

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра прикладної математики

Магістерська робота

на тему «Комп'ютерне моделювання розв'язування
збурених одновимірних задач
дифузії-адвекції-реакції»

Студента 2 курсу групи ПМПм-22

Галузь знань 11 Математика та статистика

Спеціальність 113 Прикладна математика

Щерби М. Ю.

Керівник Кухарський В. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Початково-крайова задача дифузії-адвекції-реакції	5
2 Варіаційне формулювання задачі	6
3 Напівдискретизація за просторовими змінними	7
4 Напівдискретизація за часовою змінною	10
5 Результати числових експериментів	12
Висновки	16
Список використаних джерел	17

ВСТУП

Завдяки розвитку обчислювальної техніки з'являються нові методи ефективного обчислення якісних апроксимацій розв'язків наукових та інженерних задач, що зумовлено швидким зростанням потужностей комп'ютерних установок. Однак, незважаючи на успіхи, існують прикладні проблеми, для вирішення яких просте нарощування потужностей обчислювальних ресурсів недостатнє. Серед цих проблем особливо важливим є клас сингулярно збурених задач, наприклад, моделі дифузії-адвекції-реакції (ДАР), що вивчали відомі фахівці, такі як Ainsworth M., Babuška I., Ciarlet P., Lions J., Miller N. J. J., Rappaz J., Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L., Verhulst F. [4–6, 9, 20, 24, 25].

Задачі, які містять сингулярності, можуть призводити до значних помилок при класичних методах апроксимації, що проявляється у великих паразитичних осциляціях розв'язків. Незважаючи на те, що такі задачі не є оптимальними для демонстрації переваг числових методів порівняно з аналітичними, моделі дифузії-адвекції-реакції (ДАР) мають ряд особливостей, які вимагають використання числового аналізу. Ці особливості характерні для більшості прикладних задач, таких як некласична геометрія реальних об'єктів, нелінійність, багатокomпонентність та нестационарність природних процесів. Значний внесок у вивчення цих задач зробили Ainsworth M. [4], Braess D. [8], Ciment M., Chang K. W., Deuffhard P. [11], Johnson C. [18], Necas J. [21], Quarteroni A. [23], Rappaz J. [19], Siebert K. G. [7], Stein, E. [12–14], Trudinger N. [16], а також [17].

У зв'язку з великою кількістю теоретично і практично важливих задач, що включають моделі дифузії-адвекції-реакції, побудова та аналіз ефективних та надійних проекційно-сіткових схем є актуальною та важливою проблемою в обчислювальній математиці. Ці схеми мають здатність розраховувати наближені розв'язки еволюційних сингулярних збурень ДАР з наперед гарантованою точністю.

Головною метою дослідження є розробка числових методів для ефективного та надійного розв'язування задач ДАР з сингулярними збуреннями за допомогою проекційно-сіткових методів.

Дослідженням охоплено одновимірні задачі дифузії-адвекції-реакції

зі сингулярними збуреннями.

У цій роботі досліджується схематика методу скінченних елементів (МСЕ) та її характеристики відносно стійкості, збіжності, ефективності та надійності.

Для проведення досліджень використовуються сучасні методи варіаційного числення, функціонального аналізу та обчислювальної математики. Зокрема, використовується метод Петрова-Гальоркіна, який базується на використанні просторів апроксимацій МСЕ.

1 ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ-РЕАКЦІЇ

Розглянемо початково-крайову задачу дифузії-адвекції-реакції

$$\begin{aligned}
 u_t - \epsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu &= f && \text{у } (0, T] \times \Omega, \\
 u &= 0 && \text{на } [0, T] \times \partial\Omega, \\
 u(0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{у } \Omega,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$ — обмежена область, $\epsilon > 0$ — коефіцієнт дифузії, $\mathbf{b} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))^d$ — поле конвекції з $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, $c \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ — невід’ємний коефіцієнт реакції, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$, $T > 0$ — кінцевий час. Для зручності викладу використовуються однорідні крайові умови Діріхле. Неоднорідні крайові умови Діріхле будуть розглянуті в числових експериментах.

Будемо вважати, що задача (1.1) є коректно поставлена, див. [15, 22].

2 ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язок $u \in C^1(0, T; C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))$ задачі (1.1) часто називають сильним розв'язком, оскільки вимоги його регулярності настільки високі, що в багатьох ситуаціях такого розв'язку може й не існувати. Звідси слідує потреба узагальнити поняття розв'язку до менш гладких функцій, що приводить нас до так званого слабкого розв'язку. У цій роботі ми будемо шукати саме такі узагальнені розв'язки і для цього використаємо варіаційний підхід до постановки задачі (1.1).

Нехай $V = H_0^1(\Omega)$. Варіаційним розв'язком (1.1) є сильно диференційовне відображення $u : [0, T] \rightarrow V$, що задовольняє $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \in V$ та

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

де $a(u, v) = (\epsilon \nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u + cu, v)$.

Будемо вважати, що задача (2.1) є коректно поставлена, див. [22].

Відомо [15], що розв'язок початково-крайової задачі (1.1), якщо він існує, буде й розв'язком варіаційної задачі (2.1). Зворотнє твердження не завжди правильне.

3 НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

Основна ідея схеми Гальоркіна [10] полягає в тому, що ми замінюємо нескінченновимірний простір V , в якому шукається розв'язок задачі (2.1), на його скінченновимірний підпростір $V^h \subset V$. Це дозволяє апроксимувати неперервний розв'язок u дискретним розв'язком u^h , де індекс h відображає залежність від параметрів дискретизації, таких як розмір сітки або кількість ступенів вільності.

Побудуємо в інтервалі Ω деяке розбиття із скінченних елементів I_k . Щоб стандартизувати обчислення на рівні елементів, визначимо стандартний елемент $I_{\text{ст}} := \{\xi \mid -1 < \xi < +1\}$. Стандартний елемент відображається на k -ий елемент функцією $x = \frac{1-\xi}{2}x_k + \frac{1+\xi}{2}x_{k+1}$, $\xi \in I_{\text{ст}}$. Обернене відображення: $\xi = \frac{2x-x_k-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}$, $x \in I_k$.

Простір многочленів степеня p , визначених на стандартному елементі $I_{\text{ст}}$, будемо позначати $\mathcal{S}^p(I_{\text{ст}})$. Базисні функції $\mathcal{S}^p(I_{\text{ст}})$ називаються функціями форми.

Розглянемо ієрархічні функції форми, що є масштабованими інтегралами многочленів Лежандра. Використовуватимемо позначення $N_i(\xi)$ ($i = 1, 2, \dots, p+1$) для функцій форми. $N_1(\xi) := \frac{1-\xi}{2}$, $N_2(\xi) := \frac{1+\xi}{2}$, $N_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i-3}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-2}(t) dt$, $i = 3, 4, \dots, p+1$, де $P_i(t)$ – многочлени Лежандра. Ці функції форми мають такі важливі властивості:

- Ортогональність. Для $i, j \geq 3$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Ця властивість прямо впливає з ортогональності многочленів Лежандра.

- Множина функцій форми простору $\mathcal{S}^{p-1}(I_{\text{ст}})$ є підмножиною функцій форми простору $\mathcal{S}^p(I_{\text{ст}})$. Функції форми, що мають таку властивість, називаються ієрархічними.
- $N_i(-1) = N_i(+1) = 0$ для $i \geq 3$.

Перші п'ять ієрархічних функцій форми зображено на рис. 3.1.

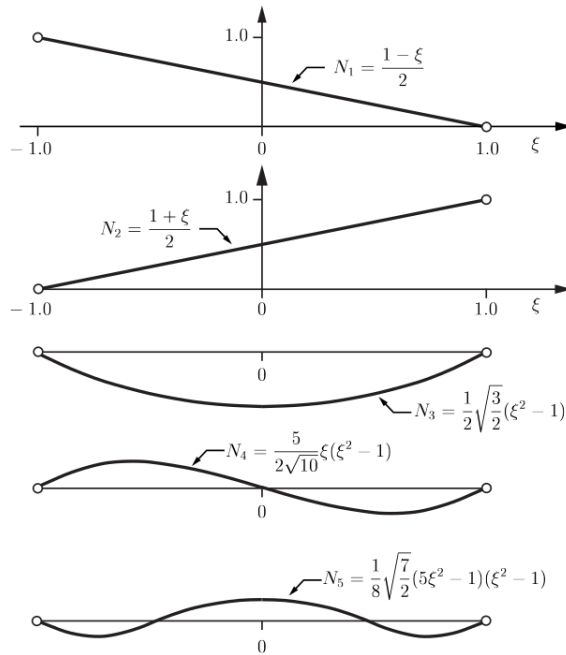


Рисунок 3.1 — Перші п'ять ієрархічних функцій форми в одному вимірі

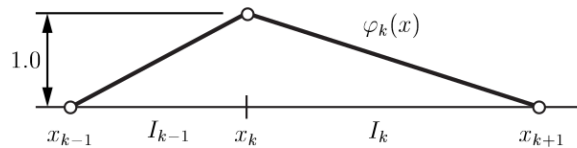


Рисунок 3.2 — Типова вузлова базисна функція

Базис простору V^h міститиме вузлові функції (ненульові у вузлах) та функції, відображені з внутрішніх функцій форми. Як показано на рис. 3.2, елементи I_{k-1} та I_k мають спільний вузол k . Функція $\phi_k(x)$ складається з двох відрізків. Один відрізок відображений з функції N_2 , інший – з функції N_1 .

Просторова напівдискретизація МСЕ на розбитті інтервалу Ω приводить до відокремлення незалежних змінних з апроксимаціями вигляду $u(t) \approx u^h(t) := u^h(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$.

Використання стандартної процедури Гальоркіна до задачі (2.1) зводить її до жорсткої задачі Коші для системи з N диференціальних рів-

нянь першого порядку

$$\sum_{m=1}^N [(\phi_m, \phi_l) q'_m(t) + a(\phi_m, \phi_l) q_m(t)] = (f(t), \phi_l) \quad \forall t \in (0, T]$$

або в матричному вигляді

$$B\mathbf{q}'(t) + A\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \forall t \in (0, T] \quad (3.1)$$

з початковою умовою

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \{q_l(t)\}_{l=1}^N, \mathbf{q}'(t) = \{q'_l(t)\}_{l=1}^N, \\ B &= \{(\phi_l, \phi_m)\}_{l,m=1}^N, A = \{a(\phi_l, \phi_m)\}_{l,m=1}^N, \mathbf{F}(t) = \{(f(t), \phi_l)\}_{l=1}^N. \end{aligned}$$

Для числового інтегрування скористаємося квадратурними формулами Гауса.

Досліджено [1, 2], що при використанні простору кусково-лінійних функцій V^h , метод може дати недостатньо точні результати, особливо в тих випадках, коли $\epsilon \ll |\mathbf{b}| \cdot h$. Ці випадки часто зустрічаються в прикладних задачах моделювання фізичних процесів [3]. У таких ситуаціях з'являються фіктивні осциляції, що потребують зменшення кроку розбиття h . Для оцінки нерівності зручно використовувати відношення Пекле $Pe = \frac{|\mathbf{b}| \cdot h}{\epsilon}$.

4 НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Поділимо відрізок часу $[0, T]$ на M рівних (для простоти) проміжків $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0..M - 1$ з кроком $\Delta t := \frac{T}{M}$ та апроксимуватимемо розв'язок $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ задачі (3.1)-(3.2) на кожному $[t_j, t_{j+1}]$ лінійною функцією вигляду

$$\mathbf{q}_{\Delta t}(t) = \mathbf{q}^j + \Delta t \omega_j(t) \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

де $\omega_j(t) = \frac{t-t_j}{\Delta t}$, $\mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{q}^{j+1} - \mathbf{q}^j}{\Delta t}$, $j = 0..M - 1$.

Безпосередня підстановка апроксимацій $\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{q}_{\Delta t}(t)$ та $\mathbf{q}'(t) \approx \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}$ в рівняння (3.1) приводить до дискретизованої задачі вигляду:

задано $\mathbf{q}^0 \in \mathbb{R}^N$, $\Delta t > 0$;

знайти пару векторів $\mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{q}^{j+1} \in \mathbb{R}^N$ таких, що

$$B \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} + A \left(\mathbf{q}^j + \Delta t \omega_j(t) \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{F}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$\mathbf{q}^{j+1} := \mathbf{q}^j + \Delta t \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0..M - 1.$$

Знаходження розв'язку цієї задачі передбачає насамперед відшукування розв'язку системи алгебричних рівнянь

$$B \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} + A \left(\mathbf{q}^j + \Delta t \omega_j(t) \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{F}(t).$$

Беручи до уваги, що $0 \leq \omega_j(t) \leq 1$, спростимо останнє рівняння до вигляду $B \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} + A \left(\mathbf{q}^j + \Delta t \theta \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{F}(t_{j+\theta})$ з довільним значенням параметра $\theta \in [0, 1]$ і $t_{j+\theta} := t_j + \theta \Delta t$.

Задачі

задано $\mathbf{q}^0 \in \mathbb{R}^N$, $\Delta t > 0$ та параметр $\theta \in [0, 1]$;

знайти пару векторів $\mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{q}^{j+1} \in \mathbb{R}^N$ таких, що

$$B \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} + A \left(\mathbf{q}^j + \Delta t \theta \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{F}(t_{j+\theta}), \quad \mathbf{q}^{j+1} := \mathbf{q}^j + \Delta t \mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0..M - 1.$$

єдиним чином визначають послідовність $\{\mathbf{q}^j\}_{j=1}^M$.

Обчислювана послідовність $\{\mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}}\}_{j=0}^{M-1}$ визначає значення швидкості зміни апроксимації на кожному кроці інтегрування $[t_j, t_{j+1}]$, які будемо

інтерпретувати як значення $\mathbf{q}'_{\Delta t} \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right)$, тобто

$$\mathbf{r}^{j+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{q}' \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right), j = 0..M - 1.$$

5 РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Для оцінки похибки розв'язку використовуватимемо таку норму

$$\|u\|_T^2 = \frac{1}{2}\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (5.1)$$

Щоб спростити числове інтегрування за часовою змінною перепишемо норму (5.1) для дискретизованої в часі функції

$$u_{\Delta t}(t) = u^j[1 - \omega_j(t)] + u^{j+1}\omega_j(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$$

так

$$\|u_{\Delta t}\|_T^2 = \frac{1}{2}\|u_{\Delta t}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} dx \sum_{j=1}^{M-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{\partial u_{\Delta t}(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

де

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{\partial u_{\Delta t}(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{\partial u^j}{\partial x} [1 - \omega_j(t)] + \frac{\partial u^{j+1}}{\partial x} \omega_j(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \\ &= \frac{1}{3} \Delta t \left(\left\| \frac{\partial u^j}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\partial u^j}{\partial x}, \frac{\partial u^{j+1}}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u^{j+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Характеристиками збіжності є абсолютна та відносна істинні похибки $e_T^{\text{іст}} = \|u - u^h\|_T$, $\epsilon_T^{\text{іст}} = e_T^{\text{іст}} \|u^h\|_T^{-1}$.

Для зручності було реалізовано програму з формою для задання рівняння. Скріншот наведено на рис. 5.1.

Розглянемо одновимірне рівняння дифузії-адвекції-реакції (1.1) з параметрами $\epsilon = 1$, $\mathbf{b} = (1)$, $c = 1$, $f = 0$ на інтервалі $\Omega = (0, x_{\max})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \quad \text{у } (0, T] \times (0, x_{\max}) \quad (5.2)$$

з такими початковою та крайовими умовами

$$u(0, x) = e^{-x} \quad \text{у } (0, x_{\max}), \quad (5.3)$$

Розв'язування задачі дифузії-адвекції-реакції

ε	<input type="text" value="1e-3"/>	ρ	<input type="text" value="6"/>
b	<input type="text" value="1"/>	N	<input type="text" value="4"/>
c	<input type="text" value="1"/>	M	<input type="text" value="20000"/>
x_max	<input type="text" value="10"/>		
T	<input type="text" value="0.85"/>		
f	<input type="text" value="0"/>		
boundary_left	<input type="text" value="np.exp(1e-3*t)"/>		
boundary_right	<input type="text" value="np.exp(1e-3*t-10)"/>		
boundary_left_deriv	<input type="text" value="1e-3*np.exp(1e-3*t)"/>		
boundary_right_deriv	<input type="text" value="1e-3*np.exp(1e-3*t-10)"/>		
u0	<input type="text" value="np.exp(-x)"/>		
u0_der	<input type="text" value="-np.exp(-x)"/>		
u_exact	<input type="text" value="np.exp(1e-3*t-x)"/>		
u_exact_deriv	<input type="text" value="-np.exp(1e-3*t-x)"/>		

Рисунок 5.1 — Форма для задання рівняння

$$u(t, 0) = e^t \quad \text{на } [0, T], \quad (5.4)$$

$$u(t, x_{\max}) = e^{t-x_{\max}} \quad \text{на } [0, T]. \quad (5.5)$$

Ця задача має точний розв'язок $u(t, x) = e^{t-x}$.

Розв'яжемо задачу (5.2)-(5.5) чисельно для $x_{\max} = 10$ і $T = 0.85$, використовуючи $\theta = 0.5$, $h = 2.5$ та $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-6}$ з різними значеннями степенів поліномів для базисних функцій. Похибки наведено в таблиці 5.1.

Тепер розв'яжемо таку задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0.001 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \quad \text{у } (0, T] \times (0, x_{\max})$$

з початковою умовою (5.3) та крайовими умовами

$$u(t, 0) = e^{0.001t} \quad \text{на } [0, T],$$

$$u(t, x_{\max}) = e^{0.001t-x_{\max}} \quad \text{на } [0, T].$$

Точним розв'язком цієї задачі є $u(t, x) = e^{0.001t-x}$.

Похибки розв'язку цієї задачі наведено в таблиці 5.2.

З таблиць 5.1, 5.2 видно, що зі збільшенням степеня поліномів базисних функцій простору апроксимацій суттєво зменшується істинна похибка розв'язку.

p	$\epsilon_T^{\text{ист}}$
1	$2.90 \cdot 10^{-1}$
2	$5.05 \cdot 10^{-2}$
3	$6.70 \cdot 10^{-3}$
4	$8.02 \cdot 10^{-4}$
5	$9.08 \cdot 10^{-5}$
6	$1.22 \cdot 10^{-6}$
7	$5.31 \cdot 10^{-7}$

Таблиця 5.1 — Збіжність істинних похибок кусково-поліноміальних апроксимацій розв'язку задачі з $\epsilon = 1$ зі збільшенням степеня поліномів базисних функцій із сталими сіткою скінченних елементів і Δt

p	$\epsilon_T^{\text{ист}}$
1	$2.00 \cdot 10^{-1}$
2	$4.22 \cdot 10^{-2}$
3	$6.50 \cdot 10^{-3}$
4	$9.75 \cdot 10^{-4}$
5	$4.68 \cdot 10^{-6}$
6	$5.29 \cdot 10^{-6}$
7	$4.20 \cdot 10^{-7}$
8	$1.19 \cdot 10^{-8}$
9	$1.41 \cdot 10^{-9}$

Таблиця 5.2 — Збіжність істинних похибок кусково-поліноміальних апроксимацій розв'язку задачі з $\epsilon = 0.001$ зі збільшенням степеня поліномів базисних функцій із сталими сіткою скінченних елементів і Δt

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі отримано такі результати.

- Була сформульована та доведена коректність початково-крайової задачі дифузії-адвекції-реакції (ДАР).
- Була сформульована та доведена коректність варіаційної постановки задачі.
- Для розв'язування варіаційної постановки була побудована схема методу скінченних елементів (МСЕ) з ієрархічним базисом, що дозволяє апроксимувати розв'язок в просторі.
- Задача була зведена до задачі Коші, і була побудована однокрокова рекурентна схема для її розв'язування.
- З допомогою тестових задач було досліджено збіжність та точність побудованої схеми, і показано високу точність для різних параметрів задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кухарський В.М. Використання проекційно-сіткових методів до розв'язання задач адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах / Я.Г. Савула // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 148–152.
2. Кухарський В.М. Стабілізація розв'язків задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченних елементів / Я.Г. Савула, Н.П. Головач // Моделювання та інформаційні технології. – 2002. – Вип. 15. – С. 3–14.
3. Чапля Є.Я. Кінетика переносу домішок при зміні стану частинок / О.Ю. Чернуха // Академія НАН України. Центр математичного моделювання ІППМ ім. Я.С. Підстригача, препринт 5. – 1993.
4. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J. T. Oden. – New York: J. Wiley & Sons, 2000.
5. Babuška I. Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method / I. Babuška, A. K. Aziz. – New York: Academic Press, 1972.
6. Barbu L. Singularly Perturbed Boundary-Value Problems / L. Barbu, G. Morosanu. – Basel: Birkhäuser Verlag AG, 2007.
7. Bertoluzza S. Multiscale and Adaptivity: Modeling, Numerics and Applications / S. Bertoluzza, R. H. Nochetto, A. Quarteroni, K. G. Siebert, A. Veiser. – Berlin: Springer-Verlag, 2012. – p. 314.
8. Braess D. Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory / D. Braess. – Cambridge University Press, 2007.
9. Ciarlet P. Handbook of numerical analysis. Volume II / P. Ciarlet, J. Lions. – Elsevier Science, 1991. – p. 928.
10. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations / R. Courant // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1943. – Vol. 49. – P. 1–23.

11. Deuffhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms / P. Deuffhard. – Berlin: Springer-Verlag, 2004.
12. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 1. Fundamentals / E. Stein, R. Borst, T. J. R. Hughes eds. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – p. 798.
13. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 2. Solids and Structures / E. Stein, R. Borst, T. J. R. Hughes eds. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – p. 778.
14. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 3. Fluids / E. Stein, R. Borst, T. J. R. Hughes eds. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – p. 672.
15. Fucik S. Nonlinear Differential Equations / S. Fucik, A. Kufner. – Elsevier Scientific Publ. Comp., 1980.
16. Gilbarg D. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order / D. Gilbarg, N. Trudinger. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – p. 517.
17. Girault V. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin: Springer, 1986.
18. Johnson C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by Finite Element Method / C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987. – p. 278.
19. Medina J. Error estimates and adaptive finite elements for non-linear diffusion-convection problems / J. Medina, M. Picasso, J. Rappaz // Math. Models and Meth. in Appl. Science. – 1995. – Vol. 6, № 5. – P. 689–712.
20. Miller H. J. J. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems / H. J. J. Miller, E O’Riordan, G. I. Shishkin. – Singapore: World Scientific, 2012. – p. 176.
21. Necas J. Mathematical Theory of Elastic and Elastic-Plastic Bodies: An Introduction / J. Necas. – Amsterdam: Elsevier, 1981. – p. 342.

22. Thomee V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems / V. Thomee. – Berlin: Springer-Verlag, 2-nd ed., 2006.
23. Quarteroni A. Numerical Models for Differential Problem / A. Quarteroni. – Milano: Springer-Verlag, 2009. – p. 611.
24. Roos H. G. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations: Convection-Diffusion and Flow Problems / H. G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. – Berlin: Springer, 1996. – p. 347.
25. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics / F. Verhulst. – New York: Springer Science, 2005. – 324 c.