МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра прикладної математики

Дипломна робота

Моделювання бойових дій з допомогою моделей Ланчестера

Виконав: студент групи ПМП-42
спеціальності
113 - прикладна математика

_________ПурськийА.І.________________
(прізвище та ініціали)

Керівник ЩербатийМ.В._______________
(прізвище та ініціали)

Рецензент______________________________
(прізвище та ініціали)

Львів - 2023

Зміст

Вступ

Моделі Ланчестера, названі на честь свого винахідника - британського вченого і інженера Фредеріка Вільяма Ланчестера, є одними з перших кількісних математичних моделей, що створені для аналізу військових дій. Ланчестер розробив ці моделі протягом Першої світової війни - критичний момент в історії, коли військові конфлікти стали все більш технологічно складними, а значення стратегії та тактики стало ще більше очевидним.

Його ціллю було розробити формули та принципи, які можна було б використати для прогнозування результатів військових зіткнень на основі таких змінних, як чисельність військ, ефективність в бою, озброєння, та інші фактори.

Вважалося, що моделі Ланчестера можуть надати керівникам у полі військових дій краще розуміння динаміки конфлікту та можливості для стратегічного планування. Попри свою вікову давність, ці моделі залишаються важливим інструментом для військових аналітиків, викладачів військових академій, та істориків, що досліджують військові конфлікти.

Через свою простоту та гнучкість, вони стали важливою частиною сучасного військового моделювання.

Мета роботи проаналізувати та дослідити теоретичні основи моделей Ланчестера і їх використання в контексті військових дій, та обчислити моделі Ланчестера використовуючи сучасне комп'ютерне моделювання. Ці моделі, мають велику цінність для аналізу військових конфліктів і стратегії.

Основними завданнями роботи є розробка та перевірка комп'ютерних моделей, заснованих на принципах Ланчестера, аналіз військових сценаріїв, з використанням історичних даних про відомі військові конфлікти.

Для аналізу бойових ситуацій часто використовують математичні моделі, рівняння Ланчестера є одним з ключових інструментів у цьому процесі. Вони представляють собою детерміновані системи диференціальних рівнянь, що описують взаємне виснаження двох ворожих сил. Ці рівняння включають параметри, які відображають кількість активних бійців в конкретний момент бою, коефіцієнт втрат та інших стратегічних факторів.

В епоху цифрових технологій комп'ютерне моделювання стає незамінним інструментом для аналізу та прогнозування різноманітних сценаріїв, включаючи військові дії.

Застосування моделей Ланчестера у комп'ютерному моделюванні має великий потенціал. Використання алгоритмічних підходів дозволяє проводити складні розрахунки, моделювати різні військові сценарії та оцінювати потенційні результати. Згідно з моделями Ланчестера, можна моделювати динаміку військових зіткнень з урахуванням численності військ, потужності зброї та інших стратегічних факторів.

Крім того, комп'ютерне моделювання дає можливість розраховувати комплексні моделі, для оцінювання ефективності різних стратегій за достатньо короткий проміжок часу. Це особливо важливо в умовах динамічних військових дій, коли швидкість прийняття рішень може бути критичною.

Таким чином, застосування моделей Ланчестера з комп'ютерним моделюванням є важливим інструментом для сучасного військового аналізу, стратегічного планування та прогнозування результатів військових дій.

“ З усіх математичних дисциплін теорія диференціальних рівнянь найважливіша... Вона дає пояснення всіх тих елементарних явищ природи, які змінюються в часі. ”

С.Лі (норвезький математик, 1842 – 1899)

1. Теоретичний аналіз та основи моделей Ланчестера

У цьому розділі ми розглянемо класифікацію моделей війни, концепцію моделей Ланчестера на базі схожих популяційних моделей. А також самі моделі Ланчестера: лінійна модель "чесного бою", модель "неприцільного вогню", квадратична модель "прицільного вогню", квадратична модель "з розподілом резерву" і асиметрична модель.

1.1 Класифікація моделей війни

Класифікація моделей війни дозволяє розширити розуміння різних підходів та методів, що застосовуються у дослідженні військових конфліктів.

Можна виділити чотири основні класи математичних моделей війни:

- Описові моделі;
- Оптимізаційні моделі;
- Моделі прийняття рішень;
- Імітаційні моделі.

Кожен з цих класів включає різноманітні підкласи, які відрізняються застосованим математичним інструментарієм. [6]

Описові моделі бойових дій базуються на методах теорії ймовірностей, статистичної теорії прийняття рішень, та теорії експертних оцінок. Вони також включають якісний аналіз динамічних систем та їх структурної стійкості.

Оптимізаційні моделі ведення бойових дій використовують основи лінійного і динамічного програмування, теорії оптимального управління, дискретної оптимізації, диспетчеризації та управління для планування бойових дій і управління військами. Крім того, оптимізаційні моделі використовують переваги теорії масового обслуговування і теорії управління запасами.

Моделі прийняття рішень можна розділити на моделі індивідуального та колективного прийняття рішень. Перша група часто фокусується на багатокритеріальному прийнятті рішень, тоді як друга група переважно використовує теорію ігор.

Імітаційні моделі бойових дій використовують апарат марковських ланцюгів, диференціальних рівнянь, кінцевих автоматів або методів розподіленого штучного інтелекту.

Моделі Ланчестера є одними з найвідоміших і широко використовуваних форм імітаційних моделей, що використовуються для моделювання бойових ситуацій. Вони базуються на системі диференціальних рівнянь, які описують динаміку сил у збройних конфліктах. Крім того, є і стохастичні версії детермінованих моделей Ланчестера, які в основі своїй є марковськими процесами. Вони враховують стохастичність в умовах бою, але через обчислювальну складність та обмежену здатність моделювати різноманітні бойові ситуації, вони менш поширені.

Моделі Ланчестера, є потужним інструментом для аналізу військових конфліктів. Вони дозволяють віртуально моделювати різні сценарії бойових дій та прогнозувати їх результати. Використання таких моделей допомагає розуміти фактори, що впливають на воєнні операції, та приймати обґрунтовані стратегічні рішення. Тому використання імітаційних моделей, зокрема моделей Ланчестера, є важливим у наукових дослідженнях військових конфліктів.

1.2 Концепція моделей Ланчестера

Розуміння популяційних моделей допоможе нам у нашому подальшому дослідженні моделей Ланчестера та їх застосуванні для аналізу військових конфліктів.

1.2.1 Модель Мальтуса

Для кращого розуміння концепції моделей Ланчестера розглянемо одну з перших популяційних моделей, яка не включається в моделі Ланчестера. Модель Мальтуса є найпростіша форма популяційної моделі, також відомий як принцип популяційної теорії Мальтуса.[4]

Так, система рівнянь, що описує цю ситуацію, може бути записана як:

$$\frac{dA}{dt} = \alpha A \qquad (1.1)$$

Де A – розмір популяції, t – час, α – величина, що є різницею коефіцієнта народжуваності B та смертності $D: \alpha = B - D$.

Розв'язком рівняння при $\alpha = const$ є експоненціальна функція:

$$A(t) = A(0)e^{\alpha t} \qquad (1.2)$$

Це диференціальне рівняння першого порядку базується на припущенні, що темпи зростання населення пропорційні чисельності населення. Швидкість зміни чисельності населення залежить тільки від коефіцієнта народжуваності та смертності.

Модель Мальтуса викладає фундаментальну ідею, що розмір популяції зростає експоненціально без жодних обмежень. Цей принцип ідеально підходить для опису віддалених, ізольованих популяцій, де є достатньо ресурсів. Проте, в реальному світі ресурси обмежені, і популяція не може зростати нескінченно.

1.2.2 Модель конкурентної боротьби на основі рівнянь Лотки – Вольтерри

Одна з перших моделей, які враховують взаємодію між двома популяціями, а саме система рівнянь Лотки – Вольтерри, дана модель також не включається в моделі Ланчестера, а є розглянута тут для кращого розуміння концепції.[5] Ці рівняння описують динаміку популяції хижаків та їх здобичі. За цією моделлю, ріст популяції здобичі обмежується кількістю хижаків, а рівень хижаків залежить від доступної здобичі.

Так, система рівнянь, що описує цю ситуацію, може бути записана як:

$$\frac{dA}{dt} = -A(\alpha + \beta B)$$
$$\frac{dB}{dt} = -B(\gamma + \delta A) \qquad (1.3)$$

Де A – кількість жертв, B – кількість хижаків, t – час, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – певні параметри, що відтворюють взаємодії між видами.

Ця концепція може бути адаптована до бойового контексту яка імітує взаємодію "хижак - здобич", в контексті Ланчестерської моделі, обидва "хижаки" - це війська двох ворожих армій.

Це веде до моделей, які ілюструють, як дві ворожі сили взаємно впливають на себе під час бойових дій. За моделями Ланчестера, втрати кожної сторони залежать від чисельності і бойової ефективності противника. Ми також не зацікавлені числами, меншими за нуль так як чисельність армії не може бути від’ємною. Він розробив дві основні моделі: лінійну та квадратичну, які відповідають різним типам воєнного конфлікту.

1.3 Лінійна модель (Чесний бій)

Розглянемо першу лінійну модель, іноді відома як "ancient battle" - "стародавня битва" або "fair fight" - "чесний бій". Вона ґрунтується на припущенні, що битва є набором поєдинків один на один, що є характерним для ранніх історичних битв. Ця модель битви використовується для сценаріїв з географічними особливостями тобто з обмеженим простором бойових дій. Отже, визначальною характеристикою моделі є те, що численніша армія не може скористатися більшою кількістю своїх солдат проти ворога будь - який момент часу.[3]

Так, рівняння, що описують цю ситуацію, може бути записані як:

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha$$
$$\frac{dR}{dt} = -\beta \qquad (1.4)$$

Де B і R– це кількість воїнів відповідних військових сил, військ "Blue" і "Red", а α і β– це коефіцієнти втрат, t – це час.

Для спрощення аналізу ми припустимо, що кожна з двох сторін має однорідний склад. Нехай $B = B(t)$ і $R = R(t)$ це змінні, що представляють кількість бійців, що вижили в битві.

Рівняння стану в цьому випадку має вигляд:

$$\beta(B_0 - B) = \alpha(R_0 - R) \qquad (1.5)$$

Де B_0 і R_0 – початкова кількість воїнів відповідних сил. В даній моделі вплив чисельності військ є лінійним, що й відображено в назві "лінійна модель".

Зазначені умови визначають різні сценарії перемоги в битві залежно від відношення кількості військ та коефіцієнтів втрат сторін. Розгляньмо кожен сценарій окремо:

Якщо $\alpha = \beta$ обидві сторони мають однакові коефіцієнти втрат, переможе та сторона, яка мала більше військ на початку битви. Це означає, що чисельна перевага військ визначає переможця.

Якщо $B_0 = R_0$ обидві сторони мають однакову кількість військових, переможе сторона з більшим коефіцієнтом втрат. Це означає, що коефіцієнт втрат є визначальним фактором.

Якщо $B_0 = R_0$ та $\beta > \alpha$, то переможе "Blue" сторона, в той час як при $B_0 < R_0$ та $\beta < \alpha$ переможе "Red". Це означає, що якщо одна сторона має чисельну перевагу військ і кращий коефіцієнт втрат, вона переможе.

Якщо $B_0 > R_0$ але $\beta < \alpha$, або $B_0 < R_0$ але $\beta > \alpha$, переможна сторона визначається залежно від відношення α / β до B_0 / R_0. Якщо відношення α / β більше, то переможе сторона з меншою чисельною перевагою військ, а якщо відношення α / β менше, то переможе сторона з більшою чисельною перевагою військ. Це означає, що B_0 / R_0 баланс між чисельною перевагою військ та коефіцієнтом втрат визначає переможця.

Загалом, перемога в битві залежить від різних факторів, таких як чисельна перевага військ, коефіцієнт втрат та їх взаємне відношення.

1.4 Лінійна модель (Модель неприцільного вогню)

Розглянемо другу лінійна модель, враховує щільність ворожих цілей. В даному випадку, вогнева потужність армії залежить не лише від численності війська і коефіцієнт втрат, але й від щільності ворожих цілей. Ця модель відома також як "unaimed fire", модель "неприцільного вогню", через те, що ймовірність ураження ворога однієї армії залежить від кількості ворогів у другій армії. [3]
Система рівнянь для цього випадку виглядає так:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= -\alpha BR \\ \frac{dR}{dt} &= -\beta BR \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Де B і R – це кількість воїнів відповідних військових сил, військ "Blue" і "Red", а α і β – це коефіцієнти втрат, t – це час.

Рівняння стану в цьому випадку таке ж, як і для лінійної моделі "стародавньої битви" (1.5).

Зазначені умови визначають різні сценарії перемоги в битві залежно від відношення кількості військ та коефіцієнтів втрат сторін. Розгляньмо кожен сценарій окремо:

Якщо $\alpha = \beta$ обидві сторони мають однакові коефіцієнти втрат, переможе та сторона, яка мала більше військ на початку битви. Це означає, що чисельна перевага військ визначає переможця.

Якщо $B_0 = R_0$ обидві сторони мають однакову кількість військових, переможе сторона з більшим коефіцієнтом втрат. Це означає, що коефіцієнт втрат є визначальним фактором.

Якщо $B_0 = R_0$ та $\beta > \alpha$, тоді переможе "Blue" сторона, в той час як при $B_0 < R_0$ та $\beta < \alpha$ переможе "Red". Це означає, що якщо одна сторона має чисельну перевагу військ і кращий коефіцієнт втрат, вона переможе.

Якщо $B_0 > R_0$ але $\beta < \alpha$, або $B_0 < R_0$ але $\beta > \alpha$, переможна сторона визначається залежно від відношення α / β до B_0 / R_0. Якщо відношення α / β більше, то переможе сторона з меншою чисельною перевагою військ, а якщо відношення α / β менше, то переможе сторона з більшою чисельною перевагою військ. Це означає, що B_0 / R_0 баланс між чисельною перевагою військ та коефіцієнтом втрат визначає переможця.

У моделі неприцільного вогню перемога визначається з урахуванням чисельної переваги військ та коефіцієнта втрат, а також впливу щільності противників. Тому більші початкові сили є більш вигідними, оскільки вони можуть завдати більших початкових втрат.

1.5 Квадратична модель (Модель прицільного вогню)

Розглянемо квадратичну модель, відома як "aimed-fire", модель "прицільного вогню" або іноді ще називають "законом квадрату". Дана модель краще підходить для опису сучасних бойових дій. Вона враховує що бойові одиниці ворожих сторін можуть бути віддалені одна від одної і вести прицільний вогонь по ворожих цілях. В результаті отримуємо, що бойові одиниці здатні вражати кілька цілей і можуть бути враженими з декількох напрямків. Принцип концентрації сил у військовій думці означає стратегічну перевагу, що досягається шляхом зосередження значної частини своїх сил на невеликій частині сил противника.

Дана модель припускає, що бойова міць війська зростає пропорційно квадрату її чисельності, підкреслюючи стратегічну важливість концентрації сил у бойових діях.

Формально, система рівнянь для цього випадку виглядає так:

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha R$$
$$\frac{dR}{dt} = -\beta B \qquad (1.7)$$

Де B і R – це кількість воїнів відповідних військових сил, військ "Blue" і "Red", а α і β – це коефіцієнти втрат, t – це час.

Рівняння стану в цьому випадку має вигляд:

$$\beta(B_0^2 - B^2) = \alpha(R_0^2 - R) \qquad (1.8)$$

Де B_0 і R_0 – початкова кількість воїнів відповідних сил.

Зокрема, можна з'ясувати умови паритету, коли битва закінчується взаємною анігіляцією:

$$\beta B_0^2 = \alpha R_0^2 \qquad (1.9)$$

Ця модель наголошує, що подвоєння чисельності бійців має квадратичний ефект бойової потужності, з урахуванням прицільного вогню, де є більша точність та ефективність у влучанні ворожих цілей залежно від їх чисельності та бойової потужності. Отже, дана модель підкреслює важливість концентрації сил - це добре відомий принцип військової тактики.

Зазначені умови визначають різні сценарії перемоги в битві залежно від відношення кількості військ та коефіцієнтів втрат сторін. Розгляньмо кожен сценарій окремо:

Якщо $\alpha = \beta$ обидві сторони мають однакові коефіцієнти втрат, переможе та сторона, яка мала більше військ на початку битви. Це означає, що чисельна перевага військ визначає переможця.

Якщо $B_0 = R_0$ обидві сторони мають однакову кількість військових, переможе сторона з більшим коефіцієнтом втрат. Це означає, що коефіцієнт втрат є визначальним фактором.

Якщо $B_0 = R_0$ та $\beta > \alpha$, тоді переможе "Blue" сторона, в той час як при $B_0 < R_0$ та $\beta < \alpha$ переможе "Red". Це означає, що якщо одна сторона має чисельну перевагу військ і кращий коефіцієнт втрат, вона переможе.

Якщо $B_0 > R_0$ але $\beta < \alpha$, або $B_0 < R_0$ але $\beta > \alpha$, переможна сторона визначається залежно від відношення α / β до B_0 / R_0. Якщо відношення α / β більше, то переможе сторона з меншою чисельною перевагою військ, а якщо відношення α / β менше, то переможе сторона з більшою чисельною перевагою військ. Це означає, що B_0 / R_0 баланс між чисельною перевагою військ та коефіцієнтом втрат визначає переможця.

1.5.1 Модифікований варіант квадратичної моделі з розподілом резерву

Ця система рівнянь враховує активний резерв у квадратичній моделі Ланчестера, додаткові параметри представляється як сили, які можуть бути оперативно залучені до бою. Це можуть бути резервні підрозділи, які знаходяться у стані готовності та можуть бути швидко розгруповані та використані.

Система рівнянь для цього випадку виглядає так:

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha R + u(t)$$
$$\frac{dR}{dt} = -\beta B + v(t) \tag{1.10}$$

Де B і R – це кількість воїнів відповідних військових сил, військ "Blue" і "Red", а α і β– це коефіцієнти втрат, t – це час, $u(t)$ і $v(t)$ – це темп надходження одиниць активного резерву відповідних сторін на момент часу t.

Розподіл активного резерву в моделі Ланчестера враховується шляхом введення додаткового параметра, який відповідає за темп надходження одиниць активного резерву.

Модель працює в припущені, що втрати наростають з плином часу. У цій моделі коефіцієнти втрат мають квадратичну залежність від числа супротивників, що вказує на те, що зі збільшенням численності військ може зростати вогнева потужність.

Зазначені умови визначають різні сценарії перемоги в битві залежно від відношення кількості військ і їх вчасне залучення у битву і також коефіцієнтів втрат сторін.

Якщо $B_0 > R_0$ але $\beta < \alpha$, або $B_0 < R_0$ але $\beta > \alpha$, переможна сторона визначається залежно від відношення α / β до B_0 / R_0, з урахуванням розподілу активного резерву $u(t)$ і $v(t)$ відповідних сторін на момент часу t, за для найбільшої концентрації сил.

1.6 Асиметрична модель (Модель партизанської війни)

Моделі Ланчестера включають не тільки ситуації з симетричною битвою, коли обидві сторони застосовують однакові тактики і техніки ведення вогню, але й коли сторони застосовують різні тактики. Для прикладу може бути ситуація, коли регулярні війська держави борються з партизанами або повстанцями, які використовують тактику нерегулярної війни ця модель відома як "guerrilla warfare" модель "партизанської війни".[2]

Дейчман був першим, хто описав таку асиметричну ситуацію в рамках моделей Ланчестера. Він розробив так звану модель "партизанської війни", яка є комбінацією моделей лінійного закону неприцільно вогню система рівнянь (1.6) та квадратичного закону система рівнянь (1.7). В такій ситуації, партизани, які добре приховані в засідці, ведуть прицільний вогонь по регулярних військах. Тим часом, регулярні війська можуть вести лише неприцільний вогонь по партизанах, оскільки їх ефективність залежить від щільності сили партизанів.

У такій ситуації рівняння виснаження виглядає наступним чином:

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha R$$
$$\frac{dR}{dt} = -\beta B \frac{R}{R_0} \qquad (1.11)$$

Де R_0 – початкова кількість воїнів партизанської армії "Red", R – це кількість воїнів партизанської армії "Red" на момент часу t, B – це кількість воїнів регулярної армії "Blue" на момент часу t, а α і β – це коефіцієнти втрат, t – це час.

Рівняння стану в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{\beta}{2}({B_0}^2 - B^2) = \alpha({R_0}^2 - R_0 R) \qquad (1.12)$$

Приховані партизани мають перевагу над регулярними військами, що є повністю відкритими. Ця перевага виявляється в умові рівності, що випливає з рівняння стану:

$$\frac{\alpha {R_0}^2}{\beta {B_0}^2} = \frac{1}{2} \qquad (1.13)$$

Зазначені умови визначають різні сценарії перемоги в битві залежно від відношення кількості військ та коефіцієнтів втрат сторін. В умовах асиметричної війни, партизани мають перевагу через використання прицільного вогню, тоді як регулярна армія може вести лише неприцільний вогонь. Якщо регулярні сили хочуть досягти паритету, вони повинні подвоїти коефіцієнт втрат або збільшити початкову чисельність сил на $\sqrt{2}$.

2. Числові дослідження поставлених моделей Ланчестера

У цьому розділі ми проведемо числові дослідження моделей Ланчестера, які були визначені в попередньому розділі. Для кожної моделі ми розглянемо наочні сценарії, що дає нам краще розуміння впливу різних факторів на результати битви.

В розділі розглянуто такі моделі: лінійна модель "чесного бою", модель "неприцільного вогню", квадратична модель "прицільного вогню", квадратична модель "з розподілом резерву" і асиметрична модель.

2.1 Числові дослідження лінійної моделі (Чесного бою)

Для дослідження лінійної моделі "чесного бою" розглянемо історичний приклад в контексті знаменитої битви при Фермопілах. Цей історичний епізод є відмінним прикладом використання стратегії та тактики в умовах, коли ворожа сила переважала за чисельністю з обмеженим простором бойових дій. Розгляд такої ситуації, як у битві при Фермопілах, допоможе у кращому розумінні того, як змінні фактори, такі як чисельність, стратегія та географічні умови, можуть вплинути на результат битви.

Контекст битви при Фермопілах у 480 р. до н.е. грецька армія, якою командував спартанський цар Леонід, зустрілася з перським військом, яку очолював Ксеркс I, численність якого значно перевищувала грецьку армію, у гірському проході Фермопіл. Величезний розмір перської армії, не змусив Леоніда здатися. Натомість, вони розумно використали стратегічну перевагу місцевого рельєфу, зустрівши ворогів у найвужчому місці проходу, не давши змогу перському війську використати свою перевагу, а саме численність армії. Отже, військо яке не було залучене у битву в даний момент часу було змушене чекати своєї черги на поєдинок, у таборах неподалік. Грецька армія протягом двох днів утримувала фермопільську ущелину. У ніч третього дня завдяки зраді місцевого жителя Ефіальта, який показав таємний обхід, група на чолі з багатотисячним військом персів зайшли грекам в тил. Ця невелика група воїнів продовжувала протистояти персам ще одну добу, демонструючи величезну сміливість та героїчність. Попри те, що вони зазнали поразки, грецькі воїни змогли затримати персів достатньо довго, щоб дати грецьким містам-державам можливість мобілізуватися. Цей вчинок, який став в історії як символ героїзму та відваги, забезпечив грекам виграш у війні на наступний рік.

Наведено ілюстрацію (див. рис.1) битви при Фермопілах з обмеженим простором для бойових дій, а саме битва відбувалася в ущелені між Малійською затокою та гірським рельєфом, з обмеженою кількістю поєдинків один на один.

Рис.1 Рух обох армій у обмеженому просторі

У табл. 1 представлені вхідні історичні дані і результати битви при Фермопілах.

Табл.1 Дані битви при Фермопілах

Битва при Фермопілах	Початкова чисельність	Коефіцієнти втрат	Кінцева чисельність	Тривалість битви (години)
Грецькі війська	6300	2.5	0	96
Перські війська	160000	0.7	137575	

Важливо зауважити, що існує значна розбіжність в даних про чисельність персів в різних історичних джерелах. Цифри, що наведено тут, є найбільш загальноприйнятими серед істориків.[7]

Обчисливши дану битву використовуючи рівняння (1.4) отримуємо даний графік (див. рис. 2) зображено залежність кількості обох військ від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 1. Бій тривав 96 годин до останнього грецього воїна.

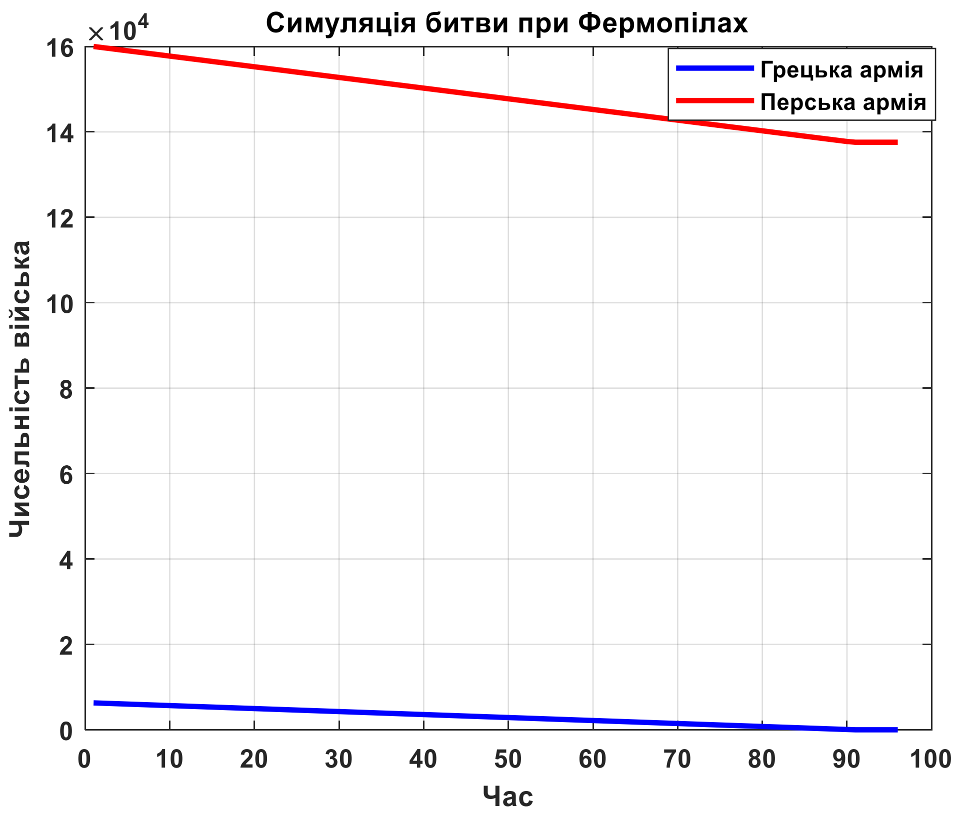

Рис.2 Залежність кількості військ від часу (год.)

Отже, битва при Фермопілах в історії стала прикладом використання стратегічної переваги місцевого рельєфу, зустрівши ворогів у найвужчому місці проходу, не давши змогу перському війську використати свою перевагу, а саме численість армії. Попри те, що вони зазнали поразки, греки змогли втримати ворога настільки довго, що це дало можливість іншим грецьким містам-державам мобілізуватися і врешті-решт виграти війну наступного року.

Отже, дане чисельне дослідження показує, що втрати кожної армії пропорційні лише її власній чисельності.

2.2 Числові дослідження лінійної моделі (Неприцільного вогню)

Для дослідження лінійної моделі "неприцільного вогню" розглянемо історичний приклад в контексті знаменитої битви при Каннах, що відбулася 216 року до н.е. під час Другої Пунічної війни, залишається однією з найвідоміших воєнних перемог, яку часто вивчають за блискуче застосування тактики і стратегії. Цю вирішальну битву можна змоделювати за допомогою моделі неприцільного вогню, яка враховує щільність і сил на полі бою.

У цій епічній битві Ганнібал Барка Карфагенський, командуючи карфагенськими військами, зіткнувся з чисельно більшою римською армією за командуванням двох полководців Гая Терентія Варрона та Луція Емілія Павела. За історичними даними, карфагенське військо налічувало приблизно 50 000 осіб, тоді як римляни командували армією, майже вдвічі більшою за чисельністю близько 86 000 осіб, дані представлені у табл. 2.

Попри те, що Ганнібалу протистояли більші сили, він застосував геніальну тактику оточення. Після початку битви центр війська Ганнібала прогнувся під ударом чисельно більшої піхоти римлян. Отже, римляни несвідомо втягнули себе у велике півкільце. Своєю чергою Ганнібал навмисно дозволив римлянам відтіснити центр. Цей маневр призвів до того, що римляни були оточені карфагенянами з усіх боків, що збільшило площу вогню і щільність цілей. Цей стратегічний хід дозволив карфагенянам більш ефективно завдавати шкоди, що призвело до значної перемоги, попри те, що вони були в меншості. Наведено ілюстрацію (див. рис.3) битви при Каннах, з використанням стратегії оточення противника, а саме Карфагенська піхота оточила римську піхоту у формі півмісяця, за для більшої площі вогню і щільності цілей.

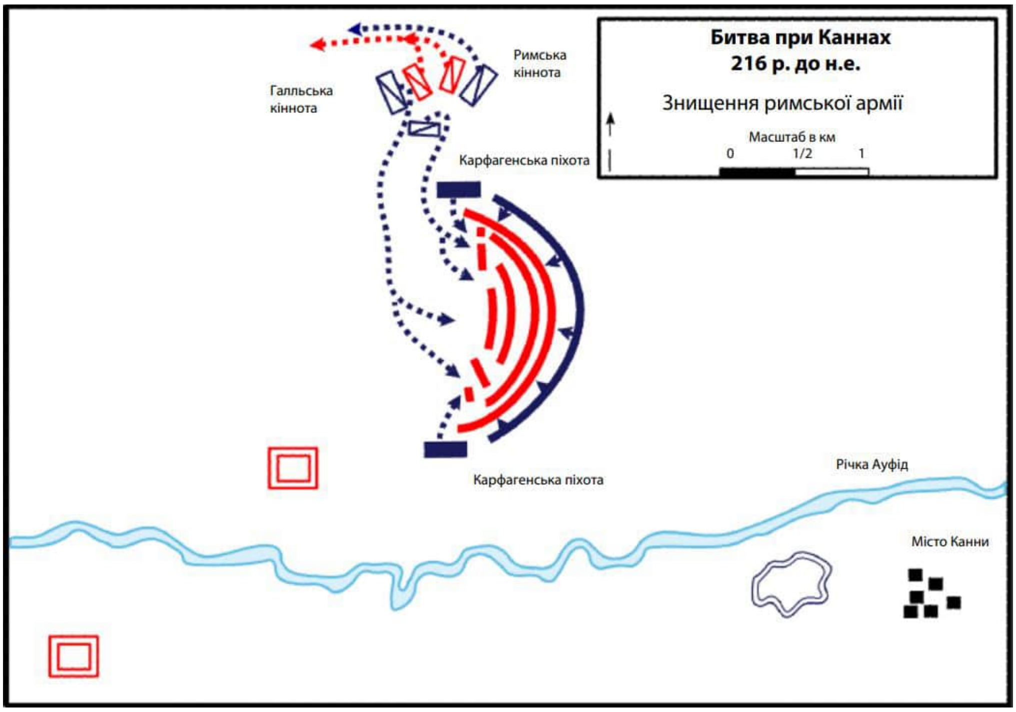

Рис.3 Піхота Карфагена оточила, римську піхоту

У табл. 2 представлені вхідні історичні дані і результати битви при Каннах.

Табл.2 Дані битви при Каннах

Битва при Каннах	Початкова чисельність	Коефіцієнти втрат	Кінцева чисельність	Тривалість битви (години)
Армія Карфагена	50000	0.095	44881	9
Римська армія	86000	0.012	36574	

Цифри, що наведено тут, є найбільш загальноприйнятими серед істориків.[8]

Обчисливши дану битву використовуючи рівняння (1.6) отримуємо даний графік (див. рис. 4) зображено залежність кількості обох військ від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 2. Отже, тісно затиснута з флангів і центру, римська армія втратила бойовий порядок й можливість ефективно битися. Почалося винищування римської армії, що продовжувалося до 9 годин.

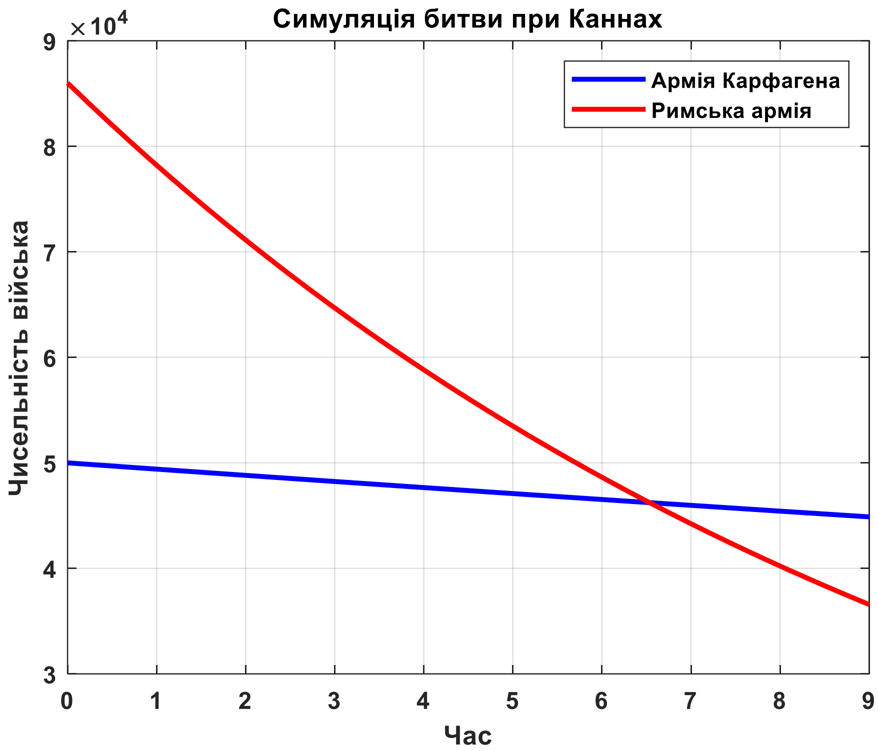

Рис.4 Залежність кількості військ від часу (год.)

Битва при Каннах відбулася на великому відкритому полі, де римські війська побачивши неминучий програш почали тікати урізнобіч, крім того частина римської піхоти була взята у полон.

Незважаючи на те, що Ганнібал зіткнувся з більшими силами, він застосував геніальну стратегію. Він розташував свої війська у формі півмісяця. Цей маневр призвів до того, що римляни були оточені карфагенянами з усіх боків, що збільшило площу вогню і щільність цілей. Цей стратегічний хід дозволив карфагенянам більш ефективно завдавати шкоди, що призвело до значної перемоги, незважаючи на те, що вони були в меншості.

Отже, дане чисельне дослідження показує, що втрати кожної армії пропорційні не лише її власній чисельності, але й чисельності армії супротивника. Це відображає ідею, що більша армія супротивника може завдати більшої шкоди.

2.3 Числові дослідження квадратичної моделі (Прицільного вогню)

Для дослідження квадратичної моделі "прицільного вогню" розглянемо застосування цього принципу до вивчення військово-морської історії, як це знайдено в оригінальній праці Ланчестера. [1]

Розглянемо Трафальгарську битву, що відбулася 21 жовтня 1805 року, була значним морським протистоянням під час Наполеонівських війн. Вона відбулася біля Трафальгарського мису, Іспанії, між британським королівським флотом на чолі з адміралом лордом Горацію Нельсоном та об'єднаним французьким та іспанським флотами під командуванням адмірала П'єра-Шарля Вільньова. У цьому сценарії ми розглядаємо бойову одиницю як лінійний корабель. Британський флот складався з 27 кораблів, а франко-іспанський з 33.

Як ми пам'ятаємо, квадратичний закон говорить нам, що бойова сила формування пропорційна квадрат його чисельності. Перед битвою британський адмірал очікував, що зможе ввести в дію 27 лінкорів проти 33 у ворога. Де відносна сила кожної сторони буде :

$$\alpha = 27^2 = 729; \beta = 33^2 = 1089; \alpha^2 - \beta^2 = 360 \Rightarrow \frac{360}{729} \Rightarrow 49\%$$

Використовуючи квадратичний закон Ланчестера, якщо припустити відсутність якісної переваги жодної зі сторін можна зробити висновок, що британським кораблям доведеться боротися майже на 50% ефективніше, щоб конкурувати на рівних умовах.

У табл. 3 представлені вхідні історичні дані і результати теоретичного сценарію морської Трафальгарської битви.

Табл.3 Дані Трафальгарської битви

Трафальгарська битва теоретичний приклад	Початкова чисельність	Коефіцієнти втрат	Кінцева чисельність	Тривалість битви (години)
Британський флот	27	0.25	0	4.5
Франко-іспанський флот	33	0.25	19	

Обчисливши дану морську битву використовуючи рівняння (1.7) отримуємо даний графік (див. рис. 5) зображено залежність кількості обох флотів від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 3. У цьому сценарії британський флот зазнає фатального програшу, коли франко-іспанський флот робить це з комфортним запасом його сили, що залишилися, еквівалентні бойовій потужності 19 непошкоджених кораблів. Тривалість битви трохи перевищує 4.5 години.

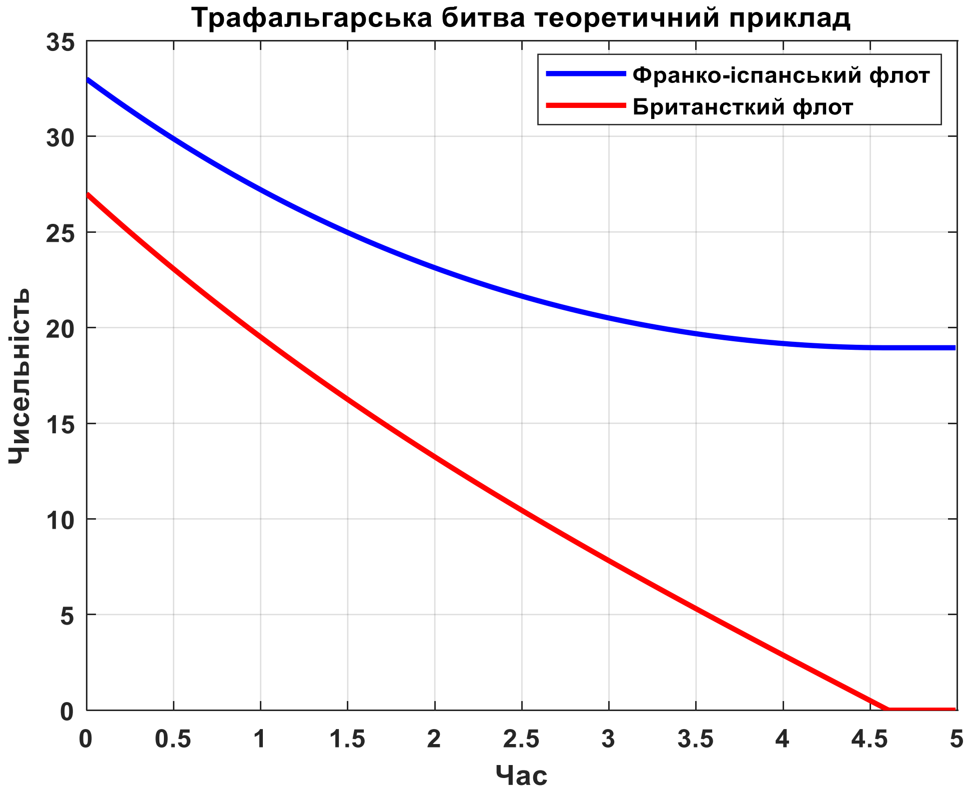

Рис.5 Залежність кількості кораблів від часу (год.)

Отже, в даному теоретичному прикладі, можна наочно побачити, що бойова міць формування пропорційна квадрату його чисельності.

2.3.1 Числові дослідження модифікованого варіанту квадратичної моделі з розподілом резерву

Тепер розглянемо битву при Трафальгарі згідно з планом Нельсона. Ми знаємо, що Нельсон не програв тому без явної чисельної чи якісної переваги над франко-іспанським флотом єдиним виходом була б зміна стратегії.

Ця модель з розподілом резерву, розглядає битву як послідовність трьох окремих етапів, кожен з яких включає різні частини кожного флоту, що вступають в бій в різний час. Згідно з планом Нельсона, британський флот був розділений на дві колони, розміром 13 та 14 кораблів. Вони пропливли крізь формування союзних сил у двох місцях, розділивши його на три групи по 17 (задня частина), 3 (центр) та 13 (передня частина) кораблів. В цьому сценарії, британський флот перемагає зі значним запасом. Наведено ілюстрацію (див. рис.3) битви при Каннах, з використанням стратегії розділення противника.

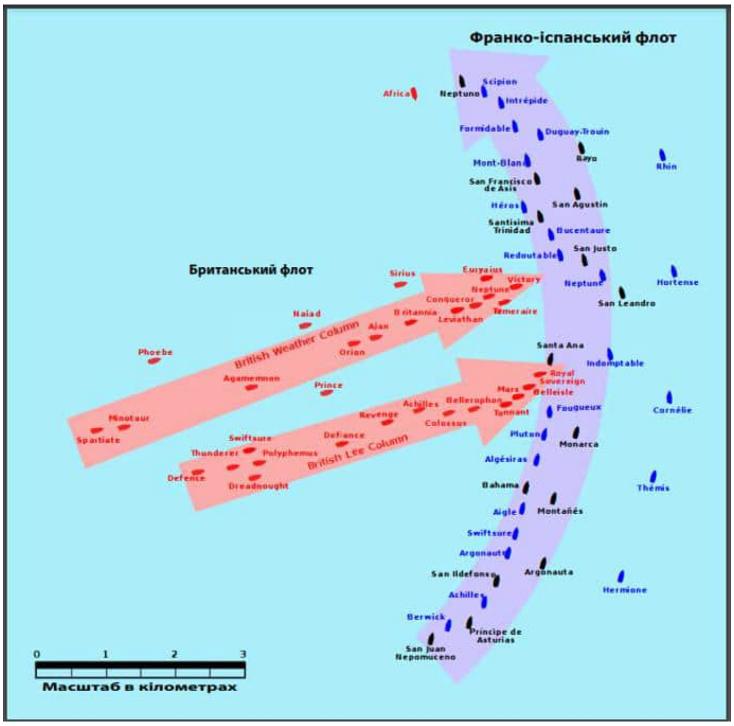

Рис.6 Розділення на три частини франко-іспанського флоту за планом Нельсона

У табл. 4 представлені вхідні історичні дані і результати морської Трафальгарської битви.[9]

Табл.4 Дані Трафальгарської битви

<table>
<tr><td>Трафальгарська битва згідно з планом Нельсона</td><td>Початкова чисельність</td><td>Коефіцієнти втрат</td><td>Кінцева чисельність</td><td>Тривалість битви (години)</td></tr>
<tr><td>Британський флот</td><td>27</td><td>0.36</td><td>13</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Франко-іспанський флот</td><td>33</td><td>0.36</td><td>0</td></tr>
</table>

Обчисливши дану морську битву використовуючи рівняння (1.10) отримуємо даний графік (див. рис. 7) зображено залежність кількості обох флотів від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 4. У цьому сценарії британський флот не тільки здобуває перемогу, але навіть робить це з комфортним запасом його сили, що залишилися, еквівалентні бойовій потужності 13 непошкоджених кораблів, що становить приблизно половину його початкової чисельності. Франко-іспанського флоту, незважаючи на те, що спочатку мав невелику чисельну перевагу, повністю знищений. Тривалість битви 5 годин.

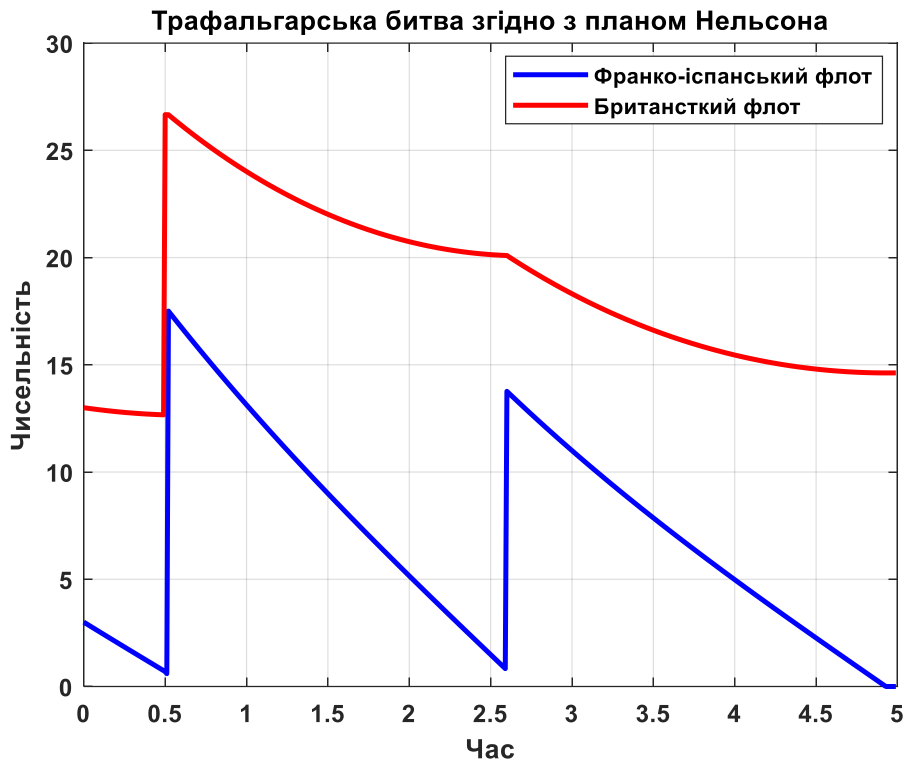

Рис.7 Залежність кількості кораблів від часу (год.)

Підсумовуючи, обидві ці моделі відображають важливість тактики та стратегії в битвах, демонструючи, що чисельність сил не завжди є вирішальним фактором. Відповідне використання принципу концентрації сил може забезпечити значну перевагу, навіть якщо противник має чисельну перевагу.

2.4 Числові дослідження асиметричної моделі (Партизанської війни)

Для нашого дослідження асиметричної моделі ми розглянемо абстрактний сценарій, де регулярна армія зіткнулася з партизанськими військами при однакових початкових умовах.

В умовах асиметричної війни, червоні сили (партизани) мають перевагу через використання прицільного вогню, тоді як сині сили (регулярна армія) можуть вести лише неприцільний вогонь. Ми можемо описати цю ситуацію, використовуючи асиметричну модель Ланчестера, в якій розмір обох сил зменшується з плином часу відповідно до рівнянь (1.11).

У табл. 5 представлені вхідні теоретичні дані і результати теоретичного сценарію асиметричної битви з однаковими умовами.

Табл.5 Дані сценарію з однаковими умовами

Сценарій з однаковими умовами	Початкова чисельність	Коефіцієнти втрат	Кінцева чисельність	Тривалість битви (години)
Регулярна армія	1000	0.05	0	32
Партизанська армія	1000	0.05	500	

В результаті обчислень за допомогою системи рівнянь (1.11) отримуємо даний графік (див. рис. 5) зображено залежність кількості обох військ від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 5. Очевидно, що при однакових умовах партизанська армія є сильнішою від регулярної, тому що вона веде прицільний вогонь і добре прихована. Ця перевага відображається у виразі рівності (1.13). Бій триває 32 години до останнього солдата регулярної армії.

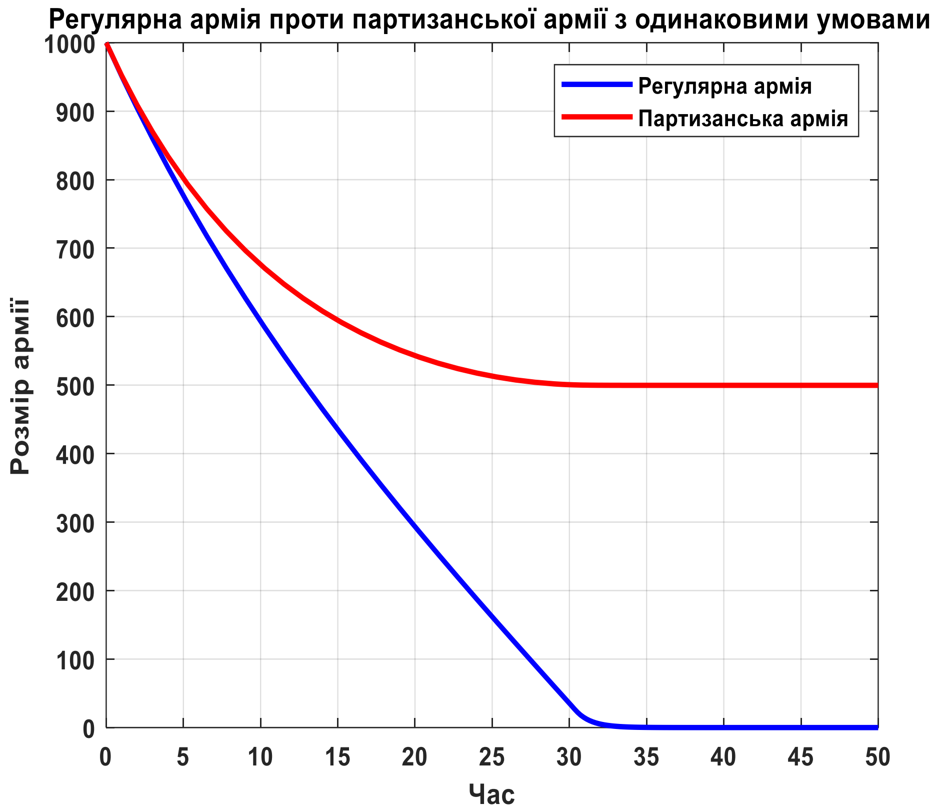

Рис.8 Залежність кількості військ від часу (год.)

Отже, в даній битві між регулярною армією і партизанськими силами. Партизани, завдяки прицільному вогню і хорошій прихованості, виявилися сильнішими.

У табл. 6 представлені вхідні дані які підібрані згідно з теорією (1.12) з різними початковими умовами для досягнення паритету, та результати цього сценарію битви.

Табл.6 Дані сценарію з різними умовами

<table>
<tr><th>Сценарій з однаковими умовами</th><th>Початкова чисельність</th><th>Коефіцієнти втрат</th><th>Кінцева чисельність</th><th>Тривалість битви (години)</th></tr>
<tr><td>Регулярна армія</td><td>1414</td><td>0.05</td><td>314</td><td rowspan="2">100</td></tr>
<tr><td>Партизанська армія</td><td>1000</td><td>0.05</td><td>50</td></tr>
</table>

В результаті обчислень за допомогою системи рівнянь (1.11) отримуємо даний графік (див. рис. 9) зображено залежність кількості обох військ від часу в годинах, з початковими даними, які наведені в таблиці 6. Бій був обмежений сотнею годин і закінчився нічиєю, коли жодна зі сторін не здобула перемоги.

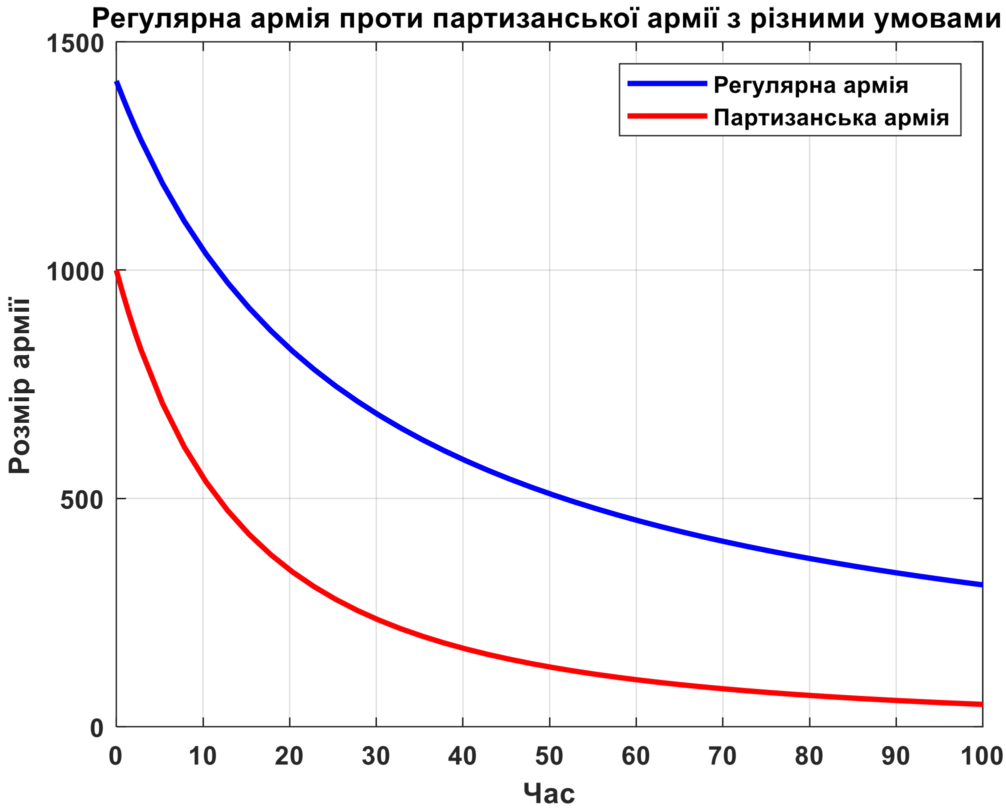

Рис.9 Залежність кількості військ від часу (год.)

Оскільки бойова міць обох армій однакова, досягнута умова паритету (1.12), можна наочно побачити, що чисельність обох армій зменшується логарифмічно.

Інакше кажучи, для досягнення паритету, регулярна армія повинна або подвоїти коефіцієнт втрат на душу населення, або збільшити свою початкову чисельність на корінь з двох.

Висновки

Використання моделей Ланчестера для числового аналізу військових дій виявилося корисним інструментом в наукових дослідженнях та військовому моделюванні. Ці концепції, безсумнівно, мають велику значущість, оскільки вони допомагають розробляти стратегії та передбачати можливі результати військових конфліктів на основі математичних розрахунків.

Сильні сторони моделей Ланчестера полягають у їхні здатності формалізувати комплексні військові дії та перетворити їх на кількісні змінні, що можуть бути проаналізовані та використані для прогнозування битви.

Під час дослідження моделей Ланчестера та їхніх модифікацій було проведено аналіз результатів конфліктів, як на прикладі історичних подій, так і на базі теоретичних сценаріїв. Отже, моделі Ланчестера є важливим інструментом в нашому арсеналі для прогнозування військових дій.

Список використаних джерел

1. Lanchester F.W. Aircraft in warfare the dawn of the fourth arm. London: MSN 1916. 222 с.
2. Deitchman S.J. A Lanchester Model of Guerrilla Warfare. Washington, D.C. IDA 1962. 10 с.
3. Kress M. Lanchester Models for Irregular Warfare. Monterey: NPS 2020. 14 с. https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/737 (дата звернення: 12.06.2023).
4. Cyrus C.Y. Population Dynamics: Theory of Nonstable Populations. Dalton: SBS 2015. 36 с.
5. Возмищева Т.Г. Модифицированная модель войны или сражения и гонки вооружения на основе модели Лотки – Вольтерра как модель конфронтации государств: численный и качественный анализ. Ижевск: ИГТУ 2020. 18 с. https://ojs.itmo.ru/index.php/ISESCTF/article/view/1119 (дата звернення: 12.06.2023).
6. Novikov D.A. Hierarchical models of warfare. Moscow: ICS 2012. 15 с. http://www.researchgate.net/publication/262290792_Hierarchical_models_of_warfare (дата звернення: 12.06.2023).
7. Cartledge P. Thermopylae: the battle that changed the world. New York: OPW 2006. 300 с.
8. Hoyos D.B., Farmer C. Hannibal: Rome's Greatest Enemy. London: BPP 2008. 176 с.
9. Adkin M. The Trafalgar companion : a guide to history's most famous sea battle and the life of Admiral Lord Nelson. London: Aurum Pr Ltd 2005. 560 с.

Додаток А

Ви можете ознайомитися з реалізацією програмних моделей Ланчестера за наступним посиланням:

https://github.com/kpm-lnu/student-applications/tree/develop/2022-2023/PMP-42/coursework