \mu v_k(1) = 0$$

А систему рівнянь можна надати у векторному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 y(\rho) \equiv \mathbf{I}[\rho^2 y'(\rho)] + \mu_0 \mathbf{Q} \rho y'(\rho) + \mathbf{P} y(\rho) &= \mathbf{f}(\rho), 0 < \rho < 1, \mathbf{y}(\rho) = \begin{pmatrix} u_k(\rho) \\ v_k(\rho) \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}(\rho) &= a^2 \begin{pmatrix} q_k \\ -q_k^* \end{pmatrix} \rho^2, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 - N\mu_*^{-1} & \mu' \mu_*^{-1} \\ 2\mu_* N & -\mu_* N \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Для того, щоб відшукати розв'язок, який спадає на нескінченності, розв'яжемо матричну задачу  $L_2\mathbf{Y}(\rho) = 0$ ,  $0 < \rho < 1$ . Скористаємося теоремою про відрахування, щоб обчислити матричний інтеграл

$$\mathbf{Y}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \rho^s \mathbf{M}^{-1}(s) ds.$$

Отримаємо  $\mathbf{Y}_0(\rho) = \rho^{v+1} R_{v+1} \mathbf{A}_+(v) - \rho^{v-1} R_v \mathbf{B}_+(v)$ ,

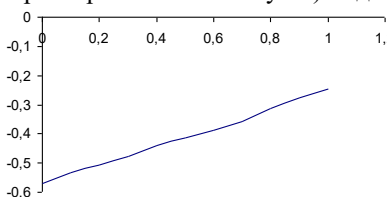
$$\mathbf{A}_+(v) = \begin{pmatrix} 2(v+1) - \mu_0 N_v & \mu_*^{-1}(\mu_0 v - 2) \\ -\mu_0 N_v (v + \kappa + 2) & \mu_1 N_v + 2v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_+(v) = \begin{pmatrix} -\mu_0 N_v - 2v & 2 - \mu_1 v \\ \mu_0 N_v (v + \kappa) & \mu_1 N_v - 2(v+1) \end{pmatrix}, \quad R_v = \frac{1}{2(2v+1)(2v-1)}.$$

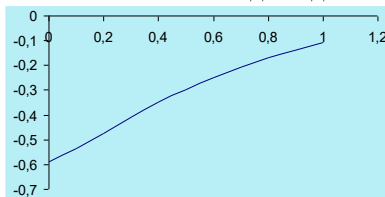
Тоді точний розв'язок векторної задачі надано у вигляді  $\begin{pmatrix} u(\rho) \\ v(\rho) \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_0(\rho) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \rho^2$ , де другий доданок являє собою частковий розв'язок неоднорідної системи рівнянь, а  $c_j$  можемо знайти, якщо задовільним граничним умовам.

Надалі треба обернути трансформанти переміщень та знайти самі переміщення. За їх допомогою зможемо знайти напруження  $\sigma_\theta(\rho, \theta)$ .

Графіки зміни напруження  $\sigma_\theta(\rho, \theta)$  для випадків  $\omega = \frac{\pi}{4}$  та  $\omega = \frac{\pi}{2}$  (конус перетворюється на півкулю) подані на мал. 1 та мал. 2 відповідно.



Мал. 1. Графік  $\sigma_\theta\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right)$



Мал. 2. Графік  $\sigma_\theta\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)$

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеом. функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1965, 294 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965, 432 стр. с илл.
3. Попов Г.Я., Абдымананов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд-во Рауан, 1999, 113 с.
4. Попов Г.Я. О некоторых интегральных преобразованиях и об их применении к решению краевых задач математической физики // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, №6. – с. 810-819.



5. *Попов Г.Я.* Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // *Мат. методы и физ-мех. поля.* Львов, 2003. Том 46, №3. С.74-89.

**РОЗВ'ЯЗОК ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТРЕТЬОГО РОДУ РІВНЯННЯ  
ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ КОНІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

Дзігора О.О., Шимук Ю. Д., Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Для врахування втрат в радіофізичних та радіотехнічних приладах у відповідних математичних моделях потрібно враховувати імпедансний параметр. Якщо втрати відсутні, то розв'язок електродинамічних задач зводяться до розв'язку першої або другої крайової задачі для рівняння Гельмгольца при гармонійній залежності електромагнітного поля від часу [2]. Для вивчення впливу втрат потрібно знайти розв'язок третьої крайової задачі рівняння Гельмгольца для відповідної геометрії. В даній доповіді подані результати дослідження модельної задачі дифракції електромагнітних хвиль на незамкненій конічній поверхні із врахуванням втрат, котра зводиться до розв'язку тривимірної крайової задачі рівняння Гельмгольца. Метод розв'язку базується на використанні інтегрального перетворення Конторовича-Лебедева у сполученні з методом задачі Рімана-Гільберта для дуги одиничного кола [1]. Показано, що третя крайова задача, яка розглядається, еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду фредгольмівського типу відносно коефіцієнтів Фур'є шуканої функції. Згідно властивостей матричного оператора системи її розв'язок можна отримати в деяких окремих випадках конічної структури методом послідовних наближень, що дає можливість знайти аналітичний розв'язок задачі. В загальному випадку розв'язок системи можна отримати методом усікання. Для напівпрозорого конуса знайдено аналітичний розв'язок третьої крайової задачі рівняння Гельмгольца і окремо досліджена її поведінка поблизу нерегулярностей конуса (вершина, ребра).

1. *Дорошенко В. А., Кравченко В.Ф.* Рассеяние плоских электромагнитных волн на конусе с продольными щелями // Радиотехника и электроника. 2001 Т.46, №3. С. 296-303.
2. *Курляк Д.Б, Назарчук З.Т.* Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наук. Думка, 2006.-280с.



## ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ ІЗ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

Дзігора О. О., Шимук Ю. Д., Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

При розробці сучасних антенних систем є потрібним створення адекватної математичної моделі нестационарного збудження структур, геометрія яких співпадає з геометрією антен або локаторів. [1], [3]. В даній доповіді запропоновано математичну модель нестационарного (імпульсного) збудження кінчної структури із повздовжніми періодичними щілинами і внутрішнім екраном. Для вивчення розподілу електромагнітного поля у просторі потрібно розв'язати початково-крайову задачу першого або другого роду для чотиривимірного хвильового рівняння в областях з незамкненою кінчною геометрією. Метод розв'язання сполучає інтегральне перетворення Мелера-Фока і процедуру регуляризації та метод задачі спряження [2].

Показано, що розв'язок вихідної початково-крайової задачі еквівалентний розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду фредгольмівського типу. У випадку напівпрозорого конуса і вузьких щілин матричний оператор системи є стискаючим, що дає можливість отримати аналітичний розв'язок задачі. При довільному співвідношенні між геометричними параметрами структури матричний оператор системи є компактним. Число обумовленості системи в залежності від ширини щілин і їх кількості знаходиться в межах від 30 до 100. У випадку одного напівпрозорого конуса отримано аналітичний розв'язок та вивчено вплив щілин на поведінку розв'язку поблизу вістря конуса.

Для кінчної структури із повздовжньою щілиною проведено чисельний аналіз коефіцієнтів Фур'є в залежності від геометричних розмірів структури. Метод, що використовується для розв'язання початково-крайової задачі першого і другого роду, може бути використаний для розв'язання третьої початково-крайової задачі для хвильового рівняння в кінчних областях.

1. Астанин Л. Ю., Костылев Л. А. Основы широкополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь. – 1989. – 191 с.
2. Doroshenko V. A., Kravchenko V. F. & Pustovoit V. I. Meler-Fock transformations in problems of wave diffraction on unclosed structures in the time region// Doklady Physics. 2005, 50, No.11, 560-564.
3. Колодий Б. И., Куриляк Д. Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. – Киев: Наукова думка. – 1995. – 167 с. (на укр. яз.)



## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МАРКЕТИНГУ В ПІДПРИЄМНИЦТВІ

Дикун Ірина Анатоліївна, Україна

Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики

Трансформація вітчизняної економіки від командно-адміністративної до ринкової спричинила безприцедентні зміни у всіх сферах діяльності. Необхідність суттєвого підвищення рівня життя народу, відродження та піднесення рівня вітчизняної економіки, утвердження рівня України потребують знання та розумного застосування надбань світової економічної теорії стосовно виробничо- господарської і комерційної сфер діяльності, вивчення ринку, його структури формування та функціонування.

У повсякденній діяльності робота будь-якого підприємства має ґрунтуватись на результаті маркетингових досліджень, проведених службою маркетингу чи фірмою, котра надає такі послуги. Такі дослідження повинні проводитись з використанням математичних методів та моделей. Завдання таких досліджень можуть бути різноманітними, зокрема, розробка системи оптимального товароруку каналами збуту, формування оптимальної цінової політики, аналіз методів формування фонду маркетингу.

Серед задач маркетингу виділяють :

- Моделювання фонду маркетингу.
- Моделювання оцінки ємності ринку.
- Моделювання ефективності рекламної діяльності.
- Моделювання маркетингових ризиків.

Для здійснення ефективної маркетингової діяльності потрібно брати до уваги залежність попиту від затрат на рекламу. *Попит*, як економічна категорія, характеризує обсяг товарів, які споживач бажає і може придбати, тобто ця потреба підкріплена споживчою спроможністю. Існує кілька рівнів визначення попиту, якими може оперувати будь-яка компанія. Так можна визначити попит у регіональному розрізі (весь світ, країна, регіон, місто, споживач, тощо); на товарному рівні (весь ринок, товари цієї галузі, обсяг продажу фірми, конкретна назва товару та ін.); у часовому аспекті (коротко, середньо і довгостроковий). Залежно від рівня визначення попиту можна скласти прогнози для досягнення певної мети.

Нами була побудована оптимізаційна модель закупівлі продукції. За критерій оптимізації прийнято сумарну максимальну якість продукції.

*Постановка задачі* : Фірма має можливість закупити в певній кількості одиниць різної продукції, яку випускають декілька виробників. Для цієї цілі фірма може виділити певні кошти. Відомо скільки одиниць



кожної продукції потребує фірма, скільки коштів може виділити фірма для закупок, узагальнений показник якості кожного виду продукції кожного виробника, а також, ціну одиниці кожної продукції кожного виробника.

*Задача полягає в наступному* : Треба так провести закупівлю продукції , щоб забезпечити загальну максимальну якість купленої продукції.

Нехай :

$n$  –кількість видів продукції, необхідних для закупівлі фірмі;

$m$  –кількість виробників продукції;

$\alpha_{ij}$  - узагальнений показник якості продукції  $i$ -го виду, що виробляється  $j$ -м виробником;

$c_{ij}$  - вартість одиниці  $i$ -ої продукції, що виробляється  $j$ -м виробником;

$p_i$  - потреба фірми в продукції  $i$ -го виду;

$V$  - кошти, виділені фірмою для закупівлі продукції;

$x_{ij}$  - кількість одиниць продукції  $i$ -го виду, що планується закупити в  $j$ -го виробника.

Математична модель:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \leq V;$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

1. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування: Підручник для студ. вузів/ В.М.Заєць та ін.; Харківський нац. екон. ун-т. – Харків: ІНЖЕК, 2005. – 396с.
2. Математическое моделирование экономических процессов./ Под ред. Е.Г.Белодсова и др. – М.:МГУ, 1990. - 228с.
3. *Малиш Н.А.* Моделювання економічних процесів ринкової економіки: Навч. посібник для студ. вузів/ Міжнародна акад. управління персоналом. – К., 2004. – 119с.

**КУБІЧНІ МАТРИЦІ ТА ЇХ ІМОВІРНІСТНІ ВЛАСТИВОСТІ**

Добринська Олександра Геннадіївна, Козлов Максим Олександрович,  
Україна  
Харківський Національний Університет Радіоелектроніки  
ПММ

У процесі вивчення багатьох реальних систем їх моделі часто описуються за допомогою апарата неоднорідних марківських ланцюгів. Наприклад, моделі марковського типу використовуються при описі процесів, котрі проходять всередині популяцій різноманітних біологічних видів (моделі процесів народження та гибелі), при аналізі грошових потоків в економіці та інші.

В зв'язку с цим у даній роботі буде розглянуті неоднорідні марковські процеси, а саме, питання стабілізації розподілу неоднорідних марковських процесів.

Була розроблена процедура, котра генерує послідовність управляючих матриць. Під впливом цієї послідовності матриць в визначенні моменті часу неоднорідний марковській процес від будь-якого начального розподілу перейде до наперед заданого стаціонарного розподілу за кінцеву кількість шагів.

Для опису послідовності управляючих матриць вводиться формальний апарат – багатомірні матриці. В даній роботі ми використовували кубічні стохастичні матриці для опису послідовності управляючих матриць.

Кубічна матриця  $A = \|A_{ijk}\|$  називається стохастичною, якщо виконуються наступні умови:

1.  $A_{ijk} \geq 0$ ;
2.  $\sum_{j,k=1}^n A_{ijk} = 1, i = 1, \dots, n$

Імовірнісна інтерпретація матриці  $A = \|A_{ijk}\|$  така: елемент  $A_{ijk}$  стохастичної матриці задає імовірнісний перехід частки типу  $j$  зі стану  $i$  в стан  $k$ .

- 
1. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения.- К.:«Физматиз»,1960.
  2. Максимов В.М. Кубические стохастические матрицы и их вероятностная интерпретация.//Теория вероятностей и ее применение.1996-Вып.1.- с.89-106.
  3. Герасин С.Н. Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем.- Харьков: ХТУРЭ, 1999.-212с.

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО  
РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ**

Добринська Олександра Геннадіївна, Україна  
Харківський Національний Університет Радіоелектроніки  
ПММ

У даній роботі розглядається застосування різноманітних варіантів методу послідовних наближень до розв'язання крайових задач з нелінійними звичайними диференціальними рівняннями.

Розглянемо крайову задачу вигляду [1]

$$\begin{aligned}w''(t) + h(t)f(w(t)) &= 0, \quad 0 < t < 1, \\ w(0) = w(1) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

при таких умовах:

- $h(t)$  невід'ємна та неперервна на  $[0,1]$ ;
- $f(w)$  невід'ємна, неперервна, неспадна та вгнута по змінній  $w$  у наступному сенсі: при  $w > 0$  та  $\tau \in (0,1)$   $f(\tau w) - \tau f(w) > 0$ .

Шукаємо невід'ємний розв'язок  $w(t) > 0$ ,  $0 < t < 1$ , задачі (1).

Один із варіантів методу, обґрунтований на застосуванні методів теорії операторних рівнянь у напіворядкованих просторах, дає можливість будувати двосторонні наближення до розв'язку [2].

Згідно з [2], ставимо у відповідність задачі (1) еквівалентне інтегральне рівняння

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(w(s))ds,$$

де  $G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \leq s, \\ s(1-t), & t \geq s \end{cases}$  - функція Гріна для задачі (1) с  $h(t) \equiv 0$ .

Було доведено, що, при виконанні накладених умов на функції  $h(t)$  та  $f(w)$ , оператор  $\Gamma w(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(w(s))ds$ , визначений на конусі  $K$  невід'ємних у  $C[0,1]$  функцій, буде монотонним, невід'ємним, цілком неперервним та  $u_0$ -вгнутим, де  $u_0 = \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{t(1-t)}{2} \in K$ . Нехай можливо побудувати конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K$ , тобто такий, що  $\Gamma v_0 \geq v_0$ ,  $\Gamma w_0 \geq w_0$ ,  $v_0 \leq w_0$ . В цьому випадку задача (1) має єдиний



розв'язок  $w^*(t) \in \langle v_0, w_0 \rangle$ , до якого рівномірно збігаються послідовні наближення

$$w_{k+1}(t) = \int G(t,s)h(s)f(w_k(s))ds, \quad k=1,2,\dots, \quad (2)$$

де  $w_1(t) \in \langle v_0, w_0 \rangle$ .

Розрахунковий експеримент зроблено для двох випадків:

1.  $h(t) = 1, f(w(t)) = w^2(t) + 16$ ;
2.  $h(t) = t^2, f(w(t)) = w^2(t) + 144$ .

Конусним відрізком для випадку 1. є  $\langle v_0 = 0, w_0 = 4 \rangle$ , а для випадку 2. –  $\langle v_0 = 0, w_0 = 12 \rangle$ . Використання ітераційної схеми (2) дає нам двосторонні наближення до точного розв'язку  $w^*$  задачі (1)

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq w^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

Також для відшукування розв'язку задачі (1) використали звичайну схему методу послідовних наближень. Застосування цієї схеми до задачі (1) дозволило звести її до послідовності задач

$$\begin{aligned} -w^{(1)''} &= 1, & w^{(1)}(0) &= w^{(1)}(1) = 0, \\ -w^{(2)''} &= f(w^{(1)}(t)), & w^{(2)}(0) &= w^{(2)}(1) = 0, \\ -w^{(m)''} &= f(w^{(m-1)}(t)), & w^{(m)}(0) &= w^{(m)}(1) = 0, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Кожну задачу отриманої послідовності розв'язували за допомогою методу Рітца, згідно з яким розв'язок шукається у вигляді

$$w_n^m(t) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t), \text{ де } a_j, j = 1, \dots, n, - \text{ невідомі чисельні коефіцієнти, а}$$

$\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$  - координатна послідовність.

Отриманні різними підходами результати порівнюються.

- 
1. Yao Qingliu. Iteration of positive solution for a second-order ordinary differential equations with change of sign. Ann. Of Deff. Eqs. 18:4(2002).410-416st.
  2. Красносельский М.Н. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Наука, 1962. – 394с.
  3. Свирский И. В. Методы типов Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. – М.: Наука, 1968. – 198с.



## ПОШУКУ ТА ВИДАЛЕННЯ ЕФЕКТУ «ЧЕРВОНИХ ОЧЕЙ» У ФОТОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕННЯХ

Долгушин Іван Олексійович, Україна  
Одеський національний університет імені І.І.Мечнікова  
ІМЕМ, факультет прикладної математики

Разом з розвитком кольорової фотографії виникла та поширилась проблема ефекту так званих "червоних очей" – поява яскравих червоних відблисків на очах людей. Особливо актуальною ця проблема стала з поширенням доступних цифрових фотоапаратів, що дозволяють отримувати велику кількість фотографій без значних матеріальних витрат.

З фізичної точки зору, відблиск – віддзеркалення спалаху від сітківки людини, що потрапив до об'єктива камери. Червоний колір він має завдяки тому, що сітківка насичена кровоносними судинами.

Усі існуючі на цей час методи боротьби з цим ефектом можна поділити на дві групи – методи що запобігають появі цього ефекту, та методи (алгоритми) його видалення з вже отриманих фотографічних зображень у цифровій формі. Останні можна умовно поділити на ручні та автоматичні.

Методи запобігання [5, 6] базуються на фізичній природі ефекту. Це є рекомендації, що дозволяють вивести об'єктив з освітленої віддзеркаленням спалаху зони. Наприклад, віднесення спалаху від фотоапарата або серія передспалахів що призводять до звуження радужки і, відповідно, до зменшення кута поширення віддзеркалення.

Друга група методів призначена для обробки вже існуючих фотографій та є значно менш ефективною з точки зору збереження натурального вигляду очей ніж перша. Але це єдина можливість опрацювати вже наявні фотографії незалежно від їх віку та обставин при яких їх було зроблено.

Ручні методи – алгоритми які дозволяють за допомогою певних графічних прийомів зменшити ефект до прийняттого рівня або знищити взагалі. Істотним недоліком цих методів є те що для їх використання окрім програмного забезпечення користувач повинен досить вільно володіти комп'ютером та добре орієнтуватись у досить складному графічному редакторі. Крім того недоліком є невелика швидкість обробки та порівняно велика трудомісткість. Серед переваг можна зазначити високу якість обробки. Таким чином ці методи добре підходять для обробки невеликої кількості портретів крупного плану і прийнятні для досить кваліфікованих користувачів чи професіоналів ретуші.

Автоматичні методи [1-4] зазвичай потребують набагато менших навичок володіння комп'ютером, меншого часу та зусиль, але мають значно гіршу якість обробки й нерідко призводять до появи небажаних



артефактів. Найпоширеніші з них - помилкове прийняття за очі невеликих червоних диталей одягу або інтер'єру та помилки визначення розміру очей, що призводить або до збереження залишкової червоності, або до появи синьо-зелених плям навколо очей. Алгоритми автоматичного пошуку "червоних очей" досить різноманітні, але повністю задача ще не вирішена. Для пошуку очей на фотографічному зображенні деякі алгоритми: шукають обличчя [1], знаходять очі [1, 4] з використанням інформації про кольори у деякому їх околі. Так у [4] автори пропонують прийняти до уваги той факт, що очі оточені склерою, та шкірою. Інші алгоритми використовують для пошуку фільтри [3], та маски [4]. Перевагою останніх є те, що час обробки зображення не залежить від кількості та розташування очей на зображенні. Недоліки - більша імовірність помилки. Також при пошуку очей прийнято вважати їх форму круглою, що істотно використовується у алгоритмах, але не завжди відповідає дійсності.

Основні задачі доповіді – надати огляд існуючих алгоритмів усунення "червоних очей", провести їх порівняльний аналіз, розробка власної моделі та заснованого на ній програмного продукту. Підхід до розробки програмного продукту що пропонується є суттєво інтерактивним та має можливість корегування параметрів моделі. Користувачу пропонується вибрати за допомогою миши приблизне розміщення ока, після чого алгоритм на базі вибраної моделі проводить пошук "червоного ока" та видалення ефекту. Для знищення ефекта червона компонента RGB схеми у області ока пригнічується, а синя і зелена трохі збільшуються для збереження природного відблиска.

- 
1. *Matthew Gaubatz, Robert Ulichney* "Automatic red-eye detection and correction"// IEEE ICIP 2002, с. I-804 - I-807
  2. *Jon Y. Hardeberg*. Red eye removal using digital color image processing// PICS 2001, с.283-287
  3. *А.В.Агаян, Г.М.Агаян, С.Ю.Романов*. Метод распознавания эффекта красных глаз на цифровых фотографиях// Вычислительные методы и программирование, – Т.5. – 2005.– с.257-261.
  4. *Flavien Volken, Johann Terrier, Patrick Vandewalle*. Automatic red-eye removal based on sclera and skin tone detection// CGIV 2006 Final Program and Proceedings, с.359-364
  5. *Jeremy McCreary*, "Red-eye control - an ounce of prevention is indeed worth a pound of cure", URL: <http://www.cliffshade.com/dpfwiw/red-eye.htm>
  6. "Remove red eye from your digital photos", [http://www.ekdahl.org/kurs/red\\_eye\\_repair.htm](http://www.ekdahl.org/kurs/red_eye_repair.htm)

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ  
ПОШИРЕННЯ ЗАБРУДНЕНЬ У ҐРУНТАХ**

Домінська Світлана Любомирівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Розвиток людської цивілізації супроводжується постійним негативним впливом на природне середовище.

Безпосередній вплив на рух хімічних речовин в ґрунті і їх зникнення з ґрунту мають такі основні процеси: конвекція, дифузія, механічна дисперсія, адсорбція, деградація або зникнення, випаровування з поверхні ґрунту.

Математична постановка задачі поширення забруднення середовища зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial(\theta u)}{\partial t} + \rho \frac{\partial S}{\partial t} = -v_x \frac{\partial(\theta u)}{\partial x} - v_y \frac{\partial(\theta u)}{\partial y} + D_k \left( \frac{\partial^2(\theta u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\theta u)}{\partial y^2} \right) - \mu \quad (1)$$

З граничними умовами :

$$\begin{aligned} u(a, y, t) &= u_a(y, t) \\ u(b, y, t) &= u_b(y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, d, t) = u_d(x, t)'$$

$$u(x, c, t) = u_c(x, t)$$

$$\frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = C_a(y, t)$$

$$\frac{\partial u(b, y, t)}{\partial x} = C_b(y, t)$$

$$\frac{\partial u(x, d, t)}{\partial y} = C_d(x, t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x, c, t)}{\partial y} = C_c(x, t)$$

де  $a \leq x \leq b$ ,  $d \leq y \leq c$ .

і початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (4)$$

У рівнянні (1):  $D_k$  – коефіцієнт дифузії,  $\rho$  – об'ємна густина ґрунту,  $v_x$  і  $v_y$  – швидкість середовища,  $\gamma$  – коефіцієнт розпаду,  $\theta$  – вологість ґрунту,  $S$  – концентрація забрудника в твердій речовині.



Для розв'язування задачі (1) - (4) використаний неявний метод змінних напрямів. У випадку дифузійного поширення забруднення отримаємо двокрокову різницеву схему:

Крок 1

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t / 2} = D_k (\widehat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \widehat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n). \quad (5)$$

Крок 2

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t / 2} = D_k (\widehat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \widehat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1}). \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_x^2 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\delta_x^2 u_{i,j}^n}{(\Delta x)^2}, \\ \widehat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{\delta_y^2 u_{i,j}^n}{(\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

У результаті проведеного «розщеплення» задача зводиться до вирішення систем алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею, для розв'язання якої використовується метод прогонки.

Алгоритм розв'язування задачі реалізований у вигляді програми, написаної мовою C++ з використанням Builder C++. Ефективність методу досліджено на ряді тестових прикладів.

- 
1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев:Наук.думка, 1998. – 615 с.
  2. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Тригуб А.С. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса.- К.:Наук.думка, 1998. – 240 с.
  3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.- М.:Наука, 1982.- 319с.
  4. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев:Наук.думка, 1991.- 432 с.
  5. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. – М., 1981.- 304 с.

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО У ЗАСТОСУВАННІ ДО ЗАДАЧ В  
НЕСКІНЧЕННИХ ОБЛАСТЯХ ПЕРШОГО ТИПУ**

Д'якова Є.Ю., Магеря М.А., Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет Прикладної математики і менеджменту

Чисельні методи розв'язання задач гідродинаміки мають науково-практичний інтерес, оскільки дослідження моделі не завжди може бути проведене шляхом фізичного експерименту. Дуже часто диференціальні рівняння, що описують реальні процеси, розглядаються в нескінченних або напівнескінченних областях. Відповідно, в постановці задачі можуть бути присутні крайові умови на нескінченності. Внаслідок того, що задача розв'язується на ЕОМ, кількість невідомих повинна бути кінцева. Це призводить до того, що область не може бути нескінченною. Для її обмеження вводяться фіктивні межі, на яких ставляться особливі крайові умови, які можуть бути деяким наслідком умов на нескінченності або забезпечувати необхідні властивості розв'язання.

Розглядається задача про обтікання нескінченним потоком рідини крилового профілю  $\partial\Omega$ :

$$\Delta\psi(x, y) = 0 \quad \forall(x, y) \in \Omega \subset R^2,$$

$$\psi(x, y)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\psi_{\infty}(x, y)|_{\partial\Omega} = V_{\infty}y,$$

де  $\psi(x, y)$  - функція току,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - оператор Лапласа.

Вводиться заміна

$$\psi(x, y) = u(x, y) + \varphi_0(x, y),$$

де  $\varphi_0(x, y) = \frac{\omega(x, y)\psi_0(x, y)}{1 + \omega(x, y)}$ ,  $\omega(x, y)$  - описує межу області. Початкова

задача приймає вигляд:

$$-\Delta u = \Delta\varphi_0 \quad \forall(x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\infty} = 0.$$

Для переходу від нескінченної області до кінцевої використовується перетворення зворотних радіусів, внаслідок чого приходимо до задачі:

$$-\Delta_{x_1, y_1} \bar{u} = \Delta_{x_1, y_1} \bar{\varphi}_0 \quad \forall(x_1, y_1) \in \Omega_1,$$

$$\bar{u}|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \bar{u}|_0 = 0.$$

Для подальшого розв'язання задачі застосовується метод Монте-Карло[2].



1. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции.- М.:Наука, 1974.-432с.
2. *Бочек И.А.* О вычислении коэффициентов Ритца и Галеркина методом Монте-Карло /И.А. Бочек// Журнал вычислительной математики и математической физики.-1967. –Т. 4,№1. –с.172-176.

**ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ СИСТЕМИ ПРОФІЛІВ, ЩО ОБТІКАЮТЬСЯ  
ПОТЕНЦІАЛЬНИМ ПОТОКОМ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ**

Енгельгардт Володимир Вікторович, Україна  
Дніпропетровський національний університет  
Факультет прикладної математики

В даній роботі запропоновано чисельний метод розрахунку системи аеродинамічних профілів ідеальною нестисливою рідиною.

Математична модель базується на двовимірному рівнянні Лапласа для функції току в багатозв'язній області. Задача зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, для чисельного розрахунку якого використано метод колокацій. Для задоволення умов Чаплигіна-Жуковського [1] для кожного профіля запропонований наступний підхід. Гранична умова непротікання на поверхні  $i$ -го профілю перетворюється в крайову умову першого роду  $\Psi = C_i$ , де константи  $C_i$  знаходяться з додаткових умов, що швидкість потоку в контрольній точці, що розташована поблизу кромки, направлена вздовж бісектриси гострого кута кромки відповідного профілю.

Для чисельного розв'язування інтегрального рівняння використан прямий метод граничних елементів [2]. Розв'язування результуючої системи лінійних рівнянь здійснювалось стабілізованим методом біспряжених градієнтів [3].

На основі розробленого метода створена програма. Результати роботи програми представлені на рис. 1, де показана картина векторів швидкості при обтіканні системи трьох профілів «TsAGI B 12%», «NASA 63-012» та «Newman circular nose airfoil 12%».

Тут ясно видно плавний характер течії біля гострої кромки, що підтверджує задоволення постулату Чаплигіна-Жуковського. Після проведення розрахунків були обчислені коефіцієнти підйомної сили та лобового опору. Коефіцієнти лобового опору в результаті дав дуже малі величини, порядку  $10^{-4}$ , що цілком відповідає парадоксу Даламбера [2] про відстань опору в ідеальній рідині. Проведено порівняння підйомної сили одного та декількох профілів та зроблені висновки про ефективність такої конструкції. Коефіцієнти лінійної системи рівнянь були обчислені аналітично.

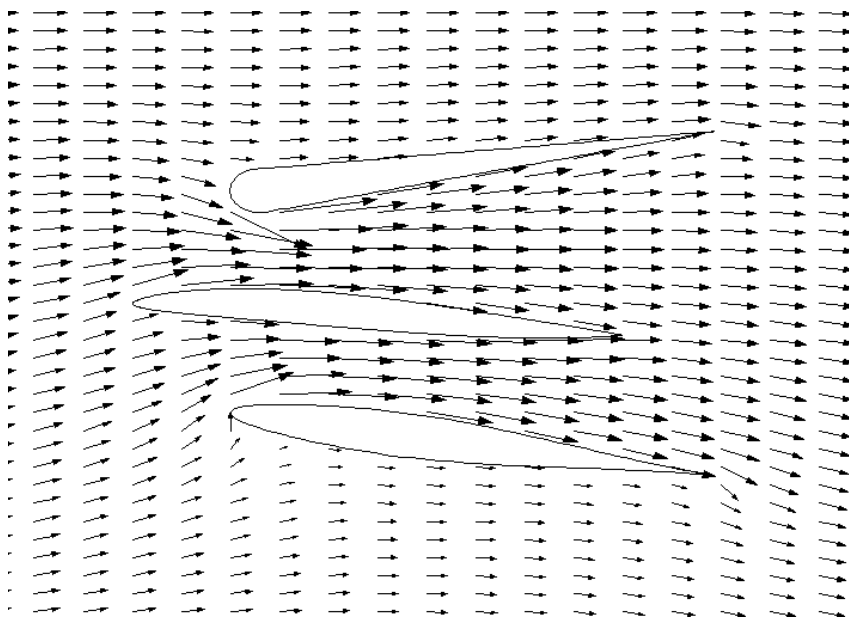


Рис. 1. Вектори швидкості поблизу трьох аеродинамічних профілів.

Програмне забезпечення складається з двох частин: модуль, який реалізує чисельне розв'язування задачі і модуль з графічним інтерфейсом, де задаються профілі і відображаються результати обчислення. Програмне забезпечення цілком не залежить від будь-якої операційної системи, тестування проводились в Windows та Linux.

Модуль з чисельним методом був розроблений на мові Fortran 95, скомпільований компілятором G95. Модуль з графічним інтерфейсом реалізований на мові C++. Для зображення інтерфейсу та результатів чисельних розв'язків використано OpenGL API.

1. Лойцянский Л.Г.; «Механика жидкости и газа», Наука, 1978 г.
2. Бреббия К., Тел лес Ж., Врубел Л.; «Методы граничных элементов», Мир, 1987 г.
3. R. Barrett; «Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition», SIAM, 1994



## ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ

Задорожний Сергій Олександрович, Україна  
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова  
Факультет прикладної математики

Для криптографії на еліптичних кривих над скінченим полем  $F_p$ ,  $p > 3$ , важливо знати порядок групи точок еліптичної кривої та її структуру. Добре відомо, що група точок кривої  $E$  є прямим добутком 2-х циклічних підгруп відповідно порядків  $M$  і  $L$ . Вони зв'язані співвідношенням

$$\#E = ML$$

тут  $\#E$  – порядок  $E$ .

Також відомо, що:

$$L \mid M \quad ; \quad L \mid p-1,$$

зокрема,  $L \mid D_p(E)$ , де

$$D_p(E) = (\#E, p-1).$$

Розроблений Шуфом алгоритм дозволяє визначити порядок цієї групи, використовуючи метод багатомодульної арифметики. Ми будемо деяке удосконалення процедури Шуфа, яке хоч і не зменшує порядок часу роботи алгоритму, але приблизно в 2 рази зменшує константу Шуфа.

Визначивши порядок  $E$  можна за допомогою імовірнісного алгоритму Міллера знайти  $M$  і  $L$ , а значить визначити структуру групи точок  $E$ . Але, на вхід алгоритму Міллера необхідно подати розкладене на множники число  $D_p(E)$ .

У своїй роботі ми розглядаємо питання, наскільки складно факторизувати це число за допомогою відомих на сьогодні детермінованих (наприклад, алгоритм Поларда-Штрасса) і імовірнісних (наприклад, гіпереліптичний тест Ленстра-Пілаї-Померанса) алгоритмів факторизації. Виявляється, що в середньому по всім еліптичним кривим над фіксованим полем це число факторизується імовірнісним алгоритмом за час  $(\log p)^{3/2+\varepsilon}$ , а детермінованим алгоритмом за  $(\log p)^{1+\varepsilon}$  (тут  $\varepsilon$  – скіль завгодно мале позитивне число).

Крім того, для еліптичних кривих над кільцем класів лишків  $Z_{p^n}$ , тобто для числа рішень порівняння

$$(1) \quad Y^2 = X^3 + AX + B \pmod{p^n},$$

доведена теорема



**Теорема.** Хай  $p > 3$  - просте число.  $n \geq 13$  - натуральне,  $p^{\frac{2m+23}{8}} \leq T_1 \leq p^n$ ,  $1 \leq T_2 \leq p^n$ . Позначимо через  $A(T_1, T_2)$  кількість рішень  $(x_0, y_0)$  порівняння (1), де  $-3A$  – квадратичний нелишок по модулю  $p$ , таких, що  $y_0 \neq 0 \pmod{p}$  і для яких

$$0 \leq x_0 \leq T_1, \quad 0 \leq y_0 \leq T_2.$$

Для величини  $A(T_1, T_2)$  має місце асимптотична формула

$$A(T_1, T_2) = \frac{T_1 T_2}{p^n} + O\left(\frac{T_1 T_2}{p^{n+1/2}}\right) + O\left(\exp(7n(\log n)^2) T_1^{1-(32n^3(\log n)^3)^{-1}}\right)$$

з абсолютними постійними в символах  $O$ .

Результати цієї теореми показують, що точки еліптичної кривої розподілені в квадраті із стороною  $p^n$  рівномірно. Що є підтвердженням того, що криптосистеми, засновані на еліптичних кривих практично крипто стійки.

- 
1. *H.W. Lenstra, Jr., J. Pila and C. Pomerance*, A hyperelliptic smoothness test, *Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A.* 345 (1993), 397–408.
  2. *C. Pomerance*, Analysis and comparison of some integer factoring algorithms, in *Computational Methods in Number Theory, Part I*, (H.W. Lenstra, Jr. and R. Tijdeman, Editors), *Math. Centre Tracts 154* (Math Centrum, Amsterdam), 1982, 89–139.
  3. *R. Schoof*, Counting points on elliptic curves over finite fields, *Journal de Thuorie des Nombres de Bordeaux*, 7 (1995), 219-254.
  4. *J. H. Silverman*, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, 1986.



**ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ТА СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ  
ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ  
КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА**

Заяць Ірина Зіновіївна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Нехай на нескінченновимірному гладкому періодичному многовиді  $M \subset C_l^{(\infty)}(R^1, R^2)$ ,  $R_+ \ni l$  — період, задана динамічна система

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + uv_x + u_x v \\ v_t = -u_x \end{cases} \quad (1)$$

де  $u, v \in M = C_l^\infty(R^1; R^n)$ ,  $n \in Z_+$ .

Розглянемо питання про наявність нескінченної ієрархії функціонально-незалежних законів збереження [1]. Для цього розглянемо рівняння Лакса:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + K'^* \phi = 0 \quad (2)$$

Штрих у рівнянні (2) означає похідну Фреше локального нелінійного функціоналу. Оператори  $K'$  і  $K'^*$  явно записують так

$$K' = \begin{vmatrix} \partial^3 + \partial v & \partial u \\ -\partial & 0 \end{vmatrix} \quad K'^* = \begin{vmatrix} -\partial^3 - v\partial & \partial \\ -u\partial & 0 \end{vmatrix}$$

В даній роботі знайдено ієрархію законів збереження, які мають вигляд:  $\gamma_j = \int_{x_0}^{x_0+l} \sigma_j[u, v] dx$ ,  $j \in Z_+$ , де  $\sigma_j[u, v]$ ,  $j \in Z$  — локальні

функціонали на  $M$ . Із рівняння (2), враховуючи асимптотичні розклади отримуємо систему нескінченних рекурентних співвідношень. Зробивши відповідні перетворення [1] послідовно одержуємо

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+l} v(t, x) dx, \quad \gamma_2 = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+l} v_x dx, \\ \gamma_3 &= \frac{4}{9} \int_{x_0}^{x_0+l} u dx - \frac{2}{9} \int_{x_0}^{x_0+l} v_{xx} dx, \quad \gamma_4 = \frac{2}{9} \int_{x_0}^{x_0+l} u_x dx + \frac{1}{9} \int_{x_0}^{x_0+l} v_{xxx} dx, \\ \gamma_5 &= \frac{8}{27} \int_{x_0}^{x_0+l} u_{xx} dx - \frac{2}{27} \int_{x_0}^{x_0+l} u v dx - \frac{1}{27} \int_{x_0}^{x_0+l} v_{xxx} dx + \frac{1}{27} \int_{x_0}^{x_0+l} v v_{xx} dx + \frac{1}{81} \int_{x_0}^{x_0+l} v^3 dx \end{aligned}$$



У системі (1)  $u$  і  $v$  є функціями від  $x$ ,  $t$ . Визначимо яку форму мають розв'язки нелінійної динамічної системи КдФ (1), використовуючи  $\tanh$  - метод знаходження точних розв'язків [3].

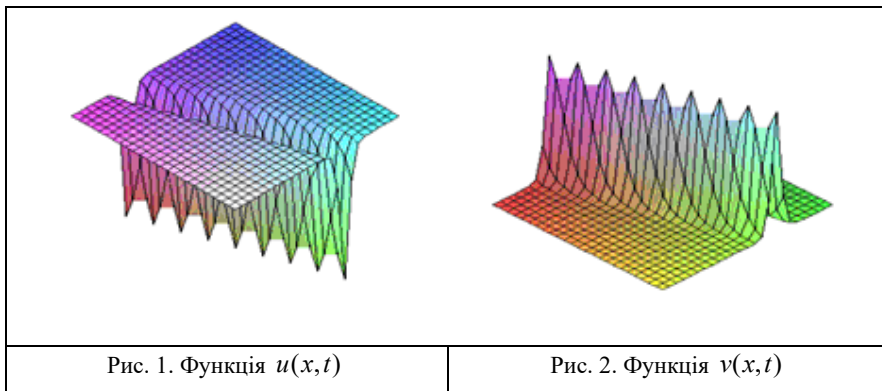
Запишемо систему (1) у вигляді

$$\begin{cases} u_{1,x_2} - u_{1,x_1x_1x_1} - u_{1,x_1}u_2 - u_{2,x_1}u_1 = 0 \\ u_{2,x_2} + u_{1,x_1} = 0 \end{cases}$$

де  $x_1 = x$ ,  $x_2 = t$  і  $u_1(x_1, x_2) = u(x, t)$ ,  $u_2(x_1, x_2) = v(x, t)$ .

В даній роботі знайдено солітонні розв'язки для системи (1).  
 $u(x, t) = 8 + 6 \tanh^2(x_1 + t + \varphi_0)$ ,  $v(x, t) = -6 \tanh^2(x_1 + t + \varphi_0)$

Графічне зображення у випадку  $\varphi_0 = 0, k_1 = k_2 = 0, t = 0 : 10, x = -20 : 10$



При обчисленні законів збереження і побудові солітонних розв'язків, використовувався пакет MAPLE.

1. Митропольський Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатський А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты – К.: Наук. думка, 1987.
2. Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов: перевод с англ. – М.: МИР, 1983.
3. Меньшикова О.В., Притула М.М. Солітонні розв'язки для інверсної модифікованої нелінійної динамічної системи Кортевега-де Фріза // Мат.вісник НТШ. – 2006. – №3. – С.75-80



## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ГРУНТАХ

Ігнатишин Оксана Іванівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Грунт і вода – основні елементи середовища перебування організмів та біологічної активності. Рух води в ґрунтах, який називається просочуванням або фільтрацією, має велике значення в багатьох галузях сільського господарства, промисловості та науки.

Математична постановка задачі фільтрації в декартових координатах зводиться до розв'язання рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) = f, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

з граничними умовами:

$$h = h_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (2)$$

$$k_1 \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_2 \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2$$

де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти фільтрації.

Оскільки область фільтрації  $\Omega$  не завжди є прямокутником, а має криволінійні границі, тому задачу (1),(2) розв'язуємо в криволінійних координатах  $\eta, \xi$ .

Отже рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3)$$

де  $H_1, H_2$  – параметри Ляме.

Для розв'язування задачі використовується метод сіток і різницеве рівняння набуває наступного вигляду:

$$\frac{k_{j+1,k}^1 \Phi_{j+1,k} - 2k_{j,k}^1 \Phi_{j,k} + k_{j-1,k}^1 \Phi_{j-1,k}}{\Delta \xi^2} + \frac{k_{j,k+1}^2 \Phi_{j,k+1} - 2k_{j,k}^2 \Phi_{j,k} + k_{j,k-1}^2 \Phi_{j,k-1}}{\Delta \eta^2} = 0 \quad (4)$$

де  $k^1 = \frac{H_2}{H_1}$ , а  $k^2 = \frac{H_1}{H_2}$ .

Використовуючи для розв'язування (4) метод верхньої релаксації, отримаємо (5):



$$\Phi_{j,k}^* = \frac{\left\{ \left( \frac{-\Phi_{j,k+1} - \Phi_{j,k-1}}{2\Delta\eta} \right) + \left( \frac{k_{j+1,k}^1 \Phi_{j+1,k} + k_{j-1,k}^1 \Phi_{j-1,k}}{\Delta\xi^2} \right) + \left( \frac{k_{j,k+1}^2 \Phi_{j,k+1} + k_{j,k-1}^2 \Phi_{j,k-1}}{\Delta\eta^2} \right) \right\}}{\left( \frac{2k_{j,k}^1}{\Delta\xi^2} + \frac{2k_{j,k}^2}{\Delta\eta^2} \right)}$$

$$\Phi_{j,k}^{n+1} = \Phi_{j,k}^n + \lambda(\Phi_{j,k}^* - \Phi_{j,k}^n) \text{ де } 0 < \lambda < 2, \quad (6)$$

$$|\Phi_{j,k}^{n+1} - \Phi_{j,k}^n| < \varepsilon \quad (7)$$

де  $\varepsilon$  деяка задана точність.

Розроблене програмне застосування було протестовано на прикладах з відомими розв'язками. Аналіз результатів розв'язування тестової задачі дозволяє зробити висновок про ефективність використання методу для розв'язування задач поширення вологи в ґрунтах. А проведені експерименти показали результати, очікувані теоретично.

- 
1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
  2. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
  3. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. – М.: Мир, 1990. – 726 с.
  4. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т.1. – М.: Мир, 1991. – 504 с.



## ПОРІВНЯННЯ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ ДЛЯ АВТОМАТИЗОВАНОГО АНАЛІЗУ ГІСТОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Каденко Вікторія Павлівна, Україна  
Одеська Державна Академія Холоду  
Спеціалізовані комп'ютерні системи

У роботі надані результати розробки деяких методів і алгоритмів для автоматичного виділення гістологічних об'єктів на графічних зображеннях, зроблених у ході медичних обстежень. Пропонується порівняти результати розпізнавання об'єктів і оцінки можливостей використання алгоритмів при вирішенні різних прикладних завдань пов'язаних з обробкою графічної інформації.

Будь-яке зображення відрізняється достатньо низькою контрастністю, що ускладнює його подальший аналіз. Враховуючи це, використовуються деякі методи попередньої фільтрації.

Для вирішення задачі виділення перепадів яскравості можна застосовувати диференціальні оператори, наприклад оператор Лапласу.

Диференціальні методи обробки засновані на тому факті, що похідна функції яскравості за напрямком, що збігається з напрямком смуги, має найменше значення серед похідних за напрямком в поточній крапці. Вагова функція визначається за допомогою співвідношення:

$$w = \frac{\max_{\phi} |f'_{\phi}| - \min_{\phi} |f'_{\phi}|}{\max_{\phi} |f'_{\phi}|}$$

Пропонується сполучення в масці 5x5 похідних за наступними напрямками: (0,90), (45, 135), (63, 117), (26, 154) градусів і застосування оператора Лапласа там, де похідна мінімальна, в результаті отримуємо наступні маски:

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>-</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>24</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	1			24			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>-</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>12</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	-	1	1			12			0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-6</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1																																																																																			
1	1	1	1	1																																																																																			
1	1	-	1	1																																																																																			
		24																																																																																					
1	1	1	1	1																																																																																			
1	1	1	1	1																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	1	1	1	0																																																																																			
1	1	-	1	1																																																																																			
		12																																																																																					
0	1	1	1	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	1	-6	1	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
(0,90)	(45,135)	(63,117)																																																																																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>-6</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	-6	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	(26,154)																																																													
0	0	0	0	0																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
1	1	-6	1	1																																																																																			
0	0	1	0	0																																																																																			
0	0	0	0	0																																																																																			

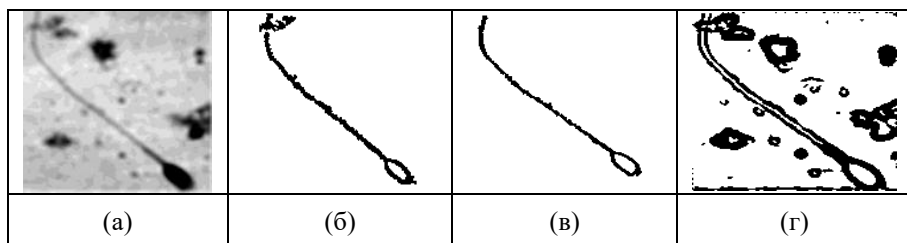


Така модифікація дозволяє позбутися від деяких дефектів на зображенні.

Для усунення викривлювання контуру та об'єднання близьких паралельних граней, що відповідають одному вихідному контуру, пропонується фільтр Канні, створений для виділення східчастих контурів. Фільтр Канні дає кращі результати, якщо використовувати два граничних значення - верхнє та нижнє.

Для того, щоб виділити на зображенні певний об'єкт пропонується алгоритм зв'язування, ідея якого заснована на тому, що ділянки однієї безлічі на бінарному зображенні позначаються міткою, і в області фокусування на об'єкті максимальна кількість міток зв'язності зосереджена на ньому.

За результатами наведених вище алгоритмів і методів можна зробити висновок про те, що для деяких зображень комбінація методів є вдалою й дозволяє позбутися від деяких дефектів на зображенні:



**На рисунку:** Початкове зображення (а); результат застосування фільтра Лапласа й алгоритму зв'язування (б); результат застосування комбінованих методів і алгоритму зв'язування (в); результат застосування модифікованого фільтра Канні (г).

1. Л.М. Гольденберг, Цифрова обробка сигналів. Москва: Радіо й зв'язок, 1985
2. Р. Богнер, Введення в цифрову фільтрацію. Москва: 1976
3. У. Претт, Цифрова обробка зображень. Кн 2. - М.: 1982



## ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ

Келепко Олександр Юрійович, Рева Роман Сергійович  
Харківський національний університет радіоелектроніки

У роботі розглянуто систему підтримання процесу навчання, що відбиває систему існуючих математичних знань. Інформаційну систему створено з метою підвищення якості й ефективності отримання знань суб'єктом навчання.

Весь обсяг людських знань можна умовно поділити на три групи залежно від важливості й узагальненості, а отже, й розмірів імовірної області застосування: інформація (відповіді на питання хто? що? де? коли?), знання (відповіді на питання як? яким чином?) і розуміння (відповіді на питання чому? навіщо?).

Дослідження свідчать, що більшість навчальних програм освітніх систем світу містять близько 60% інформації, 25% знань і лише тільки 15% матеріалу, що його можна віднести до категорії розуміння.

Оскільки протягом практичної діяльності людині доводиться розв'язувати нестандартні задачі, то зрозуміло, що використовувати для їх розв'язання апіорну інформацію є небезпечним, позаяк вона дуже швидко застаріває, часто не відповідає тим середовищу та ситуації, у яких вона застосовується.

Відтак студент має отримувати не тільки знання, але й метазнання (знання про знання) – інформацію про основоположні засади їхньої структури й утворення. Цій меті відповідає призначення інформаційної системи – аналіз, адаптація, узагальнення й максимально можлива уніфікація інформації про ті самі об'єкти, що міститься в різноманітних джерелах; нагромадження, структурування знань і надання їх користувачу відповідно до його запитів.

Перед уведенням інформації до сховища даних проводиться її субстратний (виявлення елементного складу) і структурний (виявлення зв'язків між елементами) аналіз.

Інформація в сховищі зберігається на найнижчому рівні абстракції, у вигляді найпростіших елементів, таких як терміни, означення, висловлювання (і доведення, якщо вони існують), методи, алгоритми. Це зумовлює велику гнучкість стосовно способів подання її користувачу в залежності від призначення й мети.

Чітка структурованість наукової інформації дозволяє студенту не тільки оволодіти необхідними знаннями, але й усвідомити принципи їхньої побудови. Для глибшого й повнішого розуміння матеріалу в системі передбачено розміщення допоміжної інформації:

- аналіз різних формулювань і вказівки з їхнього використання;



- актуальні приклади з навчальної та наукової практики;
- відповіді на питання, що їх часто ставлять студенти;
- історичні відомості про зародження й розвиток понять, ідей, методів, алгоритмів;
- питання та завдання до самоконтролю тощо.

Базу даних сховища знань організовано таким чином, що вона надає максимальної гнучкості структуруванню інформації. На сьогодні система пошуку та організації даних підтримує два методи подання інформації:

- як дерево знань;
- як комплекс навчальних курсів.

Це дає можливість використовувати сховище знань як в навчальних закладах, так і в вигляді довідкового посібника для широкого загалу.

Сховище даних створено з використанням клієнт-серверних технологій, а саме засобами системи керування базами даних MySQL та мовою серверних сценаріїв PHP 5. Застосування саме цих технологій не вимагає від клієнта (тобто користувача сховища) жодних специфічних програмних засобів, окрім браузера, а також ніяк не обмежує обсяг інформації в сховищі.

- 
1. *Лямец В.І., Тевяшев А.Д.* Системний аналіз. Вступний курс, - Харків: ХНУРЕ, 2004. – 448 с.
  2. *Коггзолл Д.* PHP 5. Полное руководство. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 752 с.



**ДОСЯГНЕННЯ КОМПРОМІСУ ДВОХ ГІЛОК ВЛАДИ В НЕТИПОВОМУ ВИПАДКУ РОЗПОДІЛУ ВЛАДНИХ ПОВНОВАЖЕНЬ**

Калинюк Вячеслав Вікторович  
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича  
Факультет прикладної математики

В роботі [1] запропонована математична модель, якою описується динаміка владних повноважень двох гілок влади. Математична модель набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = f_{11}p_1(p_{11} - p_1) + f_{21}p_2(p_{21} - p_1), \\ \frac{dp_2}{dt} = f_{12}p_1(p_{12} - p_2) + f_{22}p_2(p_{22} - p_2), \end{cases} \quad (1)$$

де безрозмірні функції часу  $p_1(t) > 0$ ,  $p_2(t) > 0$  при  $t \geq t_0$  визначають поточні рівні влади партнерів (гілок влади), функції  $f_{ij} = f_{ij}(t, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}) \geq 0$ , – характеризують рівні компетентного володіння партнерів,  $p_{ij}(t) > 0$  - рівень влади, який і-й партнер делегує j-му,  $i, j = 1, 2$ .

Для випадку сталих коефіцієнтів  $p_{ij}$  і  $f_{ij}$ , стаціонарні розв'язки моделі визначаються із системи:

$$\begin{cases} p_2 = -\frac{f_{11}p_1(p_{11} - p_1)}{f_{21}(p_{21} - p_1)} \\ p_1 = -\frac{f_{22}p_2(p_{22} - p_2)}{f_{12}(p_{12} - p_2)} \end{cases}$$

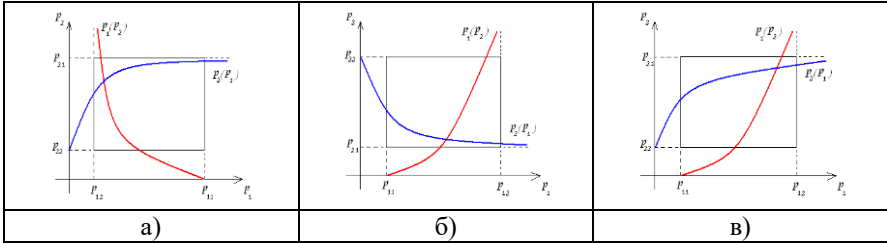
Хоча б один із трьох розв'язок системи лежать в області, де  $p_1$  змінюється між  $p_{11}$  і  $p_{21}$ , а  $p_2$  - між  $p_{22}$  і  $p_{12}$ . Ця область в площині  $p_1 p_2$  називається владним прямокутником. В роботі розглядається нетиповий випадок, коли порушується хоча б одна з умов

$$p_{21} < p_1 < p_{11}, \quad p_{12} < p_2 < p_{22}. \quad (2)$$

Владні прямокутники при різних ситуаціях нетипового випадку:

- а)  $p_{21} < p_1 < p_{11}$  і  $p_{22} < p_2 < p_{12}$ ;
- б)  $p_{11} < p_1 < p_{21}$  і  $p_{12} < p_2 < p_{22}$ ;
- в)  $p_{21} < p_1 < p_{11}$  і  $p_{12} < p_2 < p_{22}$

показані на рис. 1.



**Рис. 1.** Нетиповий випадок розподілу владних повноважень.

Досліджено, що в нетиповому випадку існує єдине положення рівноваги. На відміну від типового випадку, де положення рівноваги може бути тільки вузлом, в нетиповому випадку положення рівноваги може бути як вузлом так і фокусом. Умова

$$\Delta p_1 \leq p_{21} \quad (3)$$

$\Delta p_1 = p_{11} - p_{21}$  є достатньою для того, щоб положення рівноваги було асимптотично стійким. Зауважимо також, що у випадку (в) умова (3) виконується завжди, тобто положення рівноваги – асимптотично стійке.

Проведено числове моделювання у випадку рівних партнерів та нетипового розподілу владних повноважень. Наприклад, для коефіцієнтів

$$p_{11} = p_{12} = 1, \quad p_{21} = p_{22} = 0.05, \quad f_{11} = f_{12} = 1, \quad f_{21} = f_{22} = 3$$

існують три положення рівноваги, два з яких асимптотично стійкі і один – нестійкий вузол. А при значеннях коефіцієнтів

$$p_{11} = p_{22} = 1, \quad p_{21} = p_{12} = 0.05, \quad f_{11} = f_{22} = 1, \quad f_{21} = f_{12} = 3$$

отримується єдине асимптотично стійке положення рівноваги – фокус.

1. Михайлов А.П., Юхно Л.Ф. // Математическое моделирование. – 2001. – Т.13, №1. – С. 65-75.

2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

**МЕТОД ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ІТЕРОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ**

Каракулов Олексій Миколайович, Україна  
Харківський університет радіоелектроніки  
факультет прикладної математики

Для розміщення великих масивів відеоінформації у сховищах даних інформаційно-управляючих систем необхідні ефективні алгоритми архівації. Перспективним напрямком такої архівації є застосування фрактального стиснення, базованого на тому, що за допомогою системи ітерованих функцій (СІФ) зображення постає у більш компактній формі. Тривимірне перетворення

$$w_i(\vec{x}) = w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ q \end{pmatrix},$$

визначене на підмножині  $R_i$  декартового квадрату, переводить частину поверхні  $S$  в область  $D_i$  зі зсувом  $(e, f)$  і поворотом, заданим коефіцієнтами  $a, b, c, d$ . Якщо інтерпретувати значення  $S$  як яскравість точок, то вона зменшиться у  $p$  раз зі зсувом  $q$ . Скінченна сукупність  $W$  стиснюючих тривимірних афінних перетворень  $w_i$ , визначених на областях  $R_i$ , утворює СІФ. Базовою задачею фрактального стиснення зображень є знаходження відповідних перетворень.

Змінюючи порогові значення і пріоритет ступенів стиснення і втрат, можна управляти компресією зображення. Таким чином, СІФ задає фрактальну структуру, скільки завгодно близьку к початковому зображенню, що вирішує проблему масштабування.

Розглянемо задачу визначення СІФ із заданими властивостями на базі комплексних позиційних систем числення. Назвемо комплексною позиційною системою числення  $\langle A, z \rangle$  відображення комплексних чисел  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, a_{-1}, \dots (a_k \in A)$  у число  $b$  за правилом:

$$b = (a_n a_{n-1} \dots a_0 \cdot a_{-1} \dots)_z = \sum_{k=-\infty}^n a_k z^k,$$

де  $z \in \mathbb{C}$  - основа системи числення, а  $A = \{a_k\} \subset \mathbb{C}$  - множина її цифр. Назвемо  $S$ -множиною системи числення  $\langle A, z \rangle$  множину усіх чисел, які можна записати у вигляді правильних дробів у цій системі

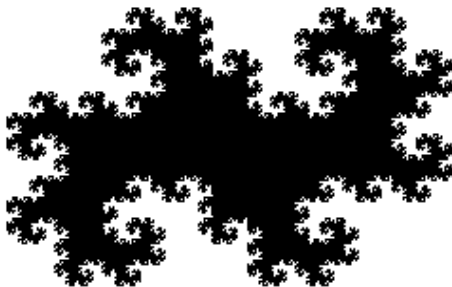
числення:  $S = \{(0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots)_z\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}\}$ ,  $a_k \in A$ . У комплексному

випадку  $S$ -множина буде самоподібною, а її межа буде мати дрібну



вимірність Хаусдорфа (від 0 до 2). Таким чином, в загальному випадку  $S$ -множина є фракталом.

Наприклад, для системи числення  $\langle \{0, 1\}, i-1 \rangle$   $S$ -множина є фракталом, що відомий як «подвійний дракон»:



**Рис.1**  $S$ -множина системи числення  $\langle \{0, 1\}, i-1 \rangle$ .  
Вимірність Хаусдорфа його межі  $D_H \approx 1.52$ .

У вигляді  $S$ -множин можна уявити також деякі інші відомі фрактали, наприклад множину Кантора або килим Серпинського. Узагалі,  $S$ -множину можна побудувати як СІФ з перетвореннями  $f_k(S) = \frac{S - a_k}{z}$ . У такому разі отримаємо стійкий ітераційний процес, що збігається при  $|z| > 1$ . Це значить, що  $S$ -множини уявляють собою окремий випадок СІФ, що дозволяє використовувати їх для фрактального стиснення зображень. Вибір параметрів  $S$ -множини дозволяє розробляти алгоритми фрактального стиснення зображень з різними властивостями.

Результати тестування деяких таких алгоритмів вказують на те, що запропонований підхід до побудови СІФ може бути застосовано для стиснення відеоінформації у інформаційно-управляючих системах, в окремому випадку – у системах дистанційної освіти.

---



## МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Карчевська Ольга Ігорівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Економічний факультет

Становлення страхового ринку України, створення страхових компаній згідно з нормами, що наближені до міжнародних, збільшують вимоги до їх фінансової надійності. Одним з основних показників фінансової надійності страхової компанії є забезпечення реальної платоспроможності. Це в свою чергу забезпечується через формування збалансованого страхового портфеля і здійснення правильної інвестиційної політики[2, с.382].

В дослідженні розглянуто модель формування страхового портфеля та розподілу коштів між інвестиційними проектами.

Розглянемо страхову компанію, що реалізує  $N$  видів страхових послуг. Також є можливість інвестувати вільні кошти в певні проекти (таких проектів є  $K$ ), відомою є норма прибутковості кожного проекту (враховується інфляція). Потрібно визначити оптимальну структуру страхового портфеля - кількість договорів кожного виду ( $x_i$ ), а також яку суму з вільних коштів інвестувати в кожен проект ( $z_k$ ).

В загальному вигляді модель можна представити таким чином:

$$\sum_{i=1}^N x_i (P_i - S_i) + \sum_{k=1}^K z_k (1 + i_k)^{d_k} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \cdot \tilde{r}_i \leq \tilde{R} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{z_k}{u} \cdot \tilde{v}_k \leq \tilde{V} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot (P_i - S_i) - W_0 = u \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^K z_k \leq u \quad (5)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, N} \quad (6)$$

$$z_k \geq 0, k = \overline{1, K} \quad (7)$$

$x_i$  - кількість договорів  $i$ -ого виду в страховому портфелі,  $i = \overline{1, N}$  ;

$z_k$  - сума, яку інвестуємо в  $k$ -ий проект,  $k = \overline{1, K}$  ;

$i_k$  - норма прибутковості  $k$ -ого проекту,  $k = \overline{1, K}$  ;

$u$  - капітал страхової компанії (страхові резерви);



$\tilde{r}_i$  - ризиковість і-ого виду страхування,  $i = \overline{1, N}$ ;

$\tilde{R}$  - ризиковість страхового портфеля;

$\tilde{v}_k$  - ризиковість k-ого інвестиційного проекту,  $k = \overline{1, K}$ ;

$\tilde{V}$  - ризиковість інвестиційного портфеля;

$P_i$  - середній розмір премій по і-ому договору;

$S_i$  - середній розмір виплат по і-ому договору;

$W_0$  - кошти на формування обов'язкових резервів та інші витрати.

Цільова функція передбачає максимізацію виручених коштів від страхової діяльності.

Обмеження (2) визначає, що сумарний рівень ризику за всіма видами діяльності не перевищує деякий встановлений рівень. Аналогічно (3) для страхового портфеля. В (4) визначається розмір коштів для інвестування і відповідно в (5) забороняється перевищувати цю суму. Обмеження (6) і (7) - на додатність змінних.

Показники  $\tilde{r}_i$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{v}_k$ ,  $\tilde{V}$  можна визначати через нечіткі числа, що дозволить врахувати невизначеність при оцінці ризику. Рівні ризиковості  $\tilde{R}$  та  $\tilde{V}$  вибираються на основі експертних оцінок.

З допомогою даної моделі можна визначити оптимальну структуру розподілу коштів для страхової компанії.

Одержану модель можна розв'язувати методами нечіткого лінійного програмування [3].

1. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки: Навч. Посібник. К.: КНЕУ, 2003. - 408с.
2. *Ротова Т.А., Руденко Л.С.* Страхування: Навч. посіб. - К.:Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2001. - 400с.
3. *Сявакко М.С., Рибицька О.М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. - Львів: НВФ "Українські технології", 2000.-с.140-205.



ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ  
НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ НА  
ОДНОМУ КЛАСІ ФУНКЦІЙ

Княжев Ігор Олексійович, Україна  
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова  
ІМЕМ, Прикладна математика

Для наближеного обчислення інтегралу звичайно використовують квадратурні формули

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i * f(x_i) + R_n(f) = P_n(f) + R_n(f).$$

Кожна така формула визначається набором вузлів  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  і ваговими коефіцієнтами  $c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Інформацією  $I(f)$ , яка використовується для наближеного обчислення значення інтегралу, слугують обчислені значення підінтегральної функції у вузлах  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $I(f) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ .

Ефективність таких формул оцінюється за допомогою погрішності на класі функцій, які розглядаються, позначимо його через  $K$

$$E(P_n, K) = E(P) = \sup_{f \in K} |R_n(f)|.$$

Більш точну оцінку, якщо відома інформація  $I(f)$ , може дати апостеріорна похибка

$$E_a(f, P) = \sup_{\varphi \in K(f)} |R_n(\varphi)|,$$

де  $K(f)$  - клас функцій  $\varphi(x)$ , які мають ту ж інформацію, що і  $f(x)$

$$K(f) = \{\varphi : \varphi \in K, \varphi(x_i) = f(x_i); i = \overline{1, n}\}.$$

Для побудови оптимального алгоритму  $P_n^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , необхідно мінімізувати похибку на класі  $E(P_n)$  по всім алгоритмам  $P_n$

$$E_n^* = \min_{P_n \in M_n} E(P_n), \text{ де } M_n - \text{ клас алгоритмів, що розглянуті, і знайти}$$

алгоритм  $P_n^*$ , якщо він існує, для якого

$$E_n(P_n^*) = E^*$$

Вперше задача пошуку оптимальних алгоритмів на класах функцій була розглянута у роботі [1]. В подальшому теорія оптимальних алгоритмів найбільш повно висвітлена у працях [2], [3].



В нашій роботі розглянуто питання про побудову оптимального алгоритму чисельного інтегрування на класі зростаючих функцій, які задовольняють умові Ліпшиця із константою  $L$ .

В роботі для довільного алгоритму  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  побудована наближена формула чисельного інтегрування

$$P_n(f) = f(x_1)\Delta x_0 + f(x_n)\Delta x_n + \frac{L}{4}(\Delta x_n^2 - \Delta x_0^2) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i (f(x_i) + f(x_{i+1})) \text{ де } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i; x_0 = a, x_n = b$$

Знайдені апріорна і апостеріорна погрішності

$$E(P) = \frac{L}{8}(\Delta x_0^2 + \Delta x_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i^2),$$

$$E_a(P) = \frac{L}{4}(\Delta x_0^2 + \Delta x_n^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta f(x_i) \Delta x_i - \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta f(x_i)^2,$$

де  $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

Побудований оптимальний алгоритм  $P_n^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,

$$x_i^* = a + \frac{b-a}{2n}(2i-1), \quad i = \overline{1, n}$$

Отримана гарантована похибка на класі функцій, що розглянуті, для оптимального алгоритму та його апостеріорна похибка

$$E_n^* = E(P_n^*) = \frac{L}{8n}(b-a)^2,$$

$$E_a(f, P_n^*) = \frac{L}{4} \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b-a}{2n} \Delta f(x_i) - \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta f(x_i)^2$$

Знайдене наближене значення інтегралу

$$P_n^*(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1978. – 256с.
2. Дж. Трауб, Х. Вожьянковский. Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 378 с.
3. Задірака В.К., Бабич М.Д. и др.. Т-ефективні алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальних та прикладної математики. – К., 2003. – 261 с.



## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУСЛОВОГО СТОКУ ВОЛОГИ

Коковська Я.В., Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Теоретичні дослідження формування руслового стоку, водного балансу річкових водозборів, процесів поглинання талих і дощових вод в річкових басейнах, переміщення паводкових хвиль в руслі склали основу математичного моделювання прогнозів водного режиму[2].

Один з етапів такого дослідження становить задача моделювання руслового стоку вологи.

Розглянемо рух рідини (див. рис.1),

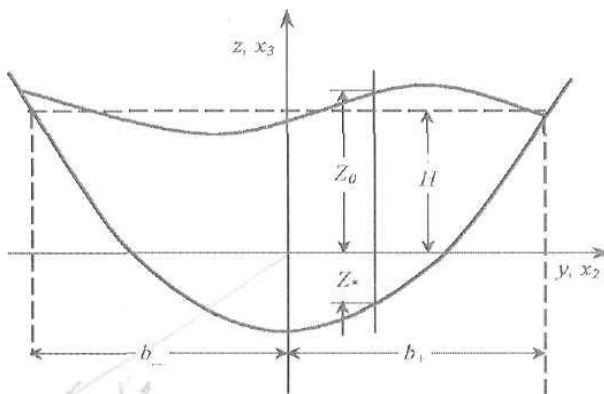


Рис.1

який описується системою рівнянь [1]:

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{U^2}{C^2 R} = i,$$

де  $U$  і  $F$  - невідомі функції,  $g$  - прискорення сили тяжіння,  $c = const$  - коефіцієнт Шезі,  $i = \sin \delta = const$  - нахил лінії середнього дна,  $B = b_- + b_+ = const$  - ширина вільної поверхні,  $R = const$  - гідравлічний радіус русла.

Доповнимо ці рівняння початковими:

$$U|_{t=0} = u_0(x), \quad F|_{t=0} = f_0(x) \text{ на } [0, L]$$



та крайовими умовами:  $U(t, 0) = 0, F(t, 0) = 0$ .

Для даної початково-крайової задачі сформулюємо варіаційну задачу. Помножимо перше рівняння задачі на довільну функцію  $\varphi \in V$ , друге - на  $\psi \in V$  і результати проінтегруємо по області  $\Omega$ .

Введемо такі білінійні форми:

$$a(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx; \quad b(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx; \quad c(u, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx;$$
$$d(u, f, \varphi) = \int_{\Omega} u f \varphi dx$$

а також лінійний оператор:  $l(\varphi) = \int_{\Omega} i \varphi dx$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі запишеться:

Задано:  $u_0, f_0 \in H$

Знайти пару:  $(u, h) \in L^2(0, T; V \times V)$  таку, що

$$\begin{cases} a(u, f, \varphi) + a(f, u, \varphi) + b(f', \varphi) = 0 \\ \frac{1}{g} b(u', \psi) + \frac{1}{g} a(u, u, \psi) + \frac{1}{B} c(f, \psi) + \frac{1}{C^2 R} d(u, u, \psi) = \langle l, \psi \rangle \\ b(u(0) - u_0, \varphi) = 0, b(f(0) - f_0, \psi) = 0 \end{cases}$$

Для побудови схеми розв'язку цієї задачі була проведена напівдискретизація варіаційної задачі в часі, а також дискретизація за просторовою змінною із використанням апроксимацій Гальоркіна. В середовищі візуального програмування Delphi розроблено програму для розв'язування цієї задачі, яку перевірено на декількох тестових прикладах.

1. *Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю. И.* Идеализация сложных динамических систем.- М.: Наука, 1976-272 с.
2. *Кучмент Л.С.* Модели процессов формирования речного стока.- Л.: Гидрометео издат, 1980-142 с.



## НАДЛИШКОВИЙ ТИСК НА ФРОНТІ СФЕРИЧНОЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ.

Кононов О.О., Україна;  
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова  
ФММ;

Вивчення газодинамічних параметрів вибухових ударних хвиль, що поширюються, є важливою практичною задачею. Особливий інтерес представляє одержання єдиної аналітичної залежності надлишкового тиску  $\Delta p$  на фронті ударної хвилі від відстані  $r$  між фронтом і джерелом вибуху у всьому діапазоні зміни  $r$ . Строге рішення цієї задачі чисто аналітичними засобами навіть для порівняно простої моделі миттєвого точкового вибуху (ТВ) у середовищі з протитиском нашоухується на нездоланні математичні труднощі. До дійсного часу відомі наближені асимптотичні формули для двох граничних випадків-  $R \ll 1$  (Мельникова, 1953) і  $R \gg 1$  (Ландау, 1945; Якимов, 1955), де  $R$  -обезрозмірний радіус ударної хвилі. У проміжній області  $R \sim 1$  застосовуються або напівемпіричні формули (Садовский, 1952), або табличні дані, отримані в результаті чисельного рішення задачі на ЕОМ (Охоцимский та ін., 1957).

Недавно в роботі [1] був запропонований аналітичний метод побудови єдиної залежності  $\Delta p(R)$ . Використовуючи цей метод, знайдемо залежність  $\Delta p(R)$  функціонально відмінну від знайденої в роботі [1].

Надлишковий тиск поблизу центра ( $R \ll 1$ ) виражається, згідно [2], у виді:

$$\Delta p = \frac{Q_1}{R^3} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} Q_2 + o(1), R = \frac{r}{r_d} \ll 1, r_d = \left( \frac{E_0}{p_0} \right)^{\frac{1}{3}}, Q_1 = \frac{8}{25(\gamma+1)\alpha}, \quad (1)$$

где  $Q_2 = 0,918$ ,  $\alpha = 0,861$  при  $\gamma = 1,4$ .

Далека зона вибуху ( $R \gg 1$ ) описується відомими законами загасання. Для цікавлячої нас залежності маємо [3]:

$$\Delta p = \frac{B_1}{r\sqrt{\ln(r/r_*)}} + \frac{B_2}{r(\ln(r/r_*))^2} + o\left( \frac{1}{r(\ln(r/r_*))^2} \right), \quad (2)$$

причому, визначення невідомих постійних  $B_j$  і  $r_*$  вимагає обліку ближньої зони вибуху. Розклад, що описує змінення  $\Delta p$  для усіх  $0 < R < \infty$  будемо шукати у виді:



$$\Delta p = \frac{A_1}{R\sqrt{\ln(R/R_* + C)}} + \frac{A_2}{R(\ln(R/R_* + 1))^2} - \frac{A_2}{R(\ln(R/R_* + C))^2} + \frac{A_3}{R^2} + o\left(\frac{1}{R(\ln(R/R_*))^2}\right) \quad (3)$$

з невідомими  $A_j, R_*, C$  Легко показати, що введення постійної  $C$  та додаткового члена  $\frac{A_3}{R^2}$  не вплине на характер асимптотики (2), тому

що додасть доданки не вище  $O\left(\frac{1}{R(\ln(R/R_*))^{7/2}}\right)$ .

Впливаючи [1], перерозкладемо даний вираз по ступенях  $R \ll 1$  і дорівняємо коефіцієнти при ступенях  $R$  отриманого розкладу коефіцієнтам при відповідних ступенях розклада(1). У підсумку одержимо систему для визначення невідомих :

$$A_1 = \left(\frac{1}{(\ln C)^2} - \frac{1}{12}\right)\sqrt{\ln C} \frac{Q_1}{R_*}; \quad A_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Q_1 \left/ \left(\frac{3}{2C(\ln C)^3} + \frac{1}{24C \ln C}\right)\right.; \quad (4)$$

$$A_2 = \frac{Q_1}{R_*^2}; \quad A_3 = -\frac{Q_1}{R_*}.$$

Для того щоб замкнути задачу визначення констант скористаємося отриманим у [4] рівнянням для інтеграла ентропійних втрат в ударній хвилі на всьому проміжку її поширення (як закон збереження енергії при ТВ).

$$\frac{4\pi}{\gamma-1} \int_0^\infty \left[ (1 + \Delta p)^{1/\gamma} \frac{2\gamma + (\gamma-1)\Delta p}{2\gamma + (\gamma+1)\Delta p} - 1 \right] R^2 dR = \frac{1}{\gamma} \quad (5)$$

Збіжність інтеграла забезпечена асимптотиками (2) і (3) при  $R \ll 1$  і  $R \gg 1$ , відповідно.

У результаті для  $\gamma = 1,4$  вдається однозначно знайти

$$R_* = 0,899 \quad \text{і} \quad C = 1,748. \quad (6)$$

З (4) далі одержуємо:

$$A_1 = 0,503, \quad A_2 = 0,194, \quad A_3 = -0,174 \quad (7)$$

Побудоване вираження (3) являє собою єдину аналітичну формулу залежності від надлишкового тиску на фронті УВ, породженої ТВ у середовищі з протитиском, на всьому проміжку її поширення  $0 < R < \infty$ .

Отримана формула (3) досить добре описує відповідно до [5] перепад тиску на фронті ударної хвилі.



1. *Асланов С.К.* Об асимптотике взрывных ударных волн. // Доповіді НАН України, 2003, №4.
2. *Мельникова (Бурнова) Н.С.* Исследование задачи о точечном взрыве. // Диссертация, М. 1953. (см. РЖ “Механика”, 1954, №3, реф. 2535).
3. *Якимов Ю.Л.* Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн.// ПММ, 1955, 19, вып. 6, с.681-692.
4. *Асланов С.К., Голинский О.С.* Энергия асимптотически эквивалентного точечного взрыва для взрыва заряда конечного объема в совершенном газе.// ПМТФ, 1988, №6, с. 44-51.
5. *Охоцимский Д.Е., Кондрашева И.Л., Власова З.П., Козакова Р.К.* Расчет точечного взрыва с учетом противодействия.// Тр.МИАН СССР, 1957, т. 50. 156 с.



## ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ЦІНОУТВОРЕННЯ ПОХІДНИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Контельов Євген Володимирович, Україна  
Дніпропетровський національний університет  
Факультет прикладної математики

Фінансові інформаційні системи, які реалізують елементи фінансової математики та різноманітних математичних методів (прогнозування, оцінювання тощо), на сьогоднішній день є одним з найперспективніших напрямів розробки прикладного програмного забезпечення. Ситуація ускладнюється тим, що зміна процентних ставок і доходностей на ринках стохастичні, а математичні моделі цих змін - випадкові процеси. Тому основна задача учасників фінансових ринків - визначення цін фінансових інструментів - може бути вирішена тільки із залученням імовірнісних методів. В фінансовій практиці все це втілює в собі оцінка похідних цінних паперів (опціони, ф'ючерси, форварди, тощо).

Значна частина статей, дисертацій і монографій, присвячених проблемам ціноутворення похідних цінних паперів, це результати роботи західних авторів. Серед вчених пострадянського простору також можна відмітити тих, хто знаходиться на передовій досліджень в галузі фінансової математики, а саме Ширяєв В. Я., Шведов А. С., Медведєв Г. А. та інші. Однак майже всі ці вчені використовують теоретичну базу західного зразку для побудови своїх теорій ціноутворення, а безпосередньо теорії та викладки, в свою чергу побудовані з використанням достатньо складного математичного апарату (інтегральні перетворення, стохастичні диференціальні рівняння, тощо). Необхідність використання подібних складних теоретичних методів була ініційована накладенням багатьох обмежень, як математичного, так й фінансового характеру.

Для уникнення необхідності непростих математичних обчислень (наприклад, чисельне вирішення диференційного рівняння другого порядку в частинних похідних для розв'язку рівняння Блека-Шоулса) була змодельована оцінка прийняття ризику про майбутню ціну базового активу з урахуванням деяких припущень, які спрощують обмеження, накладені на коефіцієнти стандартної формули дисконтування грошових потоків для визначення ціни опціону в класичних теоріях ціноутворення. Ціновий ряд базового активу був побудований за допомогою випадкових процесів з урахуванням відповідних коефіцієнтів розподілення. На основі отриманих значень цінового ряду базового активу були отримані коефіцієнти формули дисконтування для визначення ціни опціону. Для обчислення коефіцієнтів були визначені декілька формул (методів). Ці формули базуються на використанні величин, отриманих за допомогою статистичної обробки цінового ряду.



В фінансовій галузі окремого розгляду потребує питання програмного забезпечення для роботи з проблемою ціноутворення похідних цінних паперів. Серед західних прикладів можна привести програми, які розповсюджуються офіційним сайтом опціонної біржі CBOE: DerivaTech Corporation Options Toolbox v5.0, Options Calculator v3.0 тощо. Останнім часом почали з'являтися продукти вітчизняного виробника. Головним чином це прикладні програми компаній, які надають термінали електронної біржової торгівлі (TradeQuote v8.0).

З метою використання отриманих математичних підходів до ціноутворення опціонів велику увагу було приділено програмуванню методів оцінки опціонів різноманітних типів при використанні коефіцієнтів впливу як на ціну базового активу так й на волатильність ринку (комплементарних до базового активів). Був розроблений програмний продукт для моделювання оцінки опціонів, а також приведені приклади застосування програми для проведення чисельного експерименту з оцінювання та можливі використання змодельованих опціонних методів оцінювання для різноманітних задач економіки.

Інші отримані результати стосуються як теоретичних аспектів ціноутворення активів та похідних ЦП так більш глибокого розуміння статистичної природи ціноутворення деривативів на фінансових ринках. Зазначимо, що основним підґрунтям результатів став процес тестування розробленого програмного продукту. При тестуванні як відомих теоретичних моделей, так і при спробах відтворити власні моделі, було здобуто більш глибоке розуміння залежності результату оцінки від вхідних параметрів.

---



## ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Короленко Дмитро Валентинович, Україна  
Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького

В даній роботі розглядаються питання, пов'язані з дослідженням існуючих методів, їх переваг, недоліків, та сфер застосування, наведені умови, в яких досягається найбільша ефективність їх використання.

Метод проектування ПЗ описує процес створення і супроводу у вигляді життєвого циклу (ЖЦ), представляючи його як деяку послідовність стадій і виконуваних на них процесів. Для дослідження методологій використовується поняття моделі життєвого циклу. [1]

На шляху розвитку методи розробки ПЗ зазнали суттєвих змін від повільних традиційних до сучасних адаптивних.

Традиційні методології проектування ПЗ базуються здебільшого на каскадній моделі (характерна для періоду 1970-1985 рр.) [6], та спіральній моделі (період після 1986 р.) [4].

Подальшим розвитком традиційних методологій стали методології RAD та MSF. Основні принципи RAD (Rapid Application Development):

- інструментарій повинен бути націлений на мінімізацію часу розробки.
- створення прототипу для уточнення вимог замовника.
- циклічність розробки: кожна нова версія продукту ґрунтується на оцінці результату роботи попередньої версії замовником.
- мінімізація часу розробки версії, за рахунок перенесення вже готових модулів і додавання функціональності в нову версію.
- команда розробників повинна тісно співробітничати, кожен учасник повинен бути готовий виконувати декілька обов'язків.
- управління проектом повинне мінімізувати тривалість циклу розробки. [5]

MSF (Microsoft Solutions Framework) включає ряд основних принципів.

- розподіл відповідальності за кінцевий результат
- повноваження для членів команд
- концентрація на бізнес-пріоритетах
- єдине бачення проекту
- гнучкість – готовність до змін
- заохочення вільного спілкування [2]

Останніми роками традиційні підходи, використовувані при розробці ПЗ, витісняються гнучкими (Agile) методологіями (ГМ). Загальні риси ГМ:



- адаптивність;
- ітеративність;
- перевага найпростішому;
- колективне володіння кодом;
- організація тестування;
- врахування людського фактору;
- постійне спілкування всіх учасників проекту;
- зворотний зв'язок (система – програміст – замовник) [3]

Серед найбільш відомих сьогодні методологій слід зазначити Extreme Programming (XP), сімейство Crystal, Open Source, ASD, SCRUM, Feature Driven Development, Dynamic System Development Method, RUP.

Аналіз ГМ і результатів їх застосування в реальних програмних проєктах показує, що найбільша ефективність ГМ досягається в умовах, коли

- вимоги до системи неясні або часто змінюються;
- проєкт виконується командою кваліфікованих і відповідальних розробників;
- замовник має бажання і можливість брати участь в розробці програмного продукту;
- розмір проєкту не перевищує 50 учасників.

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що ГМ знаходяться у фазі бурхливого розвитку, як у науковому плані, так і у плані практичного застосування. ГМ поки-що не мають під собою достатнього наукового підґрунтя, тому є надзвичайно цікавим предметом для подальших досліджень та вдосконалення.

Розвиток даної роботи буде направлений на вибір найбільш адекватної формальної моделі для сучасних процесів розробки ПЗ. На основі моделі буде досліджено залежність ефективності існуючих ГМ для конкретних проєктів.

- 
1. Брукс Ф.П. Мифический человеко-месяц, или как создаются программные системы. — СПб: Символ-Плюс, 1999.
  2. Управление проектами: технология MSF. - MSDN, <http://www.microsoft.com/rus/msdn/msf/default.msp>
  3. Alistair Cockburn Agile Software Development. - Pearson Education, 2001. - 304 с.
  4. Barry Boehm A Spiral Model of Software Development and Enhancement <<http://www.sce.carleton.ca/faculty/ajila/4106-5006/Spiral%20Model%20Boehm.pdf>>, 1988. - 12 с.
  5. James Martin Rapid Application Development. - Macmillan Coll Div, 1991. - 736 с.
  6. Royce Winston Managing the Development of Large Software Systems <<http://www.cs.umd.edu/class/spring2003/cmssc838p/Process/waterfall.pdf>>, 1970. - 11 с.

**АЛГОРИТМ ЛЮ ПЕРЕУПОРЯДКУВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ МАТРИЦЬ  
ДЛЯ ПАРАЛЕЛЬНОГО ВИКЛЮЧЕННЯ**

Кравченко Ігор Олександрович Україна  
Одеський Національний Університет імені І.І.Мечникова  
Факультет прикладної математики

Нехай  $A$  - квадратна симетрична додатно-означена матриця і  $G(A)$  її граф,  $F$ - матриця заповнення  $A$  і  $G(F)$  - відповідний граф. Відомо, що вирішення систем вигляду  $Ax = b$ , включає в себе наступні кроки: упорядкування, символічне та чисельне розкладання, вирішення системи. У випадку паралельних ЕОМ важливим завданням є знаходження еквівалентного переупорядкування  $\hat{P}$ , що зберігає граф заповнення  $PAP^T$  і в той самий час є придатним для паралельного виключення.

Деревом виключення  $T(A)$  матриці  $A$  називають дерево, що має ту ж саму кількість вузлів, що й  $G(A)$ , вузол  $x_i$  є батьком  $x_j$  ( $i > j$ ), якщо:  $i = \min\{r | L_{rj} \neq 0\}$ , де  $L_{ij}$  елемент матриці множника  $L$  у розкладанні Хоурського. Під час чисельного розкладання (методом стовпець – Хоурського) для обчислення  $i$ -го стовпця використовуються всі стовпці  $j$  для яких  $L_{ij} \neq 0$ . Основна задача переупорядкування - зменшення висоти дерева виключення.

**Лема** : Нехай  $i > j$  і  $L_{ij} \neq 0$ , тоді вузол  $i$  - предок вузла  $j$  в дереві виключення.

**Теорема 1**: Для кожної кліки  $C$  у графі  $G(F)$  матриці  $A$  існує еквівалентне переупорядкування  $G(F)$ , що нумерує вузли в  $C$  останніми.

Кажуть що вузол  $u$  дерева  $T(A)$  - придатний для обертання, якщо  $Adj_{G(A)}(T[u]) \neq Ancestor_T(y)$ , і  $Adj_{G(A)}(T[z]) = Ancestor_T(z)$  для кожного вузла  $z$  предка  $u$ . Обертанням дерева  $T(A)$  у вузлі  $u$  називають переупорядкування графа  $G(A)$  за якого вузли нумеруються наступним чином : спочатку ті що не належать до  $Ancestor_T(y)$ , зберігаючи свій родовий порядок, потім ті що належать  $Ancestor_T(y) - Adj_{G(A)}(T[u])$ , останніми вузли з  $Adj_{G(A)}(T[u])$ . Піддерево  $T[w]$  поза деревом  $T[v]$ , якщо  $T[v] \cap T[w] = \emptyset$ , максимальну висоту піддерева  $T[w]$  поза деревом  $T[v]$  позначимо через  $\bar{ht}(v)$ .



**Теорема 2:** Якщо  $h\bar{t}_T(y) < ht_T(y)$  тоді після обертання у придатному вузлі  $y$  -  $height(\bar{T}) < height(T)$ .

Ефективним є проведення композиції обертань. Для цього необхідно записати додаткову інформацію:  $ht_T(v)$ ,  $depth_T(v)$ , обчислити  $|AdjT(v)|$ , записати межу  $htbar$  для  $\bar{ht}(v)$  для кожного вузла  $v$ . Тоді алгоритм пошуку придатного вузла буде мати наступний вигляд:

$y :=$  корінь дерева  $T$ ;  $x := 0$ ;  $htbar := -1$ ;  $reduced := 0$ ;

**поки**  $ht_T(y) > htbar$  і  $ht_T(y) > 0$  **виконати**

$newdepth := depth_T(y) - reduced$ ;

**якщо**  $newdepth > |Adj(T[y])|$  **тоді**

$x := y$ ;

$reduced := depth_T(y) - |Adj(T[y])|$ ;

$htbar := htbar + newdepth - |Adj(T[y])|$ ;

**якщо**  $y$  має більше ніж одну дитину **тоді**

$m2 :=$  друга найбільша висота серед дітей  $y$ ;

$htbar := \max\{m2, htbar\}$ ;

$y :=$  дитина  $y$  з найбільшою висотою;

Складність алгоритму -  $O(n)$ , де  $n$  - порядок матриці.

Алгоритм композиції обертань має наступний вигляд:

всі вузли вважаються нумерованими

$v :=$  вузол знайдений алгоритмом пошуку придатного вузла

**поки**  $v$  не корінь дерева **виконати**

упорядкувати нумеровані вузли  $Adj_T(T[v])$  останніми,  
перед тими, що вже перенумеровані.

позначити вузли в  $Adj_T(T[v])$  як пронумеровані

$v :=$  батько вузла  $v$

пронумерувати нумеровані вузли, що залишилися, у їх оригінальному родинному порядку

Складність цього алгоритму пропорційна до  $nonz(A)$ .

1. Joseph W. H. Liu. Reordering sparse matrices for parallel elimination. Parallel Computing 11(1989) 73-91. North Holland
2. Joseph W. H. Liu. Equivalent sparse matrix reordering by elimination tree rotations. SIAM J.Sci.Stat.Comput. Vol.9, No.3, May 1988
3. А. Джордж, Дж. Лю. Численное решение больших разреженных систем уравнений. Москва: «Мир», 1984

**ВИНИКНЕННЯ ДИСПИПАТИВНИХ СТРУКТУР НА АРЕАЛАХ РІЗНОЇ ФОРМИ**

Кузенков Олександр Олександрович, Україна  
Дніпропетровський національний університет  
Факультет прикладної математики

Будь-які екологічні системи, що розповсюджуються по нескінченному просторовому ареалу, є нічим іншим, аніж проміжними станами між деякими стаціонарними положеннями. З іншого боку ясно, що в просторово розподілених екосистемах, де однорідність простору різко порушена, можуть виникати неоднорідні по простору рівноважні структури. У разі дослідження екологічних систем прикладом можуть бути розподіл енергоресурсів океанічної екосистеми, популяції людей чисельність яких змінюється в залежності від факторів, чисельність яких неоднорідна по світовому просторовому ареалу, та є відносно сталою при зміні часу.

Розглядаючи ізолювані популяції (ефект “анклаву”), постає питання, а чи завжди на ареалі будуть виникати просторово неоднорідні стаціонарні структури?

У якості математичної моделі розглядається наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \frac{\partial X_i}{\partial t} = C_i \cdot \Delta X_i + F(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (1)$$

$\bar{i} = (1; n)$

з відповідними граничними умовами:

$$\frac{\partial N}{\partial n} \Big|_{\partial G} = 0 \quad (2)$$

Отже позначивши  $N = (N_i)$  - стаціонарне рішення системи (1), та за умови  $F(N) \equiv 0$ ,  $F(N)$  є однорідне по простору рішення системи (1). Виникнення дифузійної нестійкості може стати поштовхом для виникнення дисипативних структур.

Згідно даної моделі, постає питання: чи залежить можливість виникнення дисипативної структури на ареалі, від його форми та структури системи? Зрозуміло, що в складній екологічній системі з великою кількістю видів та складними нелінійними зв'язками між ними, навіть на ареалі простої форми можливе виникнення дисипативної структури. Але, якщо система є простою, наприклад всього на всього дві популяції (системи: “хижак-жертва”, “конкуренція” і т. д.), але ареал має доволі складну форму, чи виникне на ній дисипативна структура?





3. *Чернишенко С.В.* "Нелинейные методы анализа динамики лесных биогеоценозов" изд. "ДНУ" Днепропетровск 2005



## ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ «ХИЖАК-ЖЕРТВА»

Кулішов Володимир Анатолійович, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Модель системи «хижак-жертва» виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(x)x - V(x)y \\ \frac{dy}{dt} = kV(x)y - my \end{cases},$$

де  $\alpha(x)$  - мультізіанська функція «жертви», - трофічна функція, швидкість споживання жертви одним хижаком,  $k$  - к.п.д. переробки маси жертви в нову біомасу хижака,  $m$  - коефіцієнт його природної смертності.

Розглянемо поведінку системи «хижак-жертва» при зміні різних параметрів системи.

Стационарні точки системи можна отримати, розв'язавши вищезгадану систему, якщо дорівняти попередньо кожне рівняння нулю:

$$x^* = \frac{m}{k\beta}, y^* = \frac{\alpha(x^*)}{\beta}.$$

Виконавши переніс початку координат в стационарну точку, проведемо лінеаризацію системи для того, щоб знайти власні значення системи. Отримане характеристичне рівняння системи

$$\lambda^2 + \lambda\alpha'(x^*)x^* + m\alpha(x^*) = 0$$

дає змогу визначити власні значення

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(x^*)x^* \pm \sqrt{[\alpha(x^*)x^*]^2 - 4m\alpha(x^*)}}{2}$$

Розглянемо величину  $x^* = m/k\beta$  в якості біфуркаційного параметра.

При  $x^* < x_m$  стан рівноваги – нестійкий вузол або фокус.

При  $x^* > x_m$  - стан рівноваги – центр.

При  $x^* > x_m$  - стійкий фокус, або вузол.

Параметру  $x^* = \frac{m}{k\beta}$  не важко дати екологічну інтерпретацію.

По-перше, це рівноважна чисельність «жертви», і якщо ця чисельність «жертви», і від неї залежить рівень адаптації «хижака» до середовища, як біотичного, так і абіотичного.

Якщо  $x_m$  (тобто точка, в якій мальтузіанська функція «жертви» досягає максимуму) велике, то максимум питомої швидкості приросту



чисельності жертви досягається при великих значеннях популяційної щільності і адаптація «жертви» до середовища погана.

Очевидно, що при малих  $x^*$  і великих  $x_m$  нерівність  $x^* < x_m$  буде виконуватися майже напевно, і в системі не буде існувати стійка рівновага.

Якщо ми маємо погано адаптованого хижака ( $x^*$  велике) і добре адаптовану жертву ( $x_m$  мале), то майже напевно  $x^* > x_m$  і рівновага буде стійкою.

Якщо локальна стійкість або нестійкість положень рівноваги дає досить малу інформацію про стійкість всієї системи. Рівновага може бути стійкою, але якщо воно оточене нестійким циклом малої амплітуди, то ймовірно, що система буде нестійкою.

І навпаки, якщо положення рівноваги нестійке, то його оточено стійким циклом. Тоді систему в цілому можна вважати стійкою.

- 
1. Арнольд В.І. Теорія катастроф - М.,1990.
  2. Амелькін В.В. Диференційні рівняння в приложеніях - М: Наука 1987.
  3. Бейлі Н. Математика в біології і медицині. – М.:Мир, 1970.
  4. Свірежєв Ю.М. Нелінійні хвилі, дисипативні структури і катастрофи в екології. – М.:Наука 1987.



## ОСНОВНІ МЕТОДИ ВЗЛОМУ ОС. ЗАХИСТ ІНФОРМАЦІЇ ВІД ХАКЕРІВ

Лисяк Вадим Валерійович, Україна  
Кіровоградський національний технічний університет  
Факультет автоматики та енергетики

### Міфи комп'ютерної безпеки

Проблема комп'ютерної безпеки не нова. Вона з'явилася разом з комп'ютерами. З розвитком програмного та технологічного забезпечення вирішення проблеми забезпечення конфіденційності інформації стає все складнішою. Існує три головних міфи про комп'ютерну безпеку. Перший – це збереження інформації за допомогою криптографії. Тобто файл, який зашифрований, є в безпеці. Цей міф з'явився відразу після створення глобальних мереж. Але криптографія є неактуальною – бо дешифровка інформації є нескладним завданням, оскільки збільшився об'єм пакетів, які передаються через мережу, що дає більше ключів для дешифровки. Другий – геній хакерів. Служби масової інформації часто повідомляють про те, що хакери проникли в мережу організації X. Головною причиною проникнення в систему організації, в більшості випадків, є халатність співробітників. Наприклад, використання ними різних програм, які не являються повсякденним програмним забезпеченням, яке орієнтовано на виконання їх роботи. Навчання співробітників правилам безпеки в мережі може запобігти проникненню. Третій – це поняття абсолютного захисту. Повністю захищений комп'ютер – це комп'ютер, який стоїть у броньованій кімнаті і не підключений до будь-якої мережі, навіть живлення. Але даний приклад не підлягає вимозі доступу до інформації. «Абсолютності» захисту заважає не тільки необхідність використовувати захищену інформацію, але і ускладнення захисних систем, і для цього є декілька причин: зміна топології вашої мережі та використання в ній програм, навіть якщо не зважати на реконфігурацію при збільшенні чи зменшенні розмірів та форми мережі, то використання нових версій програмного забезпечення може «пробити діру» в захисті. Також треба звернути увагу на еволюцію засобів нападу. Техніка настільки швидко змінюється, що неможливо навіть виявити яке приладдя буде використовуватися для нападу. Наприклад: криптозахист DES, який є стандартним для США з 1977р. можна відкрити за допомогою «грубої сили». Комп'ютерний захист – це постійна боротьба між незнанням та недоглядом користувачів і інтелектом хакерів.

В пропонованій доповіді аналізуються основні методи взлому ОС Windows, Unix, Novell NetWare серед яких, найперше, привертають увагу ті:



- які дозволяють не санкціоновано запустити виконуваний код;
- які дозволяють здійснити несанкціоновані операції читання/запис файлів чи інших об'єктів;
- які дозволяють обійти встановлені обмеження прав доступу;
- які призводять до збою системи;
- які використовують інтегровані не документовані можливості;
- які використовують недоліки системи збереження даних про аутентифікацію і які дозволяють шляхом реверсування, підбору або повного перебору всіх варіантів отримати ці данні;
- троянські програми;

Однак, головне завдання нашого дослідження полягає не у висвітленні наведених методів взлому (методи описуватимуться в доповіді), а у подоланні перешкод на шляху забезпечення оптимальних налаштувань безпеки системи.

Концептуальною засадою пропонованої методики захисту є створення власної (авторської) файлової системи забезпечення безпеки інформації, сутність якої полягає не в паролуванні, а в альтернативі збереження інформації в невідомій хакеру (авторській) файловій системі, що виключає будь-яке несанкціоноване втручання.

---



## МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЗАСОБИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УПРАВЛІННІ ІНВЕСТИЦІЙНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ

Мазуренко Анна Віталіївна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Прийняття рішень інвестиційного характеру, як і будь-який інший вид управлінської діяльності, ґрунтується на використанні різних формалізованих і неформалізованих методів. Ступінь їхнього поєднання визначається різними обставинами, у тому числі й тою, наскільки менеджер обізнаний з наявним апаратом, що застосовується у тому або іншому конкретному випадку. У вітчизняній і зарубіжній практиці відома ціла ниска формалізованих методів, за допомогою яких можуть бути проведені розрахунки, які можуть стати основою для прийняття рішень в сфері інвестиційної політики. Якогось універсального методу, орієнтованого на всі випадки життя, не існує. Імовірно, управління все-таки більшою мірою є мистецтвом, ніж наукою. Проте, маючи деякі оцінки, отримані формалізованими методами, нехай навіть певною мірою умовні, легше приймати остаточні рішення.

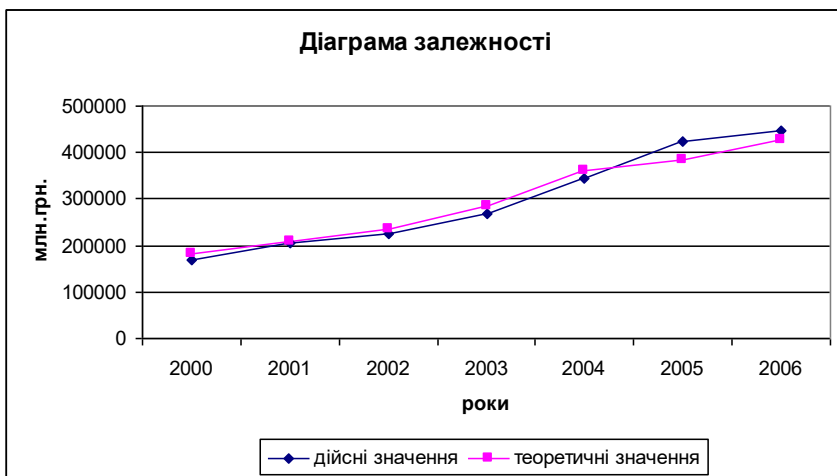
Інвестування та аналіз проблеми формування інвестиційного клімату відіграють значну роль в розвитку національної економіки. Між вітчизняними і іноземними інвестиціями є тісний взаємозв'язок, яким не потрібно нехтувати. Тісний зв'язок, який існує між інвестиційною активністю та економічним зростанням, можна побачити, проаналізувавши етапи економічного розвитку США, ФРН, Японії, Франції, Великобританії та ін. Це яскраво проявилось, наприклад, у 60-ті роки, коли висока інвестиційна активність у цих країнах супроводжувалась особливо значними темпами зростання валового національного продукту (ВНП). Так, в Японії при подвоєнні обсягу капітальних вкладень за 1966-1970 рр. валовий національний продукт зріс порівняно з попередніми п'ятьма роками більше ніж на 70%. У ці ж роки в США, ФРН, Франції досягались прирости ВНП на 25-30%.

В роботі, використовуючи статистичні дані за 2000 – 2006 роки, будується двофакторна регресійна модель  $\tilde{y} = 66066.29 + 3.82x_1 + 1.74x_2$ , яка дає змогу дослідити вплив прямих іноземних інвестицій і інвестицій в основний капітал на один з найважливіших показників - валовий національний продукт. Для перевірки адекватності багатфакторної регресійної моделі використала коефіцієнт кореляції та  $F$  – критерій Фішера, які показали, що модель адекватно відображає реальний процес.



## СТАТИСТИЧНІ ДАНІ

роки	дійсні значення ВВП, млн.грн.	надходження ПІІ, млн.грн.	надходження інвестицій в основний капітал, млн.грн.	теоретичні значення ВВП, млн.грн.
2000	170070	19714	23629	182621
2001	204190	22472	32573	208764
2002	225810	27229	37178	234976
2003	267344	33954	51011	284808
2004	345113	42605	75714	360969
2005	424741	46374	80803	384250
2006	446643	52100	93064	427523



1. *Міхайловская А.С.* Економіко-правові форми іноземних інвестицій в Україні // Маркетинг в России и за рубежом, №2.- 2000
2. *Реверчук С.К., Реверчук Н.Й., Скоморович І.Г.* та ін. Інвестологія: наука про інвестування: Навчальний посібник.—К.:Атака,2001.-264с.
3. Статистичний щорічник України за 2001 рік. - К.: Державний комітет статистики України, 2002. - 644 с.
4. *З.І.Ватаманюк, С.М.Панчишин, С.К.Реверчук* та ін. Економічна теорія: макро - і мікроекономіка. Видавничий дім «Альтернативи»,2001.



## АНАЛІЗ СТАЛОГО РЕЖИМУ ЕЕС

Мамедова Асіма Абушівна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики і менеджменту

Сучасний розвиток інформаційних технологій оперативного диспетчерського керування зумовлює впровадження у них нових методів та підходів, щодо рішення таких задач як планування режиму роботи електроенергетичної системи, оцінку стану, стабілізація режиму та інші, але сучасні спеціалісти при рішенні цих задач стикаються не тільки з задачею розрахунку сталого режиму, але й з задачею визначення його стійкості, при цьому необхідно знати не тільки те стійкий чи ні стаціонарний режим, що розглядається, але й те, як далеко він знаходиться від границі стійкості, тобто визначення запасу стійкості. Тому виникає необхідність у дослідженні впливу збільшення або зменшення навантаження в вузлах ЕЕС на стійкість режиму в цілому, а також оцінки чутливості характеристик режиму до інших навколишніх збурень.

У деяких роботах робляться висновки, що детермінант матриці Якобі системи рівнянь балансів активної та реактивної потужності сталого режиму (1) є показником стійкості режиму ЕЕС, зокрема коли він більше нуля, режим вважається стійким, інакше нестійким, таким чином мінімальне сингулярне число може бути індикатором порушення статичної стійкості.

$$\varphi_{P_k} = P_k - g_{kk} U_k^2 - U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} U_j * (g_{kj} \cos \delta_{kj} - b_{kj} \sin \delta_{kj}) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi_{Q_k} = Q_k - b_{kk} U_k^2 - U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} U_j * (b_{kj} \cos \delta_{kj} + g_{kj} \sin \delta_{kj}) = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

де  $g_{ij}, b_{ij}$  - активна і реактивна провідимість зв'язку  $ij$ ;  $U_i, U_j$  - напруга на кінцях дуги  $ij$ ;  $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$  - фази;  $P_k, Q_k$  - активні і реактивні потужності в вузлі  $k$ .

Тому при дослідженні питання стійкості в якості показника статичної стійкості було використано детермінант матриці Якобі, також було досліджено, чи є правомірним використання в якості показника статичної стійкості мінімального сингулярного числа або числа обумовленості матриці Якобі системи рівнянь балансів активної та реактивної потужності сталого режиму.

Для визначення запасу статичної стійкості по активній потужності в перерізі робиться обвантаження режиму, тобто перехід від початкового до



граничного режиму, шляхом збільшення перетоку напруги в перерізі до отримання граничного режиму. При цьому ми отримуємо траєкторії обвантаження режиму, які в найбільшій мірі змінюють режим у даному перерізі. Запропонований метод обвантаження використовує методи оптимізації показника статичної стійкості режиму.

$$\det(J(\theta)) \rightarrow \min_{P \in \Omega}, \sigma_{\min}(\theta) \rightarrow \min_{P \in \Omega}, \sigma_{\max}(\theta) / \sigma_{\min}(\theta) \rightarrow \max_{P \in \Omega},$$

де:  $\Omega$  – область технологічних обмежень;  $\theta$  – вектор параметрів,  $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$  – мінімальне і максимальне сингулярне число матриці Якобі.

Застосування методів оптимізації, що використовують похідні є неможливим у даному випадку, тому що цільова функція є неявною, але методи нульового порядку із двосторонньою обмеженістю, що використовують процедуру методу прямого пошуку, дають нам можливість визначити напрямок погіршення показника статичної стійкості режиму в перерізі, що розглядається.

Було визначено, що мінімальне сингулярне число та число обумовленості матриці Якобі системи рівнянь балансів активної та реактивної потужності сталого режиму, не можуть бути використані в якості показника статичної стійкості, бо вони в повній мірі не відображають реального впливу змін навантаження в вузлах на статичну стійкість системи.

У цій роботі також розглянута проблема використання вхідних даних навантажень в вузлах для аналізу режиму електроенергетичної системи, що є актуальною задачею оперативного диспетчерського керування. Пропонується використання спектрально-сингулярного аналізу для набору векторів даних, що повинно дати можливість, використовуючи апріорну інформацію, робити висновок, як впливають зміни потужності споживання електроенергії на статичну стійкість системи в цілому, тобто на етапі функціонування режиму для аналізу його стійкості можна вже не проводити розрахунок сталого режиму та його обвантаження, щоб дізнатися призводять чи ні зміни у режимі до порушення статичної стійкості електроенергетичної системи.

1. Гамм А.З., Кучеров Ю.Н., Паламарчук С.И. и др. Методы решения задач реального времени в электроэнергетике. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1991.– 294 с.
2. Гамм А.З. Статистические методы оценивания состояния электроэнергетической системы. – Иркутск: Наука. Сиб. отд., 1976.–437 с.

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО РОСТУ ЗІ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ**

Мартиненко Ксенія Вікторівна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Метою даної роботи є дослідження оптимальної економічної динаміки. У математичному плані, розв'язується задача оптимального керування, де необхідно максимізувати дисконтировану суму кінцевого (невиробничого) споживання протягом строку прогнозування (планування)  $[0, T]$ :

$$J = \int_0^T e^{-\delta(t-t_1)} C(t) dt,$$

де  $e^{-\delta(t-t_1)}$  - функція дисконтування, яка відображає міру переваги споживання в даний момент  $t$  відносно споживання того ж продукту в наступні моменти,  $C(t)$  - невиробниче споживання. Тобто задача полягає у визначенні такого варіанту випуску продукції  $X(t)$  та невиробничого споживання  $C(t)$ , які забезпечать найбільше інтегральне дисконтироване споживання.

Диференціальне рівняння економічного росту має такий вигляд:

$$K'(t) = \frac{1}{q} [(1-a)X(t) - \mu K(t) - C(t)],$$

де  $K(t)$  - капітал (обсяг основних виробничих фондів),  $C(t)$  - невиробниче споживання. Випуск продукції обмежується виробничою функцією  $F(t, R, L)$ :

$$0 \leq X \leq F(t, R, L),$$

а ріст виробничих фондів обмежений знизу:  $K(t) \geq K_1$  і  $X(t_0) = X_0$ .

Необхідно знайти такий варіант розвитку, який забезпечує максимум функціоналу  $J$ .

Математичним апаратом розв'язання даної задачі слугує чисельний метод – метод штрафних (бар'єрних) функцій, тому що задача має фазові і змішані обмеження.

- 
1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. – М.: Высш. школа, 2006. – 584 с.
  2. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО  
РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Марченко Світлана Миколаївна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Метою даної роботи є застосування методу послідовних наближень до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь.

Для крайової задачі

$$\Delta U = f(x, U) \quad \forall x \in \Omega \subset R^n, \quad U|_{\partial\Omega} = 0,$$

слідуючи міркуванням академіка В.Л. Рвачова [1], ми отримали еквівалентне інтегральне рівняння

$$U(x) = U_0(x) + \int_{\Omega} U(\xi) \cdot K(x, \xi) d\xi,$$

де 
$$U_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(x, \xi) \cdot f(\xi, U(\xi)) d\xi,$$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) q(x, \xi),$$

$$G_2(x, \xi) = \ln \frac{1}{r} - q(x, \xi),$$

$$q(x, \xi) = -\frac{1}{2} \ln(r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)),$$

$$r = \|x - \xi\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Для випадку  $f(x, U) = -e^{-U}$  відповідне інтегральне рівняння має вигляд

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(x, \xi) \cdot e^{U(\xi)} d\xi + \int_{\Omega} U(\xi) \cdot K(x, \xi) d\xi,$$

для розв'язання якого застосовуємо метод послідовних наближень, який приводить до наступної послідовності лінійних інтегральних рівнянь



$$U_2(x) - \int_{\Omega} U_2(\xi) K(x, \xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(x, \xi) e^{-U_1(x)} d\xi,$$

$$U_n(x) - \int_{\Omega} U_n(\xi) K(x, \xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G_2(x, \xi) e^{-U_{n-1}(x)} d\xi,$$

де  $U_1(x) = 0$ .

Ці рівняння ми пропонуємо розв'язувати методом Бубнова-Гальоркіна, що дозволяє отримати результат в аналітичному вигляді.

Розрахунковий експеримент було проведено для області

$$\omega = 2x \cdot (a - x) + 4y \cdot (b - y) - \sqrt{(2x \cdot (a - x))^2 + (4y \cdot (b - y))^2}.$$

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Наука, 1968. – 183 с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «ВЧИТЕЛЬ VISUAL FOXPRO»**

Матвійчук Віта Миколаївна, Україна  
Рівненський державний гуманітарний університет  
Факультет математики та інформатики

Навчальна програма «Вчитель Visual FoxPro» призначена для студентів, які вивчають СУБД Visual FoxPro і узгоджується з навчальною програмою дисципліни «Бази даних та інформаційні системи». Проте за цією програмою можуть навчатися люди, які планують використовувати СУБД Visual FoxPro у своїй діяльності.

Мною була розроблена програма «Вчитель Visual FoxPro» навчально-контролюючого класу, яка охоплює етапи проектування та реалізації баз даних у СУБД Visual FoxPro.

Електронна навчальна програма дозволяє вирішувати такі основні задачі: отримувати зведення про тематичний план навчальної дисципліни, послідовність вивчення теоретичного матеріалу та практичних завдань; переглядати, вивчати чи повторювати навчальний, методичний і інформаційно-довідковий матеріал; представляти на дисплеї комп'ютера дидактичний матеріал (схеми, малюнки, таблиці, графіки, текст тощо) та наочні приклади; здійснювати самоконтроль (з автоматизованим оцінюванням) засвоєння змісту дисципліни в цілому чи окремих навчальних тем, а також отримувати рекомендації стосовно додаткового вивчення недостатньо засвоєних навчальних тем.

Стартова сторінка містить навігаційну карту по програмі, на якій представлені посилання на десять занять, кожне з яких можна поділити на три частини: теоретичну, практичну, контролюючу.

Теоретична частина надає користувачу інформацію про можливості СУБД Visual FoxPro, на прикладі БД фірми збуту продукції демонструється створення бази даних, таблиць, запитів, форм, представлень, звітів, діаграм тощо. В теоретичній частині, крім текстових уроків, можна переглянути відеоуроки, які наочно демонструють етапи розробки БД.

Практична частина заняття дозволяє користувачу застосувати теоретичний матеріал на практиці. Вона представлена у вигляді завдання, яке повинен виконати користувач, після набуття необхідних теоретичних знань. При появі труднощів під час виконання завдання користувач може звернутись до теоретичного матеріалу. Ефективний пошук необхідних відомостей здійснюється через систему посилань. Посиланнями є самі назви завдань. Це допомагає скоротити час необхідний для виконання завдання і зробити навчання дещо простішим.

Практична частина заняття містить 12 варіантів предметних областей, кожен з яких включає перелік завдань на побудову таблиць,



запитів, звітів, форм бази даних тощо.

Робота виконується згідно інструкції. В кінці практичного заняття користувачу пропонується відповісти на контрольні питання та скласти звіт про виконання роботи.

Для складання звіту заповнюється електронний шаблон. Звіт зберігається у текстовому файлі, що дає можливість проаналізувати результати роботи у зручний час.

Користувач має можливість перевірити рівень засвоєних знань та самостійно контролювати процес свого навчання за допомогою тестів.

Кожен тест має набір питань, що добираються з бази даних випадковим чином. В тесті передбачено обмеження часу для відповіді (15 секунд), якщо студент не встигає дати відповідь на поставлене питання, то відбувається автоматичний перехід до наступного питання, а попереднє вважається таким, на яке була дана неправильна відповідь. Користувачу надається можливість відкладати відповідь на питання в кінець тесту та переходити до наступного питання. За кожен тест можна набрати 12 балів

В кінці тесту (після вибору відповіді на останнє запитання) з'являється результат тестування – кількість набраних балів, перелік питань, на які були дані правильні відповіді та на які – неправильні. Програмою передбачена можливість автоматичного переходу до теоретичного матеріалу, що стосується питання, на яке була дана неправильна відповідь. Отже, зникає необхідність пошуку матеріалу в ручному режимі.

Перевагою застосування мультимедійних програм, які виступають як джерело знань, є те, що завдяки документальній переконливості, фактичній достовірності та сконцентрованості викладу матеріалу користувачі отримують значний обсяг навчальної інформації за порівняно короткий час. Крім того, користувач сам керує навчальним процесом.

---



## ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБОЛОНОК, ПІДДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА ОПТИСК

Матула Тетяна Романівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Підвищення вимог до міцності та надійності складних конструкцій, що застосовуються у багатьох галузях сучасної техніки, зумовлює необхідність розробки ефективних чисельних методів, які дозволяють прогнозувати та вдосконалити експлуатаційні якості цих конструкцій.

У даній роботі розглядається крайова задача статичної поведінки зсувних оболонок з деформованою нормаллю під дією поверхневих силових навантажень, яка будується приведенням тривимірних задач теорії пружності гнучких ортотропних тіл до відповідних двовимірних задач на серединній поверхні такого тіла. Основна особливість застосованого підходу полягає у напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка-Міндіна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Деформаційні співвідношення пов'язують переміщення серединної поверхні оболонки з тангенціальними та згинними компонентами тензора лінійної деформації. Рівняння рівноваги теорії зсувних оболонок та статичні крайові умови отримуються з принципу можливих переміщень, згідно якого, робота внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі зовнішніх сил на тих самих варіаціях. Для встановлення кінематичної визначеності даної моделі до системи рівнянь рівноваги додаються крайові умови в зміщеннях.

Сформульовано варіаційну постановку задачі, розв'язування якої здійснюється методом скінченних елементів з використанням квадратичних апроксимацій серендипового типу. Застосування цього методу дозволило звести відповідну задачу інтегрування системи диференціальних рівнянь до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому за невідомі варіаційної задачі обрано вектор пружних зміщень точок серединної поверхні та вектор поворотів нормалі серединної поверхні.

Здійснено програмну реалізацію даної схеми. Розглядається низка чисельних прикладів.

- 
1. Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок // Матем. Методи та фіз.-мат. поля. 1999. – 42. № 2. – С. 53-61
  2. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. Д. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов: Редакционно-издательская группа Львовского университета, 1981. – 88с.



## МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ТЕПЛОПРОВІДНИХ СИСТЕМ ТИПУ “ІМПЛАНТАТ–КІСТКОВА ТКАНИНА ЩЕЛЕПИ ЛЮДИНИ” З ВИКОРИСТАННЯМ ПАКЕТУ FEMLAB 3.3

Михайлинин Юрій Богданович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

У сучасній стоматологічній практиці часто виникає потреба у застосуванні хірургічно-ортопедичних методик лікування зубів за допомогою зубних імплантатів. Моделювання процесів взаємодії дентальних імплантатів і тканин альвеолярних відростків щелепи та визначення термопружного стану таких систем дає змогу провести раціональний вибір імплантату при протезуванні залежно від структури кісткової тканини щелепи хворого.

Систему “імплантат-кісткова тканина щелепи людини” модельовано деформівним твердим тілом, яке складається з двох частин, що контактують з ідеальною адгезією. Визначено поведінку системи під дією температурних впливів. Матеріали імплантату та кісткової тканини вважаються ізотропними.

Для числового дослідження поведінки системи, яку описуються в циліндричній системі координат, застосуємо напіваналітичний метод скінчених елементів на основі методу Бубнова-Гальоркіна. При розкладі використовуємо систему тригонометричних функцій для зображення невідомої температури за кутовою координатою та ізопараметричні апроксимації. Нестационарні поля температури обчислено з використанням напівдискретних схем Бубнова-Гальоркіна. Інтегрування за часовою координатою виконано на основі схеми Кранка-Ніколсона.

З використанням створеного програмного комплексу для температури визначено рівень температурних напружень у кістковій тканині залежно від типорозмірів імплантатів і структури кісткової тканини щелепи людини.

Задача була розв’язана за допомогою FEMLAB 3.3. Швидкі ефективні алгоритми і висока ефективність використання пам’яті FEMLAB 3.3 дають можливість розв’язувати величезні задачі, а графічний інтерфейс Java скорочує час процесу моделювання. FEMLAB 3.3 функціонує як незалежна програма. Зручний користувацький інтерфейс, що дозволяє вченим і інженерам задавати складні моделі протягом декількох хвилин, разом із широким набором оптимізованих алгоритмів, робить програму найбільш швидким і ефективним засобом програмного моделювання. FEMLAB 3.3 використовує перевірений метод скінчених елементів для ефективного аналізу фізичних явищ, що дає можливість передбачати поведінку досліджуваної системи без



створення дорогих прототипів. Програма може віртуально моделювати будь-яке фізичне явище, яке описується рівняннями частинних похідних, в тому числі явища теплопровідності, електромагнетизм, теорію пружності.

Аналіз одержаних чисельних результатів і зроблені на підставі побудованої моделі висновки підтверджені клінічними спостереженнями та свідчать про ефективність запропонованої моделі.

1. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Макар В. М. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел // Прикл. механика. 1998. Т43(44). №5. С. 24-31.
2. Вовк Ю. В., Кобильник І. О., Галькевич П. Й., Стадник О. Є. Експериментальне вивчення кісткової тканини у функціонуючих зубних імплантатів власної конструкції // Acta Medical Leopoldensia. 1998. №1. С. 35-41.
3. Батте К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов — М.; Стройиздат, 1982. — 447 с.
4. Галькевич П. Й., Вовк Ю. В., Коркуна А. М. Моделювання та розрахунок систем типу “імплантат-кісткова тканина щелепи людини” // Вісник Львів. Серія прикладна математика та інформатика. 2000. Вип. № 1. С. 98-104.



## КЛІЄНТ-СЕРВЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ МОБІЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ НА МОВІ JAVA

Михайлов Андрій Юрійович, Україна  
Дніпропетровський Національний Університет  
Факультет прикладної математики

У даний час усе більше актуальною стає обробка інформації й отримання результатів у дуже короткий термін і в будь-якому місці. Це можуть бути фізичні, математичні або будь-які інші розрахунки. Наприклад, у будівельників досить часто виникає потреба у розрахунках на місці будівлі міцності балок, їх прогинів та деформації.

Рішенням даної проблеми можуть стати мобільні телефони, які останнім часом дуже поширені, а оскільки покриття операторів охоплює все більші площі, і ціни на мобільний Інтернет падають, то даний підхід є цілком прийнятним. Але нажаль досі для мобільних пристроїв не було написано програм, які б могли проводити такі розрахунки, причиною є невелика кількість кваліфікованих J2ME програмістів, великий попит на мобільні ігри та офісні програми.

Причиною обрання клієнт-серверних технологій є відсутність або слабка підтримка роботи із дійсними числами. Набагато ефективніше організувати уведення даних клієнтом, пересилання даних на сервер, їхню обробку, а потім повернення результатів. На користь даного рішення говорить і можливість мови JAVA організувати роботу програми із сервером по протоколі http, що дозволяє написати серверну частину в будь-якій мові програмування, а також пересилати клієнтові не тільки текстові дані, але й meta-дані (наприклад графіки).

Для сервера середовище розробки - PHP з інстальованою бібліотекою GD, це дозволяє не тільки робити всі необхідні розрахунки, але й динамічно генерувати графічну інформацію, наприклад графіки епюр.

Результатом реалізації даної технології є програмний комплекс, який дозволяє ввести дані, відіслати їх на сервер та отримати розрахунки прогину балок, графіки епюр та інше. Використання клієнт-серверних технологій для розв'язку подібних проблем має такі переваги: при мінімальних витратах, у мінімальний термін часу можна одержати необхідні розрахунки із графіками. Також перевагою є можливість запустити JAVA додаток на практично будь-якому телефоні, тому що реалізацію даної задачі можна абстрагувати від конкретних особливостей телефону. Вимогами до телефону є наявність віртуальної JAVA-машини та підтримка протоколу http.

---



## ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Михальська Галина Стефанівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

У нашому повсякденному житті ми часто зустрічаємося із проблемами прийняття рішень, для яких не можна побудувати чіткої або хоча б наближеної математичної моделі. Це так звані слабо структуровані проблеми. Типовими проблемами такого характеру є, наприклад, проблема вибору вищого навчального закладу школярами після закінчення школи чи вибір курортного місця, у яке ми б хотіли відправитися на відпочинок.

Однак неможливість повної математичної формалізації такого роду задач не виключає можливості і необхідності застосування математико-статистичних і логічних методів їх розв'язання, що базуються на інформації одержаній від експертів.

Центральною для роботи проблемою є *проблема оптимізації процесу прийняття рішень людиною, за допомогою відповідних методів і комп'ютерних систем підтримки прийняття рішень.*

В загальному випадку постановка задачі прийняття рішень при багатьох критеріях є наступною:

*Дано:* група з  $n$  альтернатив (варіантів рішень проблеми) і  $N$  критеріїв (показників привабливості альтернативи для особи приймаючої рішення), призначених для оцінки альтернатив. Припустимо, що кожна з альтернатив має оцінку по кожному з критеріїв, отриману або від експертів, або на підставі об'єктивних розрахунків.

*Потрібно:* побудувати вирішальні правила на основі вподобань особи приймаючої рішення, що дозволяють:

- виділити кращу альтернативу;
- упорядкувати альтернативи за якістю;
- віднести альтернативи до упорядкованих за якістю класів рішень.

На сьогоднішній день методи прийняття рішень, розроблені в рамках трьох відомих у світі напрямків досліджень:

✚ багатокритеріальної теорії корисності (реалізованого у вигляді методів MAUT та SMART);

✚ аналітичної ієрархії (реалізованого у вигляді основного методу АНР та мультиплікативного методу АНР);

✚ розробки індексів попарного порівняння альтернатив (реалізованого у вигляді серії методів ELECTRE).

В процесі дослідження роботи кожного з методів було встановлено, що найбільш оптимальним методом розв'язання такого роду задач є метод аналітичної ієрархії, зокрема мультиплікативний метод, в якому:



- величина затрачених зусиль є пропорційною до кількості альтернатив, на відміну від методів багатокритеріальної теорії корисності;
- процес прийняття рішення може бути здійснений за участі як одної особи, так і колективно, на відміну від методів ELECTRE;
- метод враховує так звані евристики, тобто відхилення поведінки людини від раціональної, зумовлені її психологічними особливостями.

Етапи підходу АНР.

1. Структуризація задачі у вигляді ієрархічної структури з декількома рівнями: *цілі – критерії – альтернативи*.
2. Попарні порівняння елементів кожного.
3. Перехід від матриці попарних порівнянь до матриці суб'єктивної відносної важливості.
4. Обчислення коефіцієнтів важливості для елементів кожного рівня. Перевірка погоджень суджень особи приймаючої рішення.
5. Підрахунок кількісного індикатора якості кожної з альтернатив і визначення найкращої альтернативи.

В даній роботі мною були досліджені основні підходи та методи прийняття рішень, серед яких в процесі аналізу був вибраний як найкращий – підхід аналітичної ієрархії. На основі цього підходу мною була створена власна СППР *Best Choice*, що враховує так звані евристики, якими керуються люди в процесі прийняття рішень.

Таку систему мені вдалося реалізувати на основі мультиплікативного методу аналітичної ієрархії, в якому здійснюється перехід від матриці попарних порівнянь, одержаної за допомогою геометричної шкали, до матриці суб'єктивної відносної важливості елементів ієрархічної схеми, одержаної із закону Вебера, яка власне враховує такі відхилення поведінки людини від раціональної.

- 
1. *Ларичев О.І.*, Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. Друге видання. - М.: Логос, 2002. - 392с.
  2. *Михальська Г.С.*, Модельні системи підтримки прийняття рішень. – Львів, 2005.
  3. *Саати Т., Керне К.* Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
  4. *Stain A., Silva A.P.* Stochastic judgements in the AHP: the measurement of rank reversal probabilities. Luxemburg, 1994.
  5. *Lootsma F.A.* Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART // J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1993.
  6. *Lootsma F.A. Schuijt H.* The multiplicative AHP, SMART and ELECTRE in a common context // J. of Multi-Criteria Decision Analysis. 1997. V. 6.
  7. *Olson D.L., Fliedner G., Currie K.* Comparison of the REMBRANDT system with analytic hierarchy process // European J. of Operations Research. 1995.



## МЕРЕЖЕВА АРХІТЕКТУРА DNA

Новіков Нікіта Михайлович, УКРАЇНА  
Київський Національний Економічний Університет  
Факультет Інформаційних Систем і Технологій

Digital Equipment Corporation (Digital) розробила сімейство протоколів DECnet з метою забезпечення своїх комп'ютерів раціональним способом повідомлення один з одним.

DECnet DNA підтримує різні реалізації фізичного і каналного рівнів. Серед них такі відомі стандарти, як Ethernet, Token Ring, Fiber Distributer Data Interface (FDDI), IEEE 802.2 і X.25.

Маршрутні рішення DECnet базуються на витратах (cost)-арбітражному показнику, який призначається адміністратором мережі для використання при порівнянні різних шляхів через середовище об'єднаної мережі.

Транспортний рівень DNA реалізується різними протоколами транспортного рівня, як патентованими, так і стандартними. Підтримуються наступні протоколи транспортного рівня OSI: TP0, TP2 і TP4.

Платформою для Windows DNA служить серверна операційна система Windows NT, а для більш нової модифікації даної архітектури Windows DNA 2000-серверні версії Windows 2000.

Архітектура Windows DNA являє собою набір системного програмного забезпечення і засобів проектування, що дозволяють корпоративним розроблявачам і компаніям – виробникам ПО створювати розподілені багаторівневі бізнеси-додатки для Internet, використовуючи інтегровані технології для сімейства ОС Windows.

Важливою перевагою застосування архітектури Windows DNA для розроблявачів і для кінцевих користувачів прикладних програм є низька сукупна вартість володіння системною платформою. Цей аспект стає усе більш важливим і в нашій країні в зв'язку з очікуваною жорстокістю контролю за використанням неліцензійного програмного забезпечення.

Стандартом для зв'язування компонентів є DCOM (Distributed Component Object Model) – незалежний від мови програмування і локалізації в мережі стандарт виклику, із синтаксисом і семантикою об'єктного (а не процедурного) характеру в рамках моделі «об'єкт = власності, методи і події».

Використання принципу модульності програмного забезпечення, втіленого в ідеології DCOM/COM, дозволяє будувати дуже гнучкі і масштабні рішення, які досить швидко адаптуються як до потреб замовника, що змінюються, так і до виходу на нові технологічні рубежі.



Завдяки наявності розвинутих інтерфейсів OLE DB/ADO/RDS як сервери баз даних для додатків Windows DNA можуть використовуватися не тільки продукти Windows, але і СУБД від Oracle, Sybase чи Informix.

Багато компаній – виробників програмного забезпечення і корпоративних розроблювачів в усьому світі роблять ставку на архітектуру Windows DNA при створенні розподілених багаторівневих бізнес-додатків.

Існують приклади успішного застосування Windows DNA і в Україні. Одна з них є «Система керування грошовими податками України» у Казначействі Державного Ощадного банку України.

---



**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ СПЛАЙН ФУНКЦІЙ**

Опрюк Алла Юрїївна, Україна  
 Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича  
 Факультет прикладної математики

Розглядається початкова задача для нелінійного інтегро-диференціального рівняння Фредгольма із запізненням

$$y'(x) = f\left(x, y(x), y(x-\tau), \int_0^T P(x, t, y(t), y(t-\tau))dt\right), \quad x \in [0, T] \quad (1)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де  $f : [0, T] \times R^3 \rightarrow R, P : [0, T] \times R^2 \rightarrow R, \varphi \in C^1[-\tau, 0]$ .

Якщо функції  $f(x, y, y_\tau, z), P(x, t, y, y_\tau)$  задовольняють умову Лїпшица по змінних  $y, y_\tau, z$  тоді розв'язок задачі (1)-(2) існує і єдиний. [1]

Застосуємо схему апроксимації розв'язку задачі (1)-(2) параболїчними сплайнами дефекту 2 на рівномірній сітці [2]

$$\Delta = \left\{ x_i : x_i = ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{\tau}{m}, m \in N, n = \frac{Tm}{\tau} \right\}.$$

Використання сплайн функцій дефекту 1 для розв'язування початкової задачі (1)-(2) розглянуто в [3].

На інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$  визначимо сплайн у вигляді

$$s_k(x_k) := s_{k-1}(x) + a_k(x - x_k) + \frac{b_k}{2}(x - x_k)^2.$$

Коефіцієнти  $a_k, b_k$  визначаємо із колокаційних умов

$$\begin{cases} s'_k(x_k + \frac{h}{2}) = f(x_k + \frac{h}{2}, s_k(x_k + \frac{h}{2}), s_{k-m}(x_k + \frac{h}{2} - \tau), z_k(x_k + \frac{h}{2})) \\ s'_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}, s_k(x_{k+1}), s_{k-m}(x_{k+1} - \tau), z_k(x_{k+1})), \end{cases} \quad (3)$$

де

$$z_k(x_k + \frac{h}{2}) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{jh}^{(j+1)h} P(x_k + \frac{h}{2}, t, s_j(t), s_{j-m}(t-\tau))dt + \int_{kh}^{kh+\frac{h}{2}} P(x_k + \frac{h}{2}, t, s_k(t), s_{k-m}(t-\tau))dt,$$



$$z_k(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^k \int_{jh}^{(j+1)h} P(x_k + h, t, s_j(t), s_{j-m}(t - \tau)) dt, \quad s_i(x_k) = \varphi(x), \quad i = -k, -1.$$

**Теорема.** Якщо функції  $f$  та  $P$  задовольняють умову Ліпшиця і  $h$  достатньо мале, тоді існує єдиний параболічний сплайн дефекту 2, що визначається схемою (3).

Приклад. Знайти розв’язок початкової задачі

$$y'(x) = -y(x) + y(x - \frac{\pi}{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt + \cos x - 1 - \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$y(x) = \cos x + 1, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, 0].$$

У таблиці 1 наведені значення точного розв’язку  $y(x) = \cos x + 1$ , апроксимуючого сплайну  $S(x)$  та похибки апроксимації  $e(x) = S(x) - y(x)$  на сітці з кроком  $h = \frac{\pi}{50}$ .

Таблиця 1

$x$	$y(x)$	$S(x)$	$e(x)$
0	2	2	0
$\frac{\pi}{5}$	1.809	1.831	-0.022
$\frac{\pi}{3}$	1.500	1.529	0.029

1. *F.Calio, E.Marchetti, R.Pavani*, On the convergence of collocation spline methods for integral delay problems, Univ. Babes-Bolyai, Mathematica XLIX, 3(2004),17-26.
2. *Дж.Алберг; Э.Нильсон; Дж.Уолш* Теория сплайнов и ее приложения. –М., Мир, 1972. –320 с.
3. *G.Micyla; G.Fairweather* Direct numerical spline methods for first- order fredholm integro-differential equations //Revune d’analyse numerique et de theorie de l’approximation. – 1993.– 27, №1,59–66.



**АПРОКСИМАЦІЇ Н-АДАПТИВНОГО МСЕ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З РІВНЯННЯМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

Остапов Олександр Юрійович, Хапко Тарас Романович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
факультет прикладної математики та інформатики

**1. Формулювання задачі. Розглянемо крайову задачу: знайти функцію  $u = u(x)$  таку, що**

$$\begin{cases} -u'' \pm k^2 u = f \text{ на } (0;1), f \in L^2(0;1), k = \text{const}, \\ u'(0) = \alpha[u(0) - u_0], -u'(1) = \gamma[u(1) - u_1] \end{cases}$$

та її варіаційне формулювання:

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := H^1(0;1) \text{ таку, що} \\ \int_0^1 (u'v' \pm k^2 uv) dx + \gamma v(1)u(1) + \alpha v(0)u(0) = \int_0^1 v f dx + \alpha v(0)u_0 + \gamma v(1)u_1. \end{cases}$$

**2. Кусково-лінійні апроксимації.** На сітці скінченних елементів  $[x_i; x_{i+1}]$  довжиною  $h_{i+1} := x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N-1$  за допомогою кусково-лінійних функцій Куранта  $\varphi_i(x)$  будуються апроксимації  $u_h$  розв'язку  $u$ ,

$$u(x) \approx u_h(x) := \sum_{i=0}^N q_i \varphi_i(x).$$

З огляду на [1] для відшукування коефіцієнтів  $q_i$  побудовано систему лінійних алгебричних рівнянь такої структури

$$\begin{aligned} \frac{q_0 - q_1}{h_1} \pm \frac{k^2}{6} (2q_0 + q_1) h_1 + \alpha q_0 &= \frac{1}{2} h_1 f(x_1 - \frac{1}{2} h_1) + \alpha u_0, \\ \frac{q_j - q_{j-1}}{h_j} + \frac{q_j - q_{j+1}}{h_{j+1}} \pm \frac{k^2}{6} [q_{j-1} h_j + 2q_j (h_j + h_{j+1}) + q_{j+1} h_{j+1}] &= \\ = \frac{1}{2} h_j f(x_j - \frac{1}{2} h_j) + \frac{1}{2} h_{j+1} f(x_{j+1} - \frac{1}{2} h_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{q_N - q_{N-1}}{h_N} \pm \frac{k^2}{6} (q_{N-1} + 2q_N) h_N + \gamma q_N &= \frac{1}{2} h_N f(x_N - \frac{1}{2} h_N) + \gamma u_1. \end{aligned}$$

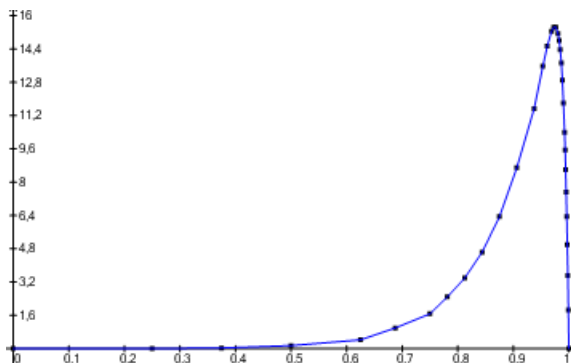
**3. Апостеріорний оцінювач похибки (АОП) та адаптування сітки.** Для обчислення апроксимацій з наперед гарантованою точністю вживається адаптування сітки і кусково-квадратичний АОП, норма якого на кожному скінченному елементі обчислюється згідно формули



$$\|\varepsilon_h\|_{i+1} = \frac{\sqrt{h_{i+1}^3}}{2\sqrt{3}} \left| f\left(x_{i+1} - \frac{1}{2}h_{i+1}\right) \mp \frac{k^2}{2}(q_i + q_{i+1}) \right|, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Детальніше про стратегію адаптування див. [1].

**4. Приклад:**  $-u''(x) + 10^4 u(x) = 10 \exp(10x)$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ .



**Рис.** Графік наближеного розв'язку, отриманий адаптуванням сітки для допустимого рівня похибки  $\eta = 10\%$ . Крапками виділено значення апроксимації у вузлах остаточної сітки з 32-ох елементів.

В таблицях порівнюються характеристики  $h$ -адаптивних апроксимацій та відповідних їм апроксимацій МСЕ знайдених на рівномірних сітках.

*Таблиця 1.* Характеристики  $h$ -адаптування для різних значень допустимого рівня похибок.

$\eta, \%$	$N$	$\ u_h\ _V$	$\ \varepsilon_h\ _V$	$\max \ \varepsilon_h\ _{i+1}$
20	18	134,82740	15,61196	6,34773
10	32	134,89390	7,38914	2,31027
5	56	134,91009	3,61694	0,83771

*Таблиця 2.* Характеристики апроксимацій, обчислені на рівномірних сітках скінченних елементів.

$N$	$\ u_h\ _V$	$\ \varepsilon_h\ _V$	$\max \ \varepsilon_h\ _{i+1}$
18	84,62031	323,09497	313,76398
32	109,85432	158,96627	158,10167
56	124,69165	83,99808	83,56339



- 
1. *Абрамов Є., Лііна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А.* Кусково-лінійні апроксимації  $h$ -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач.



## МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗВИТКУ РИНКУ ТОВАРІВ ПІДПРИЄМСТВА НА ЗАСАДАХ ВИВЧЕННЯ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ ПОКУПЦІВ

Пашуля Юрій Романович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

*Прогнозування розвитку ринку товарів підприємства* – це процес наукового передбачення обсягу виробництва товарів з певними якісними характеристиками, що будуть користуватися попитом, тобто процес визначення пріоритетних напрямів діяльності підприємства з метою оптимального задоволення потреб покупців.



**Рис. 1.** Концептуальна модель прийняття управлінських рішень щодо вибору маркетингової стратегії підприємства

Мета прогнозування розвитку ринку товарів підприємства - зробити зусилля зі збуту продукції зайвими, вивчити та зрозуміти споживача так, щоб товар або послуга чітко відповідали його потребам і самі себе продавали. В умовах ринку цей прогноз має визначальний вплив на



діяльність підприємства. Він сприяє чіткому виокремленню ринкових сегментів споживачів, а це, в свою чергу, дає змогу запобігти розпорошенню фінансових ресурсів, сконцентрувати їх на стратегічно важливих напрямках.

Прогноз розвитку ринку товарів підприємства може використовуватись при розробці стратегії розвитку компанії нею самою чи спеціалізованими організаціями маркетингових досліджень. Його реалізація полягає у визначенні привабливих напрямків діяльності підприємства. Для їх вибору необхідно реалізувати такі етапи:

- визначити базовий ринок підприємства;
- вивчити сформований базовий ринок;
- вивчити прогноз розвитку ринку товарів підприємства;
- визначити оптимальне розташування підприємства.

Розроблена математична модель оптимального розміщення підприємств, яка враховує необхідні об'єктивні фактори.

- 
1. *Войтович С.Я., Ліпич Л.Г.* Методи визначення потреб індивідуальних споживачів. –Луцьк: “Надстир’я”. – 2000. – 208 с.
  2. *Лідовський Ю.А.* Моделювання маркетингової стратегії підприємства. –Харків: Видавничий Дім «ІНЖЕК», 2004. – 176 с.
  3. *Ліпич Л.Г.* Маркетингове прогнозування ринку товарів. –Луцьк: редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2002.-357 с.



## АНАЛІЗ МЕТОДІВ ВИДІЛЕННЯ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ НА ЗОБРАЖЕННЯХ ПІД ДІЄЮ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРОЕКТИВНОЇ ГРУПИ

Передрій Олена Олегівна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет Прикладної математики та менеджменту

В останні роки спостерігається стрімкий розвиток інформаційних технологій, автоматизація та роботизація процесів, усе більш широке поширення одержує обчислювальна техніка. У зв'язку із цим відзначається висока зацікавленість до задач, пов'язаних з обробкою та аналізом зображень [1-3] (медичні застосування, аналіз об'єктів, що рухаються у відеопотоці, пошук об'єктів, аналіз супутникових знімків та ін.). Практично всі ці задачі пов'язані з пошуком об'єктів на зображенні та виміром їх параметрів. Але при вирішенні реальних задач на зображеннях часто присутні геометричні перетворення, що ускладнюють пошук необхідної області або об'єкта. Оскільки проєктивна модель найбільш повно описує сприйняття зорових образів людиною, доцільно розробити метод інваріантний до проєктивних перетворень. Розглянемо задачу пошуку об'єктів певної структури з можливістю наступної нормалізації зображення. Для вирішення даної задачі традиційно виконуються наступні етапи:

- 1) Попередня обробка зображення для спрощення аналізу;
- 2) Виділення областей-кандидатів (сегментація);
- 3) Перевірка, чи є фрагмент зображення зображенням потрібного нам об'єкта;
- 4) Нормалізація.

Другий етап є одним з найскладніших етапів обробки зображень і успішність процедур аналізу та розпізнавання зображень багато в чому визначається якістю сегментації.

Проаналізуємо існуючі методи сегментації зображень [1].

Гранична обробка (бінаризація) напівтонового зображення полягає в поділі всіх елементів зображення на два класи за ознакою яскравості.

Метод  $k$ -середніх - метод кластеризації даних. Метою задачі кластеризації є розбивка множини об'єктів на класи (кластери) на основі деякої міри подібності об'єктів.

Алгоритм розбивки і злиття регіонів (Region splitting & merging) складається з двох основних етапів: дроблення і злиття. Дроблення починається з деякого розбиття зображення (не обов'язково на однорідні області). Потім відбувається об'єднання схожих сусідніх сегментів доки не буде отримане розбиття зображення на однорідні області максимального розміру.



Метод "вододілу" (Watershed Segmentation). У цьому методі задача сегментації зводиться до знаходження областей стабільного мінімуму відділених один від одного областями стабільного максимуму.

Під контурною сегментацією [2] розуміють процедуру одержання контурів зображень об'єктів і їх кодування тим або іншим способом. Після чого з'являється можливість використати перетворення Хафа, що дозволяє знаходити на бінарному зображенні плоскі криві, задані параметрично.

Програмна реалізація даних алгоритмів показала, що граничну обробку зручно використовувати для зменшення кількості інформації, яка міститься в напівтоновому зображенні, а також для подальшого застосування відомих алгоритмів для бінарних зображень. Це досить швидкий та простий метод, однак через проблему вибору порога цей метод може працювати недостатньо якісно.

Підхід, заснований на виділенні границь є більш гнучким, ніж проста бінаризація і застосовується у випадку, коли зображення містить велику кількість різних типів областей і розбиття на однорідні області стає практично неможливим. Також алгоритм більш стійкий до змін характеристик зображення, однак до недоліків можна віднести слабку стійкість, неточність виділення областей, невисоку швидкість роботи.

В алгоритмах, заснованих на пошуку регіонів, найчастіше виникають проблеми пов'язані з вибором стартових точок для попереднього розбиття області, вибором порога, обмеженнями на форму регіонів, а також їх повільною роботою.

На основі аналізу існуючих методів, запропоновано алгоритм виділення зв'язних областей, заснований на пороговій обробці та контурному аналізі. Також на заключному етапі алгоритму реалізована можливість нормалізації геометричних перетворень присутніх на зображенні.

Тестування роботи існуючих і запропонованого алгоритму проводилося на гістологічних зображеннях і зображеннях автомобілів.

- 
1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
  2. Бакут П.А., Колмогоров Г.С. Сегментация изображений: методы выделения границ областей // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. -№10. -С.7.
  3. Путьтин Е.П., Аверин С.И. Обработка изображений в робототехнике. – М.: Машиностроение, 1990. – 320с.: ил.



**АПРОКСИМАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ  
ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ**

Пернай Світлана Анатоліївна, Україна  
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича  
Факультет прикладної математики

У даній роботі застосовується схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [1,2] для знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних рівнянь із запізненням.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i), \quad A_i \in R, \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau. \quad (1)$$

Характеристичний квазіполіном рівняння (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \lambda - \sum_{i=0}^k A_i e^{-\lambda \tau_i}. \quad (2)$$

Рівнянню (1) поставимо у відповідність за схемою [1,2] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i z_{l_i}, \quad l_i = \left\lfloor \frac{\tau_i m}{\tau} \right\rfloor, \\ \frac{dz_i}{dt} = \mu(z_{i-1} - z_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{cases} \quad (3)$$

Обчислюючи характеристичний поліном системи (3), нескладно одержати, що він має вигляд

$$D_m(\lambda) = \left[ \lambda - \sum_{i=0}^k A_i \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{l_i} \right] (\mu + \lambda)^m. \quad (4)$$

**Лема.** Для фіксованих  $\lambda \in Z$  послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{D_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^m}, \quad m \in N \quad (5)$$

збігається при  $m \rightarrow \infty$  до квазіполінома (2).

**Зауваження:** Оскільки нулі функцій  $D_m(\lambda)$  і  $H_m(\lambda)$  збігаються, то корені характеристичного полінома (4) можна використовувати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

Здійснюючи у рівності (4) заміну  $\mu + \lambda = s$ , одержимо многочлен у стандартній формі

$$D_m(s) = s^{m+1} - \mu s^m - \sum_{i=1}^k A_i \mu^{l_i} s^{m-l_i},$$



який зручний для числового знаходження його коренів на ЕОМ.

Диференціальне функціональне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 Ax(t+s)ds, \quad A \in R, \tau > 0, \quad (6)$$

апроксимується диференціально-різницеvim рівнянням із багатьма запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = h \sum_{i=0}^{n-1} x(t-\tau+\frac{i\tau}{n}), \quad n \in N, h = \frac{\tau}{n}. \quad (7)$$

Рівнянню (7) відповідає система звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = h \sum_{j=0}^{n-1} z_l j, \quad l_j = \left[ m(1-\frac{j}{n}) \right], \quad n \in N, h = \frac{\tau}{n}, \\ \frac{dz}{dt} = \mu(z_{i-1} - z_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{cases} \quad (8)$$

Знаходячи корені характеристичного полінома апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь (8) дістанемо наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома

$$\lambda = \frac{A}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\tau})$$

диференціального функціонального рівняння (6).

За допомогою середовища Mathcad проведено числові експерименти знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів для тестових модельних прикладів.

1. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницеvim та різницеvim рівнянь з багатьма запізненнями // *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика: – Чернівці: Рута, 2002. – С.50-54.*
2. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницеvim рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // *Нелінійні коливання. – 1999. – №1. – С.42-50.*



## ЧИСТА ТЕПЕРІШНЯ ВАРТІСТЬ ЯК ПОКАЗНИК ОЦІНКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПРОЕКТУ

Петрусь Наталя Богданівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Економічний факультет

На сьогоднішній день в Україні актуальною є проблема вибору інвестиційних проектів, що може забезпечити високу ефективність вкладення капіталу.

В науковій літературі наводиться низка показників оцінки економічної привабливості інвестиційних проектів. Зокрема чиста теперішня вартість, термін окупності, індекс дохідності, внутрішня ставка дохідності та ін. Причому вони часто «конфліктують» між собою. Тобто інвестиційний проект може мати високий рівень одних показників, а інших – низький. Наприклад, внутрішня норма дохідності і чистий приведений дохід, індекс дохідності і період окупності [3].

Найчастіше оцінка економічної ефективності інвестиційного проекту здійснюється з допомогою чистої теперішньої вартості [1, с.127 ]:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{NCV_t}{(1+R)^t}, \quad (1)$$

де  $NCV_t$  - чистий потік грошових засобів упродовж t-го інтервалу планового періоду ( $NCV_t$  може бути як додатним, так і від'ємним);

$R$  – це ставка дисконту, що враховує ризик;

$t$  – порядковий номер інтервалу планування за умови, що початок реалізації проекту взято за нуль.

$n$  – тривалість життєвого циклу проекту

$$NCV_t = Pr_t + A_t - I_t - T_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2)$$

де  $Pr_t$  - валовий прибуток за t-й інтервал планування;

$A_t$  - амортизаційні відрахування;

$I_t$  - інвестиційні витрати;

$T_t$  - податки.

Для  $t=0$ ,  $NCV_0 = -I_0$ , де  $I_0$  - початкові інвестиції.

Звідси, ми чітко бачимо і виділяємо три основних грошових потоки: потік інвестицій, поточних сплат і поточних надходжень. При цьому жоден із цих потоків ми не можемо точно передбачити, оскільки не маємо інформації про майбутній стан ринку.

Тому фактично NPV є функцією від багатьох змінних, більшість яких є випадковими величинами.



В науковій літературі часто використовують таку формулу для обчислення NPV[4 ]:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{\overline{CF}_t}{(1+R)^t} - C^0, \quad (3)$$

де  $\overline{CF}_t$  - фінансовий підсумок в році  $t$  без врахування початкових інвестицій;

$C^0$  - обсяг загальний інвестиційних витрат проекту.

Недоліком цієї формули є те, що тут припускається, що вкладення капіталу відбувається миттєво. Проте, в реальності період вкладення коштів може бути досить тривалим.

Очевидно, якщо  $NPV > 0$ , то реалізація даного проекту призведе до отримання прибутку підприємством. Однак завжди залишається імовірність того, що обраний проект виявиться збитковим. Це зумовлено тим, що змінні і параметри як випадкові величини можуть відхилитися від запланованих. Тому слід враховувати ризики, якими обтяжені інвестиційні проекти. У найпростішому випадку, серед варіантів проекту із врахуванням ризику, ми виберемо той для якого коефіцієнт варіації досягає свого мінімального значення [1, с.133 ]:

$$k^0 = \text{Arg} \min_{k=1, \dots, K} (CV(NPV_k)) \quad (4)$$

де

$$CV(NPV_k) = \frac{\sigma(NPV_k)}{m(NPV_k)}, \quad k=1, \dots, K \quad (5)$$

Ще одним важливим завданням є вибір оптимального масштабу інвестиційного проекту, який би максимізував економічний ефект від впровадження проекту. В цьому випадку ми не можемо використати NPV, оскільки NPV є абсолютним показником і його величина залежить від масштабу. Крім того при збільшенні масштабу NPV зростає, а відносна ефективність проекту може знижуватися.

Отже, перевагами показника NPV є те, що він характеризує економічний ефект від реалізації даного інвестиційного проекту в абсолютному виразі та відображає вплив інвестицій на вартість підприємства.

В той же час він має достатньо недоліків. Зокрема неможливість спрогнозувати розвиток майбутньої ситуації на ринку та неврахування ризику робить результати обчислень неадекватними і, часто, невірними. Чиста теперішня вартість не дає можливості вибору оптимального масштабу проекту.



1. *Вітлінський В.В.* Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 408с.
2. *Герасимчук З.В., Вахович І.М.* Фінансовий менеджмент: Навчальний посібник. – Луцьк: Надстир'я, 2004. – 520с.
3. *О.Белз.* Економічна оцінка ефективності інвестиційних проєктів//Вісник Львів. ун.-ту. Сер. екон. – Вип.33. – 2004. – С.184-192.
4. *Паславська І.* Аналіз застосування дисконтних методів оцінки ефективності проєктів при виборі оптимальної інвестиційної альтернативи //Вісник Львів. ун.-ту. Сер. екон. – Вип.33. – 2004. – С.193-200.

**CMS-СИСТЕМА КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИМ ВИДАнням**

Рінг Петро Романович, Україна  
Львівський національний університет ім. І.Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

У роботі розглянуто побудову CMS (Content Management System) системи для організації журналу або іншого періодичного видання. Для реалізації такої системи використана платформа ASP.NET 2.0, яка пропонує повністю об'єктно-орієнтовану модель програмування, включаючи керування подіями, основу на елементах керування архітектурою, що забезпечує інкапсуляцію та повторне використання коду. Також ASP.NET орієнтована на досягнення високих показників продуктивності. Сторінки і компоненти компілюються за вимогою, а не інтерпретуються при кожному використанні. Мовою для написання коду було обрано C#, а для роботи з базою даних використана технологія доступу до даних - ADO.NET.

Електронне видання передбачає гнучку ієрархію випусків (групування їх у томи, номери випусків та будь-які інші каталоги) та тематичних розділів. Система забезпечує доступ до даних згідно із ієрархією користувачів: адміністратор, редактор журналу, рецензент статті, автор статті, авторизований користувач та гість. Для гостя може бути заборонена можливість переглядання тексту статті.

Для того щоб стаття була опублікована вона повинна пройти процес рецензування. Він складається із декількох етапів. На першому етапі для надісланої автором статті редактор призначає рецензентів із відповідної групи користувачів. Після цього розпочинається обговорення її (у вигляді форуму), участь в якому беруть лише закріпленні за нею рецензенти та автор. І лише після схвалення ними стаття подається редактору для публікації. Редактор формує новий випуск із статей які пройшли рецензування і опубліковує його.

Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс допомагає в навігації по сайту та швидкому пошуку потрібної інформації, а також легкому та швидкому адмініструванні. Завдяки цьому така система може бути використана для будь-якого періодичного видання із затратною мінімуму сил та часу на його підтримку.

- 
1. Мак-Дональд М., Шнуїта М. Microsoft ASP.NET 2.0 с примерами на C# 2005 для профессионалов. М.: Вильямс, 2006.
  2. [www.gotdotnet.ru](http://www.gotdotnet.ru)
  3. [www.aspnetmania.com](http://www.aspnetmania.com)
  4. [msdn.microsoft.com](http://msdn.microsoft.com)



## ПРОГРАМА “ADVANCED AUDIO VOICE” ДЛЯ СИНТЕЗУ УКРАЇНСЬКОЇ МОВИ

Ройко Сергій Олександрович , Україна  
Волинський державний університет імені Лесі Українки  
Математичний факультет

Розвиток сучасних інформаційних технологій і телекомунікацій визначають як пріоритетний напрямок розвитку голосових технологій, зокрема появу нових програмних продуктів для синтезу і розпізнавання мови. Функції голосового введення починають використовуватися в найрізноманітніших програмних продуктах і електронних пристроях. У сучасних прикладних програмах комп'ютерної телефонії фактично обов'язковою стала підтримка мовного інтерфейсу з користувачем. Останні результати в галузі голосових технологій дозволяють розпізнавати звичайну зливу людську мову і озвучувати тексти з такою високою якістю, що вони практично не відрізняються від прочитаних людиною.

Проте практично усі ці досягнення стосуються англійської мови. На сьогоднішній день відомо про невелику кількість таких програмних продуктів, здатних синтезувати українську мову, так як це реалізовано в зарубіжних програмах.

Розроблена програма “Advanced Audio Voice” може використовуватися для читання тексту (книжок, ділових паперів); створення простих навчальних, презентаційних програм; для тих, хто вивчає українську мову в неукраїномовному середовищі; людей з проблемами зору.

Функціональні можливості :

- програвання всіх існуючих звукових форматів;
- еквалайзер та інші звукові ефекти;
- налаштування голосу та швидкості читання;

Структурно програма складається з двох частин : синтезатор і програма-оболонка, яка лише організовує призначений для користувача інтерфейс.

Програма-оболонка реалізована в середовищі DELPHI 7 з допомогою бібліотеки BASS, що дозволяє коректно виводити на зовнішні динаміки звукові файли. Вона має зручний, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс користувача, який розділений на дві складові частини:

- 1) засоби керування програмою (програвати звуковий файл, пауза, стоп, відкрити файл, обробка тексту);
- 2) текстовий редактор.



Друга частина програми, сам синтезатор, який перетворює текстову інформацію в звуковий файл з розширенням *wav*. Має вигляд консольної програми. Реалізована в середовищі C++ Builder 6.

У папці з програмою присутній спеціальний текстовий файл, у який можна записувати всі скорочення, які потрібно озвучити повністю, або деякі слова, які є винятками з правил для читання.

Дана програма є повністю функціонально завершена і якість читання залежить тільки від голосу, який ми можемо вибрати зі списку, або записати новий та додати у базу програми.

---



## ЛАПЛАСІАН ФУНКЦІЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ

Ружицька Світлана Валеріївна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

В даній роботі розглядається алгоритм знаходження лапласіана функції потенціальної енергії. Необхідність такого алгоритму виникла при застосуванні «геометричного» підходу до опису згортання білкових молекул.

В молекулярній біології одним з найважливіших та відкритих питань є питання про згортання білкових молекул в унікальну просторову структуру. Існує багато підходів до вивчення цього питання. Один з таких підходів ґрунтується на дослідженні геометричних характеристик потенціальної енергетичної поверхні, а саме її кривизни. Італійськими вченими було показано та доведено, що білкові молекули, котрі згортаються та не згортаються, мають різні графіки кривизни потенціальної енергетичної поверхні [1]. Вони також показали, що при підходящому виборі метрики кривизна – це не що інше, як лапласіан функції потенціальної енергії, яка залежить від координат всіх атомів молекули [2]. Але у зв'язку з тим, що білкові молекули складаються з сотень, а іноді й тисяч атомів, виникла проблема вибору найбільш ефективного аналітичного методу знаходження лапласіана.

Потенціальна енергія молекули білка, що складається з  $N$  атомів, може бути апроксимована потенціальною функцією, що представляється як сума потенціалів, які описують взаємодії зв'язаних та незв'язаних атомів. Ці потенціали залежать головним чином від відстаней  $V(r, k)$ , кутів  $V(\theta, k)$  або торсійних кутів  $V(\xi, k)$  між атомами, у відповідності до цього вони і були поділені в даній роботі на три групи.

Лапласіан потенціалів, що містять відстані між  $i$ -м та  $i+1$ -м атомами знаходять наступним чином. Спочатку знаходять другу часткову похідну

$$\frac{\partial^2 V(r, k)}{\partial q^2} = \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{\partial^2 V(r_{i(i+1)}, k)}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 V(r_{i(i+1)}, k)}{\partial q_{i+1}^2} \right),$$

де замість  $q$  підставляють по черзі  $x, y, z$ , після чого проводиться підсумовування

$$\Delta V(r, k) = \frac{\partial^2 V(r, k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(r, k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(r, k)}{\partial z^2}.$$

Лапласіан потенціалів, що містять кути між  $i$ -м,  $i+1$ -м та  $i+2$ -м атомами знаходять аналогічно попередньому, але друга часткова похідна обчислюється за формулою:



$$\frac{\partial^2 V(\theta, k)}{\partial q^2} = \sum_{i=1}^{N-2} \left( \frac{\partial^2 V(\theta_{(i+1)(i+2)}, k)}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 V(\theta_{(i+1)(i+2)}, k)}{\partial q_{i+1}^2} + \frac{\partial^2 V(\theta_{(i+1)(i+2)}, k)}{\partial q_{i+2}^2} \right).$$

Лапласіан потенціалів, що містять торсійні кути між  $i+1$ -м,  $i+2$ -м та  $i+3$ -м атомами – це сума других часткових похідних обчислених за формулою:

$$\frac{\partial^2 V(\xi, k)}{\partial q^2} = \sum_{i=1}^{N-3} \left( \frac{\partial^2 V(\xi_{(i+1)(i+2)(i+3)}, k)}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 V(\xi_{(i+1)(i+2)(i+3)}, k)}{\partial q_{i+1}^2} + \frac{\partial^2 V(\xi_{(i+1)(i+2)(i+3)}, k)}{\partial q_{i+2}^2} + \frac{\partial^2 V(\xi_{(i+1)(i+2)(i+3)}, k)}{\partial q_{i+3}^2} \right),$$

де замість  $q$  по черзі підставляють  $x, y, z$ .

Після того, як обчислені лапласіани всіх потенціалів, вони підсумовуються і в результаті отримують лапласіан всієї функції потенціальної енергії.

В даній роботі було також проведено дослідження можливості спрощення запропонованого алгоритму шляхом зменшення операцій при обчисленні других часткових похідних. Таке спрощення виявилось можливим у зв'язку з присутністю однакових виразів других частинних похідних для різних координат.

- 
1. *Lorenzo Mazzoni and Lapo Casetti*, Curvature of the energy landscape and folding of model proteins (Florence, Italy, 2006).
  2. *L. Casetti, M. Pettini, E. G. D. Cohen*, Phys. Rep. 337, 237-341 (2000).



**ВЕКТОРНІ ПРОЦЕСИ РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО  
НЕСКІНЧЕНОГО ПОРЯДКУ**

Саліш Назарій Богданович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Механіко-математичний факультет

Описано випадок векторного МА процесу нескінченного порядку із специфічного класу моделей часових рядів, які застосовують у дослідженні економічних, фінансових та природничих процесів. Векторний процес рухомого середнього є ширшою моделлю ніж скалярні МА процеси і дає змогу не лише прогнозувати а й досліджувати впливи МА процесів один на одного. Основна задача – побудова VMA моделі, дослідження її властивостей, побудова автоковаріаційної генеруючої функції та оцінка параметрів.

Векторний процес рухомого середнього нескінченного порядку можна подати у вигляді

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k \varepsilon_{t-k}, \tag{1}$$

де  $Y_t$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon_{t-k}$  вектори з  $n$  координатами;  $\Omega_i$  матриці розміру  $n \times n$  для  $i = \overline{1, n}$ ;  $\Omega_0 = I_n$  - одинична матриця.

Основні припущення моделі:

(i) Досліджуваний процес є стаціонарним, тобто

- (a)  $E[Y_t] = const$  для всіх  $t$ ;
- (b)  $E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \Gamma_k$  для всіх  $t$ ;

де  $\Gamma_k$  - позначає матрицю автоковаріацій і залежить лише від  $k$

(ii) Часовий ряд  $\varepsilon_t$  задовольняє такі умови:

- (a)  $E[\varepsilon_t] = 0$  для всіх  $t$ ;
- (b)  $VAR[\varepsilon_t] = \Sigma$  для всіх  $t$ ;
- (c)  $E[\varepsilon_t \varepsilon'_s] = 0$  при  $t \neq s$ .

Означення. Будемо називати  $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжною, якщо при фіксованих  $i$  та  $j$  послідовність  $\{\omega_{ij}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжна.

Основні властивості подамо у вигляді теореми.

**Теорема.** Нехай маємо процес (1) та виконуються умови (i), (ii), крім того послідовність матриць  $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  абсолютно збіжна. Тоді

(a) Автоковаріаційна матриця порядку  $s$  існує та задається виразом

$$\Gamma_s = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{k+s} \Sigma \Omega'_k .$$



(b) Послідовність матриць  $\{\Gamma_s\}_{s=0}^{\infty}$  абсолютно збіжна.

Для стаціонарних процесів з абсолютно збіжними матрицями автоковаріацій, аналогічно до скалярного випадку введемо означення автоковаріаційної генеруючої функції

$$G_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_j z^j,$$

де  $z$  комплексний скаляр. Використовуючи теорему можемо побудувати цю функцію для  $VMA(\infty)$ . Вона матиме вигляд

$$G_y(z) = [\Omega(z)]\Sigma[\Omega(z^{-1})].$$

Оцінити параметри  $VMA(\infty)$  можна двома способами: методом оцінки автоковаріаційних матриць та методом максимальної правдоподібності. Перший полягає в тому, що ми, маючи певну кількість спостережень, можемо знайти оцінки матриць  $\Gamma_s$  і математичного сподівання

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T Y_t}{T}, \quad \hat{\gamma}_{ij}(s) = \frac{\sum_{t=1+s}^T (y_t^i - \mu_i)(y_{t-s}^j - \mu_j)}{T-s},$$

де  $\gamma_{ij}(s)$  елементи матриці  $\Gamma_s$ . На підставі цих оцінок будується система нелінійних рівнянь. Другий спосіб вимагає побудову та максимізацію функції максимальної правдоподібності. В результаті цього теж отримуємо систему нелінійних рівнянь. В обох випадках пошук розв'язку є нелегким і зводиться до чисельної оптимізації та наближених методів.

1. *Hamilton, James D.* Times series analysis. - Published by Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994
2. *Ruel S. Tsay.* Analysis of Financial Time Series- University of Chicago
3. *Walter Enders.* Applied Econometric Time Series- Iowa State University

**СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО ТЕСТУВАННЯ КОНСОЛЬНИХ ПРОГРАМ  
"ACM CONTESTER"**

Семен Юрій Володимирович, Бабіля Руслан Васильович,  
Яремчук Назарій Іванович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Сьогодні існує багато систем тестування, однак жодна з них не може дати відповідь на питання чи правильно написаний код, метою якого є розв'язання деякої прикладної алгоритмічної задачі. Такі програми, в основному дають оцінку знань користувача шляхом перевірки вибраного варіанту відповіді. Більш функціональними є програми тестування, які дають можливість ввести користувачеві текстову відповідь. В цьому випадку можна передбачити декілька різних варіантів, які будуть однаково правильними. Але що робити, коли є необхідність перевірити вміння складати та правильно реалізовувати обчислювальні алгоритми?

У цьому випадку, звичайними програмами тестування не скористаєшся. Адже теоретичні знання – не показник. Людина може ідеально досконало знати синтаксис мови програмування, знати які базові типи присутні та їх властивості і т.д. Бувають випадки, коли людина вміє визначити результати виконання конкретного програмного коду. Але при самостійному написанні коду, який виконуватиме поставлену задачу, виникають труднощі. Отже, щоб оцінити вміння програмувати – необхідно перевірити вміння створювати програми. Тобто здатність будувати алгоритми.

Очевидно, що це не так просто. Варіантів програмного коду, який виконує одну і ту саму задачу, безліч. Ми не можемо навчити звичайну систему тестування відрізнити правильний код від неправильного.

Цю, на перший погляд, досить складну проблему ми вирішили наступним чином:

Введемо деякі обмеження та уточнення:

- розв'язок - це програмний код консольної програми.
- набір тестів - початкові дані задачі разом із еталонними результатами.
- якщо програма не знаходить результат вчасно - розв'язок не вірний.
- якщо при обчисленнях програма використовує забагато оперативної пам'яті – розв'язок теж не вірний.
- якщо при обчисленнях програма користувача хоча б один раз дала невірну відповідь - розв'язок, зонову ж таки, не вірний.



У цьому випадку, ми можемо поставити перед користувачем завдання - розробити певний алгоритм, який буде отримувати початкові дані, і повертати результати роботи алгоритму. Отриманий результат ми можемо перевірити на відповідність еталонному результату.

Цей принцип перевірки правильності побудови алгоритму лежить в основі проведення престижних міжнародних змагань за правилами АСМ, які проходять за підтримки провідних лідерів у виробництві комп'ютерної техніки та програмних продуктів.

Розроблена нами система працює в режимі 24/7 і зарекомендувала себе як надійна, стабільна система, яке не потребує ніяких втручань у її роботу. Завдяки цьому, користувачі системи мають змогу у будь-який, зручний для них, час перевірити чи правильно побудований алгоритм.

Крім цього постійно підтримується база даних, у якій зберігаються усі спроби разом із результатами. Це дає змогу відображати динамічний рейтинг, який додає певного стимулу. А також, при необхідності провести "он-лайн" змагання, досить вибрати час початку, тривалість та завдання, які будуть включені до цього змагання і воно розпочнеться автоматично в заданий час.

На даний момент у системі зареєстровано понад 170 користувачів та понад 50 завдань олімпіадного рівня різної складності. Зареєстровано понад 8 тисяч запитів на перевірку алгоритму та проведено 5 відкритих інтернет олімпіад і понад 10 олімпіад факультетського рівня.

---



## ПОЛІГОНАЛЬНІ РЕГУЛЯРНІ МОЗАЇКИ НА ПЛОЩИНІ

Сеніна Анна Вікторівна, Україна  
Одеський національний університет ім. І.І.Мечнікова  
ІМЕМ, факультет прикладної математики

Найповніше уявлення про різноманітність мозаїк можна отримати, якщо проглянути малюнки голландського художника М.К.Ешера. Завдяки картинам Ешера легко скласти типізацію можливих мозаїк: прості (всі фігури однакові та однаково орієнтовані), мозаїки з поворотом (в одному або декількох напрямках), мозаїки з віддзеркаленням та ін. Це досягається за допомогою наступних трансформацій базових фігур: симетрія, відображення, зсув та ін.

Кінцевою метою даної роботи є реалізація зручного програмного засобу для створення регулярних мозаїк з деяких базових фігур, розробки користувачем нових (складених) базових фігур, та ін.

Введемо в обіг два важливі поняття. **Симплекс** – елементарна базова фігура, що лежить в основі мозаїчної структури. **Комплекс** – результат заощування площини симплексом. В подальшому розвитку проекту необхідно створити широку бібліотеку функцій, що будуть виконувати різноманітні перетворення утворених симплексів та комплексів.

На даному етапі підтримується створення мозаїк на базі – паралелограмів (та їх похідних – квадратів, прямокутників) і правильних шестикутників.

Основна ідея – задля побудови розбиття необхідно спеціальним чином сформувати симплекс. Він зберігається у пам'яті у вигляді масиву точок *points[]* – вершин многокутника. Користувач має можливість деформувати сторони многокутника (за допомогою мишки), «втягуючи» нові вершини. Також у пам'яті зберігається список відповідних сторін *pointList*, у вигляді:  $(i, j) \sim (k, l)$ , де  $i, j, k, l$  – номери вершин многокутника (індекси у масиві *points[]*). Отже, при зміні одної зі сторін многокутника, спостерігаємо одночасно зміну відповідної їй сторони. Таким чином, отримуємо дві нові вершини. Далі доповнюємо масив *points[]* двома новими точками. У списку *pointList* необхідно вилучити вказану пару сторін і додати замість неї дві нові пари. Наприклад, за умову, що загальна кількість вершин дорівнює  $n$ , матимемо:  $(i, n) \sim (k, n+1)$  та  $(n, j) \sim (n+1, l)$ . Для даних симплексів відповідні сторони є паралельними, що полегшує обчислення координат **другої** точки (тут і далі – точка, яка утворюється автоматично без участі користувача). Можемо використати критерій паралелограма з аналітичної геометрії: чотирикутник  $ABCD$  буде паралелограмом тоді і тільки тоді, коли для координат його вершин одночасно виконуються дві рівності:



$$A_x + C_x = B_x + D_x,$$

$$A_y + C_y = B_y + D_y.$$

Нехай точка, в якій користувач відпустив мишку –  $Up(Up_x; Up_y)$ , тоді координати другої точки  $New$  будуть:

$$New_x = points[k].x + Up_x - points[i].x,$$

$$New_y = points[k].y + Up_y - points[i].y.$$

Зрозуміло, що для реалізації повороту у комплексі, необхідно буде тільки змінити **спосіб обрання відповідної сторони та спосіб обчислення координат другої точки**.

Результат роботи – побудований комплекс. Для кожного типу симплексу він будується окремо. Далі є можливість експортувати зображення у графічний файл (jpg, bmp, gif) або серіалізувати у XML-файл. Реалізована також можливість відміни операції.

Далі необхідно додати: можливість масштабування, повороту зображення та ін., можливість обрання симплексу більш складної форми (з декількох фігур), можливість пересування/вилучення вершин симплекса (крім базових), можливість обрання типу ліній, що з'єднують вершини симплексу (криві Безье та ін.).

Виконана частина роботи показує, що проект можна вдосконалювати і розвивати найрізноманітнішим чином. Програма може зацікавити художників та дизайнерів.

Приклад роботи програми:

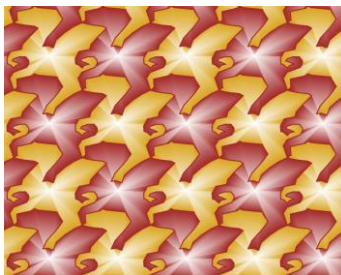


Рисунок 1 "Horses"

1. Екімова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2002 – 120с.
2. Гарднер М. Путешествие во времени. Пер з англ. – М.: Мир, 1999 – 341 с.
3. А.Н.Колмогоров. Паркеты из правильных многоугольников. Журнал "Квант" №3, 1970 г.
4. П.И.Совертков, М.В. Слива, Д.Н.Хохлов. Геометрический паркет на экране компьютера. Журнал "Информатика и образование", 9-2002.
5. Mathematical Art of M.C.Escher – <http://www.mathacademy.com/pr/mini-text/escher/>



## РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСКРЕТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДАНИХ У БЕЗПЕЧНОМУ ФОРМАТІ

Синельников Олег Юрійович, Україна  
Дніпропетровський національний університет  
Факультет прикладної математики

З кожним роком комп'ютерна інформація грає все більш важливу роль в нашому житті і великої актуальності набувають проблеми її захисту. Інформації загрожує безліч найрізноманітніших небезпек із-за дій зловмисників. Криптографія допомагає вирішити ці проблеми, запобігши несанкціонованому доступу до конфіденційних даних, тобто зашифрувати дані.

Сьогодні навряд чи вдасться знайти комерційну компанію, на комп'ютерах якої не оброблялася і не зберігалася б важлива комерційна інформація. Повноцінна система її захисту має виняткове значення і без криптографії тут ніяк не обійтися. Стосовно цих компаній шифрування звичайно використовується в трьох випадках, а саме в цілях забезпечення безпеки зберігання даних, захисту інформації при передачі через відкриті канали зв'язку і по локальній мережі, нарешті, для цифрових підписів.

Операційна система Windows XP володіє системою шифрування даних, ця система шифрує файли, тільки якщо вони зберігаються у файлової системі NTFS. Шифрування відбувається за допомогою алгоритму DESX - посиленний варіант DES, підтримуваний інструментарієм RSA Security. DESX відрізняється від DES тим, що кожен біт вхідного відкритого тексту DESX логічно підсумовується (XOR) з 64 бітами додаткового ключа, а потім шифрується по алгоритму DES; кожен біт результату також логічно підсумовується (XOR) з іншими 64 бітами ключа. Захищеність DESX від атаки диференціальним і лінійним аналізом приблизно еквівалентна захищеності DES з незалежними суб-ключами і тому від цих атак захищає не набагато краще. Головною причиною використання DESX є простий в обчислювальному сенсі засіб.

На сьогоднішній день існують алгоритми шифрування даних, які дозволяють набагато надійніше захистити конфіденційну інформацію, тим самим запобігти несанкціонованому доступу до неї. Один з них Rijndael (Federal Advanced Encryption Standard - AES), прийнятий як державний стандарт в США. Ніякий інший алгоритм не надає такого ступеня захисту.

Розроблений програмний продукт працює в операційній системі Windows XP/Server 2003, дозволяє надійно шифрувати конфіденційну інформацію за допомогою алгоритму шифрування Rijndael, цей алгоритм поєднує в собі високу криптостійкість і високу продуктивність.



Шифрування конфіденційних даних може відбуватися на персональних комп'ютерах і на серверах для зберігання або передачі їх в незахищених мережах.

- 
1. *Б. Шнайер*, «Прикладна криптографія», ТРИУМФ-2003р., 816 стр.
  2. *В. Столлингс*, «Криптографія і захист мереж – Принципи і практика, 2-е видання», Вільямс-2001р., стр. 672.
  3. *Левин М.*, «Криптографія без секретів: Посібник користувача», Новий видавничий будинок – 2005р., 315 с.
  4. *Мао В.*, «Сучасна криптографія: теорія й практика» - Переклад з англійської, Вільямс – 2005р., 763 с.
  5. [kiev-security.org.ua](http://kiev-security.org.ua) – український ресурс по безпеці.
  6. [www.citforum.ru/security/cryptography](http://www.citforum.ru/security/cryptography) - статті по криптографії.

**КРАЙОВІ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ**

Скварок Христина Юріївна, Галатяк Ігор Іванович, Україна  
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,  
Інститут фізики, математики та інформатики,  
Інженерно-педагогічний факультет

Розглядається задача Штурмана-Ліувіля для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку

$$p(x)u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = c_0, \quad \alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l) = c_1, \quad \alpha_i, \beta_i, c_i \in \mathfrak{R}, \quad (i = 0, 1), \quad (2)$$

де  $\lambda$  – шуканий числовий параметр (власне значення), а функції  $p(x)$ ,  $q(x)$  належать класу  $\mathcal{Q}^{(0)}[0, l]$  – кусково-неперервних функцій з скінченним числом розривів першого роду.

Робіт, присвячених числовим методам розв'язку рівняння (1) з крайовими умовами 3-роду (2) (або іншими двоточковими умовами – Діріхле, Неймана, періодичними і т.п.) опубліковано достатньо багато [1-3]. Відповідно для розв'язку таких задач були розроблені і програмні пакети NAG, SLEIGN [3], SLEDGE та ін. Однак, в тому випадку, коли крайові умови нелокальні (або зв'язані) їх застосування ускладнюється, що і відмічається в роботі [3]. Тут розглядаються задачі В, С, які мають, відповідно наведеної там таблиці (Tabl.2:Results), однакові розв'язки, за виключенням 7-го і 8-го порядкових номерів. Зокрема, для задачі В з коефіцієнтом диференціального оператора  $q(x) = 1 + x^2$  нелокальними крайовими умовами, визначеними в граничних точках відрізка  $[0, 3]$

$$u(0) + 2pu'(0) + 1.5u(3) = 0,$$

$$3pu'(0) + 4u(3) + 2pu'(3) = 0, \quad p \equiv 2,$$

був використаний підхід, передбачаючий редукцію задачі виду (1), (3) до системи 3-ох ЗДР і наступному їх зведенні до 3-ох крайових задач виду (1), (2) з розділеними (локальними) крайовими умовами.

В ролі ілюстрації і порівняння ми приводимо результати розрахунків, отриманих з допомогою систем символічної математики Mathematica 5.1.

Представивши загальний розв'язок однорідного рівняння (1) у вигляді

$$u(x) = \left[ k_1 H_\nu(z) + k_2 {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \right] e^{-\frac{z^2}{2}},$$

де  $k_1, k_2$  - довільні сталі,  $\nu = (\lambda - \sqrt{2} - 1) / (2\sqrt{2})$ ,  $z = x / \sqrt[4]{2}$ ,  $H_\nu(z)$ -функції параболічного циліндра (поліноми Ерміта),



$${}_1F_1(a; b; z) = \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a)_j}{j!(b)_j} z^j \right]$$

- конфлюентні (вироджені) гіпергеометричні функції Куммера.

Звідси, виходячи з умови існування нетривіального розв'язку алгебраїчної системи лінійних рівнянь (3) (після підстановки сюди вказаних трансцендентних функцій), що можливо тільки в випадку, коли її визначник рівний нулю, знаходимо точні власні значення, представлені в таблиці.

Точні власні значення і результати задачі В [3]

n	λ <sub>n</sub> <sup>T</sup>	Problem B
1	1.63597430	1.6359 <sup>79</sup> / <sub>71</sub>
2	7.95696871	7.9569 <sup>70</sup> / <sub>63</sub>
3	12.82063443	12.8206 <sup>41</sup> / <sub>63</sub>
4	25.25776611	25.2577 <sup>67</sup> / <sub>59</sub>
5	38.48392608	38.4839 <sup>25</sup> / <sub>17</sub>
6	60.17405531	60.1740 <sup>65</sup> / <sub>57</sub>
7	82.26538270	82.2650 <sup>15</sup> / <sub>07</sub>
8	112.76570242	112.7659 <sup>45</sup> / <sub>38</sub>
9	143.64984019	-
10	182.93092732	-

Як видно з таблиці, вказані в першій колонці власні значення, починаючи з n=5 і вище, уточнені (з використанням опції WorkingPrecision -> 36). При цьому відмітимо, що в вилку, представлену в другій колонці таблиці (див.[3]), вони не попадають. Крім того, обраховані точні власні значення і із старшими порядковими номерами.

---

1. *Макаров В.Л., Лазурчак И.И., Бандырский Б.И.* Неклассические асимптотические формулы и аппроксимация произвольного порядка точности собственных значений задачи Штурмана-Лиувилля с условиями Бицадзе-Самарского. Кибернетика и системный анализ, 33 (2003), N 7, с.955-962.  
 2. *Bateman H. and Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, MC Graw-Hill Book Comp., Inc., New York, Toronto, London, 1988. 324 p.  
 3. *Dwyer H.I., Zettl A.* Computing Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems // Electronic Journal of Diff. Education, 1994. №6, зз.1-10.



## ПРОЕКТУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ У СФЕРІ НАУКИ ТА ОСВІТИ НА ПРИКЛАДІ СТВОРЕННЯ САЙТУ КАФЕДРИ.

Смоліна Марія Вікторівна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Усі види інформаційних ресурсів ВНЗ слід класифікувати наступним чином: загальноуніверситетські, факультетські, кафедральні, бібліотечні, додаткових підрозділів університету, індивідуальні.

Для забезпечення повного або обмеженого доступу до ІР кафедри Прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки розроблюється сайт. Його головне призначення – підвищення інформаційного забезпечення студентів, викладачів та інших користувачів. Сайт містить вичерпну інформацію про внутрішню та зовнішню діяльність кафедри.

Під час проектування сайту були враховані побажання майбутніх користувачів – як студентів, так і викладачів. У результаті проектування була визначена наступна структура сайту:

1. Адміністративно – довідкові відомості (історія розвитку та состав кафедри; науково – педагогічні відомості про членів кафедри; списки груп студентів та кураторів; відомості про спеціальності; розклад студентів та викладачів та інш.);
2. Освітня діяльність (докладна інформація про дисципліни);
3. Учбово – методична робота (учбові плани; робочі програми курсів; списки літератури по курсам; учбові посібники; методичні вказівки та інш.);
4. Науково – дослідницька робота (наукові напрямки кафедри; видана робітниками кафедри наукова література; списки тем доповідей на університетських викладацьких та студентських конференціях та інш.);
5. Наявність посилань на студентські форуми, сайти, рекомендовані викладачами освітні ресурси у Internet;
6. Новини кафедри;
7. Можливість пошуку по курсу, науковому напрямку, прізвищу викладача та доступ до викладеної на сайті навчально-методичної літератури по кожному з курсів;

Розглянута структура сайту універсальна. Вона може бути використана при створенні сайтів кафедр, різних з наукового напрямку.

Структурованість та систематизація інформації, безумовно, відіграє головну роль. Але й зручний інтерфейс також має велике значення.

Web-інтерфейс забезпечує усі необхідні функції: роботу із особистими даними користувача, взаємодія із базою даних, розміщених на



сервері, адміністрування сайту. Особливості Web-інтерфейсу забезпечують простоту та зручність адміністрування сайту.

Сайт реалізується на мові PHP при підтримці СУБД MySQL. У процесі реалізації використовується Smarty – компілюючий оброблювач шаблонів для PHP. Використання цього інструменту дає можливість досягнути відділення прикладної логіки та даних від їх подання, у наслідку чого прискорюється процес написання коду та налагодження сайту.

При проектуванні бази даних сайту, були використані прийоми, які дозволяють оптимізувати роботу бази даних.

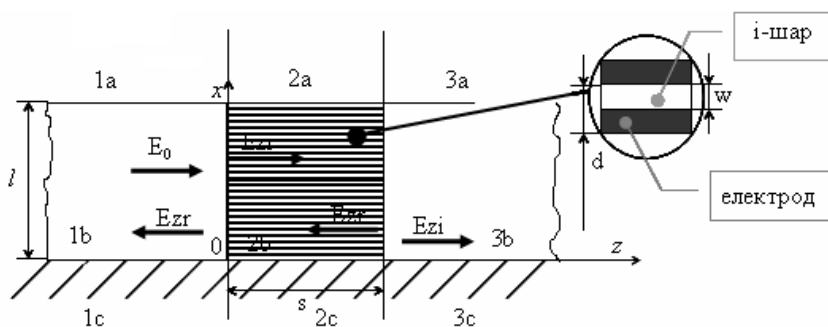
У цілому, реалізація сайту організована таким чином, щоб оптимізувати час розробника на написання коду, а також час адміністратора та користувача, затрачений на одержання необхідної інформації.

---

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СТРУКТУРАХ З АКТИВНИМ ЕЛЕМЕНТОМ.**

Сотник Олена Олександрівна, Україна  
Рівненський Державний Гуманітарний Університет  
Факультет математики та інформатики

У доповіді представлено розв'язок задачі про поширення електромагнітних хвиль в діелектричному шарі (рис.1), який сформовано на металевій основі, і у поперечному перерізі якого розміщено керуючий елемент у вигляді p-i-n-структури (область 2b на рис.1) [1-3].



**Рис1.** Модельна схема хвильоводної системи із керуючим елементом. Области 1a, 2a, 3a – повітря; 1b, 3b – діелектрик, 2b – керуючий елемент; 1c, 2c, 3c – метал.

У досліджуваній електродинамічній системі здійснюється пошук функцій напруженості електричної  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  і магнітної  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  компонент поля, які визначають основні характеристики системи: величину згасання, що вноситься керуючим елементом; діапазон зміни струму управління; характерні геометричні розміри елементів системи; амплітудно-частотні характеристики.

Розрахунок задачі проводиться із застосуванням методів частинних областей, комплексних амплітуд, розділення змінних. Для пошуку невідомих функцій у кожній із виділених областей розв'язується рівняння Гельмгольца [4]:

$$\Delta \vec{\Pi}^e + k_0^2 \epsilon \mu \vec{\Pi}^e = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{\Pi}^e(\vec{r}, t)$  - електричний вектор Герца, який визначає вектори напруженості поля:



$$\begin{aligned}\vec{E} &= k_0^2 \varepsilon \mu \vec{\Pi}^e + \text{grad div} \vec{\Pi}^e; \\ \vec{H} &= -ik_0 \varepsilon \text{rot} \vec{\Pi}^e.\end{aligned}\quad (2)$$

Для зв'язування розв'язків рівнянь (1), (2) на границі розділу під-областей використовуємо умови неперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів, рівнозначності повздовжніх хвильових чисел електромагнітних хвиль у діелектрику і повітрі [4].

Керуючий елемент розглядається як ділянка діелектричного хвилеводу, у якій можуть існувати вільні заряди, що переносять електричний струм. Властивості середовища елемента управління визначаються функцією ефективної комплексної діелектричної проникності  $\varepsilon_{eff}^*(I)$  ( $I$  – струм управління), яку знаходимо із розгляду процесу амбіполярної дифузії заряджених частинок у  $i$ -області р-і-п-структури [5]. Повздовжнє і поперечне хвильові числа електромагнітних хвиль у області керуючого елемента знаходимо із розв'язку системи трансцендентних рівнянь відносно комплексних невідомих. Розв'язки таких рівнянь шукаємо чисельним методом Ньютона [6].

Результати математичного моделювання представленої електродинамічної системи можуть використовуватись при проектуванні та оптимізації характеристик надвисокочастотних систем обробки інформації, які мають інтегральне виконання.

1. А.с. №1250117 (СССР). СВЧ-модулятор / Кищенко Я.И., Кошечая С.В., Смойловский М.И., Солтамов У.Б., Пятыйшев Е.Н. – 1984, ДСП. – 2 с.
2. Кошечая С.В., Гримальский В.В., Кищенко Я. И., Мороз И.П. Управляющие свойства поверхностно-ориентированной р-і-п-структуры.// Изв. вузов. Радиоэлектроника. – К. – №4. – 1997. – С. 71-79.
3. Мороз И.П. Математичне моделювання процесу проходження електромагнітних хвиль через діелектричну хвилеводну систему з керуючим елементом на р-і-п-структурі.// Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип.3. – 2005. – С. 122-131.
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
5. Адирович Э. И., Карагеоргий-Алкалаев П. М., Лейдерман А. Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках. Под ред. Гальперина. – М.: Советское радио, 1978. – 320 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.: Наука, 1987.- 598 с.



## МОДЕЛЮВАННЯ МАШИНИ З НАТУРАЛЬНОЗНАЧНИМИ РЕГІСТРАМИ

Степанюк Сергій Іванович  
Волинський державний університет ім. Лесі Українки  
Математичний факультет

Центральним завданням теорії алгоритмів є уточнення поняття алгоритму. Таке уточнення природно робиться у вигляді програми для машини з натуральнозначними регістрами (МНР) [1].

Машина з натуральнозначними регістрами є ідеалізованою моделлю комп'ютера. МНР містить нескінченну кількість регістрів, вмістом яких можуть бути натуральні числа. Регістри нумеруються натуральними числами, починаючи з 0 і позначаються  $R_0, R_1, R_2, \dots$ . Вміст регістра  $R_n$  позначається через ' $R_n$ '. Послідовність (' $R_0, 'R_1, 'R_2, \dots$ ') вмістів регістрів називається конфігурацією МНР. Машина може виконувати команди чотирьох типів:

1. Обнулення  $n$ -ого регістру  $Z(n)$ : ' $R_n:=0$ .
2. Збільшення вмісту  $n$ -ого регістру на 1  $S(n)$ : ' $R_n:='R_{n+1}$ .
3. Копіювання вмісту регістру  $T(m,n)$ : ' $R_n:='R_m$ .
4. Умовний перехід  $J(m,n,q)$  : якщо ' $R_n='R_m$ , то перейти до виконання команди з номером  $q$ , інакше до наступної команди.

Скінченний список команд утворює програму. Команди програми послідовно нумеруються натуральними числами, починаючи з 1. Номер команди в програмі називається її адресою. Виконання програми починається з першої команди. МНР може змінювати вміст регістрів згідно виконуваної нею програми.

Нами розроблений програмний продукт "Імітатор МНР", який дозволяє виконувати програми написані для МНР-машини. Крім цього реалізована можливість використання МНР-підпрограм. При цьому МНР-підпрограма автоматично налаштовується на місце виклику.

Функціональні можливості:

- завантаження та збереження МНР-програми з розширенням "MNR";
- збереження МНР-програми як підпрограми з розширенням "PR";
- виконання МНР-програми в автоматичному режимі (F9);
- виконання МНР-програми в покроковому режимі (F8);
- візуалізація конфігурації МНР на кожному кроці виконання програми;
- синтаксичний аналіз МНР-програми з виведенням повідомлень про виявлені помилки.

Прийоми роботи в середовищі „Імітатор МНР“:

- синтаксис команди: <номер команди>.<команда або назва файлу підпрограми>;



- при введенні, команди послідовно нумеруються в порядку зростання;
- коментар записуються наступним чином : <команда> / <коментар>;
- у вікні Опції->Директорія записується шлях до папки, в якій записані МНР-підпрограми , якщо такі підключаються до основної програми;
- початкова конфігурація МНР-машини задається після активування пункту “Заповнення реєстрів” меню “Виконання”;
- результуюча конфігурація отримується в тих же реєстрах.

Приклад програми МНР, що реалізовує функцію знаходження суми двох натуральних чисел (‘R0-перше число, ‘R1-друге, ‘R0-результат, ‘R3-лічильник):

1. Z(3)
2. J(1,3,6)
3. S(3)
4. S(0)
5. J(1,1,2)

Програмний продукт “Імітатор МНР” розроблений в середовищі С++ Builder 6. Імітатор МНР дозволяє виконувати МНР-програми як в покроковому режимі, так і в автоматичному. Крім цього буде таблицю виконання алгоритму. Це дозволяє візуально простежити за кожним кроком виконання програми.

Розроблений програмний продукт, дозволяє не лише автоматизувати перевірку МНР-програм, але й продемонструвати усі етапи написання та реалізації МНР-програм з використанням структурної технології розробки програм. “Імітатор МНР” доцільно використовувати при вивченні відповідної теми в курсі “Теорія алгоритмів”.

На нашу думку вивчення програмування в школі потрібно починати з розробки і реалізації алгоритмів в алгоритмічних системах типу МНР-машин. Це сприяло б виробленню навиків розробки алгоритмів, розумінню процесу їх виконання, виробленню алгоритмічного стилю мислення.



**ВИБІР АЛОФОНІВ З БАЗИ ДАНИХ ПІД ЧАС КОМПІЛЯТИВНОГО СИНТЕЗУ УСНОГО МОВЛЕННЯ**

Таровик Костянтин Сергійович, Україна  
 Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова  
 Факультет прикладної математики

У теперішній час одним з найрозповсюдженіших методів синтезу мовлення є компілятивний синтез. Наряду з різноманітними його видами широко використовується алофонічний синтез. Його суть полягає в тому, що маючи фонемний запис тексту необхідно отримати відповідну послідовність алофонів. Розглянемо задачу покращення якості вибірки алофонів з БД.

Будемо вважати, що на вході ми маємо послідовність фонем  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ , на виході ми повинні отримати таку послідовність алофонів  $u^* = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ , що

$$u^* = \arg \max_u P(u | s)$$

Так як кожен з алофонів  $u_i$  не залежить від алофонів, які слідують за ним, ця ймовірність може бути переписана у вигляді:

$$P(u | s) = \prod_{i=1}^N P(u_i | u_{i-1} \dots u_0, s, i)$$

Будемо вважати, що ймовірність виробки алофона  $u_i$  є добуток ймовірностей певних характеристик цього алофону [1], таких як тривалість  $d(u_i)$ , базова частота  $F_0 - f(u_i)$ , спектр  $o(u_i)$ , спектри лівого та правого країв алофона  $h(u_i)$  і  $t(u_i)$ . Тоді цю ж ймовірність можна переписати у вигляді:

$$P(u_i | u_{i-1}, s, i) = P(d(u_i), f(u_i), o(u_i), h(u_i) | u_{i-1}, s, i) =$$

$$= P(d(u_i) | s_i) \times P(f(u_i) | s_i) \times P(o(u_i) | s, i) \times P(h(u_i) | t(u_{i-1}), s, i)$$

Розглянемо тепер, як можна обчислити кожен з множників.

Модель спектру виражається  $m$  усередненими значеннями спектру.

$$P(o(u_i) | s) = P(o_{i,1}, \dots, o_{i,m} | s) = P(o_{i,1} | s) \dots P(o_{i,m} | s)$$

Коли, наприклад  $m = 2$ , обчислюється усереднене значення спектру лівої та правої половин алофону.

Модель тривалості характеризує залежність тривалості звуку від фонетичного, лексичного та фразеологічного контекстів. Модель тривалості для кожної фонемі становить скалярний Гаусіан та кластеризується за допомогою регресійного дерева.



Модель базової частоти  $F_0$  базується на певній статистичній моделі та становить собою регресійне дерево. Це дерево враховує інтонаційний тип фрази, лексичний наголос та тоновий наголос.

Спектральна модель конкатенації дозволяє визначити ймовірність появи алофону з певною формою спектру після якогось з вже обраних алофонів. Робиться припущення, що цього найкращим чином можна досягти шляхом використання спектральних характеристик країв алофону  $h(u_i)$  та  $t(u_i)$ . Ймовірність конкатенації двох алофонів  $u_i$  та  $u_{i-1}$  модулюється лінійним умовним розподіленням Гауса, яке відображає ймовірність вибору  $h(u_i)$  при даному  $t(u_i)$ :

$$P(h(u_i) | t(u_{i-1})) = N(h(u_i) | B_s t(u_{i-1}) + b_s, \Sigma_s)$$

Застосовуючи до отриманих ймовірностей широко відомий алгоритм Вітербі [2, с. 749], ми отримуємо шлях з найбільшою ймовірністю в графі, який становить усі ймовірні варіанти вибірок алофонів. Але досить не проробленими тут є моделі тривалості та базової частоти  $F_0$ . Для їх вірного визначення найчастіше необхідно використовувати семантичну інформацію що міститься у тексті що озвучується. На сьогоднішній день цього не робиться в більшості комерційних систем синтезу мовлення.

1. Sakai S., Shu H. «A probabilistic approach to unit selection for corpus-based speech synthesis», INTERSPEECH-2005, 2005 г. – с. 81-84.
2. Форсайт Д., Понс Ж. «Компьютерное зрение. Современный подход.», издательский дом «Вильямс», 2004 г. – 928 с.



## РІВНОМІРНІ ДИНАМІЧНІ СІТКИ ПРОСТОРОВИХ ІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ

Теребус Анна Вікторівна, Україна  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
факультет математики та інформатики

У роботах [1]-[2] для криволінійного паралелепіпеда  $G_\tau = ABCDA_*B_*C_*D_*$ , обмеженого еквіпотенціальними поверхнями  $AA_*B_*B$ ,  $CC_*D_*D$  та поверхнями течії  $ABCD$ ,  $A_*B_*C_*D_*$ ,  $ADD_*A_*$ ,  $BCC_*B_*$ , розглядалась модельна задача:  $\vec{v} = \text{grad}\varphi$ ,  $\text{div}\vec{v} = 0$ ,  $\tau \in G_\tau$ ,  $\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*$ ,  $\varphi'_n|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*C_*D_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD} = 0$ , де  $\vec{v}$  – вектор, а  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  – потенціал швидкості фільтрації ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ) в точці  $\tau = (x, y, z)$ . Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\chi = \chi(x, y, z)$  (“просторово комплексно спряжених” із  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\text{grad}\varphi(x, y, z) = \text{grad}\psi(x, y, z) \times \text{grad}\chi(x, y, z)$ ,  $\text{grad}\psi(x, y, z) \times \text{grad}\chi(x, y, z) = 0$  та замінивши третю із граничних умов на умови:  $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_0$ ,  $\chi|_{ABCD} = 0$ ,  $\chi|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^0$ , отримано відповідну задачу на “просторово конформне” відображення області  $G_\tau$  на відповідну область “просторового комплексного потенціалу”  $G_\varpi = \{\varpi = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_0, 0 < \chi < Q^0\}$ , де  $Q = Q_0Q^0$  – потік через довільний поперечний переріз течії ( $Q_0, Q^0$  – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний “одичинні прошарки”), а також обернену їй задачу (на відображення:  $G_\varpi \rightarrow G_\tau$ ). Побудовано різниці аналогії прямої і оберненої задач та алгоритми їх розв’язків.

У представленій роботі вище поставлену задачу розв’язано шляхом побудови просторових рівномірних  $\xi$ -конформних динамічних сіток

1. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” // Волинський математичний вісник. – 2003. – 10 – С. 5–15.
2. Бомба А.Я., Климук Ю.Є. Просторові аналогії крайових задач на конформні відображення // XII Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (4-6 жовтня 2005р., м. Львів). Тези доповідей. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – С.38-39.



## ОПТИМІЗАЦІЯ ВИКОНАННЯ ЗАПИТІВ В ІЄРАРХІЧНИХ СТРУКТУРАХ ДАНИХ

Туровський Роман Володимирович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Значне поширення XML (eXtensible Markup Language), що є стандартом збереження і обміну інформацією, вимагає побудови оптимізаційних алгоритмів для його опрацювання. Основною з особливостей XML є його ієрархічна природа, що важко піддається оптимізації в порівнянні з реляційними базами даних.

XML розглянуто як засіб представлення інформації в ієрархічному форматі. Проведено аналіз та порівняння можливостей мов запитів для вибору даних з XML структур (XML-QL, XQL, XPath та XQuery). Порівняно мову XPath з традиційною SQL. Зроблено висновок про залежність швидкості опрацювання даних від формулювання запиту у XPath. Роль семантичного оптимізатора у цьому випадку у великій мірі відіграє користувач, що створює запит [4].

Розглянуто допоміжні структури даних, що використовують для пришвидшення часу виконання запитів – індекси. Проаналізовано існуючі вирішення збереження та індексування XML даних на прикладі можливостей СКБД Microsoft SQL Server 2005, який зберігає XML у внутрішньому двійковому форматі, дозволяє задати структуру XML даних за допомогою XSD схеми, що дуже позитивно впливає на ефективність виконання XPath та XQuery запитів [1].

Оптимізатор програми SQL Server аналізує запит і робить висновок про доцільність чи недоцільність використання наявних індексів [2]. У роботі аналізуються різноманітні запити над XML документами, і досліджується, як присутність кожного з індексів впливає на швидкість їх виконання.

Реалізовано власний алгоритм індексування XML для пришвидшення подальшого доступу, що представлений у програмі під назвою IndexXML, Програма написана на мові C# і реалізує один із можливих алгоритмів індексування XML файлів. Після завершення процесу індексування програма створює два додаткові файли, перший з яких також є XML файлом і містить опис структури оригінального файлу із вказівниками на другий файл, який є двійковим, і, власне, містить основну частину індексу. Двійковий файл повністю у пам'ять не завантажується – читаються лише необхідні блоки. Створений індекс можна описати як дерево шляхів, листками якого є збалансовані двійкові червоно-чорні дерева значень, що зберігаються за цими шляхами. Він допомагає швидко визначити, чи є за певним шляхом вказане значення і



за якими адресами (зміщеннями) ці значення зберігаються у вхідному XML файлі. Середня кількість операції порівнянь, необхідних для пошуку в такому індексі, впливає із властивостей структур даних, на основі яких він побудований, і становить  $\frac{m_k}{2}$  для пошуку у дереві шляхів на k-му рівні, де  $m_k$  - кількість листків дерева на k-му рівні, та  $1.002\lg N$  для пошуку у дереві значень.

- 
1. A First Look at Microsoft SQL Server 2005 for Developers/ *Bob Beauchemin, Niels Berglund, Dan Sullivan*; Addison-Wesley Professional, 2004. – 736с.
  2. Performance Optimizations for the XML Data Type in SQL Server 2005/  
<http://msdn.microsoft.com/xml/buildingxml/xmlanddatabase/default.aspx?pull=/library/en-us/dnsq190/html/sqloptxml.asp>
  3. XML Indexes in SQL Server 2005/  
<http://msdn.microsoft.com/xml/buildingxml/xmlanddatabase/default.aspx?pull=/library/en-us/dnsq190/html/xmlindexes.asp>
  4. Введение в системы баз данных/ *К.Дж. Дейт*, Киев, 2005, 1238.



**ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ БІОТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ  
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Хапко Олена Богданівна, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

У даній роботі досліджується процес поширення тепла у живій тканині, що займає циліндричну область, зумовлений дією джерел тепла і теплообміном з довкіллям.

**1. Постановка задачі.** Розподіл температури  $T = T(r, t)$  в такому тілі описується рівнянням Pennes [1], яке враховує вплив потоку крові

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \omega_b \rho_b c_b [T - T_a] + W_m + W, \quad 0 \leq r < l, t > 0 \quad (1)$$

за наступних крайових

$$-k \frac{\partial T(l, t)}{\partial r} - \alpha [T(l, t) - T_c(t)] = 0, \quad k \frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0 \quad \forall t > 0 \quad (2)$$

і початкової умов

$$T(r, 0) = T_0(r), \quad \forall r \in [0, l]. \quad (3)$$

Тут  $\rho, c, k$  - густина, теплоємність і коефіцієнт теплопровідності живої тканини відповідно;  $\rho_b, c_b, \omega_b$  - густина, теплоємність і перфузія крові;  $T_a$  - артеріальна температура,  $W_m$  - інтенсивність метаболічної генерації тепла,  $T_c(t)$  - температура довкілля,  $\alpha$  - коефіцієнт теплообміну з довкіллям,  $W(r, t)$  - функція густини розподілу джерел тепла,  $t$  - час,  $r$  - полярна координата.

**2. Варіаційна постановка задачі.** У випадку стаціонарного розподілу температури розглядається таке варіаційне формулювання задачі (1),(2):

$$A(T, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V := \{v \in H^1(0, l)\} \quad (4)$$

де

$$A(T, v) = -\alpha l v(l) T(l) + k \int_0^l \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] r dr + \omega_b \rho_b c_b \int_0^l T v r dr,$$

$$\langle v, f \rangle = \alpha l v(l) T_c + \int_0^l [\omega_b \rho_b c_b T_a + W_m + W] v r dr$$

**3. Метод скінченних елементів.** Наближений розв'язок рівняння (4) будемо шукати у вигляді:

$$T(r) \approx T_h(r) = \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(r), \quad (5)$$



де  $\varphi_j(r)$  - кусково лінійні функції, визначені на сітці вузлів  $r_j = \frac{l}{N} j$ ,  $\forall j = \overline{0, N}$ . Застосовуючи до рівняння (4) метод Гальоркіна [2], одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь для відшукування невідомих коефіцієнтів  $c_j$ :

$$\sum_{j=0}^N c_j A(\varphi_j, \varphi_k) = (\varphi_k, f), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

Специфікою обчислення інтегралів є використання теореми про середнє у вигляді:

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} T v r dr \approx \frac{r_{j-1} + r_j}{2} \int_{r_{j-1}}^{r_j} T v dr.$$

Розв'язавши систему рівнянь (6) знаходимо невідомі коефіцієнти  $c_j$  апроксимації методу скінченних елементів для співвідношення (5).

**4. Аналіз числових результатів.** Даний алгоритм був реалізований у вигляді програми мовою С#. Нижче на рис. 1 і в табл. 1 подано результати обчислень, отримані за таких даних:

$$\omega_b \rho_b c_b = 2100 \frac{\text{дж}}{\text{м}^3 \text{ } ^\circ\text{C}} \text{ мл / с / мл}, k = 0,5 \text{ вт / м}^\circ\text{C},$$

$$\eta = 200 \text{ 1/м}, T_a = T_c = 37^\circ\text{C},$$

$$\alpha = 800 \text{ вт / м}^\circ\text{C},$$

$$W_m = 3380 \text{ вт / м}^3, W(r, t) = \eta P(t) \exp(-\eta r),$$

$$P(t) = [250 + 200 \cos(0,02t)] \text{ вт / м}^2, l = 0,03 \text{ м}.$$

Аналіз цих результатів показує, що рівномірне згущення сітки скінченних елементів приводить до збіжності послідовності апроксимацій до точного розв'язку з очікуваними порядками збіжності.

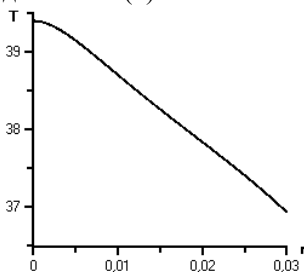


Рис. 1. Розподіл температури вглиб тіла.

Табл. 1. Значення температури, її похідної та норм в центрі та на межі області

№	u(0)	u(l)	du(0)/dr	du(l)/dr	u  <sup>2</sup>	u   <sup>2</sup>
7	39,8760	36,9333	-105,477	100,167	2216,97	0,0001849
14	39,5492	36,9350	-59,1309	100,475	4774,73	0,0001813
28	39,4487	36,9354	-31,5762	101,578	9899,57	0,0001803
56	39,4189	36,9355	-16,3558	102,359	20152,3	0,0001800
112	39,4102	36,9356	-8,32872	102,806	40659,0	0,0001800

1. Pennes H.H. Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm.//Journal of Applied Physiology, August 1948.



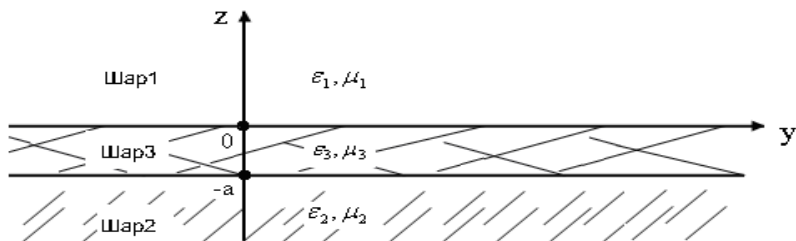
2. *Flaherty J.E.* CSCI MATH 6860: Finite Element Analysis. Lecture Notes: Spring 2000. New York, 2000.



ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВІДКРИТИХ ПЛОСКОШАРОВИХ  
СТРУКТУРАХ З МЕТАМАТЕРІАЛОМ УРАХВУЮЧИ ЧАСТОТНУ  
ДІСПЕРСИЮ

Харченко Павло Сергійович, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

В роботі розглянута задача про власні прямі та зворотні поверхневі хвилі, які можуть з'являтися на межі середовищ провідника з метаматеріалом (діелектрична  $\varepsilon$  та магнітна  $\mu$  проникності можуть мати від'ємні значення), розглянуто їх характеристики – вектор Умова-Пойтінга (потік енергії), фазова та групова швидкості, підходи для встановлення залежності серед основних характеристик хвильовода та проведення чисельних експериментів.



**Рис.1** Двувимірна модель плоскошарової структури, яка складається з трьох середовищ. За основу взята напівбесконечна ПОДЛОЖКА з метаматеріала (Шар2  $\mu_2, \varepsilon_2 < -1$ ), на якому знаходиться шар діелектрика (Шар3  $\mu_3, \varepsilon_3 > 0$ ), товщиною в  $a$ , Шар1 –  $\mu_1, \varepsilon_1 > 0$ .

В електро динаміці власні хвилі описані однорідною системою рівнянь Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot}E = -\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \\ \text{rot}H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

і є їх нетривіальним розв'язком з урахуванням умов неперервності на межі матеріальних параметрів (діелектрична та магнітна проникності) та умов випромінювання. Власні хвилі характеризуються напруженостями електричного та магнітного полів і мають вигляд:

$$\vec{E} = \vec{E}(z)e^{i(hy - \omega t)}, \quad \vec{H} = \vec{H}(z)e^{i(hy - \omega t)},$$



де  $\omega$ ,  $h$  – частота та стала розповсюдження електромагнітної хвилі.

Ефективна діелектрична стала метаматеріала моделювалась наступною наближеною формулою:

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

де  $\omega_p$  – характеристична частота, яка визначається параметрами структурних елементів з яких виготовлений метаматеріал.

В ході розв’язання задачі було отримано дисперсійне рівняння:

$$\left(1 - \frac{\lambda_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 \lambda_1}\right) \cdot \left(e^{i\lambda_3 a} - \frac{e^{i\lambda_3 a} \cdot \lambda_3 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 \lambda_2}\right) - \left(1 + \frac{\lambda_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 \lambda_1}\right) \cdot \left(e^{-i\lambda_3 a} + \frac{e^{i\lambda_3 a} \cdot \lambda_3 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 \lambda_2}\right) = 0, \tag{1}$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 \mu_1 \varepsilon_1 - h^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{k^2 \mu_2 \varepsilon_2 - h^2}, \quad \lambda_3 = \sqrt{k^2 \mu_3 \varepsilon_3 - h^2}$$

розв’язок, якого необхідний для знаходження сталої розповсюдження  $h$  та оцінки основних характеристик поверхневих хвиль:

$$V_{zp} = \frac{\partial k}{\partial h} \cdot c, \quad V_\phi = \frac{k}{h} \cdot c, \quad S_y = \frac{c}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Re}[E, H^*], e_y) dz$$

– групова швидкість, фазова швидкість та потік енергії, відповідно.

Дисперсійне рівняння (1) є трансцендентним та аналітично нерозв’язним, тому для знаходження залежності сталої розповсюдження від частоти необхідно скористатися чисельними методами.

З метою підвищення ефективності чисельного методу, для області  $k < h < k\sqrt{\varepsilon_3}$  було виконано тригонометричну заміну, в результаті якої дисперсійне рівняння матиме вигляд:

$$\text{Sin}\varphi - \frac{\text{Cos}\varphi(\varepsilon_2 R \text{Cos}\varphi \cdot \text{Sin}(R \text{Cos}\varphi) - \varepsilon_3 \sqrt{R^2 \text{Sin}^2\varphi + k^2 \text{Cos}(R \text{Cos}\varphi)})}{\varepsilon_3(\varepsilon_3 \sqrt{R^2 \text{Sin}^2\varphi + k^2} \text{Sin}(R \text{Cos}\varphi) + \varepsilon_2 R \text{Cos}\varphi \cdot \text{Cos}(R \text{Cos}\varphi))} = 0,$$

$$0 < \varphi < \pi, \quad R = k\sqrt{\varepsilon_3 - 1}, \quad h = k\sqrt{\varepsilon_3 \text{Sin}^2\varphi + \text{Cos}^2\varphi}.$$

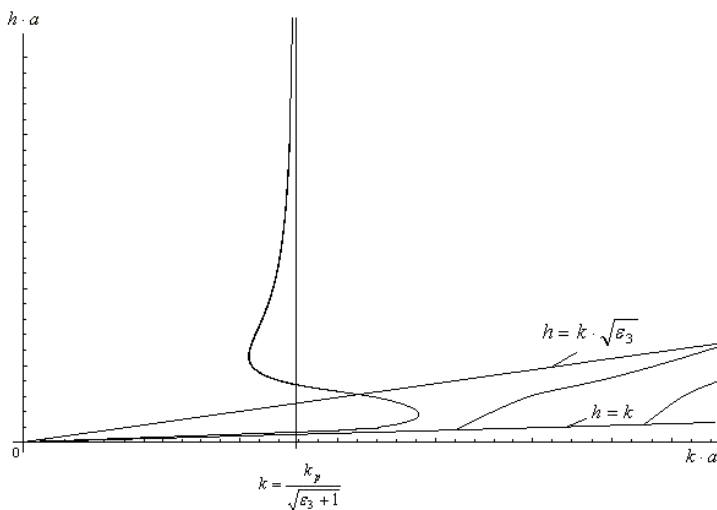
для області  $h > k\sqrt{\varepsilon_3}$  заміна не потрібна.

Отримані дисперсійні рівняння для кожної області були розв’язані методом Н’ютона, тому що цей метод добре зарекомендував себе для подібного класу задач.

Реалізовані чисельні алгоритми і розроблено програмне забезпечення для розрахунку електродинамічних характеристик поверхневих хвиль плоскошарового хвильоводу створеного з метаматеріалом.



Проведені чисельні експерименти по дослідженню залежності сталих розповсюдження прямих та зворотних поверхневих хвиль від частоти, геометричних та матеріальних параметрів хвильовода, дозволили визначити діапазони змін частоти  $\omega$ , для яких поверхневі хвилі є прямими. Для отриманих діапазонів напрямок фазової швидкості збігається з напрямком групової швидкості, а також визначити діапазони змін частоти  $\omega$ , де існують зворотні поверхневі хвилі, тобто напрямок фазової швидкості протилежний напрямку групової швидкості. Отримані залежності на якісному рівні мають такий вигляд:



**Рис.2** Якісна залежність постійної розповсюдження від частоти для задачі про власні поверхневі хвилі з частотною дисперсією.

1. J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, *J. Phys. Condens. Matter* 10 (1998) 4785.
2. R Ruppin *Phys. Lett. A* 227 (2000) 61–64.
3. V.G. Veselago, *Sov. Phys. Uspekhi* 10 (1968) 509.
4. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений – М.:ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 216с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. 4-е изд. - М.: Наука, 1978. - 831с.
6. Кондратьев И.Г., Смирнов А.И. Некоторые особенности электродинамики анизотропных метаматериалов. – Нижний Новгород: Институт прикладной радиофизики РАН, 2005.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. 4-е изд. - М.: Наука, 1972.– 735с.

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ АЛГЕБРАІЧНИМ МЕТОДОМ З ПРОЕКЦІЙНИМИ ДАНИМИ ЗА РІЗНИМИ НАПРЯМКАМИ**

Черкашин Сергій Григорович, Україна,  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики та менеджменту

Комп'ютерна томографія – один з нових напрямків в області отримання та обробки інформації. На сьогодні задачі комп'ютерної томографії мають важливий практичний аспект для різних галузей науки і техніки, тому тема дослідження є достатньо актуальною, особливо в умовах сучасного інтенсивного розвитку засобів обчислювальної техніки, за допомогою якої можна ефективно отримувати розв'язок. Комп'ютерна томографія передбачає процес реконструкції (відновлення) зображення (функції) за набором проєкційних даних, виміряних у полі конкретного випромінювання, наприклад, рентгенівського. Завдяки цьому можна досліджувати внутрішні характеристики деякого окремого об'єкта, розміщеного в полі випромінювання.

У дослідженні розглянуто задачі плоскої комп'ютерної томографії з проєкційними даними за різними напрямками. Дані задачі були розв'язані алгебраїчним методом із застосуванням метода регуляризації Тихонова-Філіпса. Ідея полягає в розбитті області  $\Omega$ , в якій розташована шукана функція  $f(x,y)$ , рівномірною сіткою з заданим ступенем дискретизації  $n$  на так звані елізи  $S_i, i = \overline{1, n}$  і подальшому пошуку значень  $c_i$  функції  $f(x,y)$  в центрах цих елізів. Таким чином, розв'язок представляється у вигляді лінійної комбінації кусково-сталих функцій

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{S_i}(x,y), \quad \chi_{S_i}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in S_i, \\ 0, & (x,y) \notin S_i. \end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти  $c_i$  знаходяться шляхом розв'язання невизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду  $AX=B$ . Елементи матриці  $A$  (проєкційної матриці) – це лінійні інтеграли від кусково-сталих функцій  $\chi_{S_i}(x,y)$  вздовж прямих сканування, взятих за різними напрямками; елементи вектора  $B$  – це проєкційні дані, отримані з томографа; вектор  $X$  – вектор невідомих коефіцієнтів  $c_i$ . Задачі цього типу відносяться до некоректно поставлених задач, тому для їх розв'язання потрібно застосовувати спеціальні чисельні методи, що дозволяють отримати наближений розв'язок із достатньою точністю. До таких методів належить метод регуляризації, який зводить розв'язання вихідної невизначеної системи рівнянь до розв'язання допоміжної визначеної системи вигляду  $(A^T A + \alpha E)X = A^T B$ , розв'язок якої



максимально наближений до розв'язку вихідної системи в залежності від додатного параметра  $\alpha$ , що вибирається мінімальним. Таку систему можна розв'язати чисельним методом, наприклад, методом Гауса.

Було розроблено алгоритм і програмний продукт для чисельної реалізації представленого методу знаходження розв'язку задачі комп'ютерної томографії. В роботі розглядалися різні тестові задачі з різними вихідними параметрами, обчислювались похибки, для мінімізації яких застосовувалась оптимізація параметра регуляризації  $\alpha$ . Для моделювання проєкційних даних томографа до тестових функцій, які потрібно було реконструювати, застосовувалося пряме перетворення Радона. Паралельно було розглянуто другий підхід, що передбачає застосування замість кусково-сталих функцій кусково-лінійних функцій і обчислення значень шуканої функції не в центрах елізів, а у вузлах сітки. Такий підхід суттєво підвищує точність наближеного розв'язку.

На представленому нижче рисунку зображено графік ліній рівня тестової функції і результати відновлення із застосуванням обох підходів.

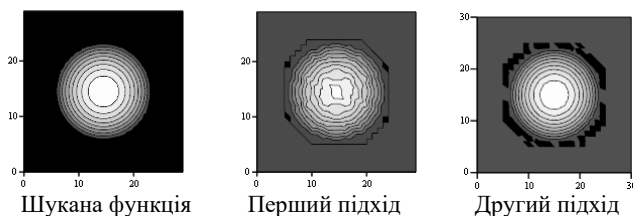


Рис. 1 Результати відновлення

Таким чином, метою дослідження була побудова математичної моделі і розробка програмного продукту, що реалізує алгоритм пошуку розв'язку поставленої задачі, а також проведення порівняльного аналізу з метою вибору оптимального варіанту розв'язання.

1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии - М.: Мир, 1990. - 288с.
2. *Хермен.* Восстановление изображений по проекциям – М.: Мир, 1983. – 352с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. – М.: Наука, 1987. – 160с.
4. *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. – М.: Радио и связь, 1989. – 240с.
5. *Губарени Н.М.* Вычислительные методы и алгоритмы малоракурсной компьютерной томографии. – Киев: Наукова думка, 1997. – 326с.
6. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. - 544с.



## ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БУБНОВА-ГАЛЬОРКІНА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ

Чижик Дар'я Олександрівна, Україна

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет післядипломної освіти

В роботі розглядається застосування методу Бубнова-Гальоркіна до розв'язування нестационарних задач, що дає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді.

Розглянемо задачу про відшукування температури однорідного нескінченного прямокутного стержня, бічна поверхня якого частково теплоізолювана, а на іншу частину ззовні подається заданий постійний тепловий потік, якщо його початкова температура  $F(x_1, x_2)$  є довільною.

Математична модель задачі має наступний вигляд:

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall x \in \Omega = \{0 < x_1 < p, 0 < x_2 < s\}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = F(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=p} = \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=s} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = Q, \quad (1)$$

де  $F(x)$  – відома функція,  $Q$  – дана стала,  $x = (x_1, x_2)$ .

Введемо у розгляд функцію

$$\Phi(x) = \frac{\omega_1(x)f_1(x) + \omega_2(x)f_2(x) + \omega_3(x)f_3(x) + \omega_4(x)f_4(x)}{\omega_1(x) + \omega_2(x) + \omega_3(x) + \omega_4(x)},$$

$$\text{де } f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0, \quad f_4(x) = Q, \quad \omega_i(x) = \begin{cases} > 0 & \forall x_i \in \Omega / \Omega_i, \\ = 0 & \forall x_i \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1, 4}, \end{cases}$$

за допомогою якої крайові умови задачі (1) запишемо у вигляді  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \Phi(x)$ .

Наближений розв'язок задачі (1) шукаємо у вигляді

$$u_n(x, t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) \cdot \tilde{\varphi}_k(x), \quad (2)$$

де координатні функції мають вигляд  $\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(x) - \omega(x)D_1\varphi_k(x) + \omega(x)\Phi(x)$ ,

оператор  $D_1$  визначається формулою  $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$ , функція  $\omega(x)$

задовольняє умові  $\omega(x) = \begin{cases} > 0 & \forall x \in \Omega, \\ = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$  і є нормалізованою до першого

порядку,  $\{\varphi_k(x)\}$  – деяка повна послідовність лінійно незалежних функцій.



Відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна складаємо

$$\left( a^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tilde{\varphi}_j(x) \right) = 0, \quad j = 0, \dots, n,$$

що приводить до наступної задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=0}^n \left[ a'_k(t) (\tilde{\varphi}_k(x), \tilde{\varphi}_j(x)) - a_k(t) (a^2 \Delta \tilde{\varphi}_k(x), \tilde{\varphi}_j(x)) \right] = 0, \quad j = 0, \dots, n,$$

$$a_k|_{t=0} = \beta_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

розв'язавши яку, отримаємо  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , і, отже, наближений розв'язок розглянутої задачі у вигляді (2). Тут  $\beta_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , – деякі сталі, відповідні задачі (1).

Лінії рівня отриманого наближеного розв'язку для  $a = 1$ ,  $Q = 5$ ,  $s = 2$ ,  $p = 3$ ,  $F(x) = x$ , мають наступний вигляд:

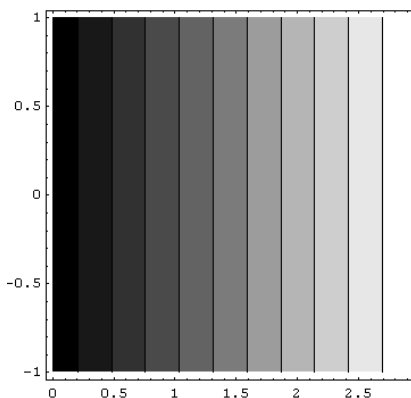


Рис.1. Наближений розв'язок при  $t = 0$

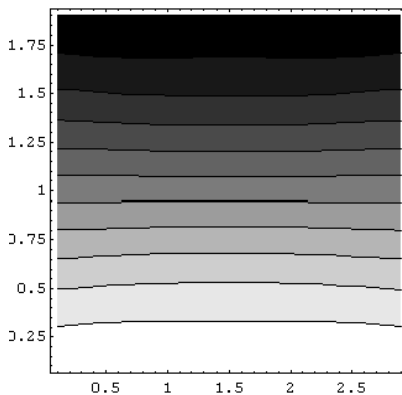


Рис.2. Наближений розв'язок при  $t = 20$

1. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наукова думка, 1976. – 302 с.
2. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. – Киев: Наукова думка, 1974. – 302 с.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 214 с.



## ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ПО ТЕПЛОФІЗИЧНИМ ВЛАСТИВОСТЯМ ВОДИ ТА ДІОКСИДУ ВУГЛЕЦЮ

Шевченко Г.В., Бодюл О.С., Становська Т.П., Україна  
Одеська державна академія холоду  
факультет інформаційних технологій

Оперативне забезпечення науково-дослідних та проектно-конструкторських установ достовірними даними про властивості технічно важливих газів та рідин є актуальною проблемою. Прогрес в цьому напрямі можливий тільки при створенні ефективного програмного забезпечення для виконання багатоваріантних розрахунків, пов'язаних з проектуванням і оптимізацією систем різного призначення.

На основі рівнянь стану фундаментального типу нами була розроблена інформаційна система з теплофізичних властивостей найважливіших речовин - води (водяної пари) і діоксиду вуглецю. Нижче наведені деякі характеристики створеного програмного забезпечення.

Визначаються густина, тиск, ентальпія, ентропія, внутрішня енергія, ізохорная і ізобарна теплоємність, показник адіабати, швидкість звуку, диференційний дросель-ефект та інші властивості.

Властивості можуть бути визначені при наступних комбінаціях незалежних змінних: температура-густина, температура-тиск, температура-ентропія, температура-ступінь сухості, тиск-густина, тиск-ентальпія, тиск-ентропія, тиск-ступінь сухості, ентальпія-ентропія.

Для визначення властивостей речовин при незалежних змінних  $T$ - $p$  (температура-густина) на першому етапі необхідно локалізувати область пошуку (зона з температурою вище за критичну; зона пари з температурою нижче за критичну; зона рідини з температурою нижче за критичну; двофазна область «рідина-пара»). Для локалізації області пошуку використовуються значення температури і тиску в критичній точці, рівняння кривої пружності, а також допоміжні залежності густини насиченої рідини і насиченої пари від температури, отримані в результаті апроксимації табличних даних при розробці програми або запозичені з літературних джерел. Для остаточного визначення параметрів на лініях насичення використовувалося правило Максвела. Після локалізації області пошуку здійснювалося рішення рівняння

$$p_{\text{вх}} - p(\rho, T) = 0,$$

де  $p_{\text{вх}}$  – вхідний тиск;  $\rho$ ,  $T$  – густина та температура відповідно.

Розроблені на мові програмування PASCAL модулі включені в банк даних про теплофізичні властивості технічно важливих газів і рідин, який розробляється в Одеській державній академії холоду. Такий банк в даний час забезпечує користувачів даними про термодинамічні і транспортні властивості близько двадцяти речовин.



На малюнку представлений зовнішній вигляд основного діалогового вікна розробленої системи.

**Информация о константах и области применимости уравнения**

Физические константы		Область применения уравнения	
Молекулярная масса, г/моль	18.01534	Минимальная температура, К	252
Газовая постоянная, Дж/(моль·К)	0.46151805	Максимальная температура, К	1273
Критическая температура, К	647.14	Минимальное давление, МПа	0
Критическое давление, МПа	22.064	Максимальное давление, МПа	25000
Критическая плотность кг/м <sup>3</sup>	322		
Температура в тройной точке К	273.16		

#	Температура К	Давление МПа	Плотность кг/м <sup>3</sup>	Удельная энthalпия кДж/кг	Удельная энтропия кДж/(кг·К)	Степень сухости -	Теплопро- водность мВт/(м·К)	Кинематичес- вязкость мПа·с	Скорость звука м/с	Показатель адиабаты -	Изобарная теплоемкость кДж/(кг·К)
2	700	1	3,130501	3321,403	7,549252	0	22,63321	25,49642	640,5273	1,284367	2,138076

Рисунок – Інформаційна форма з результатами розрахунків

1. *Span R., Wagner W.* A New Equation of State for Carbon Dioxide Covering the Fluid Region from the Triple-Point Temperature to 1100 K at Pressures up to 800 MPa. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 1996. Volume 25, No. 6, pp. 1509-1596.
2. *Pruss A., Wagner W.* A New Equation of State for Water as a Candidate for the New Scientific Formulation of IAPWS // In *Physical Chemistry of Aqueous Systems. Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on the Properties of Water and Steam.* Editors H.J.White, J.V. Sengers, D.B. Neumann, J.C.Bellows – New York: Begell House 1995. – P.66-77
3. A Thermophysical Property Databank for Technically Important Gases and Liquids. A.A.Vasserman, A.G.Slynko, S.V.Bodyul, Yu.V.Gondarenko, and E.S.Bodyul. *International Journal of Thermophysics*. Vol. 22, No. 2, 2001. P.478-484.

**ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ  
ЗА ДОПОМОГОЮ ЧИСЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

Шкловець Артем Вадимович, Україна  
Харківський університет радіоелектроніки  
Факультет прикладної математики

В роботі запропоновано функціональну характеристику закону розподілу ймовірностей випадкової величини  $\xi$ . Нехай випадкова величина  $\xi$  подана вибіркою об'ємом  $n$  з генеральної сукупності, та випадкова величина  $R_\xi(n)$  визначає її розмах. Тоді числовою характеристикою розподілу  $F_\xi(n)$  є функція

$$Id_\xi(n) = \frac{(M[R_\xi(n)])^2}{D[\xi]}$$

де  $M[R_\xi(n)]$  – математичне сподівання розмаху,  $D[\xi]$  – дисперсія випадкової величини  $\xi$ .

Значення функції  $Id_\xi(n)$  виражаються через функцію розподілу випадкової величини  $\xi$ , враховуючи, що

$$M[R_\xi(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_\xi^n(x) - (1 - F_\xi(x))^n) dx.$$

Характеристика  $Id_\xi(n)$  є ідентифікатором типу розподілу. Будемо вважати, що дві випадкові величини належать до одного й того самого типу, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою лінійного перетворення. В роботі показано, що функція  $Id_\xi(n)$  залишається постійною для усіх випадкових величин одного типу.

Ідентифікатор розподілу можна використовувати для розпізнавання розподілу випадкової величини за вибірковими даними. Оцінкою  $Id_\xi(n)$ , яку отримано за  $k$  вибірками об'ємом  $n$ , є величина

$$Id(n) = \frac{\left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (X_{\max}^i(n) - X_{\min}^i(n)) \right)^2}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_i^2},$$

де  $X_{\max}^i$  та  $X_{\min}^i$  – максимальне та мінімальне значення  $i$ -ої вибірки відповідно,  $S_i$  - середнє квадратичне відхилення  $i$ -ої вибірки. В роботі показано, що ця оцінка є спроможною.

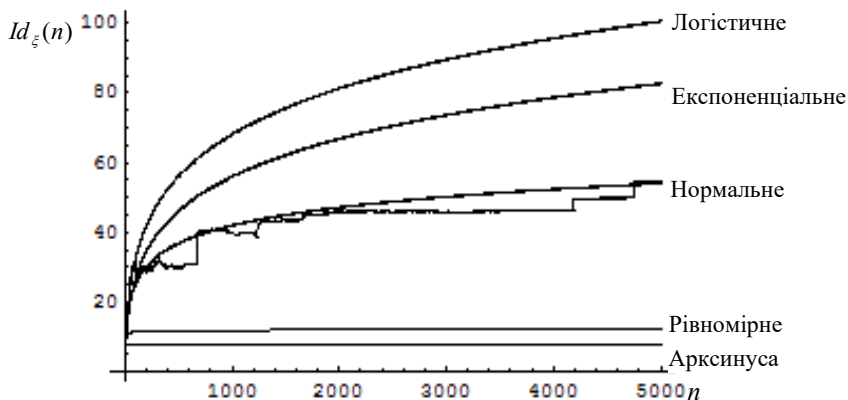


Рис. 1. Теоретичні криві залежностей  $Id_{\xi}(n)$  та експериментальна крива  $f(w(t))$  для нормального розподілу

Було проведене дослідження поведінки оцінки  $Id_{\xi}(n)$  для генерованих значень випадкових величин з різними законами розподілу. Значення випадкової величини були подані у вигляді часового ряду довжиною  $n$ . Для ідентифікації закону розподілу випадкової величини за вибірковими даними запропоновано використовувати середні квадратичні відхилення експериментальної кривої від теоретичної. Але, при вибірках малого об'єму, питання про розпізнавання закону розподілу є предметом наступних досліджень.

---



## РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ РАНЖУВАННЯ СТОРІНОК В ПОШУКОВИХ СИСТЕМАХ МЕРЕЖІ INTERNET

Шмідт Олександр Олександрович, Україна  
Дніпропетровський Національний Університет  
Факультет прикладної математики

В наш час, коли значна кількість населення користується доступом до мережі Internet, важливим стало питання дослідження існуючих алгоритмів ранжування веб-сторінок в пошукових системах. Оскільки саме за їх допомогою люди знаходять інформацію, а для великої кількості людей пошукові системи є уособленням Інтернету, ефективне представлення сайту в цих системах стає однією з найважливіших задач при його створенні.

Навіть маючи уявлення про те, які параметри впливають на ранжування сторінок при фіксованих запитах до пошукових систем, досить складно визначити, які оптимальні значення цих параметрів (наприклад, щільність фрази-запиту в тексті сторінки, обсяг всього тексту сторінки та інші).

Підхід, який за звичай використовується для цього – це дослідження і виявлення закономірностей в сторінках, які знаходяться на перших позиціях при відповідях пошукових систем на низку запитів. Прикладами таких досліджувальних систем є такі популярні продукти як Site-Auditor, Semonitor та інші.

Але такі експерименти, навіть при значному збільшенні кількості запитів в них, є досить неточними. До того ж, жодна з цих досліджувальних систем не проводить автоматичного виявлення кореляції значення параметрів з позиціями сторінок в пошукових системах.

Розв'язком даних проблем може стати система, яка буде штучно створювати сторінки з різними значеннями досліджуваних параметрів в заданих інтервалах з заданою точністю, і аналізувати, як різні пошукові системи відранжували створені сторінки. Такі експерименти є більш захищеними від похибок та стороннього впливу.

Саме така система розробляється в даний час. Використовування мови програмування PHP та системи управління базами даних MySQL дозволить широко використовувати цю систему, так як зазначені засоби є найбільш поширеними на даний момент в мережі Internet і не потребують витрат на їх встановлення.

Автоматична обробка даних, яка при даному підході не стає настільки складною, як виявлення кореляції між значеннями параметрів і рангом існуючих сторінок, в такій системі дозволить постійно мати актуальну інформацію про поточні оптимальні значення досліджуваних



параметрів, що є дуже корисним з огляду на те, що вони постійно змінюються в ході вдосконалення алгоритмів пошукових машин.

---



## ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ МІГРАЦІЄЮ ПОЛЮТАНТІВ У РОСЛИНАХ

Щербата Галина Михайлівна, Україна  
Львівський національний університет ім.І.Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

В роботі розглянуто задачі оптимізації кількості полютантів, які накопичуються в кореневій та надземній частинах рослини в процесі її росту.

Зміна концентрації полютанту у кореневій та надземній частинах рослини описується наступними рівняннями параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial C_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( D_r \frac{\partial C_r}{\partial \alpha} \right) + f_r(\alpha, t), \quad t > 0, \quad -h_r(t) \leq \alpha \leq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( D_s \frac{\partial C_s}{\partial \alpha} \right) + f_s(\alpha, t), \quad t > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq h_s(t), \quad (2)$$

де  $C_r(\alpha, t)$ ,  $C_s(\alpha, t)$  — концентрації полютанту у кореневій та надземній зонах рослини відповідно;  $D_r$ ,  $D_s$  — коефіцієнти дифузії полютанту у відповідних зонах;  $f_r(\alpha, t)$ ,  $f_s(\alpha, t)$  — інтенсивність поглинання полютанту коренями та надземною частиною рослини;  $h_r(t)$ ,  $h_s(t)$  — довжина кореневої системи та надземної частин рослини, які описуються звичайними диференціальними рівняннями росту [1].

Рівняння (1)-(2) доповнюються

- початковими умовами:

$$C_r(\alpha, 0) = 0, \quad -h_r^0 \leq \alpha \leq 0, \quad C_s(\alpha, 0) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq h_s^0 \quad (3)$$

- умовами спряження концентрацій та масових потоків на межі кореневої та надземної зон при  $\alpha = 0$ :

$$C_r(0, t) = C_s(0, t), \quad D_r \frac{\partial C_r}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = D_s \frac{\partial C_s}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \quad (4)$$

- крайовими умовами на нижньому краї кореневої частини та на верхньому краї надземної частини:

$$\frac{\partial C_r}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=-h_r(t)} = 0, \quad \frac{\partial C_s}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=h_s(t)} = 0. \quad (5)$$

Умови (5) виражають відсутність надходження полютанту через нижню межу кореневої зони рослини та верхню межу надземної зони.

В ролі керування  $u$  вибираємо коефіцієнти дифузії та функції інтенсивності поглинання полютанту:  $u = [D_r, D_s, f_r, f_s]^T$ . Поведінка системи "коренева зона - надземна частина рослини" описується



функцією  $x = [C_r, C_s]^T$ . При заданому керуванні  $u$  поведінка системи  $x$  визначається як розв'язок математичної моделі (1)-(5), тобто  $x = x(u)$ .

Забруднення рослини характеризується наступними показниками:

- загальна кількість полютанту у рослині в кінцевий момент часу  $t_e$ :

$$\tilde{\psi}_1(u, x) = \int_{-h_r}^0 C_r(\alpha, t_e) d\alpha + \int_0^{h_s} C_s(\alpha, t_e) d\alpha; \quad (6)$$

- усереднена концентрація полютанту у рослині на протязі досліджуваного періоду часу  $[t_0, t_e]$ :

$$\tilde{\psi}_2(u, x) = \frac{1}{t_e(h_s - h_r)} \left( \int_{t_0}^{t_e} \left( \int_{-h_r}^0 C_r(\alpha, t) d\alpha + \int_0^{h_s} C_s(\alpha, t) d\alpha \right) dt \right); \quad (7)$$

- величину відхилення концентрації полютанту від гранично допустимої норми  $C_d$  в кінцевий момент часу  $t_e$ :

$$\tilde{\psi}_3(u, x) = \max\left(0, \int_{-h_r}^0 (C_r(\alpha, t_e) - C_d) d\alpha, \int_0^{h_s} (C_s(\alpha, t_e) - C_d) d\alpha\right); \quad (8)$$

- максимальна концентрація полютанту у рослині в кінцевий момент часу  $t_e$ :

$$\tilde{\psi}_4(u, x) = \max\left(\max_{\alpha} C_r(\alpha, t_e), \max_{\alpha} C_s(\alpha, t_e)\right). \quad (9)$$

Один із функціоналів (6)-(9) вибирається в ролі критерію оптимізації  $\psi_0(u)$ . Інші функціонали можуть в цей час вибиратись в ролі обмежень і утворюють множину допустимих керувань  $U_{\varnothing}$ . Задача оптимального керування полягає в знаходженні такого керування  $u_*$ , що:

$$u_* \in U_{\varnothing}, \quad \psi_0(u_*) = \inf_{u \in U_{\varnothing}} \psi_0(u). \quad (10)$$

В результаті апроксимації функції керування кусково-поліноміальними функціями задача оптимального керування (10) зводиться до задачі нелінійного математичного програмування. Приведено результати числових досліджень задач оптимізації полютантів.

1. Скопецка О.В., Крємез В.С., Мусієнко М.М. Математичне моделювання міграції полютантів в сільськогосподарських культурах (на прикладі міграції свинцю в рослинах озимої пшениці)/ Доповіді НАН України. – 2001, №1. – С.203-208.



## ІНСТРУМЕНТАЛЬНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Юхимчук Володимир Олександрович, Україна  
Волинський державний університет ім. Лесі Українки  
Математичний факультет

В даний час існує багато програм-математичних пакетів для розв'язання задач числової та символної математики. Проте в них не приділяється достатньо уваги розв'язанню проблем з використанням алгоритмів, які лежать в основі наближених методів.

Програма Approaching розроблялась з метою:

- програмної реалізації алгоритмів конкретних методів; дослідження особливостей цих методів; їх практичного застосування.

При цьому вирішувались наступні завдання:

- добір чисельних методів, оптимальних з точки зору швидкості одержання розв'язку та наближення одержаних даних до реального розв'язку;

- реалізація алгоритмів обраних методів на комп'ютері, з врахуванням особливостей кожного з методів. Для забезпечення інструментальності програмного засобу було створено модуль компіляції функції. Даний модуль забезпечує компіляцію введеної функції та одержання значення за нею. Він в свою чергу складається з таких компонент: лексичного аналізатора; компілятора; процедури для обчислення значення функції.

В програмі реалізовано наступні методи розв'язування задач:

- розв'язування (знаходження коренів) звичайних рівнянь, що залежать від однієї змінної (з графічною інтерпретацією);

- знаходження коренів систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

- обчислення визначених інтегралів 1-го і 2-го роду від функції однієї змінної;

- інтерполяція та екстраполяція функцій, заданих таблично (з графічною інтерпретацією розв'язку);

- розв'язування диференціальних рівнянь 1-го порядку від однієї змінної (з графічною інтерпретацією розв'язку);

- обчислення об'ємів тіл.

Наведені методи і визначають основні функціональні можливості програми.

Структурно програма складається з таких модулів:

- головний модуль (для здійснення зв'язку та переходів між задачами);

- модулі чисельних методів (в основі яких лежить той чи інший наближений метод).



- модуль для компіляції функції (забезпечує компіляцію введеної функції та одержання значення за нею).

- модуль побудови графіків.

Основні прийоми роботи з програмою

В головному вікні користувач має змогу вибрати одну з задач. Типове вікно розв'язування задачі має наступні елементи:

1) рядок введення функції (початкових даних). Тут користувач має змогу ввести будь-який математичний вираз. Програма за введеним виразом може знаходити його значення при конкретних аргументах;

2) список функцій – дозволяє повторно не вводити функції, які використовувались раніше;

3) кнопка розв'язування. При натисненні кнопки починається виконуватись той чи інший метод, після чого будується графік функції;

4) панель з графіком. На панелі будується графік початкової функції (або функції розв'язку). На графіку присутня координатна сітка, що дозволяє краще зрозуміти поведінку функції. Також є можливість масштабування необхідної частини графіка в декілька разів, та повернення до вихідного масштабу.

5) рядок задання розмірності. Використовується для задання кількості рядків чи стовпців в матриці чи таблицях;

6) кнопки збереження та відкриття результатів. Дозволяють зберігати та відкривати списки функцій, матриці та графіки. В програмі використовуються нові розширення файлів для їх швидкого пошуку.

Під час створення програми були виявленні такі особливості програмної реалізації чисельних методів:

- залежність часу обчислень від точності;
- швидке обчислення результату для практично складних задач;
- відсутність аналітичних обчислень; їх заміна на наближені алгоритми;

- обмеженість множини дійсних чисел при їх машинному представленні;

- обмеженість пам'яті, яка використовується для збереження даних (початкових, проміжних, графічних, вихідних);

- простота розв'язання задачі користувачем;

- втрата універсальності методу (деякі з задач можуть бути розв'язані вручну, без використання ЕОМ).

Отже, створена програма дозволяє розв'язувати математичні задачі за конкретним наближеним методом., є зручною у використанні та дозволяє швидко та ефективно отримувати розв'язки задач. Разом з тим було проаналізовано особливості чисельних методів та їх програмної реалізації.

---

**ДВОКРОКОВИЙ ІТЕРАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

Якимчук Роман Петрович, Україна  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

Розглянемо нелінійну задачу про найменші квадрати

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m F_i^2(x), \quad (1)$$

де  $m \geq n$ , функція нев'язки  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – нелінійна по  $x$ .

Серед методів для розв'язування задачі (1) важливе місце займають ітераційні методи, які не потребують обчислення аналітично заданих похідних. Це пов'язано з тим, що на практиці часто виникають задачі, в яких сама функція є результатом роботи машинного алгоритму або її обчислення вимагає значних обчислювальних затрат.

У цьому повідомленні розглядається двокроковий ітераційний метод з використанням поділених різниць першого порядку для нелінійних задач про найменші квадрати, який побудований на базі ітераційного методу з порядком збіжності  $1 + \sqrt{2}$  [1]. Цей метод має вигляд

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $A_n = F(x_n, y_n)$ ,  $F(x, y)$  – поділена різниця першого порядку функції  $F(x)$  в точках  $x$  та  $y$ , причому  $F(x, x) = F'(x)$ .

Досліджено збіжність методу (2) за умов неперевності за Гьольдером поділених різниць першого порядку та проведено чисельне дослідження цього методу на низці відомих тестових прикладів. Зроблено порівняння отриманих результатів з результатами за методом Гауса-Ньютона.

1. *Бартиш М.Я., Щербина Ю.М.* Про один різницеви метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А - 1972. - №7.-С. 579-582.
2. *Shakhno S.M., Gnatyshyn O.P.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving the nonlinear least squares problems// AMC (Appl. Math. Comp.) 161. 2005. 253-264.



**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БУБНОВА–ГАЛЬОРКІНА ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ III РОДУ**

Ялова Світлана Євгенівна, Україна  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Кафедра прикладної математики

В роботі розглядається застосування методу Бубнова-Гальоркіна до розв’язування нестационарних задач для параболічних рівнянь, що дає можливість отримати розв’язок в аналітичному вигляді.

Розглянемо задачу про розповсюдження температури при  $t > 0$  у прямокутному стержні,  $0 \leq x_1 \leq p$ ,  $0 \leq x_2 \leq s$ , початкова температура якого є довільною функцією  $f(x_1, x_2)$ , якщо на поверхні відбувається конвективний теплообмін із середовищем, яке має нульову температуру.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad \forall x \in \Omega = \{x_1 \in (0, p), x_2 \in (0, s)\}, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \Big|_{x_1=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \Big|_{x_1=p} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + u \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \Big|_{x_2=s} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1}$$

За допомогою функції  $H(X) = \frac{h_1 \cdot \omega_1 + h_2 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$ , де  $h_1 = \frac{1}{p}(2x_1 - p)$ ,  $h_2 = \frac{1}{s}(2x_2 - s)$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{p}x_1(p - x_1)$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{s}x_2(s - x_2)$ ,  $X = (x_1, x_2)$ , крайові умови задачі (1) запишемо у вигляді  $\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + H(X)u \Big|_{\partial\Omega} = 0$ , де  $\bar{v}$  - внутрішня нормаль до  $\partial\Omega$ .

Наближений розв’язок задачі (1) шукаємо у вигляді

$$u_n(X, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \tilde{\varphi}_k(X), \tag{2}$$

де координатні функції  $\tilde{\varphi}_k(X)$  мають вигляд:

$$\tilde{\varphi}_k(X) = \varphi_k(X) - \omega(X) \varphi_k(X) (\omega(X) + H(X)) - \omega(X) D_1 \varphi_k(X);$$

оператор  $D_1$  визначається формулою  $D_1 \equiv \frac{\partial \omega(X)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega(X)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$ ;



функція  $\omega(X)$  задовольняє умові  $\omega(X) = \begin{cases} > 0, \forall X \in \Omega, \\ = 0, \forall X \in \partial\Omega \end{cases}$  і є

нормалізованою до першого порядку;

$\{\varphi_k(X)\}$  - деяка повна послідовність лінійно незалежних функцій.

Відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна складаємо

$$\left( a^2 \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial u_n}{\partial t}, \tilde{\varphi}_j(X) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Враховуючи (2), отримаємо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \left[ c'_k(t) \cdot (\tilde{\varphi}_k(X), \tilde{\varphi}_j(X)) - c_k(t) \cdot \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_k(X)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_k(X)}{\partial y^2}, \tilde{\varphi}_j(X) \right) \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

початковими умовами для якої є  $c_k|_{t=0} = \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$ , де  $\alpha_k(t)$  відшукуються із системи

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (\tilde{\varphi}_j(X), \tilde{\varphi}_k(X)) = (\tilde{\varphi}_j(X), f(X)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Розв'язавши задачу (3), отримаємо розв'язок вихідної задачі у вигляді (1).

Обчислювальний експеримент проведено для  $a=1, s=1, p=2$ ,  $f(X) = x_1 \cdot x_2$  і зроблено порівняння з точним розв'язком задачі (2).

1. Будаєв Б.М. и др. Сборник задач по математической физике. – М.: “Наука”, 1972. – 687с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: “Наукова думка”, 1982. – 550с.
3. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. – Киев: “Наукова думка”, 1974. – 258с.
4. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: “Наукова думка”, 1976. – 288с.

**Показчик авторів**

Абрамов Є.М., Ліпіна О.С.....	12	Задорожний С.О. ....	68
Бабіля Р.В., Шишковський А.І.	14	Заяць І.З.....	70
Бebич Ю. Ю.....	16	Ігнатишин О.І. ....	72
Бевзюк А.Г.....	19	Каденко В.П.....	74
Березовська І. В.....	21	Калинюк В.В.....	78
Бліщ М.В. ....	23	Каракулов О.М. ....	80
Брагін Є.В. ....	25	Карчевська О.І.....	82
Васильєв О.М. ....	28	Келепко О.Ю., Рева Р.С.....	76
Волобосєва В.В.....	30	Княжев І.О. ....	84
Гаврушко О.І. ....	32	Коковська Я.В.....	86
Гoлюк Р.О.....	34	Кононов О.О. ....	88
Гороховатський О.В. ....	36	Контельов Є.В.....	91
Граб Т.І. ....	38	Короленко Д.В.....	93
Григоренко Н.В. ....	40	Кравченко І.О. ....	95
Грубій А.М. ....	42	Кузенков О.О.....	97
Губар Н.В.....	44	Кулішов В.А. ....	100
Д'якова Є.Ю., Магеря М.А. ....	64	Лисяк В.В.....	102
Данилюк В.М. ....	46	Мазуренко А.В. ....	104
Дегтярьов А.А. ....	47	Мамедова А.А. ....	106
Денисенко І.С.....	50	Мартиненко К.В. ....	108
Дзігора О. О., Шимук Ю. Д. ....	54	Марченко С.М. ....	109
Дзігора О.О., Шимук Ю. Д. ....	53	Матвійчук В.М. ....	111
Дикун І.А. ....	55	Матула Т.Р. ....	113
Добринська О.Г.....	58	Михайлинин Ю.Б. ....	114
Добринська О.Г., Козлов М.О.	57	Михайлов А.Ю. ....	116
Долгушин І.О. ....	60	Михальська Г.С. ....	117
Домінська С.Л. ....	62	Новіков Н.М. ....	119
Енгельгардт В.В. ....	66	Опрюк А.Ю.....	121



СНКПІМІ-2006

---

---

Макетування: Білан Наталія  
Відповідальний за випуск: Старчак Микола

Підп. до друку      Формат 60 × 84/16.  
Тираж 100. Зам. №

Видавничий центр Львівського національного університету  
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.