

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра прикладної математики

Магістерська робота

**Чисельне розв'язування зв'язної
параболічно-гіперболічної початково-крайової задачі**

Виконав: студент групи ПМПм-22
спеціальності
113 – прикладна математика
Тимків Д. В.

Керівник: проф. Халко Р. С.

Рецензент: _____

Львів 2023

Зміст

| | |
|--|-----------|
| Вступ | 3 |
| 1 Постановка задачі та її часткова дискретизація | 4 |
| 1.1 Постановка задачі | 4 |
| 1.2 Поліноми Лагера та їх властивості | 5 |
| 1.3 Часткова дискретизація через перетворення Лагера | 6 |
| 2 Зведення до граничних інтегральних рівнянь | 8 |
| 2.1 Фундаментальні послідовності | 8 |
| 2.2 Модифіковані потенціали та їх властивості | 11 |
| 2.3 Зведення стаціонарних задач спряження до ГПР | 11 |
| 3 Чисельне розв'язування ГПР | 12 |
| 3.1 Параметризація та виділення особливостей | 12 |
| 3.2 Квадратурні формули на основі тригонометричного інтерполювання | 17 |
| 3.3 Метод Нистрьома | 18 |
| 3.4 Перший крок | 18 |
| 3.5 Повна система | 20 |
| 3.6 Знаходження розв'язку | 23 |
| 4 Чисельні експерименти | 24 |
| 4.1 Приклад 1 | 25 |
| 4.2 Приклад 2 | 26 |
| Висновки | 28 |

Вступ

Параболічно-гіперболічні зв'язні системи диференціальних рівнянь у частинних похідних виникають у багатьох задачах у фізиці, механіці і матеріалознавстві, такі як рівняння Нав'є–Стокса, пружності, термо(в'язко) пружності, динаміка рідин, процеси осаду, течія в пористих середовищах, проблеми фазового переходу, електромагнетизм, відновлення зображення тощо.

Дослідження початково-крайових задач для рівнянь теплопровідності та хвильових рівнянь є основою для великої кількості задач. Для чисельного розв'язку, окрім зведення задачі до повністю дискретного, залежного від часу вигляду, існує велика кількість методів, які ґрунтуються на виключенні залежності від часу та зменшенні розмірності задачі шляхом зведення до послідовності граничних інтегральних рівнянь для стаціонарних задач.

В даній роботі буде розглянуто один з таких методів, який ґрунтується на використанні перетворень Лагера з використанням розвинень Фур'є–Лагера з подальшим зведенням до стаціонарних рівнянь Гельмгольца.

Іншим типом таких методів є так звані методи Роте, в яких залежність від часу дискретизується за допомогою апроксимації скінченними різницями похідної по часу. Таким чином отримується послідовність граничних інтегральних рівнянь для стаціонарних задач, яка також може бути подана у вигляді рівнянь Гельмгольца. Детальніше про метод описано в [2].

Для зведення зв'язної задачі до граничних інтегральних рівнянь використовуватиметься метод потенціалів, а саме потенціали простого шару. Підхід з використанням потенціалів простого шару описано в [1]. Даний підхід є достатньо гнучким, а тому може бути застосований, як до дво-, так і до тривимірних задач, включно з необмежними областями і областями з розривами.

В [6] детально досліджена добре обумовленість зв'язної задачі, яка розглядається в даній роботі, тому не потрібно звертатися до використання регуляризаційних методів, наприклад регуляризації Тихонова. Тому використовуватимемо метод Нистрьома, побудований на основі тригонометричних квадратур, за допомогою якого, задача може бути зведена до повністю дискретного вигляду.

Розділ 1. Постановка задачі та її часткова дискретизація

1.1 Постановка задачі

Дана задача виникає при дослідженні лінеаризованого, нестисливого, нестационарного потоку в області D_1 , обмеженій ідеально пружною товстою стінкою, в якій ми допускаємо невеликі зміщення.

Нехай $D_\ell \subset \mathbb{R}^2$ прості зв'язані обмежені області з межами $\Gamma_\ell, \ell = 1, 2$ і нехай $\bar{D}_1 \subset D_2$.

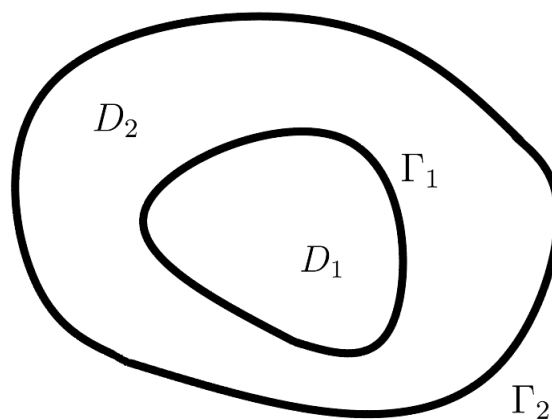


Рис. 1.1: Область розв'язку

Нехай Φ позначає швидкість потоку, P – тиск в D_1 , а w – функція зміщення в D_2 . Тоді виконуються наступні рівняння

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu \Delta \Phi = f^1 - \nabla P \quad \text{в } D_1 \times (0, \infty)$$

та

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = f^2 \quad \text{в } D_2 \times (0, \infty),$$

де $\mu > 0$ – задана константа, а $f^\ell, \ell = 1, 2$ – задані функції. Крайові умови такі

$$w = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty).$$

Початкові умови мають вигляд

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad x \in D_1$$

і

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w^1(x), \quad x \in D_2$$

де w^0 і w^1 — задані функції. Оскільки Φ - швидкість, а w - зміщення, передбачаються наступні умови переходу

$$\Phi = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - P \cdot \nu = \frac{\partial w}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty),$$

де ν — одиничний зовнішній вектор нормалі до Γ_1 .

В якості першого кроку для чисельного розв'язання сформульованої вище задачі розглянемо спрощену зв'язну параболічно-гіперболічну задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в } D_1 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v & \text{в } D_2 \times (0, \infty), \\ v = f & \text{на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial v}{\partial t} & \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} & \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.1)$$

З досліджень Р. Дютре та Ж. Ліонса параболічно-гіперболічних крайових задач (див. [6]), можна ствердити, що система (1.1) має єдиний класичний розв'язок для достатньо гладких вхідних даних.

1.2 Поліноми Лагера та їх властивості

Для чисельної апроксимації розв'язків (1.1) ми будемо використовувати перетворення Лагера. Для цього введемо нормовані поліноми Лагера

$$L_n(z) := \frac{1}{n!} e^z \frac{d^n}{dz^n} z^n e^{-z}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Як безпосередній наслідок (1.2) отримаємо рекурентне співвідношення $L'_{n+1} = L'_n - L_n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, яке, у свою чергу, дає, що

$$L'_n = - \sum_{m=0}^{n-1} L_m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

З (1.2), а потім з використанням (1.3), отримаємо

$$L_n(0) = 1, \quad L'_n(0) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поліноми Лагера утворюють повну ортонормовану систему відносно скалярного добутку

$$(f, g) := \int_0^\infty e^{-z} f(z) g(z) dz$$

у просторі $L^2([0, \infty); \omega)$ дійсних значень функцій із ваговою функцією $\omega(z) = e^{-z}$ (див. [2]). Для будь-якої функції $f \in L^2([0, \infty); \omega)$ маємо розвинення Фур'є-Лагера

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, L_n) L_n,$$

яке збігається у зваженій L^2 нормі. Вибравши фіксований параметр $\kappa > 0$, ми можемо масштабувати це розвинення

$$f(t) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n(\kappa t) \quad (1.4)$$

з коефіцієнтами Фур'є-Лагера

$$f_n := \int_0^{\infty} e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

яке збігається в нормі L^2 із масштабованою вагою $\omega(t; \kappa) = e^{-\kappa t}$. Надалі завжди матиметься на увазі масштабована версія (1.4), коли говоритиметься про розвинення Фур'є-Лагера.

Для обмеженої та неперервно диференційовної функції f (ці умови можна послабити) для коефіцієнтів Фур'є-Лагера f'_n похідної f' шляхом частинного інтегрування та використання (1.3) можна отримати наступне

$$f'_n = -f(0) + \kappa \sum_{m=0}^n f_m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Застосування цього результату до обмеженої та двічі неперервно диференційованої функції f з обмеженою першою похідною дає

$$f''_n = -f'(0) - \kappa(n+1)f(0) + \kappa^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1)f_m, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

для коефіцієнтів Фур'є-Лагера f''_n другої похідної f'' .

1.3 Часткова дискретизація через перетворення Лагера

У випадку нашої задачі, розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x, t) := \kappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) L_n(\kappa t), \quad (1.5)$$

$$v(x, t) := \kappa \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) L_n(\kappa t). \quad (1.6)$$

Теорема 1.1. *Нехай u, v — обмежені і двічі неперервно диференційовні розв'язки (1.1) (з обмеженими першими та другою похідними). Тоді коефіцієнти Фур'є-Лагера у розвиненнях (1.5) та (1.6)*

$$u_n(x) := \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) u(x, t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v_n(x) := \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) v(x, t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

є розв'язками послідовності крайових задач

$$\Delta u_n = \kappa \sum_{m=0}^n u_m \quad \text{в } D_1, \quad (1.7)$$

$$\Delta v_n = \sum_{m=0}^n \beta_{n-m} v_m \quad \text{в } D_2, \quad (1.8)$$

з умовами зв'язності

$$u_n = \kappa \sum_{m=0}^n v_m \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu} = \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_1,$$

з крайовою умовою

$$v_n = f_n \quad \text{на } \Gamma_2 \quad (1.10)$$

і

$$\beta_n = \kappa^2(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Бачимо, що рівняння теплопровідності та хвильове рівняння, зводяться до послідовності стаціонарних задач, які можна записати подібним способом.

Отже, для нашого випадку, гіперболічно-параболічна зв'язна задача може бути записана наступним чином

$$\Delta u_n - \gamma_1^2 u_n = \kappa \sum_{m=0}^{n-1} u_m \quad \text{в } D_1, \quad (1.11)$$

$$\Delta v_n - \gamma_2^2 v_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} v_m \quad \text{в } D_2, \quad (1.12)$$

з умовами зв'язності

$$u_n = \kappa \sum_{m=0}^n v_m \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu} = \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_1,$$

та з крайовою умовою

$$v_n = f_n \quad \text{на } \Gamma_2, \quad (1.14)$$

тут $\gamma_1^2 = \kappa$, $\beta_n = \kappa^2(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а отже $\gamma_2^2 = \beta_0$.

Бачимо, що зв'язну нестационарну задачу можна частково дискретизувати за допомогою перетворень Лагера. Задачу можна також розглянути і у слабкому формулюванні. Тоді перетворення Лагера знову приводять до послідовності стаціонарних задач у відповідних просторах Соболева (див. [3]). Це потенційно може бути корисним для складніших параметрів і функцій з розривами.

Розділ 2. Зведення до граничних інтегральних рівнянь

2.1 Фундаментальні послідовності

Починаємо з означення, а потім продовжимо побудову відповідного фундаментального розв'язку (подібне визначення було використано в [2], де вивчаються добре обумовлені крайові задачі для рівнянь типу (1.11), (1.12)).

Означення 2.1. *Послідовності функцій $\{\Phi_p\}_{p=0}^N$ та $\{\Psi_p\}_{p=0}^N$ називаються фундаментальними послідовностями, якщо*

$$\Delta_x \Psi_p(x, y) - \gamma_1^2 \Psi_p(x, y) - \kappa \sum_{m=0}^{p-1} \Psi_m(x, y) = \delta(x - y)$$

та

$$\Delta_x \Phi_p(x, y) - \gamma_2^2 \Phi_p(x, y) - \sum_{m=0}^{p-1} \beta_{p-m} \Phi_m(x, y) = \delta(x - y),$$

де δ – дельта-функція Дірака.

Для існування фундаментальної послідовності ми можемо покладатися на результати, викладені в [3], де досліджується існування фундаментального розв'язку еліптичних систем. В даній роботі, ми подамо фундамен-

тальну послідовність явно. Щоб подати таку послідовність, нам знадобляться модифіковані функції Бесселя

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \\ I_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

нульового і першого порядку відповідно, а також модифіковані функції Ганкеля

$$\begin{aligned} K_0(z) &= -\left(\ln \frac{z}{2} + C\right) I_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \\ K_1(z) &= \frac{1}{z} + \left(\ln \frac{z}{2} + C\right) I_1(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k)}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

нульового і першого порядку відповідно. Тут, $\psi(0) = 0$,

$$\psi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \dots$$

та $C = 0,57721\dots$ позначає константу Ейлера. Функції I_ℓ і K_ℓ є (незалежними) розв'язками звичаного диференціального рівняння Бесселя з параметром ℓ для $\ell = 0, 1$; детальніше про ці функції можна знайти в [5].

Фундаментальний розв'язок модифікованого рівняння Гельмгольца (1.11), (1.12) з нульовою правою частиною задається формулою $\frac{1}{2\pi} K_0(\gamma|x-y|)$, (див. [5]). Природним буде використати цю функцію, щоб створити фундаментальну послідовність. Нам потрібні поліноми ξ_p і ζ_p , визначені як

$$\xi_p(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} a_{p,2m} r^{2m} \quad \text{та} \quad \zeta_p(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} a_{p,2m+1} r^{2m+1} \quad (2.3)$$

відповідно, для $p = 0, 1, \dots, N$, за умовою, що $\zeta_0 = 0$, а $[q]$ – найбільше ціле число, не більше ніж q . Коефіцієнти в (2.3) генеруються шляхом встановлення $a_{p,0} = 1$ для $p = 0, \dots, N$, а потім використання двох рекурентних відношень,

$$a_{p,p} = -\frac{1}{2\gamma p} \beta_1 a_{p-1,p-1} \quad (2.4)$$

і

$$a_{p,k} = \frac{1}{2\gamma k} \left\{ 4 \left[\frac{k+1}{2} \right]^2 a_{p,k+1} - \sum_{m=k-1}^{p-1} \beta_{p-m} a_{m,k-1} \right\}, \quad k = p-1, \dots, 1, \quad (2.5)$$

для $p = 1, \dots, N$. Прості розрахунки показують, що ці поліноми задовольняють наступним двом послідовностям (зв'язних) звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \xi_p''(r) + \frac{1}{r}\xi_p' - 2\gamma\zeta_p' &= \sum_{m=0}^{p-1} \beta_{p-m}\xi_m, \\ -2\gamma\xi_p' + \zeta_p''(r) - \frac{1}{r}\zeta_p' + \frac{1}{r^2}\zeta_p &= \sum_{m=0}^{p-1} \beta_{p-m}\zeta_m \end{aligned} \quad (2.6)$$

для $p = 0, \dots, N$. Тоді ми маємо,

Теорема 2.2. *Послідовність функцій $\{\Phi_n\}_{n=0}^N$ з*

$$\Phi_n(x, y) = K_0(\gamma|x - y|)\xi_n(|x - y|) + K_1(\gamma|x - y|)\zeta_n(|x - y|) \quad (2.7)$$

для $n = 0, \dots, N$, де K_0 і K_1 – це модифіковані функції Ганкеля порядку нуль і один, див. (2.2), а ξ_p і ζ_p – поліноми, задані (2.3), формують фундаментальну послідовність (1.11) у сенсі Означення 2.1

Теорема 2.3. *Послідовність функцій $\{\Psi_n\}_{n=0}^N$ з*

$$\Psi_n(x, y) = K_0(\gamma|x - y|)\bar{\xi}_n(|x - y|) + K_1(\gamma|x - y|)\bar{\zeta}_n(|x - y|) \quad (2.8)$$

для $n = 0, \dots, N$, де K_0 і K_1 – це модифіковані функції Ганкеля порядку нуль і один, див. (2.2), а $\bar{\xi}_p$ і $\bar{\zeta}_p$ – поліноми, обчислені аналогічно до (2.3), з відповідними коефіцієнтами, формують фундаментальну послідовність (1.12) у сенсі Означення 2.1

$$\bar{\xi}_p(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \bar{a}_{p,2m} r^{2m} \quad \text{та} \quad \bar{\zeta}_p(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \bar{a}_{p,2m+1} r^{2m+1}, \quad (2.9)$$

$$\bar{a}_{p,p} = -\frac{1}{2\gamma p} \beta_1 \bar{a}_{p-1,p-1},$$

$$\bar{a}_{p,k} = \frac{1}{2\gamma k} \left\{ 4 \left[\frac{k+1}{2} \right]^2 \bar{a}_{p,k+1} - \kappa \sum_{m=k-1}^{p-1} \bar{a}_{m,k-1} \right\}, \quad k = p-1, \dots, 1,$$

для $p = 1, \dots, N$.

2.2 Модифіковані потенціали та їх властивості

Розглянемо потенціали простого шару

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \varphi_m(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y), \quad x \in D_1, \\ V_n(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_\ell} \psi_m^\ell(y) \Psi_{n-m}(x, y) ds(y), \quad x \in D_2 \setminus \bar{D}_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

з неперервними густинами φ_n, ψ_n^ℓ для $n = 0, 1, 2, \dots$. З Теорема 1.1 випливає, що потенціали простого шару є розв'язком (1.11) і (1.12). Асимптотична поведінка (див. [5])

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad z \rightarrow \infty, n = 0, 1$$

означає, що обидва потенціали прямують до нуля, при $|x| \rightarrow \infty$ рівномірно для всіх напрямків. Із степеневого ряду (2.2) слідує

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, y) &= \ln \frac{1}{|x - y|} + \tilde{\Phi}_n(x, y), \\ \Psi_n(x, y) &= \ln \frac{1}{|x - y|} + \tilde{\Psi}_n(x, y), \end{aligned}$$

де $\tilde{\Phi}_n$ та $\tilde{\Psi}_n$ неперервно диференційовні в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Отже, класичні властивості закономірності стрибків і закономірностей логарифмічних потенціалів (див. [5]) можна перенести на поточну систему. Отже, маємо наступні перетворення в послідовності граничних інтегральних рівнянь.

2.3 Зведення стаціонарних задач спряження до ГІР

Підставляючи (2.10) з даними (1.13), (1.14) і враховуючи властивості стрибка, отримуємо наступне

Теорема 2.4. *Потенціали простого шару, задані (2.10), є розв'язком задачі (1.11)-(1.14) за умови, що густини є розв'язком такої системи ін-*

тегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_\ell} \psi_m^\ell(y) \Psi_{n-m}(x, y) ds(y) = f_n(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \varphi_m(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) = \kappa \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_\ell} \psi_m^\ell(y) \Psi_{m-p}(x, y) ds(y), \\ \sum_{m=0}^n \varphi_m(x) + \sum_{m=0}^n \psi_n^1(x) + \sum_{m=0}^n \left[\int_{\Gamma_1} \varphi_m(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) - \right. \\ \left. - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_\ell} \psi_m^\ell(s) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Psi_{n-m}(x, y) ds(y) \right] = 0, \quad x \in \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Отже, наша зв'язна задача зведена до системи граничних інтегральних рівнянь (2.11). В зв'язку з виглядом фундаментальних послідовностей, в ядрах отриманої системи інтегральних рівнянь міститимуться логарифмічні особливості, це буде враховано при застосуванні чисельної дискретизації.

Розділ 3. Чисельне розв'язування ГІР

3.1 Параметризація та виділення особливостей

Розглянемо параметризацію наведених вище інтегральних рівнянь. Відтепер будемо вважати, що криві Γ_ℓ , $\ell = 1, 2$ є аналітичними і задаються як

$$\Gamma_\ell = \{x_\ell(s) = (x_{1\ell}(s), x_{2\ell}(s)), s \in [0, 2\pi]\},$$

де $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ є аналітичним і 2π -періодичним з $|x'(t)| > 0$ для всіх t , таких, що орієнтація Γ проти годинникової стрілки.

Наведемо параметричне подання (2.11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}_m^\ell(\sigma) \bar{H}_{\ell,2}^{n-m}(s, \sigma) d\sigma = f_n(x_2(s)), \quad s \in [0, 2\pi], \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_m(\sigma) H_{1,2}^{n-m}(s, \sigma) d\sigma = \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}_m^\ell(\sigma) \bar{H}_{\ell,2}^{m-p}(s, \sigma) d\sigma, \\ \sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\varphi}_n(s)}{|x_1'(s)|} + \sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\psi}_m^1(s)}{|x_1'(s)|} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n \left[\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_m(\sigma) Q_{1,2}^{n-m}(s, \sigma) d\sigma - \right. \\ \left. - \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}_m^\ell(\sigma) \bar{Q}_{\ell,2}^{n-m}(s, \sigma) d\sigma \right] = 0, \quad s \in [0, 2\pi], \end{array} \right. \quad (3.1)$$

для $n = 0, \dots, N$, де для параметризованих густин

$$\tilde{\varphi}_n(s) = \varphi_n(x_1(s)) |x_1'(s)|,$$

$$\tilde{\psi}_n^\ell(s) = \psi_n^\ell(x_\ell(s)) |x_\ell'(s)|.$$

Ядра в (3.1) подані наступним чином

$$\begin{aligned} H_{\ell,k}^0(s, \sigma) &= 2\Phi_0(x_k(s), x_\ell(\sigma)), \\ H_{\ell,k}^n(s, \sigma) &= 2\Phi_n(x_k(s), x_\ell(\sigma)), \\ \bar{H}_{\ell,k}^n(s, \sigma) &= 2\Psi_n(x_k(s), x_\ell(\sigma)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

та

$$\begin{aligned} Q_{\ell,k}^0(s, \sigma) &= 2 \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(x)} \Big|_{x=x_k(s), y=x_\ell(\sigma)}, \\ Q_{\ell,k}^n(s, \sigma) &= 2 \frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial \nu(x)} \Big|_{x=x_k(s), y=x_\ell(\sigma)}, \\ \bar{Q}_{\ell,k}^n(s, \sigma) &= 2 \frac{\partial \Psi_n(x, y)}{\partial \nu(x)} \Big|_{x=x_k(s), y=x_\ell(\sigma)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

для $s \neq \sigma, \ell, k = 1, 2, n = 1, \dots, N$. Функції Φ_n, Ψ_n – фундаментальні послідовності.

Ми запишемо ядра таким чином, щоб сингулярності стали явними, що полегшить застосування чисельних наближень граничних інтегралів, що містять такі ядра.

Для сингулярних ядер $H_{\ell,\ell}^n$ у (3.2), використовуючи явний вираз (2.1) для елементів у фундаментальній послідовності разом із розкладами (2.1)-(2.2) і керуючих відносин (2.3)-(2.6), обчислення призводять до наступного представлення:

$$H_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) = H_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + H_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma),$$

де

$$\begin{aligned} H_{\ell,\ell}^{0,1}(s, \sigma) &= -I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|), \\ H_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) &= -I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) (\xi_n(|x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) - 1) + \\ &+ I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) \zeta_n(|x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) \end{aligned} \quad (3.4)$$

та

$$H_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma) = H_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) - H_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right)$$

з діагональними значеннями

$$\begin{aligned} H_{\ell,\ell}^{0,2}(s, s) &= -2C - 1 - 2 \ln \left(\frac{\gamma_\ell |x'_\ell(s)|}{2} \right), \\ H_{\ell,\ell}^{n,2}(s, s) &= \frac{2a_{n,1}}{\gamma_\ell}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.5)$$

де C є константою Ейлера, визначеною вище, а коефіцієнт $a_{n,1}$ визначається (2.5). Для представлення ядер $Q_{\ell,k}^n$ введемо функцію

$$h_{\ell,k}(s, \sigma) = \frac{(x_{\ell,1}(s) - x_{k,1}(\sigma)) x'_{\ell,2}(s) - (x_{2,\ell}(s) - x_{k,2}(\sigma)) x'_{\ell,1}(s)}{|x_k(\sigma) - x_\ell(s)|}$$

разом з поліномами

$$\tilde{\xi}_n(r) = \gamma_\ell \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2m} r^{2m} - 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} m a_{n,2m+1} r^{2m}$$

та

$$\tilde{\zeta}_n(r) = \gamma_\ell \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2m+1} r^{2m+1} - 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m a_{n,2m} r^{2m-1}.$$

Тоді ядра $Q_{\ell,k}^n$ можуть бути записані наступним чином

$$Q_{\ell,k}^0(s, \sigma) = 2\gamma_\ell h_{\ell,k}(s, \sigma) K_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|)$$

та

$$Q_{\ell,k}^n(s, \sigma) = 2h_{\ell,k}(s, \sigma) \{K_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\xi}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) + K_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\zeta}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|)\}$$

для $s \neq \sigma$ і $n = 1, 2, \dots, N$. Ядра $Q_{\ell,\ell}^n$ мають логарифмічні особливості. Подібно до обчислень, які застосовувалися для переписування сингулярних ядер $H_{\ell,\ell}^n$, отримаємо

$$Q_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) = Q_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + Q_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma),$$

де

$$Q_{\ell,\ell}^{0,1}(s, \sigma) = \gamma_\ell h_{\ell,\ell}(s, \sigma) I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|),$$

$$Q_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) = h_{\ell,\ell}(s, \sigma) \{I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\xi}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) - I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\zeta}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|)\}$$

та

$$Q_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma) = Q_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) - Q_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right)$$

з діагональними значеннями

$$Q_{\ell,\ell}^{0,2}(s, s) = \frac{x'_{\ell,2}(s)x''_{\ell,1}(s) - x'_{\ell,1}(s)x''_{\ell,2}(s)}{|x'_\ell(s)|^2}, \quad Q_{\ell,\ell}^{n,2}(s, s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Аналогічні обчислення можуть бути виконані для ядер $\bar{H}_{\ell,k}^n$ та $\bar{Q}_{\ell,k}^n$. Для сингулярних ядер $\bar{H}_{\ell,\ell}^n$ у (3.2)

$$\bar{H}_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) = \bar{H}_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \bar{H}_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma),$$

де

$$\bar{H}_{\ell,\ell}^{0,1}(s, \sigma) = -I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|),$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) = & -I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) (\bar{\xi}_n(|x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) - 1) + \\ & + I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) \bar{\zeta}_n(|x_\ell(s) - x_\ell(\sigma)|) \end{aligned} \quad (3.6)$$

та

$$\bar{H}_{\ell,\ell}^{n,2}(s, \sigma) = \bar{H}_{\ell,\ell}^n(s, \sigma) - \bar{H}_{\ell,\ell}^{n,1}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right)$$

з діагональними значеннями

$$\begin{aligned}\bar{H}_{\ell,\ell}^{0,2}(s,s) &= -2C - 1 - 2 \ln \left(\frac{\gamma_\ell |x'_\ell(s)|}{2} \right), \\ \bar{H}_{\ell,\ell}^{n,2}(s,s) &= \frac{2\bar{a}_{n,1}}{\gamma_\ell}, \quad n = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\tag{3.7}$$

де C є константою Ейлера, визначеною вище, а коефіцієнт $\bar{a}_{n,1}$ визначається (2.9). Для представлення ядер $\bar{Q}_{\ell,k}^n$, подібно до $Q_{\ell,k}^n$, введемо поліноми

$$\tilde{\xi}_n(r) = \gamma_\ell \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{a}_{n,2m} r^{2m} - 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} m \bar{a}_{n,2m+1} r^{2m}$$

та

$$\tilde{\zeta}_n(r) = \gamma_\ell \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \bar{a}_{n,2m+1} r^{2m+1} - 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m \bar{a}_{n,2m} r^{2m-1}.$$

Тоді ядра $\bar{Q}_{\ell,k}^n$ можуть бути записані наступним чином

$$\bar{Q}_{\ell,k}^0(s,\sigma) = 2\gamma_\ell h_{\ell,k}(s,\sigma) K_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|)$$

та

$$\begin{aligned}Q_{\ell,k}^n(s,\sigma) &= 2h_{\ell,k}(s,\sigma) \{ K_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\xi}_n(|x_\ell(t) - x_k(\sigma)|) + \\ &\quad + K_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\zeta}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \}\end{aligned}$$

для $s \neq \sigma$ і $n = 1, 2, \dots, N$. Ядра $\bar{Q}_{\ell,\ell}^n$ мають логарифмічні особливості. Подібно до попередніх обчислень, отримаємо

$$\bar{Q}_{\ell,\ell}^n(s,\sigma) = \bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,1}(s,\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) + \bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,2}(s,\sigma),$$

де

$$\bar{Q}_{\ell,\ell}^{0,1}(s,\sigma) = \gamma_\ell h_{\ell,\ell}(s,\sigma) I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|),$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,1}(s,\sigma) &= h_{\ell,\ell}(s,\sigma) \{ I_1(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\xi}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) - \\ &\quad - I_0(\gamma_\ell |x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \tilde{\zeta}_n(|x_\ell(s) - x_k(\sigma)|) \}\end{aligned}$$

та

$$\bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,2}(s,\sigma) = \bar{Q}_{\ell,\ell}^n(s,\sigma) - \bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,1}(s,\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right)$$

з діагональними значеннями

$$\bar{Q}_{\ell,\ell}^{0,2}(s,s) = \frac{x'_{\ell,2}(s)x''_{\ell,1}(s) - x'_{\ell,1}(s)x''_{\ell,2}(s)}{|x'_\ell(s)|^2}, \quad \bar{Q}_{\ell,\ell}^{n,2}(s,s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

3.2 Квадратурні формули на основі тригонометричного інтерполювання

Відповідно до загальних ідей, викладених у [5], ми будемо квадратури для відповідних інтегралів:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \tau}{2} \right) d\tau.$$

Використаємо тригонометричну інтерполяцію з рівновіддаленими вузлами. Нехай

$$s_j = \frac{j\pi}{M}, \quad j = 0, \dots, 2M - 1, \quad M \in \mathbb{N}$$

– рівновіддалений поділ відрізка $[0, 2\pi]$ в просторі T_N тригонометричних поліномів виду:

$$q(s) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \cos ks + \sum_{k=1}^M \beta_k \sin ks, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C},$$

Базис Лагранжа для тригонометричної інтерполяції має вигляд:

$$L_j(s) = \frac{1}{2M} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(s - s_j) + \cos n(s - s_j) \right\},$$

Застосуємо наступні квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{2M-1} f(s_i), \quad (3.8)$$

шляхом заміни неперервної періодичної функції f її тригонометричною інтерполяцією з використанням базису Лагранжа отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \tau}{2} \right) d\tau \approx \sum_{i=0}^{2M-1} R_j(s) f(s_i), \quad (3.9)$$

де вагові функції R_j :

$$R_j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \tau}{2} \right) L_j(\tau) d\tau, \quad j = 0, \dots, 2M - 1.$$

Нескладні обчислення дають (див. [5]):

$$R_j(s) = -\frac{1}{2M} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \cos k(s - s_j) - \frac{1}{M} \cos M(s - s_j) \right). \quad (3.10)$$

Ця квадратура рівномірно збіжна для всіх тригонометричних многочленів, оскільки за побудовою інтегрує тригонометричні многочлени зі степенем, меншим або рівним M , або $2M - 1$.

3.3 Метод Нистрьома

Завдяки перетворенням ядер, зроблених у минулому розділі, можемо застосувати наведені тригонометричні квадратури, отримаємо

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = f_{2,n}(s_i), \\
 & \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \tilde{\varphi}_{m,j} \frac{1}{2M} H_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) = \kappa \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^{m-p}(s_i, s_j) + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{m-p,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{m-p,2}(s_i, s_j) \right] \right\}, \\
 & \sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\varphi}_{m,i}(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\psi}_m^1(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \tilde{\varphi}_{m,j} \frac{1}{2M} Q_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) - \\
 & - \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{Q}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{Q}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

для $i = 0, \dots, 2M - 1$.

Важливо зазначити, що дана система є рекурентною, тобто нам не потрібно розв'язувати систему для знаходження всіх невідомих густин одночасно. Натомість, значення обчислюватимуться послідовно, тобто на першому кроці обчислюватимуться значення лише для $\tilde{\psi}_0^\ell$ та $\tilde{\varphi}_0$. Знайдені розв'язки використовуватимуться в наступних кроках для обчислення нових значень густин.

3.4 Перший крок

Розглянемо вигляд дискретизованої системи для знаходження 0-х значень густин, підставивши $n = 0$, отримаємо систему

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\psi}_{0,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^0(s_i, s_j) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\psi}_{0,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = f_2(s_i), \\
& \sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{\varphi}_{0,j} \frac{1}{2M} H_{1,2}^0(s_i, s_j) - \kappa \sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\psi}_{0,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^0(s_i, s_j) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\psi}_{0,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = 0, \\
& \frac{\tilde{\varphi}_{0,i}(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \frac{\tilde{\psi}_{0,i}^1(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{\varphi}_{0,j} \frac{1}{2M} Q_{1,2}^0(s_i, s_j) - \\
& - \sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\psi}_{0,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^0(s_i, s_j) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\psi}_{0,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{Q}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{Q}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

для $i = 0, \dots, 2M - 1$.

Для зручності представимо нашу систему в наступному вигляді

$$\begin{bmatrix} A_1(i, j) & B_1(i, j) & C_1(i, j) \\ A_2(i, j) & B_2(i, j) & C_2(i, j) \\ A_3(i, j) & B_3(i, j) & C_3(i, j) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_0 \\ \tilde{\psi}_0^1 \\ \tilde{\psi}_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

тут

$$\begin{aligned}
A_1(i, j) &= 0, \\
A_2(i, j) &= \frac{1}{2M} H_{1,2}^0(s_i, s_j), \\
A_3(i, j) &= \begin{cases} \frac{1}{2M} Q_{1,2}^0(s_i, s_j), & i \neq j, \\ \frac{1}{2M} Q_{1,2}^0(s_i, s_j) + \frac{1}{|x_1'(s_i)|}, & i = j, \end{cases} \\
B_1(i, j) &= \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^0(s_i, s_j), \\
B_2(i, j) &= -\frac{\kappa}{2M} \bar{H}_{1,2}^0(s_i, s_j), \\
B_3(i, j) &= \begin{cases} -\frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^0(s_i, s_j), & i \neq j, \\ -\frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^0(s_i, s_j) + \frac{1}{|x_1'(s_i)|}, & i = j, \end{cases} \\
C_1(i, j) &= \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right], \\
C_2(i, j) &= -\kappa \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right], \\
C_3(i, j) &= \left[R_j(s_i) \bar{Q}_{2,2}^{0,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{Q}_{2,2}^{0,2}(s_i, s_j) \right].
\end{aligned}$$

3.5 Повна система

Розглянемо перше рівняння рекурентної системи (3.11):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \right. \\
& \left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = f_{2,n}(s_i).
\end{aligned}$$

Виконавши для цього рівняння нескладні перетворення

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \bar{B}_1^m(i, j) + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \bar{C}_1^m(i, j) \right\} = f_{2,n}(s_i),$$

отримаємо наступний вигляд

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\psi}_{n,j}^1 \bar{B}_1^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^1 \bar{B}_1^m(i, j) + \tilde{\psi}_{n,j}^2 \bar{C}_1^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^2 \bar{C}_1^m(i, j) \right\} = f_{2,n}(s_i),$$

$$i = 0, \dots, 2M - 1.$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^m(i, j) &= 0, \\ \bar{B}_1^m(i, j) &= \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j), \\ \bar{C}_1^m(i, j) &= \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подібним чином для другого рівняння з (3.11):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \tilde{\varphi}_{m,j} \frac{1}{2M} H_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) &= \kappa \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^m \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{H}_{1,2}^{m-p}(s_i, s_j) + \right. \\ &\left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{m-p,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{m-p,2}(s_i, s_j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

звідси

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \sum_{m=0}^n \tilde{\varphi}_{m,j} \bar{A}_2^m(i, j) + \sum_{m=0}^n \tilde{\psi}_{m,j}^1 \bar{B}_2^m(i, j) + \sum_{m=0}^n \tilde{\psi}_{m,j}^2 \bar{C}_2^m(i, j) \right\} = 0.$$

Запишемо в представленні, аналогічному до першого рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\varphi}_{n,j} \bar{A}_2^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{m,j} \bar{A}_2^m(i, j) \right. \\ + \tilde{\psi}_{n,j}^1 \bar{B}_2^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^1 \bar{B}_2^m(i, j) \\ \left. + \tilde{\psi}_{n,j}^2 \bar{C}_2^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^2 \bar{C}_2^m(i, j) \right\} = 0, \quad i = 0, \dots, 2M - 1. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\bar{A}_2^m(i, j) &= \frac{1}{2M} H_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j), \\
\bar{B}_2^m(i, j) &= -\frac{\kappa}{2M} \sum_{p=0}^m \bar{H}_{1,2}^{m-p}(s_i, s_j), \\
\bar{C}_2^m(i, j) &= -\kappa \sum_{p=0}^m \left[R_j(s_i) \bar{H}_{2,2}^{m-p,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{H}_{2,2}^{m-p,2}(s_i, s_j) \right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Тепер для третього рівняння з (3.11):

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\varphi}_{m,i}(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \sum_{m=0}^n \frac{\tilde{\psi}_m^1(s_i)}{|x'_1(s_i)|} + \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \tilde{\varphi}_{m,j} \frac{1}{2M} Q_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) - \\
&- \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^n \left\{ \tilde{\psi}_{m,j}^1 \frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\psi}_{m,j}^2 \left[R_j(s_i) \bar{Q}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{Q}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

теж приведемо до уніфікованого вигляду

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2M-1} \left\{ \tilde{\varphi}_{n,j} \bar{A}_3^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{m,j} \bar{A}_3^m(i, j) \right. \\
&\quad + \tilde{\psi}_{n,j}^1 \bar{B}_3^n(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^1 \bar{B}_3^m(i, j) \\
&\quad \left. + \tilde{\psi}_{n,j}^2 \bar{C}_3^m(i, j) + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{\psi}_{m,j}^2 \bar{C}_3^m(i, j) \right\} = 0, \quad i = 0, \dots, 2M - 1.
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3^m(i, j) &= \begin{cases} \frac{1}{2M} Q_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j), & i \neq j, \\ \frac{1}{2M} Q_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \frac{1}{|x_1'(s_i)|}, & i = j, \end{cases} \\
\bar{B}_3^m(i, j) &= \begin{cases} -\frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j), & i \neq j, \\ -\frac{1}{2M} \bar{Q}_{1,2}^{n-m}(s_i, s_j) + \frac{1}{|x_1'(s_i)|}, & i = j, \end{cases} \\
\bar{C}_3^m(i, j) &= \left[R_j(s_i) \bar{Q}_{2,2}^{n-m,1}(s_i, s_j) + \frac{1}{2M} \bar{Q}_{2,2}^{n-m,2}(s_i, s_j) \right].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

В результаті, поєднавши отримані перетворення, можемо скласти наступне представлення знаходження густин нашої задачі:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^n(i, j) & \bar{B}_1^n(i, j) & \bar{C}_1^n(i, j) \\ \bar{A}_2^n(i, j) & \bar{B}_2^n(i, j) & \bar{C}_2^n(i, j) \\ \bar{A}_3^n(i, j) & \bar{B}_3^n(i, j) & \bar{C}_3^n(i, j) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{\psi}_n^1 \\ \tilde{\psi}_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 - \sum_{m=0}^{n-1} [\tilde{\varphi}_m \bar{A}_1^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^1 \bar{B}_1^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^2 \bar{C}_1^m(i, j)] \\ - \sum_{m=0}^{n-1} [\tilde{\varphi}_m \bar{A}_2^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^2 \bar{B}_2^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^2 \bar{C}_2^m(i, j)] \\ - \sum_{m=0}^{n-1} [\tilde{\varphi}_m \bar{A}_3^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^2 \bar{B}_3^m(i, j) + \tilde{\psi}_m^2 \bar{C}_3^m(i, j)] \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$n = 0, \dots, N$.

Легко бачити, що підставивши $n = 0$ в дану систему, отримаємо систему для першого кроку, аналогічну до (3.13).

3.6 Знаходження розв'язку

Відповідно до (1.5), (1.6), розв'язок задачі подаємо у наступному вигляді

$$u(x, t) \approx u_N(x, t) = \kappa \sum_{n=0}^N u_n(x) L_n(\kappa t), \tag{3.18}$$

$$v(x, t) \approx v_N(x, t) = \kappa \sum_{n=0}^N v_n(x) L_n(\kappa t). \tag{3.19}$$

Параметризуємо подання розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \varphi_m(y) \Phi_{n-m}(x, y) ds(y) \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_m(\sigma) \Phi_{n-m}(x, x_1(\sigma)) d\sigma, \quad x \in D_1, \\
 v_n(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_\ell} \psi_m^\ell(y) \Psi_{n-m}(x, y) ds(y) \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}_m^\ell(\sigma) \Psi_{n-m}(x, x_\ell(\sigma)) d\sigma, \quad x \in D_2.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Оскільки, шукане значення x знаходиться всередині області, тобто $x \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, тоді ніяких особливостей в нас не виникатиме, відповідно можемо отримати наступний вигляд знаходження дискретизованого розв'язку нашої задачі

$$\begin{aligned}
 u_{n,M}(x) &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{\varphi}_m(s_j) \Phi_{n-m}(x, x_1(s_j)), \\
 v_{n,M}(x) &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{\ell=1}^2 \tilde{\psi}_m^\ell(s_j) \Psi_{n-m}(x, x_\ell(s_j)),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$u_{NM}(x, t) = \kappa \sum_{n=0}^N u_{n,M}(x) L_n(\kappa t), \tag{3.22}$$

$$v_{NM}(x, t) = \kappa \sum_{n=0}^N v_{n,M}(x) L_n(\kappa t). \tag{3.23}$$

Розділ 4. Чисельні експерименти

Чисельна реалізація виконана на мові програмування Python3. Використовувалася бібліотека numpy для швидкого виконання матричних обчислень, оскільки numpy виконує команди мовою C, яка є набагато швидшою за Python. Також використовувалася бібліотека scipy, де є реалізовані функції Бесселя, та поліноми Лагера. Необхідних модифікованих функцій Ганкеля в scipy не було, тому використовувалася бібліотека mpmath, яка дозволяє наближено обчислювати нескінченні суми. Для графічного відображення використано бібліотеку matplotlib.

Не зважаючи на швидкодію бібліотеки numru, обчислення відбувалися довго навіть для $M=32$ (3,5 хвилин). Оскільки на кожній ітерації матриця з системи (3.17) заповнюється незалежними один від одного елементами, то для пришвидшення виконання, використано бібліотеку multiprocessing, яка дозволила обчислювати кожен блок матриці паралельно. В результаті, швидкість обчислення для $M=32$ скоротилося до 46 секунд, що є більш ніж 4-кратним пришвидшенням.

4.1 Приклад 1

Розглянемо простий приклад. Маємо двозв'язну область, представлену у вигляді

$$\Gamma_1 = \{x_1(s) = (2 \sin(s), 2 \cos(s)), s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2(s) = (3 \sin(s), 3 \cos(s)), s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\kappa = \gamma_1 = \gamma_2 = 1, f_2(x) = 2.$$

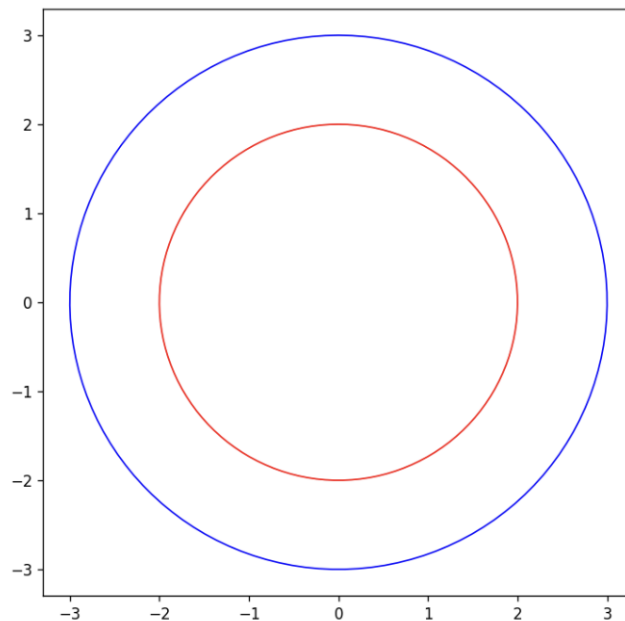


Рис. 4.1: Вигляд області

Так як обидві області обмежені рівними колами, і значення функції на Γ_2 є константним, значення густин є однаковим для кожної точки на границях області. Щоб засвідчитися у наявності збіжності розв'язку, збільшуватимемо кількість точок розбиття і порівняємо отримані значення всередині області.

Виберемо точки $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (2.5, 0)$, $N = 0$, отримаємо наступні результати:

| M | $u_{0,M}(x_1)$ | $v_{0,M}(x_2)$ |
|-----|--------------------|--------------------|
| 8 | 4.5031528973892776 | 3.5821579516512738 |
| 16 | 4.5047037417839855 | 3.5894272474316873 |
| 32 | 4.5046976358530015 | 3.5894325092836996 |
| 64 | 4.5046976357674771 | 3.5894325092783124 |
| 128 | 4.5046976357662163 | 3.5894325092782901 |

Табл. 4.1: Значення $u_{0,M}(x_1), v_{0,M}(x_2), N = 0$

4.2 Приклад 2

Розглянемо подібний приклад до першого. Нехай наша двозв'язна область має наступний вигляд

$$\Gamma_1 = \{x_1(s) = (\sin(s), 2 \cos(s)), s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2(s) = (3 \sin(s), 3 \cos(s)), s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\kappa = \gamma_1 = \gamma_2 = 1, f_2(x) = 2.$$

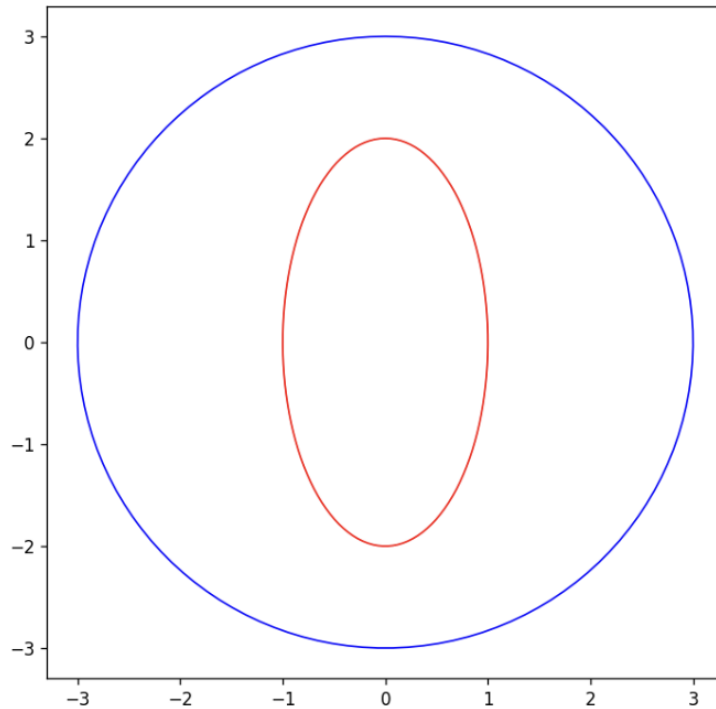


Рис. 4.2: Вигляд області

В цьому випадку подивимося на збіжність вектора густин $\tilde{\varphi}_0$ при різних M .

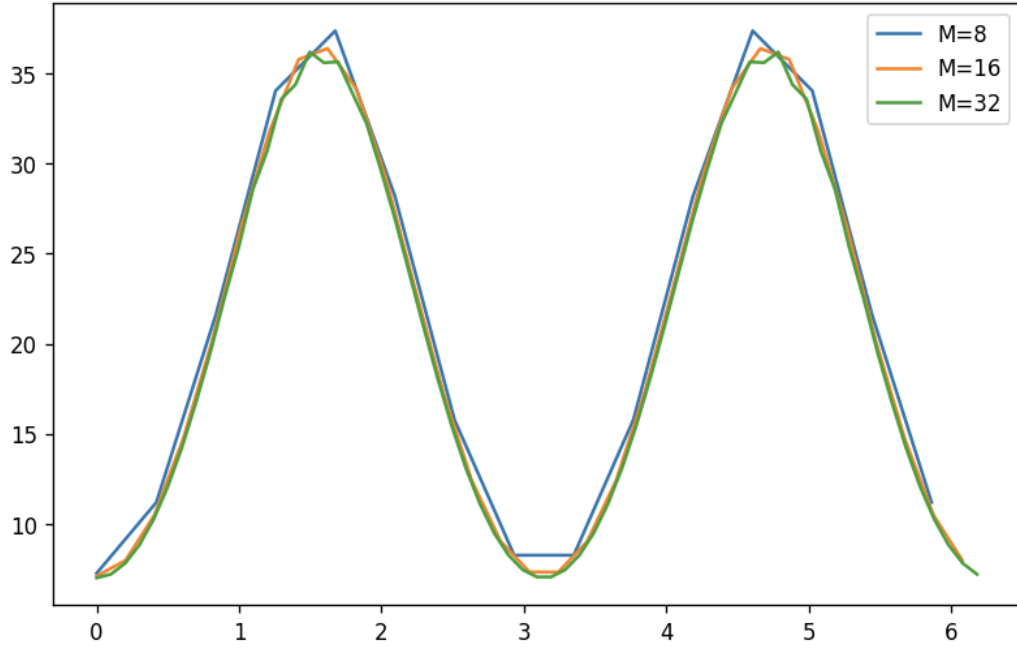


Рис. 4.3: Вигляд вектора густин $\tilde{\varphi}_0$

Окрім збіжності, можемо спостерігати, що значення $\tilde{\varphi}_0$ збільшуються, наближаючись до $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{3\pi}{2}$, оскільки в цих точках відстань між Γ_1 і Γ_2 є найменшою.

Виберемо точки $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 0)$, $N = 0$, отримаємо наступні результати:

| M | $v_{0,M}(x_1)$ | $u_{0,M}(x_2)$ |
|-----|-------------------|--------------------|
| 8 | 4.910456414349972 | 13.111043184168800 |
| 16 | 4.920401115760586 | 13.117397273888358 |
| 32 | 4.920384679567755 | 13.117397856828976 |
| 64 | 4.920384788205781 | 13.117397856827049 |
| 128 | 4.920384787910321 | 13.117397856827152 |

Табл. 4.2: Значення $v_{0,M}(x_1)$, $u_{0,M}(x_2)$, $N = 0$

Висновки

Таким чином, в даній роботі було запропоновано метод розв'язування зв'язної (тривимірної) параболічно-гіперболічної початково-крайової задачі. Пропонований метод ґрунтується на дискретизації з використанням перетворень Лагера, з подальшим зведенням до граничних інтегральних рівнянь, що дало змогу зменшити розмірність задачі на дві одиниці. Показали, що, як рівняння теплопровідності, так і хвильове рівняння може бути подане у вигляді послідовності неоднорідних рівнянь Гельмгольца, з основною відмінністю лише у вигляді коефіцієнтів для відповідних рівнянь.

Також наведено виділення логарифмічних особливостей у напівдискретизованій системі та подальше її приведення до повністю дискретної системи шляхом зведення до 2π -періодичних рівнянь і подальшого використання тригонометричних квадратур, що дає змогу обраховувати розв'язки поставленої задачі чисельно.

Продемонстровано декілька прикладів чисельних експериментів на першій ітерації для знаходження значень всередині області. Показано збіжність при збільшенні розміру розбиття.

Література

- [1] *Chapko, R., Kress, R.*, On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations. In Eds. R. P. Agarwal, O'Regan. Series in Mathematical Analysis and Application - Vol. 2, Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications.- Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000, 55–69.
- [2] *Chapko, R., Kress, R.*, Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations, *J. Integral Equations Appl.* 9 (1997), 47–69.
- [3] *Chapko, R., Johansson, B.T.*, A boundary integral equation method for numerical solution of parabolic and hyperbolic Cauchy problems. *Appl. Numer. Math.* 129, 104–119 (2018).
- [4] *Abramowitz, M., Stegun, I.A.*, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York (1972).
- [5] *Kress R.*, Linear Integral Equations, second ed., Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [6] *Dautray R., Lions J.-L.*, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol 5. Springer, 2000
- [7] *Cakoni F., Kress R.*, Integral equations for inverse problems in corrosion detection from partial Cauchy data, *Inverse Probl. Imaging* 1 (2007) 229–245.