

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра прикладної математики

## Дипломна робота

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВПЛИВУ  
ТЕМПЕРАТУРИ АТМОСФЕРИ НА ЕКОСИСТЕМУ ПЛАНКТОНУ В  
ОКЕАНІ

Виконала: студентка групи ПМП-42  
спеціальності  
113 - прикладна математика

\_\_\_\_\_  
Шорнікова Н. С.

(прізвище та ініціали)

Керівник \_\_\_\_\_  
Борисюк Я. Є.

(прізвище та ініціали)

Рецензент \_\_\_\_\_

(прізвище та ініціали)

Львів - 2023

## ЗМІСТ

ЗМІСТ .....	2
ВСТУП .....	3
Розділ 1. Математична модель впливу температури атмосфери на екосистему планктону в океані .....	4
1.1 Опис математичної моделі .....	4
1.2 Опис параметрів моделі .....	5
Розділ 2. Якісний аналіз математичної моделі.....	7
2.1 Знаходження точок рівноваги.....	7
2.2 Аналіз точок рівноваги .....	8
Розділ 3. Програмна реалізація та результати.....	13
ВИСНОВКИ.....	17
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	18

## ВСТУП

У морських екосистемах, планктон вважається основним джерелом їжі. Ріст планктону залежить від ефективності насичення вуглекислим газом, насичення киснем, живлення, температури води, сонячного світла, насичених або ненасичених токсичних хімічних речовин, пластику тощо. Але ріст фітопланктону здебільшого залежить від фотосинтетичної активності планктону. З іншого боку, фотосинтетична активність змінюється в залежності від температури повітря.

У цьому дослідженні ми обговорюємо вплив атмосферної температури на планктон у морських екосистемах, включаючи концентрацію розчиненого кисню. Щоб дослідити вплив атмосферної температури, ми сформулювали математичну модель, що складається з нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що враховують чотири динамічні змінні, такі як кількість атмосферної температури, щільність фітопланктону, щільність зоопланктону та концентрацію розчиненого кисню.

Актуальність: Робота присвячена моделюванню впливу температури атмосфери на екосистему планктону, знаходження стійкості системи та оптимальної температури, за якої швидкість росту планктону являється максимальною.

### **Ціль роботи:**

- 1) аналіз математичної моделі;
- 2) знаходження та дослідження точок рівноваги на стійкість;
- 3) чисельний розв'язок системи;
- 4) знаходження оптимальної температури для розвитку екосистеми.

# Розділ 1. Математична модель впливу температури атмосфери на екосистему планктону в океані

## 1.1 Опис математичної моделі

У даній роботі розглянуто математичну модель впливу температури атмосфери на планктон морської екосистеми. Модель описується системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, яка складається з чотирьох динамічних видів, що враховують температуру атмосфери ( $T$ ), щільність фітопланктону ( $P$ ), щільність зоопланктону ( $Z$ ), концентрацію розчиненого кисню ( $D$ ) [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} T'(t) = a - k_1 T(t) - k_2 P(t) T(t) \\ P'(t) = \frac{\beta_1 T(t) P(t)}{\alpha_1 + D_0 - D(t)} - \eta_1 P(t) - \eta_2 P(t) Z(t) - \eta_3 P(t) \\ Z'(t) = \frac{\beta_2 P(t) Z(t)}{\alpha_2 + D_0 - D(t)} - \mu Z(t) \\ D'(t) = d + \psi_1 P(t) T(t) - \psi_2 D(t) Z(t) - \psi_3 D(t) P(t) - \psi_4 D(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

з початковими умовами  $T(0) \geq 0$ ,  $P(0) \geq 0$ ,  $Z(0) \geq 0$ ,  $D(0) \geq 0$ .

Взаємозв'язок між ними можна зобразити за допомогою діаграми на рисунку 1 [1]. Аналіз взаємодії між компонентами моделі допомагає зрозуміти, як зміна однієї компоненти впливає на інші компоненти. Очевидно, що температура допомагає фітопланктону виробляти їжу, а фітопланктон подає енергію та кисень для зоопланктону. Таким чином, вони створюють балансуєчу морську екосистему між собою [2].

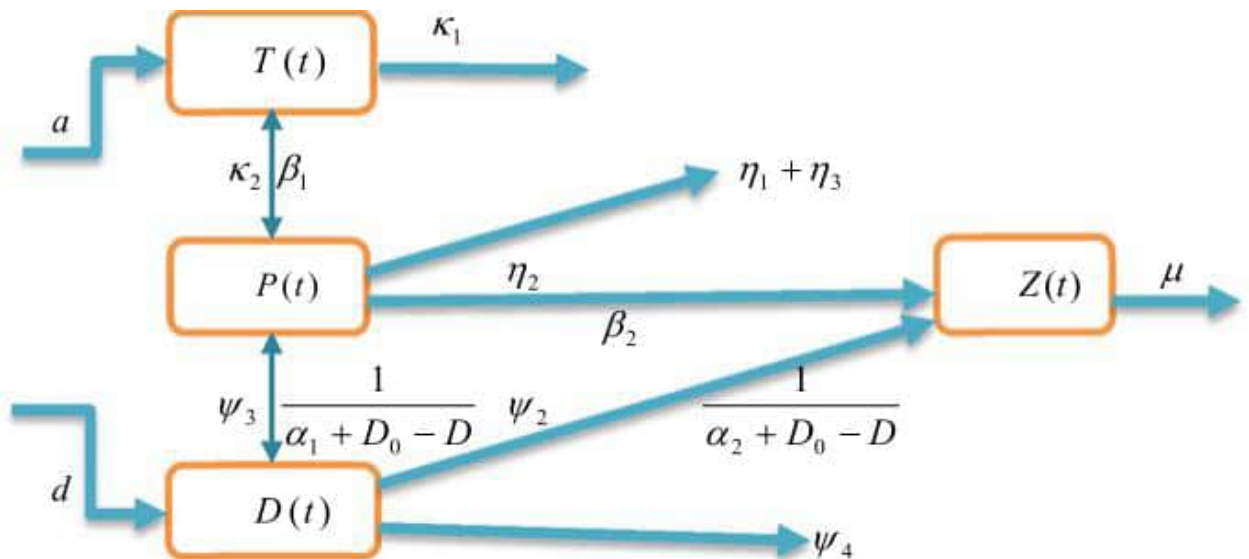


Рис. 1 Схематична діаграма системи, що представляє взаємодію між розглянутими видами в морській екосистемі [1]

## 1.2 Опис параметрів моделі

Короткий опис параметрів, що використовуються в моделі, наведено в таблиці 1 [1].

Таблиця 1. Параметри моделі

Символ	Значення	Чисельне значення
$a$	Атмосферна температура на Землі	$25^{\circ}\text{C}$
$k_1$	Швидкість системних втрат	$0,78 / \text{кл}$
$k_2$	Швидкість поглинання температури для фотосинтезу	$0,3 / \text{кл}$
$\beta_1$	Пропорційна константа	$0,5 / \text{день}$
$\beta_2$	Пропорційна константа	$0,33 / \text{день}$
$\alpha_1$	Константа насичення	$0,51 / \text{мг/л}$
$\alpha_2$	Константа насичення	$0,41 / \text{мг/л}$

$\eta_1$	Природня смертність фітопланктону	0,009/день
$\eta_2$	Швидкість хижацтва зоопланктону	0,41/мг/л × день
$\eta_3$	Щільність води (каламутної і брудної)	0,01/мг/л
$D_0$	Значення насичення розчиненого кисню	30/мг/л
$d$	Концентрація розчиненого кисню, що надходить у систему	24/мг/л × день
$\mu$	Природна смертність зоопланктону	0,01/день
$\psi_1$	Швидкість утворення $O_2$ шляхом фотосинтетичної діяльності	0,652/мг/л × день
$\psi_2$	Швидкість поглинання $O_2$ зоопланктоном для дихання	0,02/мг/л × день
$\psi_3$	Швидкість поглинання $O_2$ фітопланктоном для дихання	0,025/день
$\psi_4$	Норма природного виснаження	3/день

## Розділ 2. Якісний аналіз математичної моделі

### 2.1 Знаходження точок рівноваги

Для того щоб проаналізувати існування та стабільність точок рівноваги прирівнюємо ліву частину системи (1) до нуля:  $T'(t) = 0$ ,  $P'(t) = 0$ ,  $Z'(t) = 0$ ,  $D'(t) = 0$ . [3]

Отримуємо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a - k_1 T(t) - k_2 P(t) T(t) = 0 \\ \frac{\beta_1 T(t) P(t)}{\alpha_1 + D_0 - D(t)} - \eta_1 P(t) - \eta_2 P(t) Z(t) - \eta_3 P(t) = 0 \\ \frac{\beta_2 P(t) Z(t)}{\alpha_2 + D_0 - D(t)} - \mu Z(t) = 0 \\ d + \psi_1 P(t) T(t) - \psi_2 D(t) Z(t) - \psi_3 D(t) P(t) - \psi_4 D(t) = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом простої ітерації. З першого рівняння виразимо  $T(t) = \frac{a}{k_1 + k_2 P(t)}$ . Друге рівняння виразимо через спільний множник  $P(t)$ :

$$P(t) \left( \frac{\beta_1 T(t)}{\alpha_1 + D_0 - D(t)} - \eta_1 - \eta_2 Z(t) - \eta_3 \right) = 0$$

Тому як мінімум одна з точок рівноваги містить в собі  $P=0$ . Запишемо

$$Z(t) = \frac{\beta_1 T(t)}{\eta_2 (\alpha_1 + D_0 - D(t))} - \frac{\eta_1 + \eta_3}{\eta_2}.$$

Аналогічно з третього рівняння отримуємо  $Z=0$ ,  $P(t) = \frac{\mu}{\beta_2} (\alpha_2 + D_0 - D(t))$ . З четвертого рівняння виразимо  $D(t) = \frac{d + \psi_1 P(t) T(t)}{\psi_2 Z(t) + \psi_3 P(t) + \psi_4}$ .

*Програмний код Matlab:*

```
a = 25;
k1 = 0.78;
k2 = 0.3;

T0 = 1.0;
P0 = 1.0; %початкове наближення
```

```

Z0 = 1.0;
D0 = 1.0;

T = a/(k1+k2*P0);
Z = 0.5*T/(12.5091-0.41*D0)-0.046341;
P = 0.9123-0.03*D0;
D = (24+0.652*P*T)/(0.02*Z+0.025*P+3);

e = 0.01; %точність
while or((abs(T - T0) > e), (abs(P - P0) > e), (abs(Z - Z0) > e), (abs(D - D0) > e))
T0 = T;
P0 = P;
Z0 = Z;
D0 = D;
T = a/(k1+k2*P0);
Z = 0.5*T/(12.5091-0.41*D0)-0.046341;
P = 0.9123-0.03*D0;
D = (24+0.652*P*T)/(0.02*Z+0.025*P+3);
k = k + 1;
end;

```

У результаті отримуємо точку рівноваги  $E_1(\bar{T}, \bar{P}, \bar{Z}, \bar{D})$ , де для значень з таблиці 1 маємо  $\bar{T} = 11,53, \bar{P} = 0,851, \bar{Z} = 1,379, \bar{D} = 9,547$ . Враховуючи, що значення  $P$  та  $Z$  можуть бути нулями, шляхом підстановки знаходимо  $E_2(\bar{T}, 0, 0, \bar{D})$  та  $E_3(\bar{T}, \bar{P}, 0, \bar{D})$ .

## 2.2 Аналіз точок рівноваги

Дослідження стійкості точок рівноваги є важливим елементом аналізу моделі, оскільки дозволяє визначити, які значення параметрів призводять до стійкої поведінки системи. Якщо стаціонарна точка є асимптотично стійкою, то це означає, що при малих збуреннях вихідної точки системи поведінка розв'язку залишиться стійкою.

Лінеаризуємо систему (1). Матриця Якобі буде мати такий вигляд:

$$J = \begin{vmatrix} -k_1 - k_2 P & -k_2 T & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1 P}{\alpha_1 + D_0 - D} & \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - D} - \eta_1 - \eta_2 \bar{Z} - \eta_3 & -\eta_2 \bar{P} & \frac{\beta_1 \bar{T} \bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & \frac{\beta_2 \bar{Z}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} & \frac{\beta_2 \bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu & \frac{\beta_2 \bar{P} \bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \psi_1 \bar{P} & \psi_1 \bar{T} - \psi_3 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} - \psi_3 \bar{P} - \psi_4 \end{vmatrix}$$

Підставляємо в систему значення для кожної точки рівноваги.

1)  $E_1(\bar{T}, \bar{P}, \bar{Z}, \bar{D})$

$$= 0 \left| \begin{array}{cccc} -k_1 - k_2\bar{P} - \lambda & -k_2\bar{T} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} & \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_2\bar{Z} - \eta_3 - \lambda & -\eta_2\bar{P} & \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & \frac{\beta_2\bar{Z}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} & \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \psi_1\bar{P} & \psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D} & -\psi_2\bar{D} & -\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{array} \right|$$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} & (-k_1 - k_2\bar{P} - \lambda) \left| \begin{array}{ccc} \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_2\bar{Z} - \eta_3 - \lambda & -\eta_2\bar{P} & \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \frac{\beta_2\bar{Z}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} & \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D} & -\psi_2\bar{D} & -\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{array} \right| \\ & + k_2\bar{T} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} & -\eta_2\bar{P} & \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \psi_1\bar{P} & -\psi_2\bar{D} & -\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{array} \right| \\ & = (-k_1 - k_2\bar{P} - \lambda) \left( \left( \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_2\bar{Z} - \eta_3 - \lambda \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (-\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda) \right. \\ & + (-\eta_2\bar{P}) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (\psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D}) + \left( \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{Z}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} \right) (-\psi_2\bar{D}) \\ & - \left( \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (\psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D}) \\ & - \left( \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_2\bar{Z} - \eta_3 - \lambda \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (\psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D}) \\ & \left. - (-\eta_2\bar{P}) \left( \frac{\beta_2\bar{Z}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} \right) (-\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda) \right) \\ & + k_2\bar{T} \left( \left( \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (-\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda) \right. \\ & + (-\eta_2\bar{P}) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (\psi_1\bar{P}) - \left( \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (\psi_1\bar{P}) \\ & \left. - \left( \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (-\psi_2\bar{D}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = -k_1 - k_2\bar{P}, \lambda_2 = \frac{\beta_1 k_1 \bar{T}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})(k_1 + k_2 \bar{P})}, \lambda_3 = \frac{\beta_2 \bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu, \lambda_4 = -\psi_2 \bar{Z} - \psi_3 \bar{P} - \psi_4.$$

Враховуючи, що всі параметри з таблиці 1 додатні, як і  $\bar{T}, \bar{P}, \bar{Z}, \bar{D}$ , то корені  $\lambda_1$  та  $\lambda_4$  від'ємні. Система буде стійкою при  $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ , тобто при виконанні наступних умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta_1 k_1 \bar{T}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})(k_1 + k_2 \bar{P})} < 0 \\ \frac{\beta_2 \bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu < 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + D_0 - \bar{D} < 0 \\ \beta_2 \bar{P} < \mu(\alpha_2 + D_0 - \bar{D}) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{D} > \alpha_1 + D_0 \\ \bar{P} < \frac{\mu(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})}{\beta_2} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$2) E_2 = (\bar{T}, 0, 0, \bar{D})$$

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & -k_2 \bar{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & \psi_1 \bar{T} - \psi_3 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} - \psi_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння:

$$(-k_1 - \lambda) \left( \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3 - \lambda \right) (-\mu - \lambda) (-\psi_2 \bar{D} - \psi_4 - \lambda) = 0.$$

$$\lambda^4 + \left( k_1 + \eta_1 + \eta_3 - \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} + \mu + \psi_2 \bar{D} + \psi_4 \right) \lambda^3 + \left( k_1 \left( \eta_1 + \eta_3 - \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) + \mu(\psi_2 \bar{D} + \psi_4) + \left( k_1 + \eta_1 + \eta_3 - \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \right) \lambda^2 + \left( \left( k_1 + \eta_1 + \eta_3 - \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \mu + \psi_2 \bar{D} + \psi_4 \right) \lambda + \mu(\psi_2 \bar{D} + \psi_4) = 0$$

Позначимо:  $a = k_1, b = \eta_1 + \eta_3 - \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}}, c = \mu, d = \psi_2 \bar{D} + \psi_4$ . Тоді

розписане характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 + (a + b + c + d)\lambda^3 + (ab + \mu cd + (a + b)(c + d))\lambda^2 + ((a + b)cd + ab(c + d))\lambda + abcd = 0$$

Матриця Гурвіца:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+b+c+d & (a+b)cd + ab(c+d) & 0 & 0 \\ 1 & ab + \mu cd + (a+b)(c+d) & abcd & 0 \\ 0 & a+b+c+d & (a+b)cd + ab(c+d) & 0 \\ 0 & 1 & ab + \mu cd + (a+b)(c+d) & abcd \end{vmatrix}$$

Критерії стійкості:

$$\Delta_1 = (a+b+c+d) > 0, \Delta_2 = (a+b+c+d)(ab + \mu cd + (a+b)(c+d)) - ((a+b)cd + ab(c+d)) > 0, \Delta_4 > 0.$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = -k_1, \lambda_2 = \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3, \lambda_3 = -\mu, \lambda_4 = -\psi_2 \bar{D} - \psi_4.$$

Серед чотирьох власних значень  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$  від'ємні. Тому система являється стійкою за умови:

$$\lambda_2 < 0 \rightarrow \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3 < 0.$$

Враховуючи, що  $\alpha_1 + D_0 - \bar{D} < 0$  (умова стійкості системи для точки  $E_1$ ), умова виконується. Система стійка.

$$3) E_3 = (\bar{T}, \bar{P}, 0, \bar{D})$$

$$\begin{vmatrix} -k_1 - k_2 \bar{P} - \lambda & -k_2 \bar{T} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1 \bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} & \frac{\beta_1 \bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3 - \lambda & -\eta_2 \bar{P} & \frac{\beta_1 \bar{T} \bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2 \bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & 0 \\ \psi_1 \bar{P} & \psi_1 \bar{T} - \psi_3 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} & -\psi_2 \bar{D} - \psi_3 \bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned}
& (-k_1 - k_2\bar{P} - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3 - \lambda & -\eta_2\bar{P} & \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & 0 \\ \psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D} & -\psi_2\bar{D} & -\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{vmatrix} \\
& + k_2\bar{T} \begin{vmatrix} \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} & -\eta_2\bar{P} & \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \\ 0 & \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda & \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \\ \psi_1\bar{P} & -\psi_2\bar{D} & -\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda \end{vmatrix} \\
& = (-k_1 - k_2\bar{P} - \lambda) \left( \left( \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_2\bar{Z} - \eta_3 - \lambda \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (-\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda) - \left( \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (\psi_1\bar{T} - \psi_3\bar{D}) \right) \\
& + k_2\bar{T} \left( \left( \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (-\psi_2\bar{D} - \psi_3\bar{P} - \psi_4 - \lambda) + (-\eta_2\bar{P}) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (\psi_1\bar{P}) - \left( \frac{\beta_1\bar{T}\bar{P}}{(\alpha_1 + D_0 - \bar{D})^2} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu - \lambda \right) (\psi_1\bar{P}) - \left( \frac{\beta_1\bar{P}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} \right) \left( \frac{\beta_2\bar{P}\bar{Z}}{(\alpha_2 + D_0 - \bar{D})^2} \right) (-\psi_2\bar{D} + + +) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = -k_1 - k_2\bar{P}, \lambda_2 = \frac{\beta_1\bar{T}}{\alpha_1 + D_0 - \bar{D}} - \eta_1 - \eta_3, \lambda_3 = -\psi_3\bar{P} - \psi_4, \lambda_4 = \frac{\beta_2\bar{P}}{\alpha_2 + D_0 - \bar{D}} - \mu.$$

Власні значення  $\lambda_1$  та  $\lambda_3$  від'ємні. Система стійка при  $\lambda_2 < 0, \lambda_4 < 0$ .

Враховуючи умову стійкості точки  $E_1$ , при  $\alpha_1 + D_0 - \bar{D} < 0$ , отримуємо  $\lambda_2$  та  $\lambda_4$  від'ємні. Система стійка.

Отже, в результаті проведеного аналізу, отримали, що з урахуванням обмежень, які випливають з фізичного змісту параметрів моделі (всі параметри додатні) та при виконанні обмежень виду (2) всі стаціонарні точки будуть стійкими.

### Розділ 3. Програмна реалізація та результати

Метод Рунге-Кутта дає набір формул для обчислення координат внутрішніх точок, які потрібні для реалізації цієї ідеї. Оскільки існує ряд способів знаходження цих точок, то метод Рунге-Кутта об'єднує цілий клас методів для розв'язання систем диференціальних рівнянь. [4]

Найбільш розповсюдженим є класичний метод четвертого порядку точності:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{6},$$

$$\text{Де } k_1 = hX'(s_i), k_2 = hX' \left( t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_1}{2} \right), k_3 = hX' \left( t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_2}{2} \right),$$

$$k_4 = hX' \left( t_i + \frac{h}{2}, X_i + k_3 \right), X(t) = (T(t), P(t), Z(t), D(t)).$$

Візьмемо  $t_0 = 0$ , Для системи (1) формула буде наступною:

$$k_1^i = \begin{pmatrix} a - k_1 T^i(t) - k_2 P^i(t) T^i(t) \\ \frac{\beta_1 T^i(t) P^i(t)}{\alpha_1 + D_0 - D^i(t)} - \eta_1 P^i(t) - \eta_2 P^i(t) Z^i(t) - \eta_3 P^i(t) \\ \frac{\beta_2 P^i(t) Z^i(t)}{\alpha_2 + D_0 - D^i(t)} - \mu Z^i(t) \\ d + \psi_1 P^i(t) T^i(t) - \psi_2 D^i(t) Z^i(t) - \psi_3 D^i(t) P^i(t) - \psi_4 D^i(t) \end{pmatrix}$$

$$k_2^i =$$

$$\begin{pmatrix} a - k_1 \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{1,T}^i}{2} \right) - k_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{1,T}^i}{2} \right) \\ \frac{\beta_1 \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{1,T}^i}{2} \right) \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right)}{\alpha_1 + D_0 - \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{1,D}^i}{2} \right)} - \eta_1 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) - \eta_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{1,Z}^i}{2} \right) - \eta_3 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) \\ \frac{\beta_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{1,Z}^i}{2} \right)}{\alpha_2 + D_0 - \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{1,D}^i}{2} \right)} - \mu \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{1,Z}^i}{2} \right) \\ d + \psi_1 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{1,T}^i}{2} \right) - \psi_2 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{1,D}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{1,Z}^i}{2} \right) - \psi_3 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{1,D}^i}{2} \right) \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{1,P}^i}{2} \right) - \psi_4 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{1,D}^i}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$k_3^i =$$

$$\left( \begin{array}{l}
a - k_1 \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{2,T}^i}{2} \right) - k_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{2,T}^i}{2} \right) \\
\frac{\beta_1 \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{2,T}^i}{2} \right) \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right)}{\alpha_1 + D_0 - \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{2,D}^i}{2} \right)} - \eta_1 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) - \eta_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{2,Z}^i}{2} \right) - \eta_3 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) \\
\frac{\beta_2 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{2,Z}^i}{2} \right)}{\alpha_2 + D_0 - \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{2,D}^i}{2} \right)} - \mu \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{2,Z}^i}{2} \right) \\
d + \psi_1 \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) \left( T^i(t+0.5) + \frac{k_{2,T}^i}{2} \right) - \psi_2 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{2,D}^i}{2} \right) \left( Z^i(t+0.5) + \frac{k_{2,Z}^i}{2} \right) - \psi_3 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{2,D}^i}{2} \right) \left( P^i(t+0.5) + \frac{k_{2,P}^i}{2} \right) - \psi_4 \left( D^i(t+0.5) + \frac{k_{2,D}^i}{2} \right)
\end{array} \right)$$

$$k_4^i =$$

$$\left( \begin{array}{l}
a - k_1(T^i(t+1) + k_{3,T}^i) - k_2(P^i(t+1) + k_{3,P}^i)(T^i(t+1) + k_{3,T}^i) \\
\frac{\beta_1(T^i(t+1) + k_{3,T}^i)(P^i(t+1) + k_{3,P}^i)}{\alpha_1 + D_0 - (D^i(t+1) + k_{3,D}^i)} - \eta_1(P^i(t+1) + k_{3,P}^i) - \eta_2(P^i(t+1) + k_{3,P}^i)(Z^i(t+1) + k_{3,Z}^i) - \eta_3(P^i(t+1) + k_{3,P}^i) \\
\frac{\beta_2(P^i(t+1) + k_{3,P}^i)(Z^i(t+1) + k_{3,Z}^i)}{\alpha_2 + D_0 - (D^i(t+1) + k_{3,D}^i)} - \mu(Z^i(t+1) + k_{3,Z}^i) \\
d + (P^i(t+1) + k_{3,P}^i)(T^i(t+1) + k_{3,T}^i) - \psi_2(D^i(t+1) + k_{3,D}^i)(Z^i(t+1) + k_{3,Z}^i) - \psi_3(D^i(t+1) + k_{3,D}^i)(P^i(t+1) + k_{3,P}^i) - \psi_4(D^i(t+1) + k_{3,D}^i)
\end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l}
T^{i+1} = T^i + \frac{k_{1,T}^i + 2k_{2,T}^i + 2k_{3,T}^i + k_{4,T}^i}{6} \\
P^{i+1} = P^i + \frac{k_{1,P}^i + 2k_{2,P}^i + 2k_{3,P}^i + k_{4,P}^i}{6} \\
Z^{i+1} = Z^i + \frac{k_{1,Z}^i + 2k_{2,Z}^i + 2k_{3,Z}^i + k_{4,Z}^i}{6} \\
D^{i+1} = D^i + \frac{k_{1,D}^i + 2k_{2,D}^i + 2k_{3,D}^i + k_{4,D}^i}{6}
\end{array} \right)$$

З дослідження Рафаеля Рібейро [5], було зроблено висновок, що є деяка оптимальна температура, за якої швидкість росту фітопланктону та зоопланктону являється максимальною.

За допомогою чисельного моделювання, дослідимо зміну фотосинтезу для різних температур. На рисунку 2 показано вплив температури до 18 °C на фотосинтез і відповідний вплив на зоопланктон і кисень. При температурі 18 °C, швидкість фотосинтетичної активності фітопланктону зростає, тому максимум до 18 °C не досягнуто, і за зазначених температур немає оптимальної.

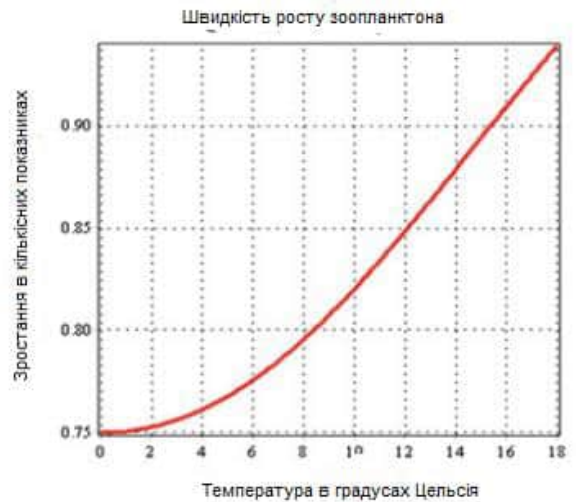


Рис.2 Вплив температури на екосистему планктону при  $a = 18^{\circ}\text{C}$ ,  $k_1 = 0,72 / \text{кЛ}$  та  $k_2 = 0,25 / \text{кЛ}$ .

При моделюванні швидкості росту планктону від 0 до 25 °С, фотосинтетичної активності зростає більш помірно. Можна зробити припущення, що в цій області є оптимальна температура, за якої швидкість фотосинтезу залишається постійною з часом, а у результаті зростання зоопланктону стає максимальним із найвищою швидкістю росту. При цьому швидкість поглинання температури фітопланктоном і системна втрата температури пропорційно змінюються з температурою атмосфери.

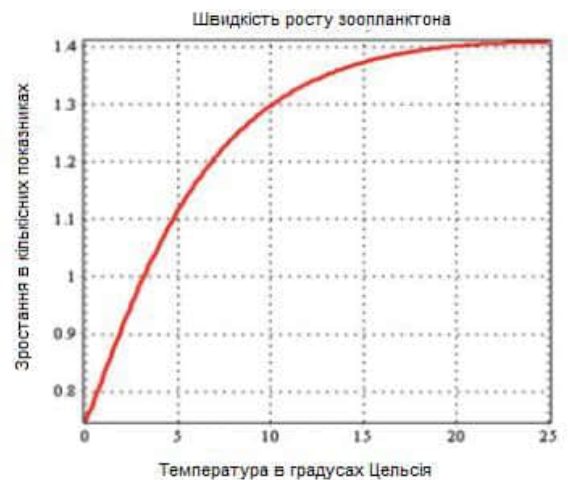
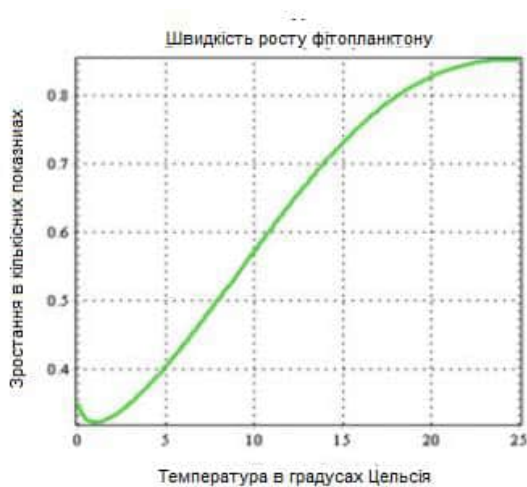


Рис.3 Вплив температури на екосистему планктону при  $a = 25^{\circ}\text{C}$ ,  $k_1 = 0,78 / \text{кЛ}$  та  $k_2 = 0,23 / \text{кЛ}$ .

На рисунку4 показано вплив температури на систему до 30°C. Після 25°C, фотосинтез починає знижуватися. Зі зменшенням швидкості фітопланктону швидкість росту зоопланктону та кисню зменшуватиметься пропорційно.

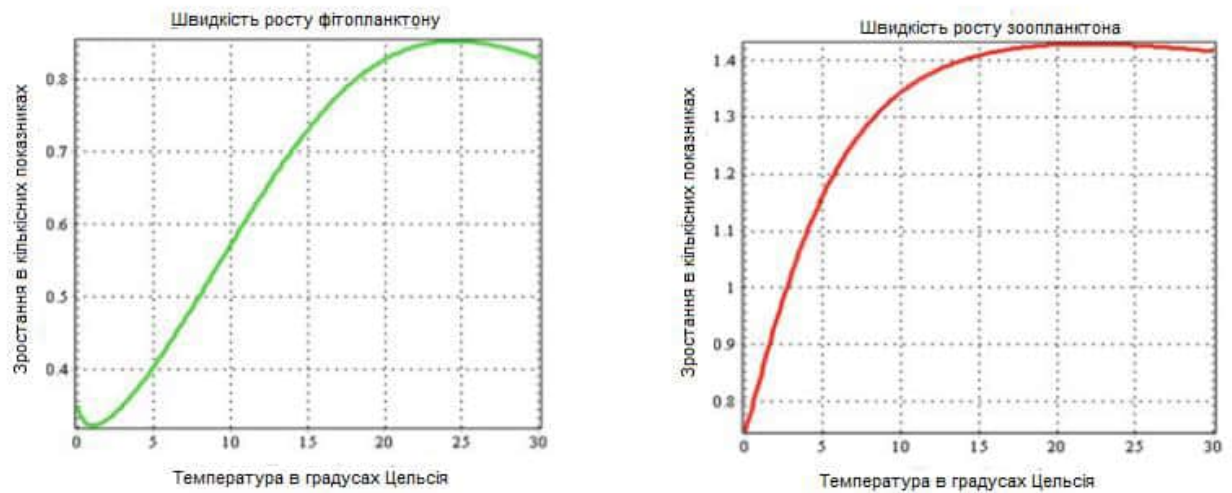


Рис.4 Вплив температури на екосистему планктону при  $a = 30^{\circ}\text{C}$ ,  $k_1$

$$= 0,83 / \text{кл} \text{ та } k_2 = 0,32 / \text{кл}.$$

На рисунках 2, 3 і 4 показано, що екосистема поступово збагачується, поки не настане оптимальна температура; система є оптимальною при оптимальній температурі; система починає знижуватися для високої температури (вище оптимальної температури).

## ВИСНОВКИ

У цьому дослідженні була запропонована та проаналізована нелінійна математична модель впливу температури атмосфери на екосистему планктону в океані. Модель містить три точки рівноваги, стійкість яких було проаналізовано та досліджено. Було зроблено чисельне моделювання за оптимальної температури, і для порівняння за нижчої (18 °C) та вищої (30 °C) від оптимальної температури. Швидкість росту фітопланктону при 25 °C вища, ніж за будь-якої іншої температури. При підвищенні швидкості росту фітопланктону, підвищується і швидкість росту зоопланктону, а отже, і швидкість виробництва кисню.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mandal, S., Islam, S., Biswas, H.: Modeling and Analytical Analysis of the Effect of Atmospheric Temperature to the Planktonic Ecosystem in Oceans, 1-11, 2021
2. Akter, S., Islam, M.S., Biswas, M.H.A., Mandal, S.: A mathematical model applied to understand the dynamical behavior of predator prey model. Commun. Math. Model. Appl. 4(3), 84–94 (2019)
3. Борисенко С.Д., Дудкін М.Є.: Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь, 1-8, 2000
4. Костюшко, І. А. Методи обчислень [Електронний ресурс] : підручник / І. А. Костюшко, Н. Д. Любашенко, В. В. Третиник ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/43627>
5. Ribeiro, R., Machado, E., Ferraz de Oliveira, R.: Temperature response of photosynthesis and its interaction with light intensity in sweet orange leaf discs under non-photorespiratory condition. Ciênc. agrotec., 30, (2006)