

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА
ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра прикладної математики

Дипломна робота

Числове дослідження одновимірних задач адвекції-дифузії з великими
числами Пекле

Виконала: студентка групи ПМП-42

Спеціальності

113 – прикладна математика

Чайківська А. І.

(прізвище та ініціали)

Керівник Кухарський В. М.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Львів – 2023

Зміст

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1	6
ПОЧАТКОВО-КРАЙОВЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ	6
1.1. Постановка задачі	6
1.2. Варіаційне формулювання	8
1.3 Числа Пекле	9
РОЗДІЛ 2	12
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІНОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ	12
2.1. Напівдискретний метод Гальоркіна	12
2.2. Базисні функції на основі поліномів Лежандра	13
РОЗДІЛ 3	19
ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ	19
3.1. Приклад 1	19
3.2. Приклад 2	21
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	25
Додаток А. Програмна реалізація	26

ВСТУП

Сучасні теоретичні дослідження в області механіки суцільного середовища значною мірою спираються на широке використання чисельних методів і комп'ютерних технологій. Хоча традиційні аналітичні інструменти прикладної математики все ще є цінними для попереднього якісного дослідження математичних моделей і тестування обчислювальних алгоритмів, широке використання чисельних методів зробило революцію в цій галузі.

Чисельне моделювання відіграє вирішальну роль у вивченні проблем, пов'язаних з гідродинамікою і газодинамікою. Ці проблеми часто вирішуються шляхом застосування різницевих методів і методу скінченних елементів. Використовуючи ці чисельні підходи, дослідники можуть симулювати та аналізувати різні явища, що відбуваються в рухомих середовищах. Одним із ключових процесів, які широко вивчаються, є дифузійне перенесення речовин, викликаний рухом середовища.

Вибір для вивчення одновимірних проблем адвекції-дифузії виникає через їх значення для розуміння явищ реального світу та їх придатності як спрощених моделей. Ці проблеми служать будівельними блоками для досягнення більш складних систем, що дозволяє дослідникам аналізувати взаємодію між адвекцією та дифузією. Зосереджуючись на цих конкретних сценаріях, чисельне моделювання дає цінну інформацію про поведінку речовин, які зазнають дифузії в рухомих середовищах, допомагаючи в аналізі гідродинаміки та газодинаміки.

У багатьох фізичних задачах, включаючи теплообмін, масообмін і динаміку рідин, одновимірні рівняння адвекції-дифузії виникають як фундаментальні рівняння. Отримання точних чисельних розв'язків для цих

рівнянь є надзвичайно важливим, оскільки це дозволяє глибше зрозуміти поведінку цих фізичних систем і полегшує прийняття обґрунтованих рішень.

Щоб вирішити ці проблеми, дослідники використовують широкий спектр чисельних методів і технік. Методи кінцевих різниць, методи скінченних елементів і спектральні методи зазвичай використовуються для дискретизації рівнянь і перетворення їх у форму, яку можна розв'язати обчислювальним способом. Ці методи поділяють область задачі на дискретні елементи або вузли, дозволяючи апроксимувати неперервний розв'язок через набір дискретних значень.

За останні роки було досягнуто значних успіхів у розробці чисельних алгоритмів для задач адвекції-дифузії. Дослідники зосередилися на покращенні точності, стабільності та ефективності чисельних схем для отримання надійних рішень. Для вирішення проблем, пов'язаними з домінуванням адвекції, використовувалися різні методи, такі як протиповітряні схеми, центральна диференціація, інтерполяція вищого порядку та адаптивне уточнення сітки.

Метою даної роботи є дослідження та застосування методу скінченних елементів для розв'язання стаціонарних рівнянь адвекції-дифузії. Конкретні цілі дослідження включають:

1. Скласти математичну модель стаціонарного рівняння адвекції-дифузії з урахуванням крайових умов.
2. Реалізація чисельного методу скінченних елементів для розв'язування математичної моделі.

3. Виконання чисельних експериментів з різними параметрами системи, такими як коефіцієнти адвекції, коефіцієнти дифузії, швидкості потоку та крайові умови.

4. Проаналізувати отримані чисельні результати та порівняти їх з аналітичним рішенням.

5. Визначити вплив просторового розбиття на точність і обчислювальну складність методу.

Загальна мета полягає в тому, щоб зрозуміти поведінку адвективно-дифузійної системи та визначити оптимальні параметри та просторовий розподіл для отримання точних і ефективних чисельних результатів. Результати цієї роботи можуть мати практичне застосування в різних галузях, де важливо моделювання та аналіз фізичних процесів, таких як теплопередача, дифузія речовини або електродинаміка.

РОЗДІЛ 1

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

1.1. Постановка задачі

Розглянемо обмежену зв'язну область Ω евклідового простору \mathbb{R}^3 з неперервною за Ліпшицем границею Γ . Задача полягає у знаходженні $c \in C_2$, що буде задовольняти рівняння:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (-D\nabla c) + V \cdot \nabla c = R \quad x \in \Omega \quad t \in (0, T] \quad (1.1)$$

Тут c — усереднена по глибині концентрація, а R — її джерело, яке може бути дуже сконцентрованим у просторі та змінюватися з часом; V — коефіцієнт адвекції, який також може змінюватися з часом; D зазвичай вважається нестисливим, так що $V \cdot \nabla c$ можна замінити на $\nabla \cdot (Vc)$; і D — коефіцієнт дифузії.

$$\text{Оскільки } \nabla c = \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial c}{\partial z} \end{cases},$$

$$\nabla \cdot c = \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Тоді

$$\nabla \cdot \nabla c = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Таким чином в одновимірному випадку диференціальна форма рівняння (1.1) матиме вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + V \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = R \quad (1.2)$$

D і V є константами. Рівняння адвекції-дифузії виконується в заданій одновимірній просторовій області $\Omega=[a,b]$, тобто з межами $x=a$ і $x=b$, а також у часовій області $t=[0,T]$. Одна початкова умова для c повинна бути задана, скажімо, при $t=0$:

$$c(x, t = 0) = c_0(x) \text{ на } \Omega.$$

Граничні умови для задачі могу бути трьох видів:

1. Гранична умова Діріхле визначає значення залежної змінної (концентрації) на межі. Математично це можна записати так:

$$c(x) = c_0$$

де $c(x)$ — концентрація в певній граничній точці x , а c_0 — задане постійне значення.

2. Гранична умова Неймана визначає нормальну похідну залежної змінної на межі. Математично це можна записати так:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = g$$

де $\frac{\partial c}{\partial x}$ — нормальна похідна концентрації c відносно напрямку x на межі, а g — задана функція або константа, що представляє потік або джерело.

3. Гранична умова Робіна поєднує як значення залежної змінної, так і її нормальну похідну на границі. Математично його можна записати як:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha(c - c_a) \quad \text{на } x = a,$$

Гранична умова Робіна на правій границі має такий вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha(c - c_b) \quad \text{на } x = b.$$

Де c представляє залежну змінну, $\frac{\partial c}{\partial x}$ - нормальна похідна c , α - коефіцієнт, а c_a, c_b - зазначене значення змінної на границях.

У цих випадках граничні умови Робіна виражають зв'язок між градієнтом залежної змінної і різницею між значенням змінної і заданим значенням на границі. Це може бути використано для опису перенесення речовин або енергії через кордон з різними коефіцієнтами перенесення та заданими значеннями змінних при $x = a$ та $x = b$.

1.2. Варіаційне формулювання

Для варіаційного формулювання ми введемо деякий простір $W = W_2^{(1)}(\Omega, (0, T])$. Домножимо рівняння та початкову умову на довільну функцію $w(x)$ та зінтегруємо в області Ω .

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) w d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \nabla c w d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (-D \nabla c) w d\Omega - \int_{\Omega} R c d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} (c(x, 0) - c_0) w d\Omega = 0, \quad \forall w \in W.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами для третього доданка

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-D \nabla c) w d\Omega = \int_{\Omega} D \nabla c \nabla w d\Omega - D \nabla c w |_{\Omega}$$

У випадку рівняння адвекції-дифузії доданок $D\nabla c w|_{\Omega}$ зникає, тобто він дорівнює нулю, через специфічний вибір вагової функції w та граничних умов.

Таким чином формула набуде вигляду:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) w d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \nabla c w d\Omega + \int_{\Omega} D \nabla c \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} R c d\Omega = 0$$

Уведемо позначення

$$m(c', w) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) w d\Omega;$$

$$a(c, w) = \int_{\Omega} V \cdot \nabla c w d\Omega;$$

$$b(c, w) = \int_{\Omega} D \nabla c \nabla w d\Omega;$$

$$l(c) = \int_{\Omega} R c d\Omega;$$

$$c' = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Наведемо варіаційне формулювання задачі адвекції-дифузії:

Знайти функцію $c(x, t) \in W_2^{(1)}(\Omega, (0, T])$, таку що задовольняє рівняння

$$m(c', w) + a(c, w) + b(c, w) = l(c), \forall w \in W;$$

$$m(c(x, 0) - c_0, w) = 0. \tag{1.3}$$

1.3 Числа Пекле

Число Пекле - безрозмірний параметр, який відіграє ключову роль в аналізі адвекційно-дифузійних процесів в системах потоку рідини. Кількісно оцінюючи

відносне значення адвекції та дифузії, воно дає цінні уявлення про домінуючий транспортний механізм та подальшу поведінку речовин.

Число Пекле (Pe) обчислюється, враховуючи характеристичну швидкість потоку, шкалу характерної довжини та коефіцієнт молекулярної дифузії. Визначається формулою

$$Pe = \frac{VL}{D}$$

де V представляє характеристичну швидкість потоку, L представляє шкалу характеристики довжини, а D представляє коефіцієнт молекулярної дифузії.

Коли Pe значно менше 1 ($Pe \ll 1$), дифузія переважає над адвекцією. У цьому випадку, речовини широко поширюються і змішуються через дифузійні процеси, що призводить до гладких профілів концентрації.

І навпаки, коли Pe значно більше 1 ($Pe \gg 1$), адвекція переважає над дифузією. У випадку, де домінують адвекції, речовини переважно транспортуються об'ємним рухом рідини, що призводить до виражених градієнтів концентрації та обмеженого змішування.

У проміжному режимі, де Pe близька до 1 ($Pe \sim 1$), як адвекція, так і дифузія значно сприяють загальному транспортному процесу. Тут речовини відчують комбінований ефект адвекції та дифузії, що призводить до проміжних значень концентрації та характеристик змішування.

Розуміння числа Пекле має першорядне значення в різних наукових дисциплінах, включаючи гідродинаміку, екологічну інженерію, хімічну інженерію та транспортні явища. Він служить фундаментальним інструментом для прогнозування та аналізу поведінки речовини в потоках рідини, оптимізації процесів, пов'язаних з транспортними явищами, а також проектування

ефективних систем змішування. Ретельно оцінюючи число Пекле, дослідники та інженери можуть отримати цінну інформацію про складну взаємодію адвекції та дифузії, що дозволяє глибше зрозуміти та контролювати транспортні процеси.

Точне знання числа Пекле дозволяє нам приймати обґрунтовані рішення щодо оптимізації процесів, такі як підвищення ефективності змішування, мінімізація градієнтів концентрації та контроль транспорту речовин. Крім того, він направляє проектування систем та обладнання для застосувань, що включають потік рідини та транспортування речовин, починаючи від екологічного відновлення та хімічної обробки до мікрофлюїдних пристроїв та біомедичних застосувань.

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОДНОВИМІНОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

2.1. Напівдискретний метод Гальоркіна

Виберемо у просторі W лінійно незалежну, повну послідовність функцій $\{\varphi_j^h\}$. Нехай W_h – скінченновимірний підпростір простору W , який утворюється на базисі $\varphi_j^h, j = 1, \dots, N$.

Для отримання наближеного розв'язку задачі

$$\begin{aligned} m(c', w) + a(c, w) + b(c, w) &= l(c), \forall w \in W \\ m(u(x, 0) - u_0, v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

використаємо напівдискретне подання

$$c_h(x, t) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \varphi_j^h(x) \quad (2.2)$$

Перейдемо до наближеної форми задачі

$$\begin{aligned} m(c_h', w_h) + a(c_h, w_h) + b(c_h, w_h) &= l(c_h): \forall w_h \in W_h; \\ m(c_h(x, 0) - c, w_h) &= 0. \end{aligned}$$

Її будемо називати напівдискретизованою за просторовими змінними, а її розв'язок напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $c(t)$ варіаційної задачі.

Підставимо формулу (2.2) замість розв'язку u_h у рівняння (2.1) і згідно з методом Гальоркіна виберемо за функції w базисні функції φ_i^h . Отримаємо задачу Коші

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{m_{ij}U_j'(t) + a_{ij}U_j(t) + b_{ij}U_j(t)\} &= l_i(t), \quad t \in (0, T], i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N m_{ij}U_j(0) &= p_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

де

$$\begin{aligned} m_{ij} &= m(\varphi_i^h, \varphi_j^h); a_{ij} = a(\varphi_i^h, \varphi_j^h); b_{ij} = b(\varphi_i^h, \varphi_j^h) \\ l_i(t) &= l(\varphi_i^h); p_i = m(c_0, \varphi_i^h) \end{aligned}$$

У матричних позначеннях

$$M = \{m_{ij}\}; A = \{a_{ij}\}; B = \{b_{ij}\}$$

$$U(t) = \{U_i(t)\}; L(t) = \{l_i(t)\}; P = \{p_i\}$$

(M, A, B - квадратні матриці, U, L, P - матриці-стовпці) задачу (3.3) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} MU'(t) + AU(t) + BU(t) &= L(t), \quad t \in (0, T]; \\ MU(0) &= P. \end{aligned}$$

Зазначимо, що як наслідок попереднього матриці M, A, B є матрицями з відмінними від нуля визначниками, вони є симетричними та додатно визначеними.

2.2. Базисні функції на основі поліномів Лежандра

Використання спеціальних методів наближення вищого порядку, відомих як бульбашкові функції, необхідне для багатьох задач чисельного аналізу. Тут ми опишемо наближення за допомогою бульбашкових функцій на одновимірних скінченних елементах.

Нехай інтервал $[a, b]$ ділиться на точки

$$x_i, i = 0, 1, \dots, n, (x_0 = a, x_n = b)$$

створюючи скінченні елементи

$$\Omega = \{x: x_{k-1} < x < x_k\}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Відображаємо кожен елемент Ω на «стандартний» скінченний елемент Ω_* за допомогою перетворення:

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_{k-1} + \frac{1+\xi}{2} x_k, \xi \in \Omega_*$$

На кожному елементі Ω_* ми будемо послідовність базисних функцій:

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}, \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}, \varphi_j = \Phi_{j-1}(\xi), j = 3, 4, \dots, p+1$$

Тут $\Phi_j(\xi)$ визначається через поліноми Лежандра P_{j-1} як:

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, j = 2, 3, \dots$$

Наприклад, вирази для перших чотирьох поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, P_1 = t \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t). \end{aligned}$$

Ми можемо обчислити поліноми Лежандра вищого порядку, використовуючи рекурентну формулу:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

Знаючи перші два поліноми Лежандра, ми можемо знайти вирази для всіх інших, використовуючи цю формулу.

Поліноми Лежандра, як відомо, ортогональні на інтервалі $[-1, 1]$, що задовольняє відношення:

$$\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)dt = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \frac{2}{2i+1}, i = j \end{cases}$$

Базисні функції $\varphi_j(\xi)$ для $j = 3, 4, \dots, p+1$ називаються бульбашковими функціями. Ці функції мають властивість

$$\varphi_j(\xi) = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

Властивість є наслідком такої залежності: для $\xi = -1$ базисні функції пропорційні інтегралу з однакою верхньою і нижньою межами. Оскільки базисні функції оцінюють до нуля при $\xi = 1$, цей інтеграл також обчислюється до нуля, що впливає з ортогональності поліномів Лежандра $P_j(j > 1)$ щодо постійної функції одиниці. Інша важлива залежність, задоволена поліномами Лежандра, задана формулою

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$$

це що:

$$\varphi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}}(P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)), j = 3, 4, \dots,$$

Також для бульбашкових функцій виконується наступна формула[1]:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2.3. Метод скінченних елементів

Припустимо, що на проміжку $[a, b]$ функція V і D - неперервні, причому $V \geq 0$ і $D \geq 0$ і розв'язок задачі (1.1) існує. Застосуємо апроксимації розв'язку у варіаційну формулу, опускаючи перший доданок, оскільки надалі ми будемо розглядати стаціонарну задачу:

$$\int_{\Omega} V \cdot \nabla c w d\Omega + \int_{\Omega} D \nabla c \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} R w d\Omega = 0$$

$$\int_a^b V \frac{\partial c_h}{\partial x} w_h dx + \int_a^b D \frac{\partial c_h}{\partial x} \frac{\partial w_h}{\partial x} dx - \int_a^b R w_h dx = 0$$

Підставимо апроксимації розв'язку:

$$\int_a^b V \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^N C_j(t) \varphi_j^h(x) \right)}{\partial x} w_h dx + \int_a^b D \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^N C_j(t) \varphi_j^h(x) \right)}{\partial x} \frac{\partial w_h}{\partial x} dx - \int_a^b R w_h dx = 0$$

Розкриваємо похідні та перегрупуємо терміни:

$$\sum_{i=0}^N \left(C_i \int_a^b \left(V \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} w_h - D \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) dx \right) - \int_a^b R w_h dx = 0$$

Нехай $w_h = \varphi_j^h(x)$, тоді рівняння набуде вигляду:

$$\sum_{i=0}^N \left(C_i \int_a^b \left(V \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \varphi_j^h(x) - D \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^h(x)}{\partial x} \right) dx \right) - \int_a^b R \varphi_j^h(x) dx = 0$$

Розбиваємо інтервал $[a, b]$ на N підінтервалів, щоб отримати окремий інтеграл для кожного підінтервалу, сума цих інтегралів буде апроксимацією загального інтегралу на інтервалі $[a, b]$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(V \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \varphi_j^h(x) + D \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^h(x)}{\partial x} \right) dx = \\ & = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} V \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \varphi_j^h(x) + D \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^h(x)}{\partial x} dx \\ & \int_a^b R \varphi_j^h(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} R \varphi_j^h(x) dx \end{aligned}$$

Для кожної пари базисних функцій $\varphi_i^h(x)$ обчислюємо відповідні елементи матриці жорсткості K та вектора навантаження F :

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} V \frac{\partial(\varphi_i^h(x))}{\partial x} \varphi_j^h(x) + D \frac{\partial \varphi_i^h(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^h(x)}{\partial x} dx \\ F_i &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} R \varphi_j^h(x) dx \end{aligned}$$

За допомогою отриманих елементів матриці жорсткості K та вектора навантаження F можна сформулювати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$K * C = F$$

де $C = [C_1, C_2, \dots, C_N]$, T - вектор невідомих коефіцієнтів, K - матриця жорсткості,
 F - вектор навантаження.

РОЗДІЛ 3

ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

3.1. Приклад 1

Результати отримано за допомогою системи GNU Octave.

Розглянемо одновимірне стаціонарне рівняння адвекції-дифузії на проміжку $[0, 1]$ з крайовими умовами:

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

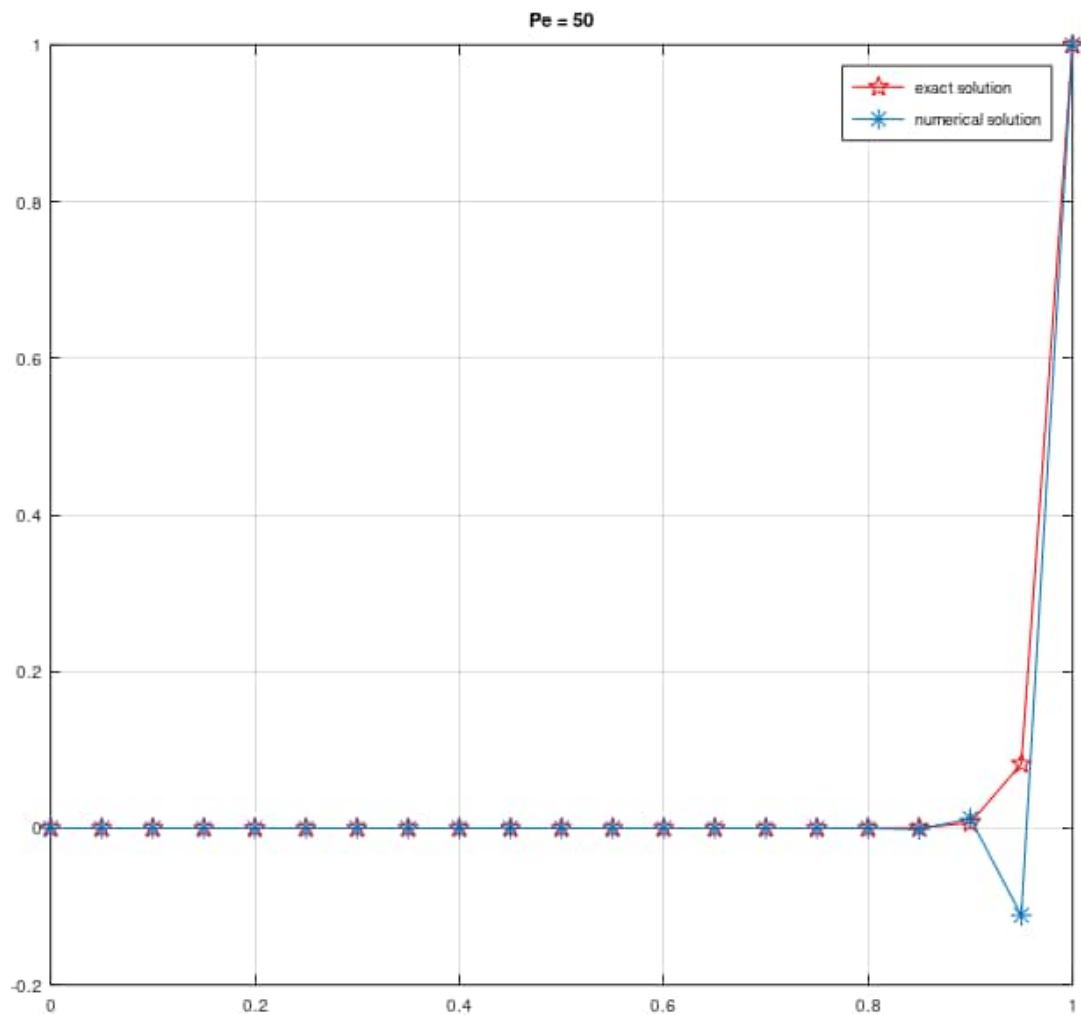


Рис. 3.1.

Для першого прикладу ми використали такі параметри:

$$a = 0; b = 1; D = 0.02; V = 1$$

На Рис. 3.1 зображено два графіки: червоного кольору, який відображає аналітичний розв'язок рівняння та синього, який відображає розв'язок рівняння методом скінченних елементів.

Застосуємо ці самі параметри, але для більшої кількості розбиттів

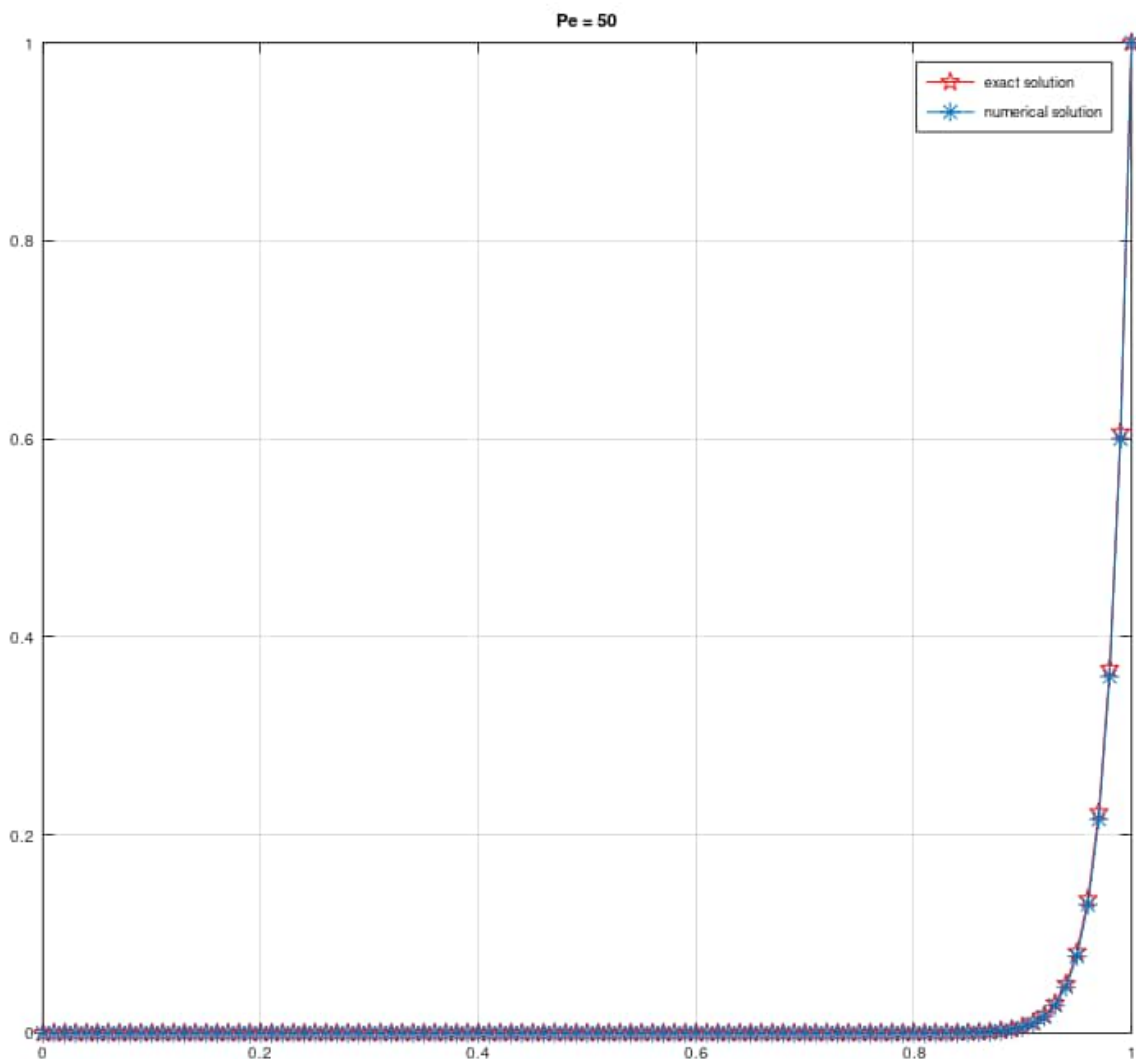


Рис. 3.2.

На Рис. 3.2 кількість розбиттів – 100, коли на Рис. 3.1 їх – 20.

Можна легко побачити, що при збільшенні кількості точок розв'язок методом скінченних елементів наближує свої значення до аналітичного.

3.2. Приклад 2

Для другого прикладу використаємо такі параметри:

$$a = 0; b = 1; D = 0.02; V = 1$$



Рис. 3.3.

На Рис. 3.3 зображено розбиття на 5 проміжків.

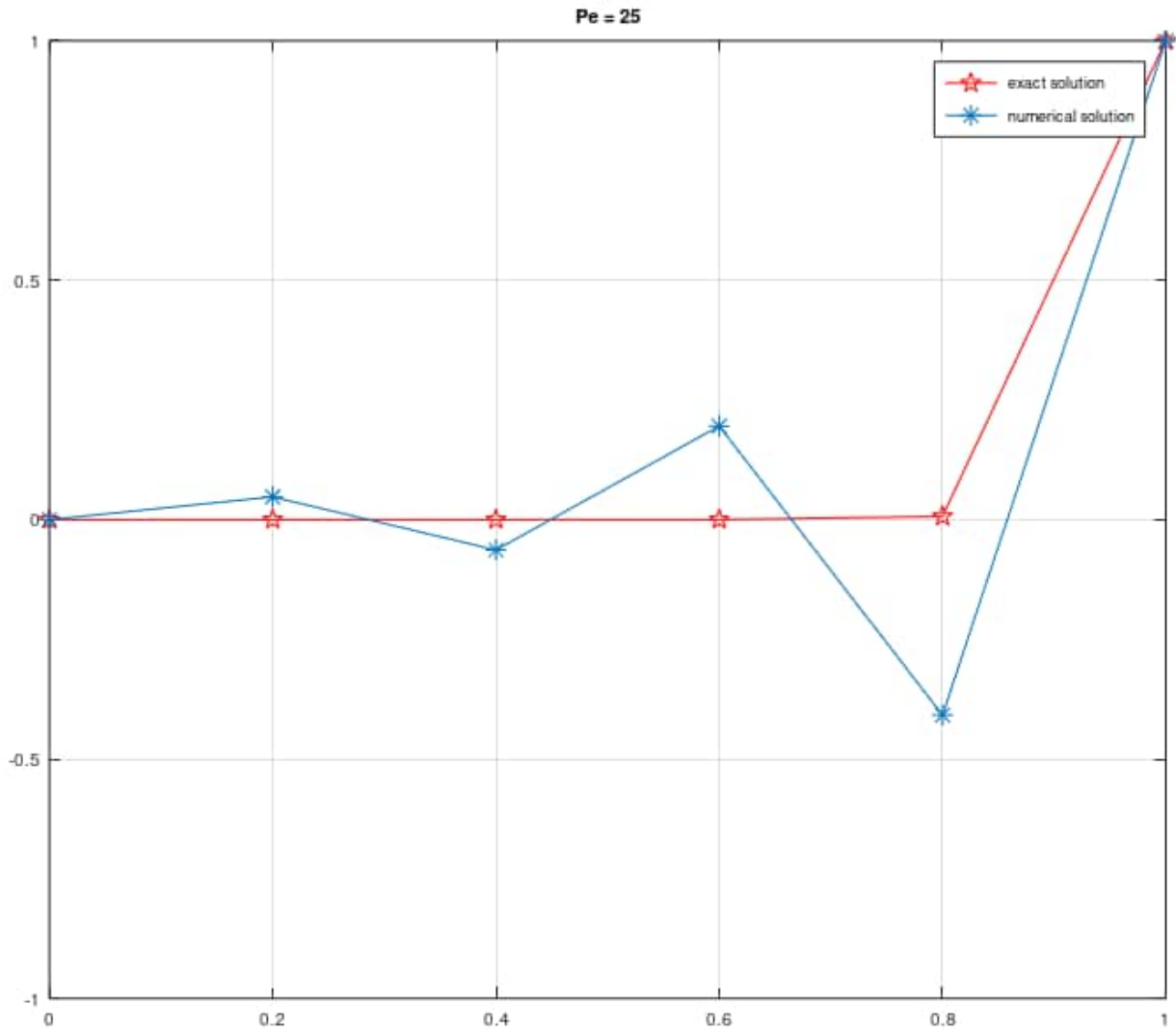


Рис. 3.4.

На Рис. 3.4 також 5 розбиттів, як і на Рис. 3.3, але, оскільки значення адвекційного коефіцієнта на другому рисунку дорівнює $V=0.5$, ми отримуємо більшу точність.

ВИСНОВОК

Чисельний метод скінченних елементів є потужним інструментом для розв'язання стаціонарних рівнянь адвекції-дифузії на одновимірних проміжках. Використання цього методу дозволяє отримати точні та надійні розв'язки.

Збільшення кількості точок розбиття приводить до кращої апроксимації аналітичного розв'язку. Це свідчить про важливість дискретизації простору при застосуванні чисельних методів.

Величина адвекційного коефіцієнта має суттєвий вплив на точність розв'язку. Змінюючи значення цього коефіцієнта, можна досягти більшої точності відповіді.

Чисельні експерименти показують, що метод скінченних елементів має потенціал для моделювання різних фізичних процесів. Його можна успішно використовувати в наукових дослідженнях та інженерних застосуваннях для розв'язання реальних задач.

Результати експериментів демонструють, що при збільшенні кількості точок розв'язок методом скінченних елементів наближається до аналітичного розв'язку. Це підкреслює ефективність та точність даного чисельного методу.

Використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів, може сприяти розумінню та прогнозуванню фізичних явищ у природних та технічних системах. Вони є важливим інструментом для аналізу та моделювання різних процесів.

Дослідження адвекції-дифузії на основі чисельних методів є актуальною задачею, оскільки цей тип рівнянь зустрічається в багатьох галузях науки і

техніки. Застосування методу скінченних елементів дозволяє ефективно вирішувати такі задачі та отримувати надійні результати.

В подальших дослідженнях можна розширити область застосування чисельних методів, використовуючи їх для моделювання складніших фізичних процесів та враховуючи додаткові фактори, які можуть впливати на розв'язок.

Ці чисельні експерименти підтверджують важливість розуміння та використання чисельних методів при вивченні фізичних явищ та розв'язанні прикладних задач. Їх застосування може допомогти вирішувати складні завдання та покращувати якість інженерних рішень.

Застосування системи GNU Octave для чисельних обчислень є ефективним і зручним з точки зору реалізації чисельних методів та аналізу отриманих результатів. Вона дозволяє швидко і точно виконувати обчислення та візуалізувати дані.

У цій роботі було показано, що чисельний метод скінченних елементів є ефективним інструментом для розв'язання стаціонарних рівнянь адвекції-дифузії. Використання такого методу дозволяє отримати точні розв'язки та забезпечує широкі можливості для моделювання фізичних процесів. Дані експерименти підтверджують важливість чисельних методів у наукових та інженерних дослідженнях і вказують на можливість подальшого розвитку і вдосконалення цих методів у майбутньому.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. 221 с.
2. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. Київ : НМК ВО, 1991. 87 с.
3. Кухарський В. М. Модифікований метод залишково-вільних бульбашок для розв'язування задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле / В. М. Кухарський, Я. Савула, І. Кривень // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформатика. –2013. – Вип. 20 – с. 85-94
4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів: Вища школа, 1976. 87с.
5. Кухарський В.М., Савула Я.Г. Використання проекційно-сіткових методів до розв'язання задач адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах // Вісник Львівського університету. Сер. Мех.-мат. – 1998. – Вип.50. – с. 148–152.
6. Числовий аналіз різновимірних крайових задач адвекції-дифузії у середовищах із тонкими включеннями / Я. Савула, Т. Мандзак, В. Кухарський // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — с. 149-156.

Додаток А. Програмна реалізація

Посилання на репозиторій з кодом програми:

<https://github.com/Anne4652/Advection-diffusion>