

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра прикладної математики

Дипломна робота

ТЕМА РОБОТИ «Числове дослідження одновимірних задач реакції-дифузії»

Виконала: студентка групи ПМП-42
спеціальності
113 - прикладна математика

__Хрептик Ю.М._____
(прізвище та ініціали)

Керівник_Кухарський В.М._____
(прізвище та ініціали)

Рецензент_____
(прізвище та ініціали)

Львів - 2023

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1. Постановка задачі.....	6
Розділ 2. Дискретизація області задачі напівдискретний метод Гальоркіна.....	9
Розділ 3. Лінійні базисні функції.....	12
Розділ 4. Чисельні експерименти.....	15
Висновки	19
Список використаних джерел.....	21
Додатки.....	22

ВСТУП

У сучасному світі чисельні методи є невід'ємною складовою математичного моделювання в різних наукових галузях. Вони дозволяють вирішувати складні математичні задачі, які не можуть бути розв'язані аналітично. Одним з таких методів є метод скінченних елементів, який знайшов широке застосування в чисельному розв'язуванні різноманітних фізичних задач. Одним із важливих класів задач, які можуть бути вирішені за допомогою методу скінченних елементів, є задачі реакції-дифузії. Ці задачі виникають у багатьох галузях науки, таких як хімія, фізіологія, екологія, матеріалознавство та інші. Вони включають в себе дифузійні процеси, які описують розповсюдження речовини у просторі, а також реакційні процеси, які моделюють хімічні реакції, фізіологічні процеси, руйнування матеріалів тощо.

Отже, у моїй дипломній роботі **об'єктом дослідження** є: Чисельне розв'язування одновимірних нестационарних задач реакції-дифузії методом скінченних елементів.

Предмет дослідження: Розробка та реалізація чисельних методів для розв'язування нестационарних задач реакції-дифузії в одновимірному середовищі.

Мета дослідження: розробка та чисельна реалізація методу скінченних елементів для розв'язування нестационарних задач реакції-дифузії в одновимірному середовищі. Дослідження спрямоване на вивчення та аналіз ефективності та точності цього методу при різних параметрах задачі та умовах. Метою є отримання чисельних результатів, які дозволять зрозуміти поведінку розв'язку задачі реакції-дифузії.

Основною задачею є створення ефективного та точного чисельного алгоритму, який дозволить отримати розв'язок задачі з високою точністю та обґрунтованою швидкістю обчислення. Для досягнення цієї мети будуть

розглянуті теоретичні основи методу скінченних елементів, а також розроблено та реалізовано програмне забезпечення для чисельного моделювання.

Дана робота відкриває широкі перспективи для подальшого використання методу скінченних елементів у чисельному розв'язуванні задач реакції-дифузії в різних галузях науки. Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень та практичного застосування в різних областях, таких як моделювання розповсюдження речовини у живих організмах, прогнозування хімічних реакцій, аналіз впливу забруднень на навколишнє середовище та багато іншого.

Отже, виконання даної дипломної роботи є актуальним і цікавим науковим завданням, що сприятиме розвитку чисельного моделювання задач реакції-дифузії і знайде практичне застосування в різних наукових галузях.

Розділ 1

Постановка задачі

Розглянемо нестационарне рівняння реакції-дифузії, та зробимо постановку такої задачі. В одновимірному випадку, задача полягає у знаходженні

$c \in C^2([x_0, x_{end}])$ протягом часу $t \in (t_0, t_{end}]$ що буде задовольняти рівняння:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + dc + f(x, t, \frac{dc}{dx}), \quad x \in [x_0, x_{end}] , \quad t \in (t_0, t_{end}]$$

Тут c — усереднена по глибині концентрація, D — коефіцієнт дифузії;

d — коефіцієнт реакції, $f(x, t)$ -нелінійний член. Та крайові умови:

$$\begin{cases} \frac{\partial c(x_0, t)}{\partial x} = \alpha(c - c_e) \\ \frac{\partial c(x_{end}, t)}{\partial x} = \alpha(c - c_e) \\ c(x, t_0) = c_0 \end{cases}$$

перші 2 рівняння позначають неоднорідні крайові умови Неймана на $[x_0, x_{end}]$, останнє рівняння позначає концентрацію забруднень по всій площі x у початковий момент часу t_0 , α , c_e -деякі константи.

Розглянемо тепер одновимірне лінійне рівняння реакції-дифузії, яке матиме вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + dc$$

D і d є константами. Рівняння реакції-дифузії виконується в заданій одновимірній просторовій області $\Omega = [x_0, x_{end}]$ та у часі $t \in [t_0, t_{end}]$, і передбачається, що воно підлягає граничним умовам:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha(c - c_e) \quad \text{на } x = x_0,$$

і

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha(c - c_e) \quad \text{на } x = x_{end}.$$

Крім того, одна початкова умова для c повинна бути задана, скажімо, при $t=0$:

$$c(x, 0) = c_0(x) \quad \text{на } \Omega.$$

Варіаційне формулювання:

Для варіаційного формулювання ми введемо деякий простір $W = W_2^{(1)}(\Omega, (t_0, t_{end}])$. Домножимо рівняння та початкову умову на довільну тестову функцію $w(x)$ та зінтегруємо в області Ω .

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) w d\Omega = D \int_{\Omega} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} w d\Omega + d \int_{\Omega} c w d\Omega$$

$$\int_{\Omega} (c(x, 0) - c_0(x)) w d\Omega = 0, \quad \forall w \in W.$$

Уведемо позначення:

$$m(c', w) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) w d\Omega;$$

$$a(c, w) = D \int_{\Omega} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} w d\Omega;$$

$$b(c, w) = d \int_{\Omega} cw d\Omega;$$

тут і далі $c' = \frac{\partial c}{\partial t}$.

Наведемо варіаційне формулювання задачі реакції-дифузії.

Знайти функцію $c(x, t) \in W_2^{(1)}(\Omega, (t_0, t_{end}])$, таку що задовольняє рівняння

$$m(c', w) = a(c, w) + b(c, w), \forall w \in W;$$

$$m(c(x, 0) - c_0(x), w) = 0.$$

Розділ 2

Дискретизація області задачі напівдискретний метод Гальоркіна

Дискретизація області задачі з використанням напівдискретного методу Гальоркіна полягає в перетворенні континуальної просторово-часової області на скінченно-вимірну сітку. Основна ідея полягає в тому, що невідому функцію апроксимують у вигляді лінійної комбінації базисних функцій на цій сітці.

У напівдискретному методі Гальоркіна, просторова змінна розбивається на скінченну кількість підінтервалів, а час розбивається на дискретні моменти. На кожному підінтервалі вводиться функційна апроксимація, яка включає невідомі коефіцієнти, які слід знайти. Ці невідомі коефіцієнти є розв'язком диференціального рівняння для кожного підінтервалу.

Після введення апроксимаційного виразу і диференціального рівняння на кожному підінтервалі, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати чисельними методами, а саме я використаю метод скінченних елементів.

Виберемо у просторі W лінійно незалежну, повну послідовність функцій $\{\varphi_j^h\}$. Нехай W_h – скінченновимірний підпростір простору W , який утворюється на базисі $\varphi_j^h, j = 1, \dots, N$.

Для отримання наближеного розв'язку задачі

$$m(c', w) = a(c, w) + b(c, w), \forall w \in W;$$

$$m(c(x, 0) - c_0(x), w) = 0. \tag{2.1}$$

використаємо напівдискретне подання

$$c_h(x, t) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \varphi_j^h(x) \quad (2.2)$$

Перейдемо до наближеної форми задач:

$$\begin{aligned} m(c'_h, w_h) &= a(c_h, w_h) + b(c_h, w_h), \quad \forall w_h \in W_h; \\ m(c_h(x, 0) - c_0, w_h) &= 0. \end{aligned}$$

Її будемо називати напівдискретизованою за просторовими змінними, а її розв'язок напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $c(t)$ варіаційної задачі.

Підставимо формулу (3.2) замість розв'язку u_h у рівняння (3.1) і згідно з методом Гальоркіна виберемо за функції w базисні функції φ_i^h . Отримаємо задачу Коші

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{m_{ij} U'_j(t) = a_{ij} U_j(t) + b_{ij} U_j(t)\}, \quad t \in (t_0, t_{end}], \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N m_{ij} U_j(0) = p_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$\begin{aligned} m_{ij} &= m(\varphi_i^h, \varphi_j^h); \quad a_{ij} = a(\varphi_i^h, \varphi_j^h); \quad b_{ij} = b(\varphi_i^h, \varphi_j^h); \\ p_i &= m(c_0, \varphi_i^h) \end{aligned}$$

У матричних позначеннях

$$M - \{m_{ij}\}; \quad A - \{a_{ij}\}; \quad B - \{b_{ij}\};$$

$$U(t) = \{U_i(t)\}; \quad P = \{p_i\}$$

(M, A, B - квадратні матриці, U, P - вектори -стовпці) задачу (2.3) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} MU'(t) &= AU(t) + BU(t), \quad t \in (t_0, t_{end}]; \\ MU(0) &= P. \end{aligned}$$

Зазначимо, що як наслідок попереднього матриці M, A, B , є матрицями з відмінними від нуля визначниками, вони є симетричними та додатньо визначеними.

Твердження. Наведених властивостей достатньо для того, щоб розв'язок задачі Коші існував та був єдиним.

Розділ 3

Лінійні базисні функції

Лінійні базисні функції є важливим елементом у чисельних методах для апроксимації невідомих функцій на дискретній сітці. Ці функції використовуються для представлення неперервних функцій у вигляді їх лінійної комбінації на обмеженій просторовій області. Лінійні базисні функції на основі поліномів Чебишева є одним з типів базисних функцій, які використовуються для апроксимації невідомих функцій у чисельних методах. Поліноми Чебишева є ортогональними поліномами на певному інтервалі і мають важливі властивості, які роблять їх корисними у чисельних обчисленнях. У своїй дипломній роботі я використала саме їх.

Лінійні базисні функції на основі поліномів Чебишева можуть бути сформульовані наступним чином:

Нехай $[x_0, x_{end}]$ - відрізок, на якому визначені лінійні базисні функції. Розглянемо деяку розбиту на N підінтервалів точку x_i на відрізку $[x_0, x_{end}]$, де $i = 1, 2, \dots, N$.

Кожна пара сусідніх підінтервалів $[x_{i-1}, x_i]$ і $[x_i, x_{i+1}]$ відрізка $[a, b]$ буде відповідати парі лінійних базисних функцій.

На кожній парі сусідніх підінтервалів $[x_{i-1}, x_i]$ і $[x_i, x_{i+1}]$, ми можемо використовувати поліноми Чебишева як базисні функції. При цьому, поліном Чебишева $T_n(x)$ степеня n може бути використаний як базисна функція на підінтервалі $[x_{i-1}, x_i]$, а поліном Чебишева $T_{n+1}(x)$ степеня $n + 1$ може бути використаний як базова функція на підінтервалі $[x_i, x_{i+1}]$.

Отже, базисні функції на основі поліномів Чебишева на відрізку $[x_0, x_{end}]$ можуть бути записані як:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} T_n\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ T_{n+1}\left(\frac{x - x_i}{h}\right), & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

де $T_n(x)$ - поліном Чебишева степеня n , $h = x_i - x_{i-1}$ - довжина підінтервалу, x_{i-1} і x_i - сусідні вузли розбиття на відрізьку, а x - змінна.

Поліноми Чебишева задаються такою рекурентною формулою:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n > 1 \end{aligned}$$

Для запису одновимірних кусково-лінійних базисних функцій методу скінченних елементів розділимо проміжок $[x_0, x_{end}]$ на відрізьки - скінченні елементи: точками $x_i: i = 0, 1, \dots, n$. Задамо базисну функцію $\varphi_i^h(x)$ співвідношенням

$$\varphi_i^h = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x < x_i \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} \leq x < x_n \end{cases}$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$.

При використанні тих чи інших базисних функцій, прийдемо до необхідності розв'язування СЛАР у вузлах сітки, оскільки маємо одновимірний випадок по просторовій змінній то як вузли можна обрати рівномірний поділ, та

отримання наближеного розв'язку у обраних вузлах. Можна також розв'язувати на кожному кроці звичайне диференціальне рівняння, де часова змінна залишається неперервною, а просторова дискретизується.

Розділ 4

Чисельні експерименти

Приклад 1.

Для проведення числових експериментів, зафіксуємо спочатку всі необхідні параметри-константи, та параметри-ф-ції, які входять у приклад 1, у явному вигляді, наприклад, $D=0.2, d=5, [t_0, t_{end}] = [0, 2], [x_0, x_{end}] = [0, 4]$, тоді зауважимо, що розглядаємо лінійне р-ня, що означає $f\left(x, t, \frac{dc}{dx}\right) = 0$, та в решті-решт маємо вигляд лінійного нестационарного одновимірного р-ня реакції-дифузії:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0.2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 5c, \quad x \in [0, 4], \quad t \in (0, 2]$$

Тепер перейдемо до конкретних крайових умов Неймана, для яких ми взяли $\alpha = 1, c_e = 1; c_0 = 1$ – та початкової концентрації у перший момент часу.

$$\begin{cases} \frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = 1 * (c(0, t) - 1) \\ \frac{\partial c(4,t)}{\partial x} = 1 * (c(4, t) - 1) \\ c(x, 0) = 1 \end{cases}$$

Результати виконання програми,приклад 1:

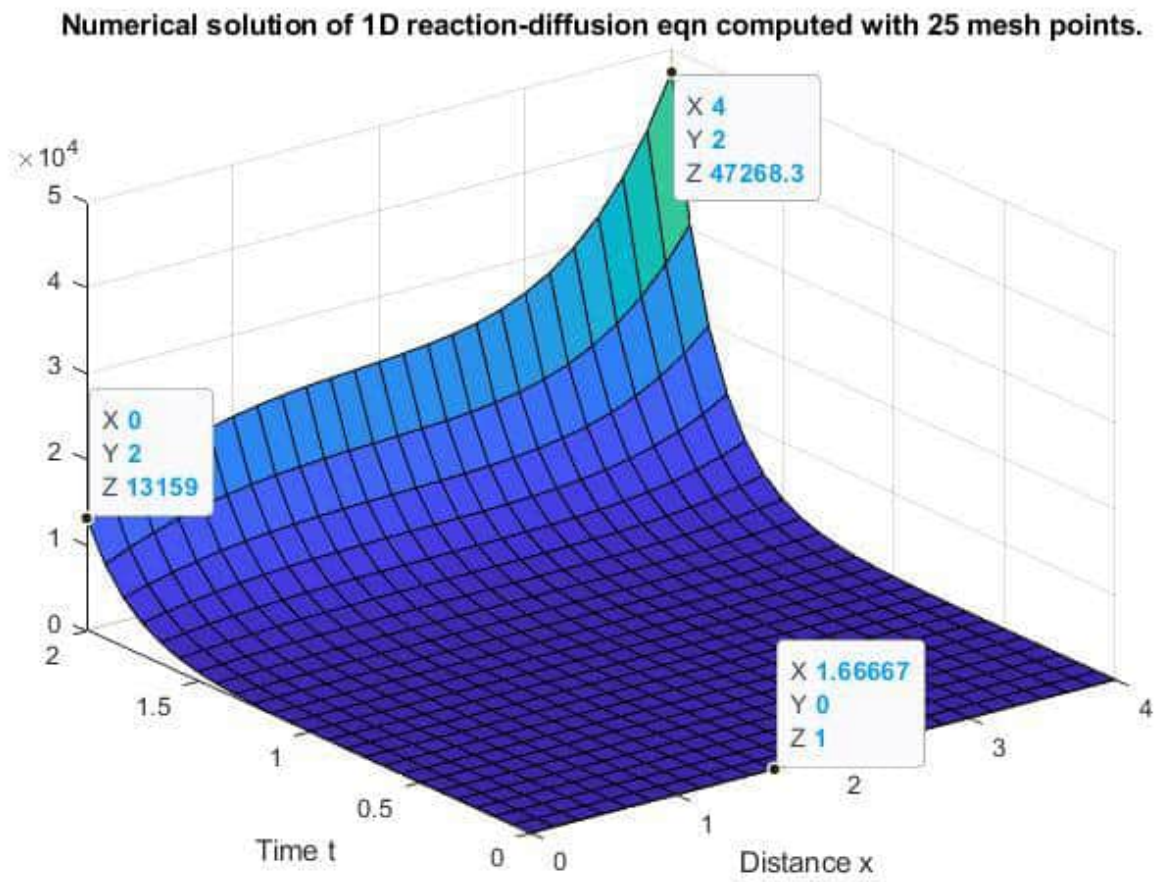


Рис. 1. Наближений розв'язок прикладу 1 у скінченній сітці 25×25 , отриманий за допомогою вбудованої у Матлаб ф-ції `pdepe`.

Наведемо ще конкретний графік зрізу по просторовій коорд. $x = \frac{x_0 + x_{end}}{2}$ на всьому часовому інтервалі:

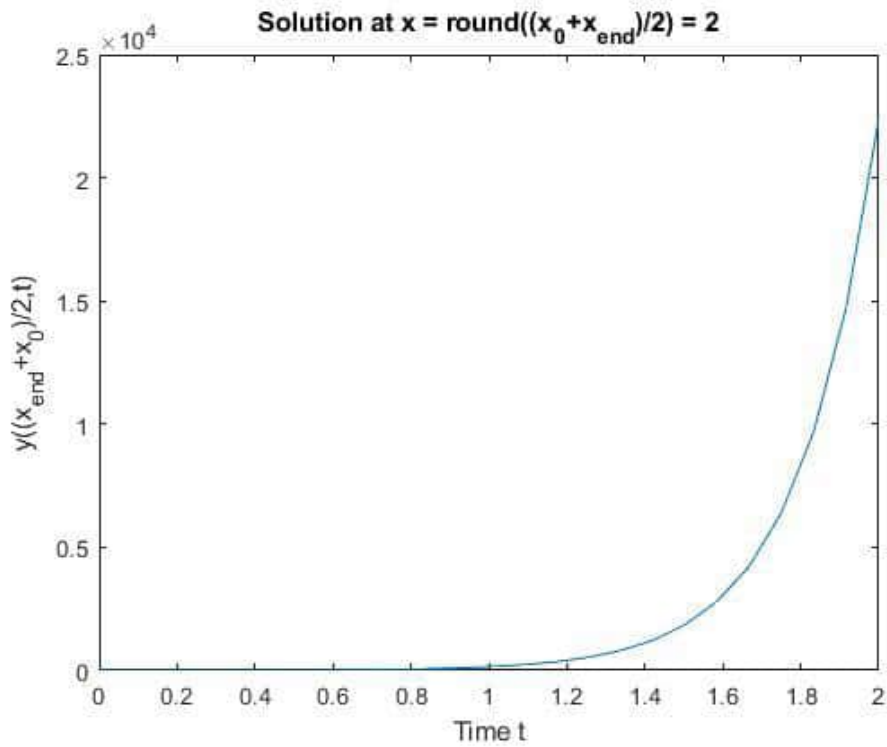


Рис. 2. Концентрація забруднень з плином часу, посередині області $x, x^* = (x_0 + x_{\text{end}})/2$

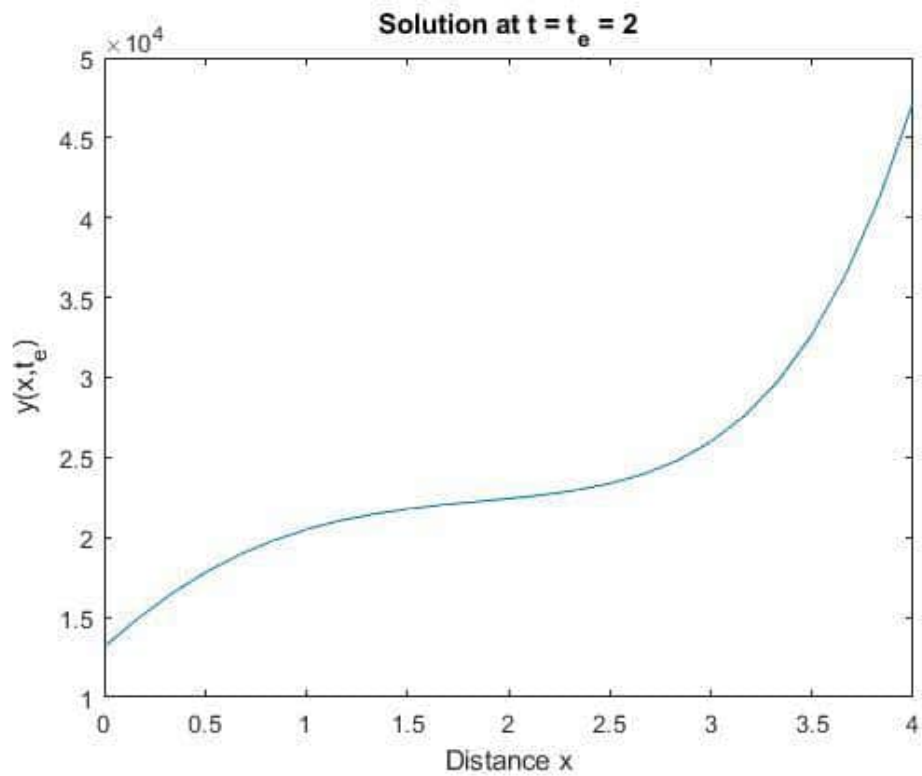


Рис. 3. Графік концентрації забруднень у кінцевий момент часу $t_e=2$, по всій області x , яка відповідає даному кінцевому часу.

Приклад 2

Залишимо $D=0.2, d=5, [t_0, t_{end}] = [0, 2], [x_0, x_{end}] = [0, 4], f\left(x, t, \frac{dc}{dx}\right) = 0$, та
врешті-решт маємо вигляд лінійного нестационарного одновимірного р-ня
реакції-дифузії:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0.2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 5c, \quad x \in [0, 4], \quad t \in (0, 2], \quad L = \frac{0+4}{2} = 2 = x_{mean};$$

Тепер перейдемо до конкретних крайових умов Неймана, для яких ми взяли
 $\alpha = 0.001, c_e = 1000; c_0(x) = 3e^{-5(x-\frac{L}{2})^2}$ – функція початкової концентрації у
перший момент часу.

$$\begin{cases} \frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = 0.001 * (c(0,t) - 1000) \\ \frac{\partial c(4,t)}{\partial x} = 0.001 * (c(4,t) - 1000) \\ c(x, 0) = 3e^{-5(x-\frac{L}{2})^2} \end{cases}$$

Результати виконання програми, приклад 2:

Numerical solution of 1D reaction-diffusion eqn computed with 25 mesh points

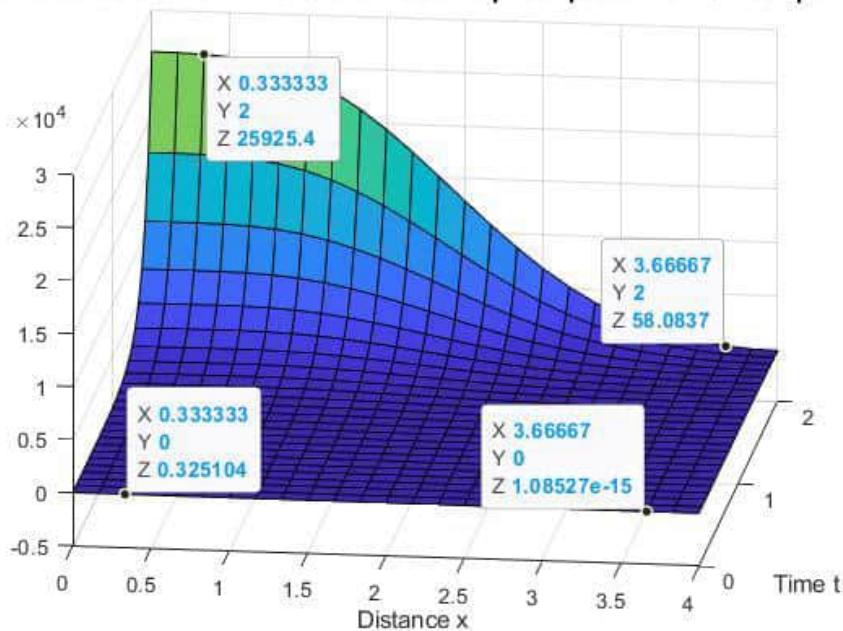


Рис. 4. Наближений розв'язок прикладу 2 у скінченній сітці 25x25, отриманий за допомогою вбудованої у Матлаб ф-ції pdepe.

Наведемо ще конкретний графік зрізу по просторовій коорд. $x = \frac{x_0 + x_{end}}{2}$ на всьому часовому інтервалі:

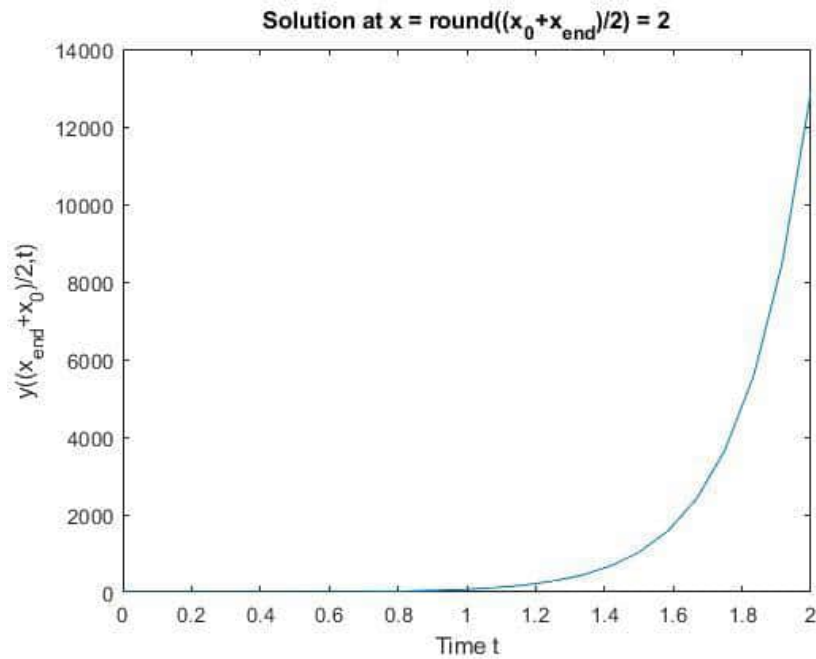


Рис. 5. Концентрація забруднень з плином часу, посередині області $x, x^* = \frac{(x_0 + x_{end})}{2}$

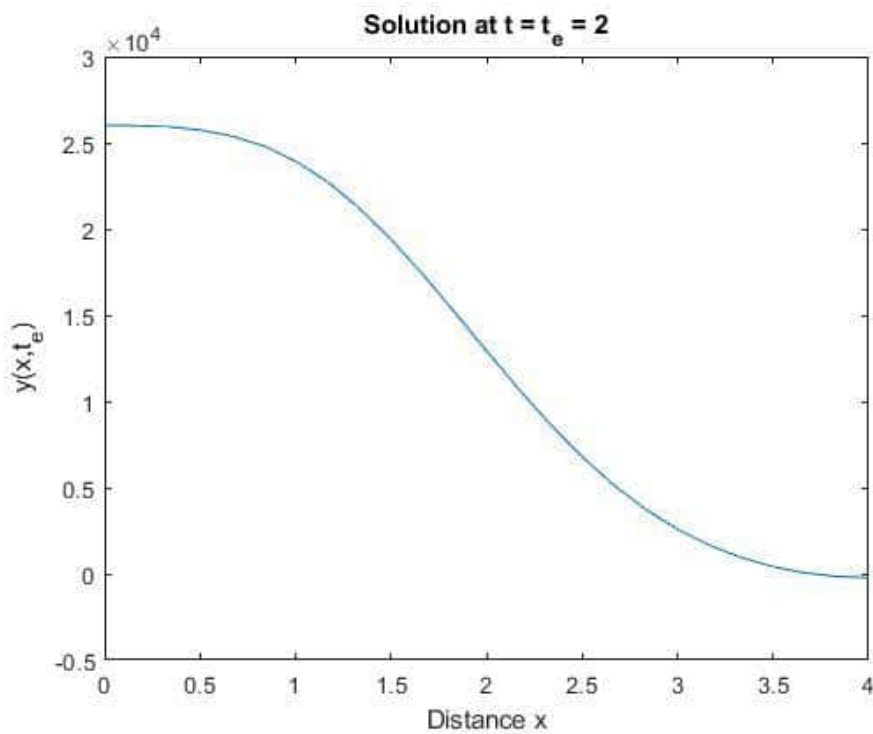


Рис. 6. Графік концентрації забруднень у кінцевий момент часу $t_e = 2$, по всій області x , яка відповідає даному кінцевому зрізу $t_e = 2$.

Приклад 3

Розглянемо елементарніший приклад: $D=0.2, d=10, [t_0, t_{end}] = [0, 2], [x_0, x_{end}] = [0, 1], f(x, t, \frac{dc}{dx}) = 0$, та в решті-решт маємо вигляд простого лінійного нестационарного одновимірного р-ня реакції-дифузії:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0.2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 10c, \quad x \in [0, 1], \quad t \in (0, 2];$$

Тепер перейдемо до конкретних крайових умов, вони у нас також спрощені, на лівому кінці концентрація рівна 0, а на правому - 1, концентрація в початковий момент часу рівна також 0, тобто:

$$\begin{cases} c(0, t) = 0 \\ c(1, t) = 1 \\ c(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Результати виконання програми, приклад 3:

Numerical solution of 1D reaction-diffusion eqn computed with 25 mesh points

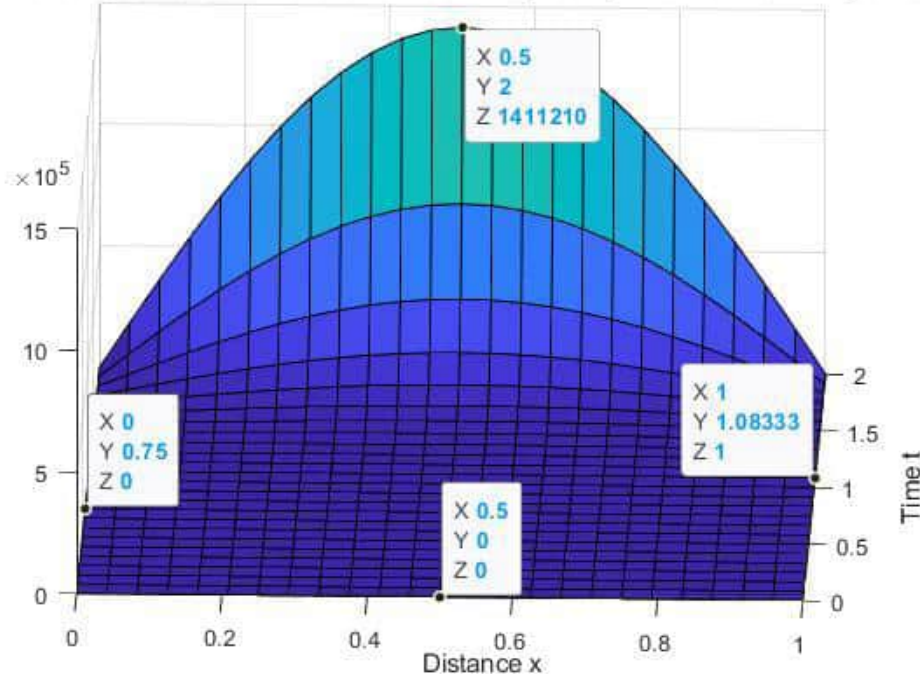


Рис. 7. Наближений розв'язок прикладу 3 у скінченній сітці 25×25 , отриманий за допомогою вбудованої у Матлаб ф-ції `pdepe`.

Наведемо ще конкретний графік зрізу по просторовій коорд. $x = \frac{x_0 + x_{end}}{2}$ на всьому часовому інтервалі:

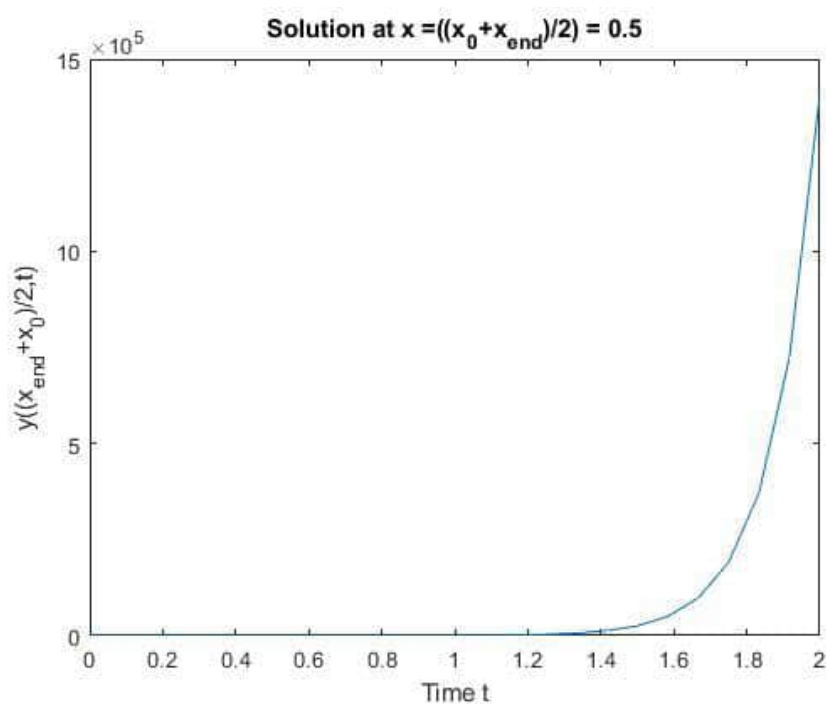


Рис. 8. Концентрація забруднень з плином часу, посередині області $x, x^* = (x_0 + x_{end})/2$

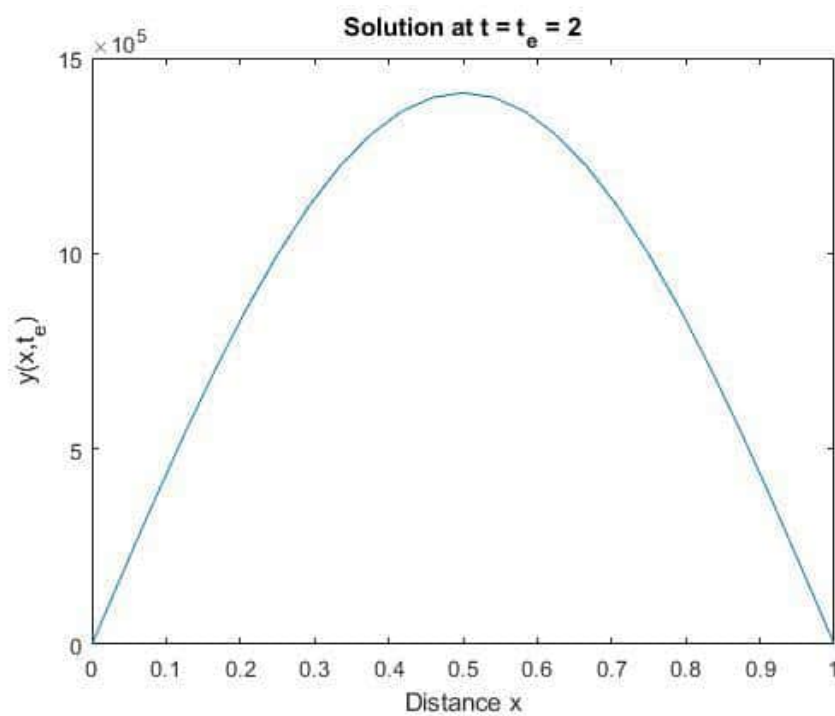


Рис. 9. Графік концентрації забруднень у кінцевий момент часу $t_e = 2$, по всій області x , яка відповідає даному кінцевому зрізу $t_e = 2$.

Усю програмну реалізацію можна переглянути за посиланням

<https://github.com/kpm-lnu/student-applications/tree/develop/2022-2023/PMP-42/coursework/Khreptyk%20Yuliia>

ВИСНОВКИ

У ході дипломної роботи було розглянуто чисельне розв'язування одновимірних нестационарних задач реакції-дифузії методом скінченних елементів. Була розроблена математична модель та поставлена задача для чисельного розв'язування. Отримані результати були представлені у вигляді графіків.

По графіках видно, що якщо початкова концентрація у перший момент часу є константою, то з плином часу на усьому ареалі у кінцевий момент часу концентрація буде висока хоч і може дещо відрізнитись. Якщо ж початкова концентрація речовини - це функція типу Гауса від просторової координати x , то концентрація поводить себе як задана функція у кожній точці x , тому для деяких x концентрація буде дуже швидко спадати та прямувати до 0, а отже, і не викликати забруднення на певній ділянці x , наприклад, права частина рис. 4 демонструє значно нижчу концентрацію забруднень, ніж її ліва частина, так само це видно із рис. 6. Даний графік можна інтерпретувати так: чим далі ми від x_0 та ближче до x_{end} , тим концентрація є меншою та прямує до 0 в кінцевий зріз часу. Другий та п'ятий графіки, які взяті із середини області x незалежно від початкових умов, у перший момент часу (константи чи ф-ції від простору у вигляді експоненти) дуже схожі та нагадують зростаючі експоненти, що є правдоподібним результатом, який дуже схожий до аналітичних розв'язків, наприклад, фундаментального, який рівний функції Гауса з точністю до деяких констант.

Порівняння ефективності та точності методів чисельного розв'язування дозволяє зробити висновок про придатність методу скінченних елементів для розв'язування задач реакції-дифузії. Отримані результати можуть бути використані для подальшого вдосконалення та розробки чисельних методів для розв'язування подібних задач.

У цілому, дипломна робота дозволила розширити розуміння та вміння у чисельному розв'язуванні задач реакції-дифузії в одновимірному середовищі. Результати дослідження мають потенційну цінність для подальших досліджень у цій галузі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Кухарський В. Модифікований метод залишково-вільних бульбашок для розв'язування задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле / В. Кухарський, Я. Савула, І. Кривень // Вісник Львівського університету. Серія : Прикладна математика та інформатика. - 2013. - Вип. 20. - С. 85-94.
- [2] Вовк О. ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ-РЕАКЦІЇ. Серія : Обчислювальна математика. - 2016. – С. 218.
- [3] Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. 221с.
- [4] Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів: Вища школа, 1976.87с.
- [5] Л.П.Дзюбак, С.П.Іглін, Г.Б.Лінник, І.О.Морачковська Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв'язання.-2013.-240 с.

Додатки

Додаток А

```

1. clc
2. clear
3. close all
4. m = 0;
5. tspan=[0,2];
6. xspan=[0,1];
7. N=25;
8. x = linspace(xspan(1),xspan(end),N);
9. t = linspace(tspan(1),tspan(end),N);
10. D=0.2;
11. d=10;
12. c0=0;
13. ce(1)=0;
14. ce(2)=1;
15. alpha=-1;
16. sol =
    pdepe(m,@(x,t,u,DuDx)pdexlpde(x,t,u,DuDx,D,d),@(x)pdexlic(x,c0),@ (xl,ul,xr
    ,ur,t)pdexlbc(xl,ul,xr,ur,t,D,alpha,ce),x,t);
17. y = sol(:, :, 1);
18. surf(x,t,y)
19. title('Numerical solution of 1D reaction-diffusion eqn computed with 25
    mesh points.')
20. xlabel('Distance x')
21. ylabel('Time t')
22.
23.
24. figure
25. plot(x,y(end,:))
26. title("Solution at t = t_e = "+string(tspan(end)))
27. xlabel('Distance x')
28. ylabel('y(x,t_e)')
29. figure
30. plot(t,y(:,round(mean([1,N]))))
31. title("Solution at x =((x_0+x_{end})/2) = "+string((mean(xspan))))
32. xlabel('Time t')
33. ylabel('y((x_{end}+x_0)/2,t)')
34.
35.
36.
37. function [c,f,s] = pdexlpde(x,t,u,DuDx,D,d)
38. c = 1;
39. f = D*DuDx;
40. s =d*u;
41. end
42.
43. function u0 = pdexlic(x,c0)
44. u0=c0;
45. end

```

```
46. function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t,D,alpha,ce)
47. pl = -alpha*(ul-ce(1));
48. ql = 0;
49. pr = -alpha*(ur-ce(2));
50. qr = 0;
51. end
```