


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра інформаційних систем

Затверджено

На засіданні
кафедри інформаційних систем
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29.08.2023 р.)

Завідувач кафедри Г.А. Шинкаренко



Силабус з навчальної дисципліни
Числові методи математичної фізики
що викладається в межах ОНП Інформатика
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
зі спеціальності 122 – комп'ютерні науки

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Числові методи математичної фізики
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра інформаційних систем (ІС)
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	12 – інформаційні технології 122 – комп'ютерні науки
Викладачі дисципліни	Шинкаренко Георгій Андрійович, завідувач кафедри інформаційних систем, Дреботій Роман Григорович, доцент кафедри інформаційних систем, Вовк Олександр Володимирович, доцент кафедри інформаційних систем, Васишин Богдан Богданович, асистент кафедри інформаційних систем
Контактна інформація викладачів	heorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/shynkarenko ; roman.drebotiy@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/drebotiy ; bohdan.vasylyshyn@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/vasylyshyn ; oleksandr.vovk@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/drebotiy ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 260. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) та згідно розкладу консультацій.
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course1/
Інформація про дисципліну	Курс надає знання принципів побудови сучасних методів обчислювальної математики, аналізу їх апроксимативності, стійкості і збіжності, програмної реалізації їхніх алгоритмів для розв'язання крайових і початково-крайових задач, які виникають у наукових та інженерних обчисленнях з проблем математичної фізики, зокрема, у проблемах дифузії-адвекції-реакції та теорії пружності.
Коротка анотація дисципліни	Дисципліна “Числові методи математичної фізики” є дисципліною вибору студента з спеціальності 122 – комп'ютерні науки для освітньої програми бакалаврської підготовки, яка викладається в 6-му семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Мета та цілі дисципліни	Метою вивчення цієї дисципліни є освоєння студентами теоретичних основ і практичних навичок використання сучасних числових методів наукових та інженерних обчислень, принципів розробки програмного забезпечення для їх реалізації та способів аналізу результатів числових експериментів
Література для вивчення дисципліни	Основна: 1. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування. Львів, Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 396 с. 2. Квасниця Г.А. Аналіз задачі про гармонічні хвилі в пружних тілах та її h -адаптивна скінченноелементна апроксимація / Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2020. Т. 63. №1. С. 52-64.

	<ol style="list-style-type: none"> 3. Kvasnytsia H.A., Shynkarenko H.A. Analysis of the Problem of Harmonic Waves in Elastic Bodies and its h-Adaptive Finite-Element Approximation // Journal of Mathematical Science. 2023. V. 270. № 1. P. 59-75. 4. Квасниця Г.А, Малашняк П.О., Шинкаренко Г.А. Порівняння <i>h</i>-адаптивних схем МСЕ різних порядків для одновимірних крайових задач. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.–2022. –Вип 30, с. 45-58. 5. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв’язування початково-крайових задач. Київ, НМКВО, 1991. – 88 с. 6. Шинкаренко Г.А. Основи екології: Математичні проблеми охорони довкілля. Львів, ЛНУ імені Івана Франка, 2006 – 80 с. https://ami.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/04/EcoMod.pdf 7. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів, Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004 – 221с. https://ami.lnu.edu.ua/academics/library 8. Є Абрамов, О Ліпіна, Г Шинкаренко, А Ямелинець. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.–2006.-Вип 11, с. 3-18. <p style="text-align: center;">Додаткова:</p> <ol style="list-style-type: none"> 9. <i>Gockenbach M.S.</i> Understanding and Implementing the Finite Element Method. SIAM, 2006. – 380 pp. 10. <i>Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Book / A. Logg, K.-A. Mardal, G. Wells, eds.</i> - New York: Springer, 2012. – 719 pp. 11. <i>Larson M.G.</i> The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications / M. G. Larson, F. Bengzon. - New York: Springer, 2013. – 385 pp. 12. <i>Johnson C.</i> Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. – Dover Publications, 2009. – 278 pp. 13. <i>Ostapov O. Yu.</i> A posteriori error estimator and <i>h</i>-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics, Taylor & Francis Group, London. – 2014. – P. 329-337. 14. <i>Ainsworth M.</i> A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. / M. Ainsworth, J.T. Oden - New York: Wiley, 2000.-240 p. 15. <i>Zienkiewicz O. C.</i> The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Oxford: Butterworth & Heinemann, 2002. - 688 p. 16. <i>Strang G., Fix G.J.</i> An Analysis of the Finite Element Method. Cambridge University Press, 2. edition, 2008. 17. Deuffhard P., Weiser M. Adaptive numerical solution of PDEs. De Gruyter, 2012.- 412 p. <ol style="list-style-type: none"> 1. https://freefem.org/ 2. https://fem-code.com/ 3. Scilab www.scilab.org
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 150 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекцій та 32 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 86 год.
Очікувані результати навчання	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>Знати:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку та їх класифікація. Крайові та початково-крайові задачі для диференціальних рівнянь та їх систем. Приклади застосувань з фізики, механіки та екології. - Закони збереження маси, руху, імпульсу, енергії. - Різницева задача. Метод скінченних різниць (МСР). Сіткова область і різницеві співвідношення. Способи побудови різницевих рівнянь та їх властивості. Дискретизація за просторовими змінними. Дискретизація за змінною часу. Схеми Кранка-Ніколсон та Ньюмарка. Стійкість та збіжність сіткових апроксимацій. - Варіаційна задача. Простори допустимих функцій, білінійна і лінійна форми, неперервність, V-еліптичність. Коректність варіаційної задачі.

	<ul style="list-style-type: none"> - Рівняння балансу маси, руху, імпульсу, енергії. Єдиність, регулярність та обмеженість розв'язку задачі. - Апроксимації Гальоркіна та МСЕ. Інтерполяційні властивості базисних функцій МСЕ. Апріорні оцінки похибок і порядки швидкості збіжності послідовності апроксимацій. - Базові алгоритми МСЕ, однокрокові рекурентні схеми (ОРС) інтегрування в часі початково-крайових задач. <p>Вміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Будувати схеми МСР для крайових і початково-крайових задач; - Будувати схеми МСЕ для стаціонарних та нестаціонарних варіаційних задач; - Будувати ОРС для еволюційних задач. - Оцінювати похибки апроксимацій МСР та МСЕ - Реалізовувати алгоритми МСР та МСЕ з використанням сучасних середовищ обчислень; - Аналізувати результати числових експериментів. <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Інтегральна компетентність ІК. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у галузі комп'ютерних наук а</p> <p>Загальні компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ЗК6. Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями <p>Спеціальні компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> • СК3. Здатність до логічного мислення, побудови логічних висновків, використання формальних мов і моделей алгоритмічних обчислень, проектування, розроблення й аналізу алгоритмів, оцінювання їх ефективності та складності, розв'язності та нерозв'язності алгоритмічних проблем для адекватного моделювання предметних областей і створення програмних та інформаційних систем. • СК4. Здатність використовувати сучасні методи математичного моделювання об'єктів, процесів і явищ, розробляти моделі й алгоритми чисельного розв'язування задач математичного моделювання, враховувати похибки наближеного чисельного розв'язування професійних задач. <p>Програмні результати навчання:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ПР6. Використовувати методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій, розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до інженерних задач, мати навички програмної реалізації чисельних методів.
Ключові слова	Диференціальні рівняння, їх класифікація. Крайові і початкові умови. Крайові і початково-крайові задачі. МСР. Варіаційні задачі. МСЕ. Апріорні та апостеріорні оцінки похибок. Рекурентні схеми, програмна реалізація.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій. Ознайомлення з Internet курсами з питань МСЕ Open University courses: https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/introduction-finite-element-analysis/content-section-1 https://www.edx.org/course/high-performance-finite-element-modeling?source=aw&awc=6798_1587147662_7cb82852a251632f8bb9ad32b97285a1&utm_source=aw&utm_medium=affiliate_partner&utm_content=text-link&utm_term=301045 https://www.class-central.com/ https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/exam/sO3rZ/unit-2-quiz

<p>Теми</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Вступ. Мета та завдання курсу. Організація курсу. Комп'ютерні технології та моделювання. 2. Крайові та початково-крайові задачі математичної фізики . Класифікація рівнянь в частинних похідних. Приклади. 3. Метод скінченних різниць (МСР) для крайових задач і початково-крайових з рівнянням дифузії-конвекції-реакції (ДКР). 4. Варіаційне формулювання крайових задач в гільбертовому просторі. Варіаційне рівняння. Простір допустимих функцій. Головні та природні крайові умови. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Задача мінімізації квадратичного функціоналу. Коректність варіаційної задачі. 5. Задача мінімізації квадратичного функціоналу. Приклади. Метод Рітца. Збіжність апроксимацій Рітца. Ортогональність похибок апроксимації. 6. Метод Гальоркіна та його збіжність. 7. МСЕ. Поліноміальні апроксимації на скінченних елементах. Апроксимації лагранжевого та ермітового типу, 8. Априорна оцінка точності. Априорна оцінка точності за Нітше. 9. Варіаційне формулювання параболічних задач. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна. Стійкість і збіжність напівдискретних апроксимацій. Дискретизація варіаційної задачі за часом. 10. Варіаційне формулювання гіперболічних задач. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна. Стійкість і збіжність напівдискретних апроксимацій. Дискретизація варіаційної задачі за часом. Однокрокові рекурентні схеми інтегрування в часі. 11. Проблеми програмної реалізації схем дискретизації еволюційних задач..
<p>Підсумковий контроль, форма</p>	<p>Залік у кінці семестру</p>
<p>Пререквізити</p>	<p>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з курсів: Програмування; Диференціальні рівняння; Чисельні методи.</p>
<p>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</p>	<p>Лекції, лабораторні, презентації, пакет Wolfram Mathematica. Колоквіум Індивідуальні завдання</p>
<p>Необхідне обладнання</p>	<p>Комп'ютер з Internet доступом.</p>
<p>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • лабораторні та індивідуальні завдання: 50% семестрової оцінки; • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p>Письмові роботи: Очікується, що студенти виконають письмові роботи з теоретичних засад курсу (колоквіум), описом розроблених програмних засобів та результатами виконання індивідуальних завдань.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p>

	<p>Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку магістранти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти також заохочуються до використання іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали, набрані на поточних заняттях, колоквиумах, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність під час лабораторних робіт та захисту індивідуальних завдань; недопустимість пропусків та запізень на заняття без поважних причин; плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання тощо.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
Питання до заліку чи екзамену.	<p>Класифікація рівнянь в частинних похідних другого порядку. Крайова, початково-крайова та відповідні їм варіаційні задачі, приклади. Метод скінченних різниць та його алгоритм. Рівняння балансу енергії, маси, імпульсу. Наслідки з них Коректність варіаційної задачі. Існування, єдиність і стійкість розв'язку. Метод Рітца-Гальоркіна. Базисні функції МСЕ, приклади. Алгоритм МСЕ. Властивості матриці системи алгебричних рівнянь МСЕ. Апріорні оцінки похибок і збіжність апроксимацій МСЕ. Початково-крайова та відповідна їй варіаційна задача, приклади. Рівняння балансу енергії, маси, імпульсу. Єдиність і стійкість розв'язку. Напівдискретизація МСЕ за просторовими змінними, властивості результуючої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Дискретизація задачі за часом. Однокрокові рекурентні схеми (ОРС). Умовно та безумовно (абсолютно) стійкі ОРС. ОРС Кранка-Ніколсон. Збіжність ОРС.</p>
Опитування	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

Перебіг курсу **Числові методи математичної фізики**

Тиж-день	Тема, короткі тези	Заняття	Література	Академ. год.	Термін виконан
1	<p>Мета та завдання курсу. Організація курсу. Комп'ютерні технології наукових та інженерних обчислень. Огляд стану комп'ютерного моделювання в науці та інженерії .</p> <p>Середовища обчислень: <i>Python, Wolfram Mathematica, MATLAB, FEniCS тощо</i></p>	<p>Лекція</p> <p>Лабораторне</p>		2	
2-5	<p>Крайові та початково-крайові задачі з рівняннями в частинних похідних. Рівняння дифузії-адвекції-реакції (ДАР), крайові умови Діріхле, Ноймана і Робіна.</p> <p>Дискретизація крайової задачі. Метод скінченних різниць (метод сіток). Система різницевих рівнянь. Апроксимація крайових умов.</p> <p><i>Завдання № 1.</i> Програмна реалізація схем МСР для 1D задач та аналіз наближень розв'язків модельних задач.</p>	<p>Лекції</p> <p>Лабораторні</p>	<p>1-5,17</p> <p>7,16</p>	<p>8</p> <p>8</p>	<p>4</p> <p>Тижні</p>

6	<p>Варіаційне формулювання крайових задач: коректно поставлена задача, існування, єдиність та стійкість розв'язку. Достатні умови коректності задачі.</p> <p>Теорема Лакса-Мільграма-Вишика.</p> <p>Приклади аналізу білінійних форм та функціоналів для коректно сформульованих задач</p>	<p>Лекція</p> <p>Лабораторне</p>	<p>1-5</p> <p>2</p>	<p>2</p> <p>2</p>	<p>Тиждень</p>
7-8	<p>Дискретизація варіаційних задач методом Рітца-Гальоркіна. Сітки скінченних елементів в 1D-, 2D- і 3D задачах. Простори апроксимацій МСЕ з кусково поліноміальними базисними функціями. Структура і властивості системи алгебричних рівнянь МСЕ.</p> <p><i>Завдання № 2.</i> Алгоритм МСЕ та його програмна реалізація для 1D задач.</p>	<p>Лекції</p> <p>Лабораторні</p>		<p>4</p> <p>4</p>	<p>2 тижні</p>
9-10	<p>Інтерполяційні властивості просторів апроксимацій МСЕ. Априорні оцінки похибок апроксимацій МСЕ. Збіжність послідовності апроксимацій МСЕ. Порядки швидкості збіжності.</p> <p><i>Завдання № 2.</i> Програмна реалізація схем МСЕ для 1D задач та аналіз наближень розв'язків модельних задач.</p>	<p>Лекції</p> <p>Лабораторні</p>		<p>4</p> <p>4</p>	<p>2 тижні</p>
11-12	<p>Початково-крайові задачі для диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного та гіперболічного гаунків. Варіаційне формулювання початково-крайових задач. Простори допустимих функцій. Рівняння балансу, єдиність, регулярність та обмеженість розв'язку.</p> <p><i>Завдання № 2.</i> Програмна реалізація схем МСЕ для 1D задач та аналіз наближень розв'язків модельних задач. Презентація і захист одержаних результатів.</p>	<p>Лекції</p> <p>Лабораторні</p>	<p>1,2</p> <p>2</p>	<p>4</p> <p>4</p>	<p>2 тижні</p>
13-14	<p>Напівдискретизація еволюційної задачі за просторовими змінними з використанням МСЕ. Однокрокові рекурентні схеми інтегрування напівдискретної задачі (результуючої задачі Коші). Стійкість ОРС, умовно та безумовно стійкі схеми. Порядки збіжності апроксимацій ОРС.</p> <p><i>Завдання № 3.</i> Програмна реалізація алгоритмів ОРС, як інструментарію для обчислювальних експериментів з еволюційними задачами.</p>	<p>Лекції</p> <p>Лабораторні</p>	<p>1,2</p> <p>2</p>	<p>6</p> <p>6</p>	<p>2 тижні</p>
15	<p>Однокрокові рекурентні схеми інтегрування напівдискретної задачі (результуючої задачі Коші) для гіперболічних задач. Стійкість ОРС, умовно та безумовно стійка схеми.</p> <p><i>Завдання № 3.</i> Програмна реалізація алгоритмів ОРС, результати обчислювальних експериментів з еволюційними задачами та їхня презентація.</p>	<p>Лекція</p> <p>Лабораторне</p>	<p>1,2</p> <p>2</p>	<p>2</p> <p>2</p>	<p>Тиждень</p>
16	<p>Підведення підсумків курсу.</p> <p>Презентація та захист результатів завдань.</p>	<p>Лекція</p> <p>Лабораторне</p>		<p>2</p> <p>2</p>	<p>Тиждень</p>