

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра прикладної математики

**Магістерська робота**  
КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ У РАЙОНІ  
БУДІВНИЦТВА

Виконала: студентка групи ПМППМ-22  
спеціальності  
113 - прикладна математика

\_\_\_\_\_ Чумакевич В.В.  
(прізвище та ініціали)  
Керівник \_\_\_\_\_ доц. Дяконюк Л.М.  
(прізвище та ініціали)  
Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Львів - 2023

## ЗМІСТ

Магістерська робота .....	1
АНОТАЦІЯ.....	3
ВСТУП.....	5
<b>1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ</b>	<b>10</b>
1.1 Формулювання задачі в загальному вигляді.....	10
1.2 Використання формули Гріна для розв'язку рівнянь теорії пружності.....	11
1.3 Варіаційне формулювання задачі теорії пружності.....	13
<b>2 ВИКОРИСТАННЯ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....</b>	<b>15</b>
2.1 Формулювання плоскої задачі теорії пружності.....	15
2.2 Двовимірні трикутні елементи .....	17
2.3 Використання схеми МСЕ на основі лінійних трикутних елементів .....	25
2.4 Використання схеми МСЕ з квадратичними трикутними елементами .....	28
2.5 Алгоритм формування глобальної матриці жорсткості та глобального вектора навантаження .....	30
<b>3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МСЕ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....</b>	<b>32</b>
<b>4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ .....</b>	<b>34</b>
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>46</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>47</b>

## АНОТАЦІЯ

Магістр 2 курсу Вікторія Чумакевич

Тема: Комп'ютерне моделювання деформування основ у районі будівництва

Науковий керівник: доцент кафедри прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук доцент Дяконюк Лілія

**Ключові слова:** *метод скінченних елементів, трикутні скінченні елементи, триангуляційна сітка, комп'ютерне моделювання*

Для розв'язування задачі комп'ютерного моделювання деформування фундаменту в районі будівництва використано підхід, який базується на чисельному розв'язуванні початково-крайової задачі в диференційному формулюванні за допомогою методу скінченних елементів. Для реалізації запропонованого підходу написана програма на мові C#. Проведено серію числових експериментів, які підтверджують ефективність застосування цього підходу.

Magistr of 2d year Viktoriia Chumakevych

Topic: Computer modeling of foundation formation in the construction area

Research supervisor: Associate Professor, Applied Mathematics Department, Candidate of Physical and Mathematical Sciences Associate Professor Liliia Diakonuk.

**Key words:** *finite element method, triangular finite elements, triangulation grid, computer simulation*

To solve the problem of computer modelling of the deformation of the foundation in the construction area, an approach based on the numerical solution of the initial-boundary problem in the differential formulation using the finite element method was used. To implement the proposed approach, a program was written in

the C# language. A series of numerical experiments were conducted that confirm the effectiveness of this approach.

## ВСТУП

Спостерігаючи за ситуацією, що зараз відбувається в Україні, кожен може сміливо сказати, що майбутня відбудова інфраструктури буде однією з наймасштабніших та найвагоміших за всю історію нашої держави. Необхідність у відбудові та будівництві нових житлових комплексів, будівель для держустанов, соціальних гуртожитків для дітей-сиріт, лікарень та навіть станцій енергопостачання є необхідною, неминучою і не потребує зайвих роз'яснень.

Кожне будівництво, як і все в цьому світі має свій початок і завершення. Звісно, спочатку потрібен проєкт, складений архітектором, відповідальним за нього, який включає план робіт, його схвалення відповідними установами та отримання необхідного фінансування, але потім настає один з найважливіших етапів будівництва, а саме закладання основи, тобто фундаменту. З багатьох джерел, з різних куточків нашої планети відомо, що у разі, коли якість робіт на цьому етапі була не те, що жахливою, а й навіть не надто задовільною, то спочатку це може бути не сильно помітною [1]. Проте, з часом можливі порушення цілісності споруди, тріщини в будівлі та навіть обвали, які можуть призвести до втрати місця проживання, отримання легких і важких поранень та, звісно ж, непоправного, а саме інвалідності та найгіршого з можливих випадків – загибелі людей (Рис. В1. «Приклади руйнування будівель в Україні під час війни (а) та обвал споруди через халатність забудовників (б)»).

Крім цього, не слід забувати про те, що фундамент слугує одним із пластів захисту бомбосховищ. Він є одним із шарів захисту нашого з Вами життя та безпеки. Отже, слід підходити уважно до планування проєкту.



*а Вінниця*

*б Османія*

Рис. В1. Приклади руйнування будівель в Україні під час війни (а) та обвал споруди через халатність забудовників (б) [1-2]

Зазвичай, для полегшення роботи проєктувальників використовуються наступні програмні продукти: AutoCAD Civil 3D, GEO 5, ЛИРА-САПР, САПФІР-3D, ArchiCAD тощо. Звичайно, усі вони містять у собі гарний інтерфейс, зручність у використанні користувачем, наочність отриманих результатів, та використовують добре апробовані методики, перевірені часом та досвідом. Проте, згадані раніше програмні продукти є достатньо громіздкими в плані займання пам'яті комп'ютера, диктують достатньо жорсткі вимоги до апаратного та системного забезпечення, вимагають чималих фінансових ресурсів та, як приклад, програми білоруського виробництва, використовують стандарти, які на території України сьогодні переглядають через приєднання до європейського інформаційного простору (у тому числі в галузі будівництва – введення єврокодів).

Тому, постає задача розглянути альтернативні варіації та методи, а також створити доступний програмний продукт, який не висуває значних вимог до апаратного та фінансового забезпечень, а за можливості ще й системного, та відповідає вимогам українського і міжнародного (європейського) законодавства в галузі будівництва [3 – 6]. У роботі також розглядаються особливості геотехнічного проєктування під час будівництва споруд.

Результатом попередніх досліджень є розробка програмного продукту, який дозволяє за результатами польових, лабораторних та камеральних досліджень ґрунтів в районі впроваджувати проєкт будівництва в автоматизованому режимі. (Рис. В2. «Вигляд початкового екрану програми (а) та визначення класифікації на прикладі глинистого ґрунту (б)»). З цього, формується текстовий документ з підсумковими характеристиками ґрунтів. Результати досліджень неодноразово доповідалися на різноманітних конференціях.

Тому створення візуалізованої моделі пружних властивостей багат шарових ґрунтів є актуальною задачею, особливо на сьогодні. Для вирішення даної проблеми, можна розглянути декілька методів, зокрема використаємо метод скінчених елементів та приклади зі справжнього будівництва, для перевірки правильності виконання.

## Комп'ютерне моделювання геотехнічних умов будівельного майданчика

студентка ПМП-32 навчальної групи ЛНУ ім. І. Франка

Введення даних польових та лабораторних геотехнічних досліджень

Визначення назв шарів ґрунту за фізичними характеристиками

Побудова геологічного розрізу

Дослідження напружень в ґрунтових масах

Дослідження розрахункового опору по підшві фундаменту під колону

*a*

**Глинистий ґрунт**

Нижче рівня WL:   $\rho$ :   $\rho_s$ :  W:   $W_p$ :   $W_l$ :

Вміст піщаних часток (2 - 0,5 мм), відсоток за масою:

За числом пластичності $I_p$ :	$I_p = 0,05$	супісок пилуватий
За величиною показника текучості $I_L$ :	$I_L = 0,75$	пластичний
Щільність скелету ґрунту:	$\rho_d = 1,61$	
Питома вага ґрунту:	$\gamma = 18,74$	
Пористість ґрунту:	$n = 0,4$	
Коефіцієнт пористості:	$e = 0,67$	
Коефіцієнт водонасичення:	$S_r = 1$	

Додаткові параметри водонасиченого шару:  
 $W_{sat} = 0,25$ ;  $\rho_a = 2,01$ ;  $I_{La} = 1,6$ ;  $\rho_{La} = 1,01$ ;  $\gamma_a = 19,68$ ;  $\gamma_{La} = 9,87$

Повна назва ґрунту: супісок пилуватий, пластичний

Визначення несучих властивостей ґрунту

*б*

Рис. В2. Вигляд початкового екрану програми (а) та визначення класифікації на прикладі глинистого ґрунту (б)

Метод скінченних елементів розглядається на основі використання скінченно-елементної апроксимації плоскої задачі теорії пружності. Достовірність використання методу здійснюється не тільки за допомогою теоретичних постулатів та умов правдивості результатів, а також за допомогою досліджень, проведених в процесі співставлення результатів

виконання декількох програм для реальних випадків. Тобто, при перевірці виконання програмного продукту, який створюється в ході проведених досліджень, здійснюється ряд перевірок, одною з яких є співставлення одержаних результатів з іншими програмними продуктами, такими як GEO 5 наприклад. Для цього розглядається один і той самий приклад з «життя» (лабораторні дослідження та випадки з будівництва реальних споруд), дані якого вводимо в обидві програми.

Варто зазначити, що дана робота є корисною не тільки для вже працюючих людей у будівництві та пов'язаних з нею галузей, а й для студентів чи науковців, які прагнуть до самовдосконалення та розвитку свого професіоналізму.

Тепер, для кращого розуміння даної роботи, наведемо об'єкт, предмет, а також мету дослідження.

**Об'єкт дослідження:** деформування фундаменту в районі будівництва в наслідок халатності забудовників, природних явищ та підмивів ґрунту за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ).

**Предмет дослідження:** комп'ютерне моделювання напружень та деформацій на ґрунті в районі будівництва.

**Мета дослідження:** вивчення проблематики даної теми та знаходження альтернативних рішень з використанням МСЕ; розробка програмного продукту, що відповідає висунутим вище вимогам, та перевірка коректності виконаних обрахунків.

# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

## 1.1 Формулювання задачі в загальному вигляді

У роботі розглядається задача на площині, тому будемо застосовувати декартову систему координат  $Ox_1x_2$  (Рис.1.1. «Досліджувана область задачі»). Тіло  $\Omega$  має фіксацію на частині границі  $S_u \subset S$  ( $\vec{u}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in S_u$ ) та обмежене границею  $S = \partial\Omega$ . Воно пружно деформується під дією поверхневих сил  $\vec{p}$  та об'ємних сил  $\vec{f}$ .

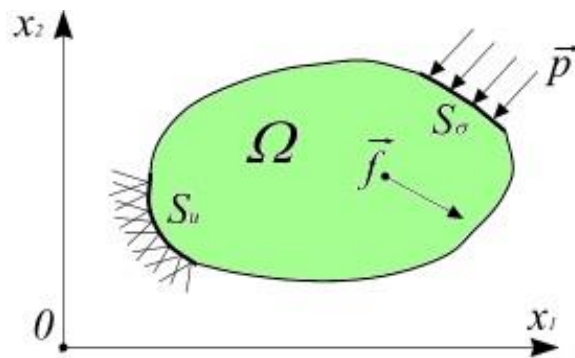


Рис. 1.1. Досліджувана область задачі

У кожній точці  $\vec{x} \in \Omega$  напружено деформований стан тіла описується:

- вектором переміщень  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ;
- симетричним тензором лінійних деформацій  $\hat{\epsilon}$  з компонентами  $\epsilon_{ij}$ ;
- симетричним тензором напружень  $\hat{\sigma}$  з компонентами  $\sigma_{ij}$ .

Для опису переміщень під час деформацій будемо використовувати формулу Коші:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.1)$$

За допомогою закону Гука будемо описувати напруження через деформації:

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \sum_{k,l=1}^3 a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}), \quad (1.2)$$

де  $a_{ijkl}$  - компоненти тензора пружних сталих.

Для стану рівноваги можна записати:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) + f_i = 0, \quad i = \overline{1,2} \quad (1.3)$$

Отже, задача описується рівняннями (1.1) - (1.3).

Для отримання рівнянь Ляме (рівняння другого порядку на переміщення  $u_1, u_2$ ) поступово підставимо (1.1) в (1.2), а, згодом отриманий вираз в (1.3). Додамо до них крайові умови на поверхні  $S$ .

У дослідженнях будемо використовувати кінематичні крайові умови (на поверхні  $S_u \subset S$  задані переміщення) та статистичні крайові умови (на поверхні  $S_\sigma \subset S$  задані напруження)

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S_u. \quad (1.4)$$

$$\vec{\sigma}_n(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) \vec{e}_i = \vec{p}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S_\sigma, \quad (1.5)$$

де  $n_j$  – компоненти одиничної нормалі  $\vec{n}$  до поверхні в точці  $\vec{x}$ .

Умову (1.5) можна виразити через вектор переміщення  $\vec{u}$ , якщо використати рівняння (1.1) та (1.2).

## 1.2 Використання формули Гріна для розв'язку рівнянь теорії пружності

У роботі використовуємо рівняння Ляме у вигляді:

$$A\vec{u} = \vec{f}, \quad (1.6)$$

де

$$A\vec{u} = -\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sum_{k,l=1}^2 a_{1jkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \right], \dots \right) = -\left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{1j}(\vec{u})], \dots \right).$$

Для цього диференційного оператора отримаємо формулу Гріна. Між двома векторними функціями  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  запишемо скалярний добуток:

$$(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega,$$

де

$$\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) := \sum_{i=1}^2 u_i(\vec{x}) v_i(\vec{x}).$$

Для  $(A\vec{u}, \vec{v})$  з (1.6) запишемо:

$$(A\vec{u}, \vec{v}) = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) v_i d\Omega,$$

Тепер, проведемо ряд математичних перетворень:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) v_i &= - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u}) v_i) + \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}; \\ \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) [\varepsilon_{ij}(\vec{v}) + \omega_{ij}(\vec{v})] = \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) + \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \omega_{ij}(\vec{v}) \end{aligned}$$

де  $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  - компоненти кососиметричного тензора вихору.

Для кососиметричного та симетричного тензорів згортка

$\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \omega_{ij}(\vec{v}) = 0$ , тому запишемо перетворення:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) v_i &= \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u}) v_i); \\ (A\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u}) v_i) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Використаємо, такі формули Остроградського-Гауса для здійснення перетворення останнього доданку:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g d\Omega = \int_{\Omega} f g n_j d\Omega - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\Omega, \quad \forall j = \overline{1,3}. \quad (1.8)$$

У результаті чого одержимо:

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u}) v_i) d\Omega = -\int_S \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j v_i dS = -\int_S \sum_{i=1}^2 \sigma_{ni} v_i dS = -\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS.$$

Введемо позначення білінійна форма по  $\vec{u}$  і  $\vec{v}$ :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) d\Omega,$$

і будемо мати такий вигляд формули Гріна:

$$(A\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\partial\Omega} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS. \quad (1.9)$$

### 1.3 Варіаційне формулювання задачі теорії пружності

Використаємо функціонал Лагранжа  $F(\vec{u})$ :

$$F(\vec{u}) := \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{u}) - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \vec{p}_n \cdot \vec{u} dS. \quad (1.10)$$

Мінімізація функціоналу Лагранжа  $F(\vec{u})$  відбувається на лінійному просторі кінематично допустимих переміщень:

$$H_0 = \{\vec{u} \in H : \vec{u}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S\},$$

де  $H$  – Гільбертів простір.

Не забуваємо, що для мінімуму цього функціоналу повинна виконуватись умова:

$$F'(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in H_0.$$

Тоді отримуємо:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS = 0.$$

Врахувавши формулу Гріна (1.9) одержимо наступне рівняння:

$$(A\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS - \int_{\partial\Omega} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS = 0$$

або

$$\int_{\Omega} (A\vec{u} - \vec{f}) \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{\sigma}_n - \vec{p}_n) \cdot \vec{v} dS = 0.$$

Згідно умов  $\vec{v} \in$  довільним, тому його обираємо таким, щоб  $\vec{v} = 0$  на  $\partial\Omega$ .

За даної умови:

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{\sigma}_n - \vec{p}_n) \cdot \vec{v} dS = 0,$$

запишемо:

$$\int_{\Omega} (A\vec{u} - \vec{f}) \cdot \vec{v} d\Omega = 0,$$

звідки буде випливати, що:

$$A\vec{u} - \vec{f} = 0. \quad (1.11)$$

Припустивши  $\vec{v} \equiv 0$  на  $S \setminus S_{\sigma}$ , та з врахуванням (1.11), маємо  $\vec{\sigma}_n = \vec{p}_n$  на  $S_{\sigma}$ .

Таким чином ми довели, що розв'язком вихідної крайової задачі є мінімум функціоналу (1.10) в просторі кінематично допустимих переміщень  $H_0$ .

## 2 ВИКОРИСТАННЯ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

### 2.1 Формулювання плоскої задачі теорії пружності

Формулювання для двовірного випадку задачі теорії пружності спрощується. Будемо розглядати задачу для стану плоскої деформації. Плоскою деформацією тіла називають таку, для якої вектор переміщення будь-якої точки тіла паралельний до деякої площини і не залежить від відстані розглянутої точки до цієї площини.

Маємо  $O_{xy}$  - площину деформації. Нехай  $u, v, w$  переміщення вздовж осей  $O_x, O_y$  та  $O_z$  – відповідно. Тоді

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (2.1)$$

Використаємо співвідношення Коші (1.1) для компонент тензора деформацій та одержимо наступні рівності:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0. \quad (2.2)$$

Для ізотропного випадку співвідношення закону Гука вишлядає наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= D \left( \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{yy} \right); \\ \sigma_{yy} &= D \left( \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \right); \\ \sigma_{xy} &= D \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \gamma_{xy}; \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{zy} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $E$  – модуль пружності або, інакше, модуль Юнга;

$\nu$  – коефіцієнт Пуасона;

$$D = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Прийmemo наступні псевдовектори деформацій та напружень:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T;$$

$$[\sigma] = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T,$$

та перепишемо співвідношення (2.2) – (2.3) у матричному вигляді.

Співвідношення Коші буде мати вигляд:

$$[\varepsilon] = [A] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

Закон Гука можна задати в матричному вигляді співвідношеннями:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon];$$

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

Будемо вважати, що масові сили відсутні. Вектор зовнішнього навантаження прийmemo  $[p] = [p_x, p_y]^T$ . Функціонал Лагранжа (1.9) в матричних позначеннях запишеться так:

$$J([U]) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] d\Omega - \int_{S_{\sigma}} [p]^T [U] dS. \quad (2.6)$$

## 2.2 Двовимірні трикутні елементи

### Функції форми для симплекс-елемента

Для розв'язування описаної початково-крайової задачі, застосуємо метод скінченних елементів. Для цього побудуємо сітку скінченних елементів з використанням трикутників, а саме використаємо двовимірні трикутні елементи (наприклад двовимірний симплекс-елемент, що показаний на Рис. 2.1. «двовимірний симплекс-елемент»).

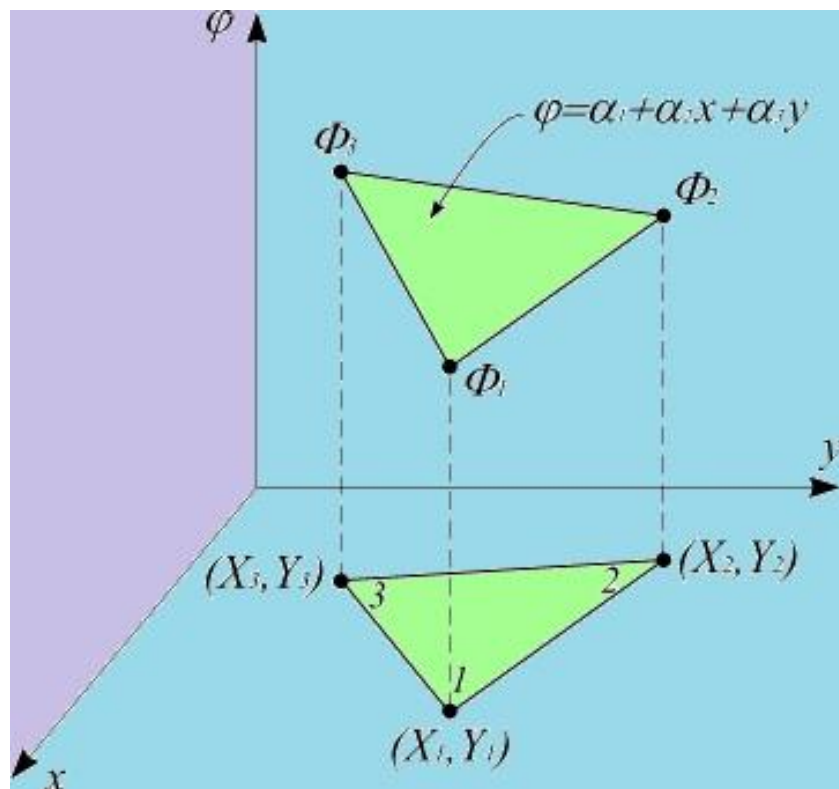


Рис. 2.1. Двовимірний симплекс-елемент

У формулі (2.7) подано вигляд для даного інтерполяційного поліному

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (2.7)$$

Запишемо умови, що виконуються у вузлах:

$$\varphi(X_i, Y_i) = \Phi_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Одержимо систему рівнянь, підставивши дані умови в інтерполяційний поліном (2.7):

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i, i = \overline{1,3}$$

У ході її розв'язку, отримуємо:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \Phi_1 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) \Phi_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \Phi_3]; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(Y_2 - Y_3) \Phi_1 + (Y_3 - Y_1) \Phi_2 + (Y_1 - Y_2) \Phi_3]; \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(X_3 - X_2) \Phi_1 + (X_1 - X_3) \Phi_2 + (X_2 - X_1) \Phi_3], \end{aligned} \quad ; \quad (2.8)$$

де  $A$  – площа трикутника, яку можемо знайти, використавши формулу:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix}.$$

Підставивши значення  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  у (2.7), одержимо:

$$\varphi(x, y) = N_1(x, y) \Phi_1 + N_2(x, y) \Phi_2 + N_3(x, y) \Phi_3, \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} [a_1 + b_1 x + c_1 y]; & \begin{cases} a_1 &= X_2 Y_3 - X_3 Y_2 \\ b_1 &= Y_2 - Y_3 \\ c_1 &= X_3 - X_2 \end{cases} ; \\ N_2 &= \frac{1}{2A} [a_2 + b_2 x + c_2 y]; & \begin{cases} a_2 &= X_3 Y_1 - X_1 Y_3 \\ b_2 &= Y_3 - Y_1 \\ c_2 &= X_1 - X_3 \end{cases} ; \\ N_3 &= \frac{1}{2A} [a_3 + b_3 x + c_3 y]; & \begin{cases} a_3 &= X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ b_3 &= Y_1 - Y_2 \\ c_3 &= X_2 - X_1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Поглянувши на це, видно, що

$$N_i(X_k, Y_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$N_1(x, y), N_2(x, y), N_3(x, y)$  є функціями форми. Похідну від апроксимованої функції виражаємо через похідні від її функції форми:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \Phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} \Phi_3.$$

Але для нашого симплекс-елемента  $\frac{\partial N_i}{\partial x} = b_i$ ;  $i = \overline{1,3}$ , тому отримуємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3. \quad (2.10)$$

### **L-координати**

Система L-координат є найпоширенішою для трикутного симплекс елемента. Вона визначається за допомогою трьох координат:  $L_1, L_2, L_3$  (Рис. 2.2. «Система L-координат»).

Координати даної системи вводяться таким чином:

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (2.11)$$

де  $A = \frac{bh}{2}$  – площа  $\Delta 123$ ,  $A_1 = \frac{bs}{2}$  – площа  $\Delta B23$ ,  $A_2$  – площа  $\Delta B31$ ,  $A_3$  – площа  $\Delta B12$ .

Так, як  $A_1 + A_2 + A_3 = A$ , то звідси маємо  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ .

Приймемо до уваги, що з множини  $\{L_1, L_2, L_3\}$  лише 2 координати будуть лінійно незалежними, адже розмірність простору  $R^2 = 2$ .

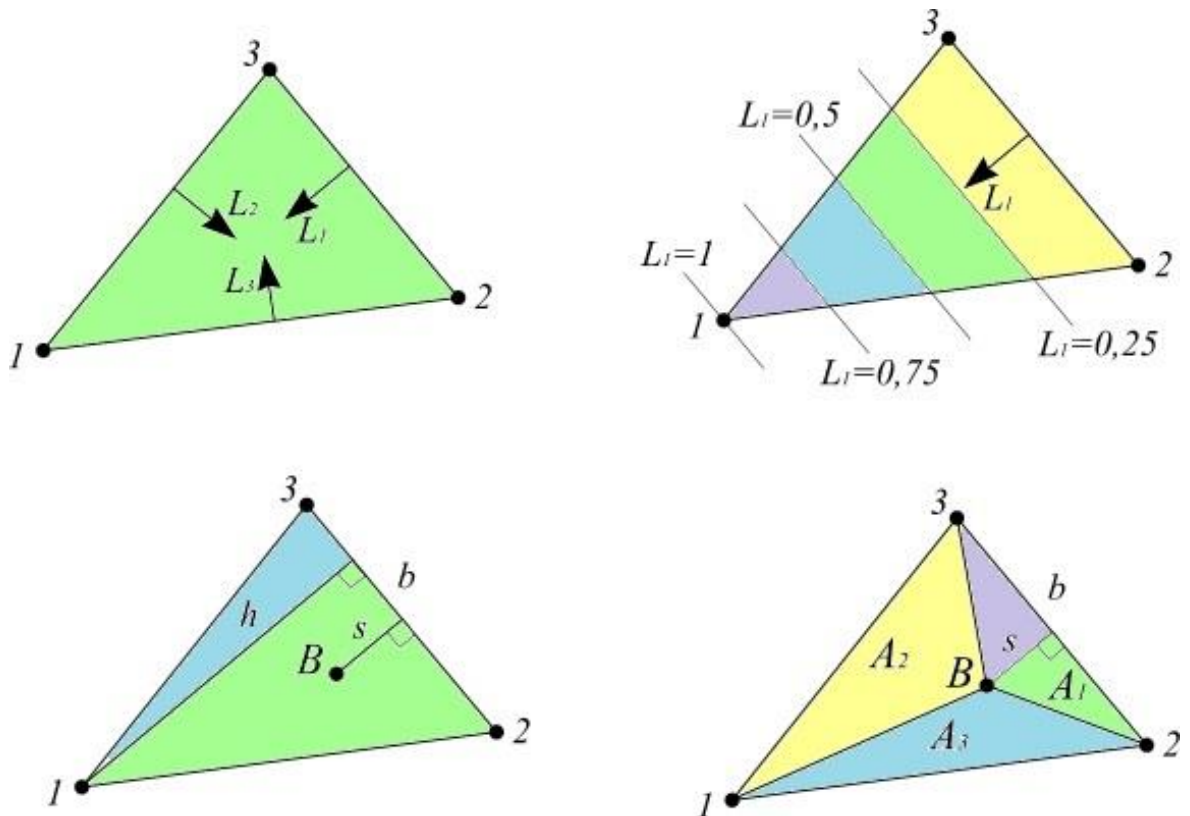


Рис. 2.2. Система L-координат

Оскільки розмірність простору  $R^2$  дорівнює двом, лише дві координати із  $\{L_1, L_2, L_3\}$  є лінійно незалежними.

Коли мова йде про лінійний трикутний елемент, справедливі рівності:

Для лінійного трикутного елемента має місце співвідношення:

$$L_1 = N_1, \quad L_2 = N_2, \quad L_3 = N_3.$$

Через це в декартових координат представлення, виражене через L-координати, має вигляд:

$$x = L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3;$$

$$y = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3.$$

Враховуючи  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ , одержимо:

$$\begin{aligned} x &= L_1 X_1 + L_2 X_2 + (1 - L_1 - L_2) X_3 = L_1 (X_1 - X_3) + L_2 (X_2 - X_3) + X_3; \\ y &= L_1 (Y_1 - Y_3) + L_2 (Y_2 - Y_3) + Y_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Наявність інтегральних формул, що допомагають спростити обчислення інтегралів вздовж сторін елемента, є перевагою L-координат:

$$\int_{\Gamma} L_1^a L_2^b d\Gamma = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} |\Gamma|, \quad (2.13)$$

і по його площі:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2|A|. \quad (2.14)$$

### Скінченні трикутні елементи високого порядку

Квадратичні трикутні елементи містить по 6 вузлів кожен. Його зображено на Рис. 2.3. «Квадратичний трикутний елемент».

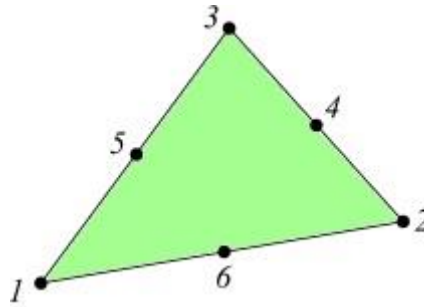


Рис. 2.3. Квадратичний трикутний елемент

Трикутний елемент з квадратичною інтерполяцією, виглядає таким чином:

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2.$$

### Функції форми для елементів високого порядку

У загальному вигляді для елементів високого порядку запишемо формулу для обчислень функцій форми:

$$N_i = \prod_{j=1}^n \frac{F_j}{F_{j|L_1, L_2, L_3}}, \quad (2.15)$$

де  $n$  – порядок трикутника та дорівнює кількості вузлів на стороні трикутника мінус одиниця;

$F_j$  – функції від  $L_1, L_2$  і  $L_3$ , отримуються з рівнянь  $n$  ліній, що проходять через всі вузли, крім вузла, для якого визначається функція форми.

Розглядаючи рівняння прямої  $L_1=c$ , будемо мати, що

$$F_j = L_1 - c.$$

Знаменник (2.8) має значення  $F_j$ , яке визначається за допомогою координат вузла з номером  $i$  (вузла, в якому обчислюється  $N_i$ ).

Наведемо функції форми для лінійного (Рис. 2.1) та квадратичного (рис. 2.3) трикутних елементів:

$$\text{а) } N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3. \quad (2.16)$$

$$\text{б) } N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad N_3 = L_3(2L_3 - 1), \quad (2.17)$$

$$N_4 = 4L_2L_3, \quad N_5 = 4L_1L_3, \quad N_6 = 4L_1L_2.$$

### Обчислення похідних від функцій форми

Похідні від функції форми  $N_i$  можна знайти за формулою

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{bmatrix}.$$

Тобто необхідно розв'язати систему

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Тут  $[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}$  – матриця Якобі, яку розраховуємо на основі

формул (2.12).

Похідну  $\frac{\partial N_i}{\partial L_1}$  визначаємо наступним чином

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_1}.$$

Оскільки  $\frac{\partial L_1}{\partial L_1} = 1$ ,

$$\frac{\partial L_2}{\partial L_1} = 0, \quad \frac{\partial L_3}{\partial L_1} = \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_1} = -1,$$

то отримуємо формулу

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}.$$

Аналогічно визначаємо наступні похідні:

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_2} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3};$$

$$\frac{\partial x}{\partial L_1} = \frac{\partial x}{\partial L_1} - \frac{\partial x}{\partial L_3};$$

$$\frac{\partial x}{\partial L_2} = \frac{\partial x}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_3};$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_1} = \frac{\partial y}{\partial L_1} - \frac{\partial y}{\partial L_3};$$

$$\frac{\partial y}{\partial L_2} = \frac{\partial y}{\partial L_2} - \frac{\partial y}{\partial L_3}.$$

Визначивши  $\frac{\partial N_i}{\partial L_1}, \frac{\partial N_i}{\partial L_2}, \frac{\partial x}{\partial L_1}, \frac{\partial x}{\partial L_2}, \frac{\partial y}{\partial L_1}, \frac{\partial y}{\partial L_2}$ , ми можемо розв'язати систему (2.9) і знайти шукані похідні  $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}$ .

### Обчислення інтегралів по трикутниках

Для чисельного знаходження інтегралів

$$\int_A f(L_1, L_2, L_3) dA = \int_0^1 \int_0^{1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) |\det[J]| dL_1 dL_2,$$

де

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 \\ X_2 - X_3 & Y_2 - Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -b_2 \\ -c_1 & b_1 \end{bmatrix},$$

$$\det[J] = c_2 b_1 - c_1 b_2 = 2A,$$

можна застосовувати квадратурну формулу Гауса:

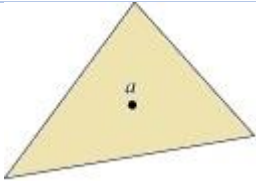
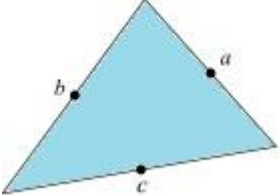
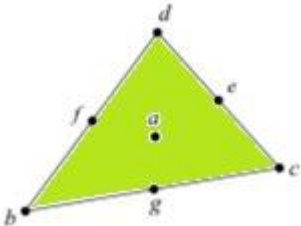
$$\int_0^1 \int_0^{1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) |\det[J]| dL_1 dL_2 \approx \sum_{i=1}^n w_i g(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}), \quad (2.19)$$

$$g(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}) := f(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}) |\det[J]|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Порядок інтерполювання визначається сумою показників степенів трьох координат у кожному члені. Наприклад, якщо інтегрується добуток  $L_1 L_2 L_3^2$ , то необхідно використовувати схему інтегрування четвертого порядку точності.

Вузли Гауса та вагові коефіцієнти можна взяти з такої таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Вузли Гауса та вагові коефіцієнти [7]

	Похибка	Точки	Координати $L_1, L_2, L_3$	Вагові коефіцієнти
	$R = O(h^2)$	$a$	1/3 1/3 1/3	1/2
	$R = O(h^2)$	$a$ $b$ $c$	0 1/2 1/2 1/2 0 1/2 1/2 1/2 0	1/6 1/6 1/6
	$R = O(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$ $f$ $g$	1/3 1/3 1/3 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1/2 1/2 1/2 0 1/2 1/2 1/2 0	27/120 3/120 3/120 3/120 8/120 8/120 8/120

### 2.3 Використання схеми МСЕ на основі лінійних трикутних елементів

Скористаємося лінійним трикутним елементом, про який розповідалося вище, для апроксимації переміщень у функціоналі (2.6).

У вигляді об'єднання цих елементів, розглянемо вихідну область:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^N \Omega^{(e)}.$$

Позначимо через  $u_i^{(e)}$ ,  $v_i^{(e)}$  значення переміщень  $u$  та  $v$ , відповідно у вузлах  $i = 1, 2, 3$  елемента  $\Omega^{(e)}$  з номером  $e$ .

Нехай будемо вважати, що вектори переміщень на елементі:

$$\vec{u}^{(e)} = [u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}]^T;$$

$$\vec{v}^{(e)} = [v_1^{(e)}, v_2^{(e)}, v_3^{(e)}],$$

та узагальнений вектор переміщень

$$U^{(e)} = [\vec{u}^{(e)}, \vec{v}^{(e)}]^T. \quad (2.20)$$

Лінійними функціями будемо здійснювати апроксимацію переміщення  $u$  та  $v$  на елементі

$$u = [N^{(e)}]^T [u^{(e)}];$$

$$v = [N^{(e)}]^T [v^{(e)}],$$

де  $[N^{(e)}]$  - вектор функцій форми елемента:

$$[N^{(e)}]^T = [N_1^{(e)}(x, y), N_2^{(e)}(x, y), N_3^{(e)}(x, y)];$$

$$N_i^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y),$$

$A^{(e)}$  - площа елемента  $e$ .

Тепер, для вектора деформацій на елементі  $e$  одержимо:

$$[\varepsilon] = [B^{(e)}][U^{(e)}], \quad (2.21)$$

де матриця  $[B^{(e)}]$  дорівнює

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Одержимо на елементі  $e$  апроксимацію для квадратичної частини функції функціоналу (2.6)

$$\frac{1}{2}[\varepsilon]^T [D][\varepsilon] \approx \frac{1}{2}[U^{(e)}]^T [k^{(e)}][U^{(e)}], \quad (2.22)$$

де

$$[k^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [D][B^{(e)}].$$

Провівши необхідні викладки, матрицю  $[k^{(e)}]$  представимо у вигляді

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & \vdots & k_{12}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{21}^{(e)} & \vdots & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

де  $k_{lm}^{(e)}$  - блоки розміром  $3 \times 3$ , елементи яких задаються виразами

$$k_{11}^{(e)}[i, j] = D\bar{b}_i\bar{b}_j + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D\bar{c}_i\bar{c}_j;$$

$$k_{12}^{(e)}[i, j] = \frac{\nu}{1-\nu} D\bar{b}_i\bar{c}_j + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D\bar{c}_i\bar{b}_j;$$

$$k_{21}^{(e)}[i, j] = \frac{\nu}{1-\nu} D\bar{c}_i\bar{b}_j + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D\bar{b}_i\bar{c}_j;$$

$$k_{22}^{(e)}[i, j] = D\bar{c}_i\bar{c}_j + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D\bar{b}_i\bar{b}_j,$$

$$\text{де } \bar{b}_i = \frac{\partial N_i^{(e)}(x, y)}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^{(e)}}, \quad \bar{c}_i = \frac{\partial N_i^{(e)}(x, y)}{\partial y} = \frac{c_i}{2A^{(e)}}.$$

Провівши інтегрування по елементу для квадратичної частини функціонала, одержимо на елементі апроксимацію

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] d\Omega \approx \frac{1}{2} [U^{(e)}]^T [K^{(e)}] [U^{(e)}], \quad (2.24)$$

де  $[K^{(e)}]$  – матриця жорсткості елемента

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [k^{(e)}] d\Omega = A^{(e)} [k^{(e)}]. \quad (2.25)$$

Точно за тим самим алгоритмом апроксимуємо інтеграл від даних зусиль по частині границі  $S \cap \Omega^{(e)}$ :

$$\int_{S \cap \Omega^{(e)}} [p]^T [u] dS \approx [U^{(e)}]^T [F^{(e)}], \quad (2.26)$$

де  $[F^{(e)}]$  - вектор вузлових навантажень на елементі, що дорівнює:

$$[F^{(e)}]^T = \int_{S \cap \Omega^{(e)}} [p_x^{(e)} N_1^{(e)}, p_x^{(e)} N_2^{(e)}, p_x^{(e)} N_3^{(e)}, p_y^{(e)} N_1^{(e)}, p_y^{(e)} N_2^{(e)}, p_y^{(e)} N_3^{(e)}] dS.$$

Крайній інтеграл, для конкретної сторони трикутного елемента, легко обчислити аналітично. Отже, коли  $S \cap \Omega^{(e)} = S_{12}$ , маємо

$$[F^{(e)}]^T = \int_{S \cap \Omega^{(e)}} [p_x^{(e)} N_1^{(e)}, p_x^{(e)} N_2^{(e)}, 0, p_y^{(e)} N_1^{(e)}, p_y^{(e)} N_2^{(e)}, 0] dS = \frac{1}{2} |S_{12}| [p_x^{(e)}, p_x^{(e)}, 0, p_y^{(e)}, p_y^{(e)}, 0]. \quad (2.27)$$

Одержимо вихідний функціонал  $J(\bar{u})$ , що апроксимується на елементі квадратичною функцією (6-ти незалежних змінних)

$$J^{(e)}(U) \approx \frac{1}{2}[U^{(e)}]^T[K^{(e)}][U^{(e)}] - [U^{(e)}]^T[F^{(e)}]. \quad (2.28)$$

Отримаємо загальну апроксимацію функціонала, якщо підсумуємо по елементах і зведемо подібні

$$J = \sum_{e=1}^N J^{(e)} \approx \frac{1}{2}[U]^T[K][U] - [U]^T[F], \quad (2.29)$$

де  $[U] = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_M, v_M]$  – глобальний вектор переміщень у вузлах сітки ( $M$  – загальна кількість вузлів);

$[K]$  – глобальна матриця жорсткості розміру  $M \times M$  ;

$[F]$  – глобальний вектор навантаження  $M$  .

Гарно видно, що мінімізація функції (2.10) може бути зведена до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K][U] = [F]. \quad (2.30)$$

## 2.4 Використання схеми МСЕ з квадратичними трикутними елементами

Так само, як і для симплекс-елементів побудова скінченно-елементної апроксимації і загальна схема розв'язування задачі на основі елементів високого порядку здійснюється аналогічно.

Скористаємося реалізацією методу для трикутного квадратичного елемента.

У цьому випадку вектори вузлових переміщень на елементі матимуть розмірність 6:

$$\bar{u}^{(e)} = [u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}, u_4^{(e)}, u_5^{(e)}, u_6^{(e)}]^T,$$

$$\bar{v}^{(e)} = [v_1^{(e)}, v_2^{(e)}, v_3^{(e)}, v_4^{(e)}, v_5^{(e)}, v_6^{(e)}],$$

а узагальнений вектор переміщень – розмірність 12 :

$$U^{(e)} = \begin{bmatrix} \vec{u}^{(e)} \\ \vec{v}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Загальні формули апроксимації функціонала (2.26) – (2.27), представлення матриць жорсткості (2.23) та вектора правих частин залишаються незмінними, змінюється тільки розмірність цих матриць та векторів.

Матрицю жорсткості елемента запишемо таким чином:

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [k^{(e)}] d\Omega, \quad (2.31)$$

де

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & \vdots & k_{12}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{21}^{(e)} & \vdots & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$k_{lm}^{(e)}$  - блоки розміром  $6 \times 6$ , елементи яких задаються формулами:

$$\begin{aligned} k_{11}^{(e)}[i, j] &= D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y}; \\ k_{12}^{(e)}[i, j] &= \frac{\nu}{1-\nu} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x}; \\ k_{21}^{(e)}[i, j] &= \frac{\nu}{1-\nu} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y}; \\ k_{22}^{(e)}[i, j] &= D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Як для лінійних елементів (2.23), елементи матриць  $k_{lm}^{(e)}$  вже не є константами. Розв'язавши систему (2.18), можемо знайти похідні у попередніх формулах.

Чисельно за формулами (2.19) обчислюємо інтеграли у (2.31).

Вектор навантаження на елементі буде мати розмірність 12 і задаємо формулою

$$[F^{(e)}]^T = \int_{s \cap \Omega^{(e)}} [p_x^{(e)} N_1^{(e)}, \dots, p_x^{(e)} N_6^{(e)}, p_y^{(e)} N_1^{(e)}, \dots, p_y^{(e)} N_6^{(e)}] dS.$$

Використовуючи формули (2.13), обчислюємо цей інтеграл аналітично.

## 2.5 Алгоритм формування глобальної матриці жорсткості та глобального вектора навантаження

Глобальна матриця жорсткості складається з  $M \times M$  блоків розміром  $2 \times 2$ , адже в кожному вузлі існує два переміщення.

Запишемо загальний алгоритм формування глобальної матриці жорсткості: відображаємо внутрішню структуру матриці жорсткості елемента на зовнішню, а зовнішню – на внутрішню, адже існує різна нумерація вектора вузлових переміщень на елементі та глобального вектора переміщень.

Нехай  $(l, m)$  – індекс блоку в матриці жорсткості елемента, а  $(i, j)$  – індекс компоненти в блоці згідно з локальною нумерацією вузлів елемента.

Приймемо, що  $M^{(e)}(i)$ ,  $M^{(e)}(j)$  – глобальні номери вузлів  $i$  та  $j$  елемента  $e$  відповідно. З цього випливає така відповідність між компонентами локальної та глобальної матриць жорсткості:

$$k_{lm}^{(e)}[i, j] \rightarrow K_{M^{(e)}(i), M^{(e)}(j)}[l, m] \rightarrow K[(M^{(e)}(i) - 1) \times 2 + l, (M^{(e)}(j) - 1) \times 2 + m].$$

$(l, m)$ -й елемент  $(M^{(e)}(i), M^{(e)}(j))$ -го блоку глобальної матриці жорсткості відповідає  $(i, j)$ -му елементу  $(l, m)$ -го блоку локальної матриці жорсткості.

Глобальний вектор навантажень  $[F]$  має розмірність  $2 \times M$ , де  $M$  – кількість вузлів. Приймемо, що  $l$  – індекс блоку у векторі навантаження елемента, а  $i$  – індекс компоненти в блоці згідно з локальною нумерацією вузлів елемента.

Будемо вважати, що  $M^{(e)}(i)$  – глобальний номер  $i$ -го вузла елемента  $e$ . З цього випливає така відповідність між компонентами локального та глобального вектора навантаження:

$$F_l^{(e)}[i] \rightarrow F_{M^{(e)}(i)}[l] \rightarrow F[(M^{(e)}(i)-1) \times 2 + l],$$

а саме, що на  $l$ -й елемент  $M^{(e)}(i)$ -го блоку глобального вектора навантаження відображається  $i$ -й елемент  $l$ -го блоку локального вектора навантаження.

### 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МСЕ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У ході дослідження мною була розв’язана плоска задача теорії пружності методом скінченних елементів, який був описаний в другому розділі. Він базується на основі лінійних та квадратичних трикутних елементів.

МСЕ має безліч різноманітних варіацій, кожна з яких має свої переваги. Перш за все слід обрати вид скінченних елементів, що будемо розглядати. Їх є велика різноманітність. Потім слід обрати параметр триангуляції, який будемо використовувати. Оберемо його у виступає максимальної площі трикутного елемента сітки.

Запишемо основні пункти алгоритму програми:

- 1) ввід вхідних даних (Рис. 3.1. «Область програми для вводу початкових даних»);
- 2) побудова сітки Методу Скінченних Елементів (МСЕ);
- 3) процес формування матриці жорсткості і вектора навантаження;
- 4) врахування кінематичних крайових умов;
- 5) розв’язування СЛАР;
- 6) розрахунок деформацій та напружень;
- 7) виведення результатів.

Запропонований алгоритм був реалізований на мові C# за допомогою середовища Visual Studio та верифікований за допомогою ряду відкритих бібліотек на мові Python для перевірки обчислень. Зазначимо, що сітку триангуляції будемо, використовуючи алгоритм Джіма Рупперта.

Матриці жорсткості та вектора навантаження формуються поелементно за алгоритмом, що описаний у п.2.5.

Кінематичні крайові умови враховуються за допомогою модифікації системи рівнянь. Діагональний коефіцієнт матриці, що відповідає заданому

вузловому значенню  $U_k$  множиться на дуже велике число  $R \approx 10^{15}$ , а відповідний елемент правої частини  $F_k$  замінюється на  $F_k \times R$ .

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) розв'язуємо методом Гауса з постовпцевим вибором головного елемента.

Параметри області

Висота 1:  Висота 2:

Ширина:  max S2:

max S0:  Висота 3:

max S3:

START

TRIANGLE

READ BUILD

Рис. 3.1. Область програми для вводу початкових даних

Програма дозволяє виводити напруження у вузлах Гауса та графічно зображує напруження.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Тестування розроблених програмних продуктів проводилися на декількох різних задачах. По-перше на задачі про навантаження основи в районі будівництва, згідно моделі, що зображена на Рис. 4.1., а також на модулюванні ґрунтових схилів.

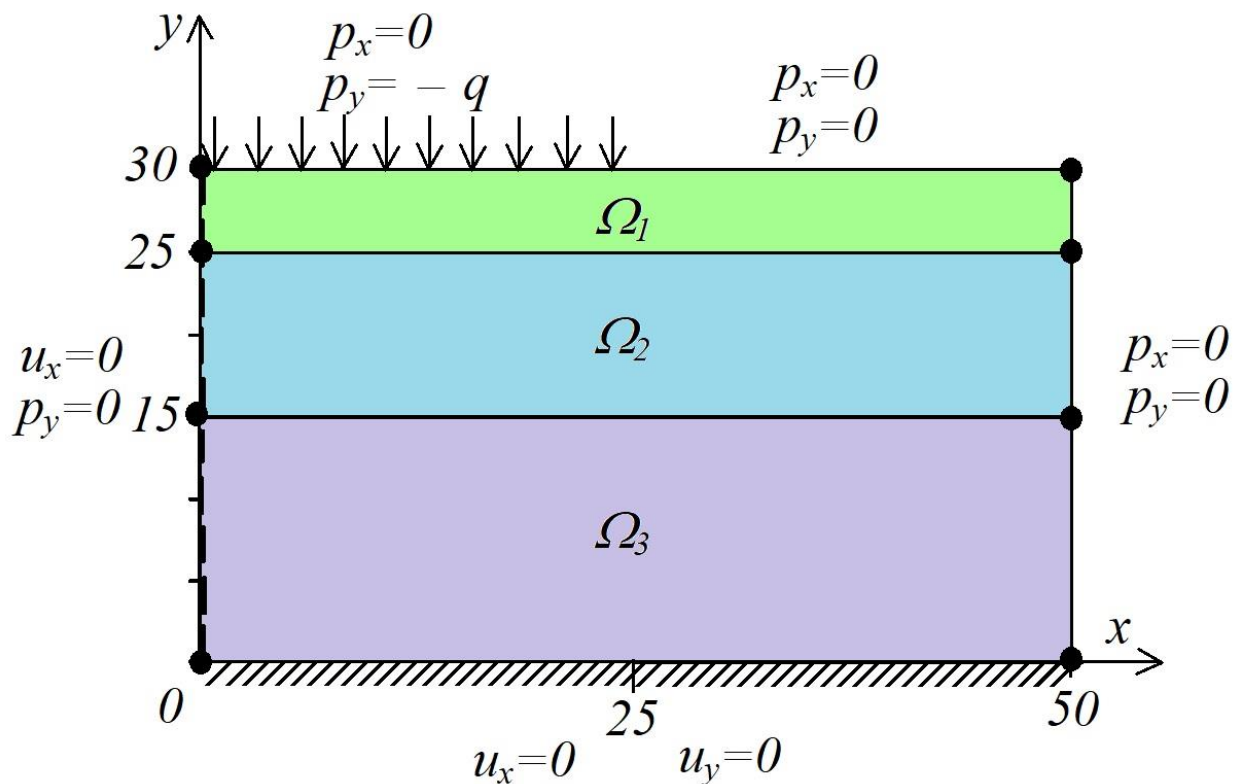


Рис. 4.1. Схема моделі

Було задано такі вхідні дані:

Розміри моделі

- Довжина – 50, 75 м
- Глибина – 30, 50 м.

Висота шарів

- Загальна 30 м
- Пісок (поверхня) 5 м
- Супісок (середній) 10 м

- Глина (нижній) 15 м

Коефіцієнт Пуасона:

- піски- 0,30;
- супіски - 0,35;
- глини - 0,42.

Модуль Юнга, МПа

- Пісок 35,3
- Супісок 14,8
- Глина 18

Навантаження (в діапазоні): 0 кН/м<sup>2</sup> – 25 кН/м<sup>2</sup>

Сітки скінчених елементів з такою максимальною площею елемента, що були використані:

- 1)  $S = 32$  (76 елементів)
- 2)  $S = 16$  (137 елементів)
- 3)  $S = 8$  (289 елементів)
- 4)  $S = 4$  (584 елементів)
- 5)  $S = 2$  (1178 елементів)
- 6)  $S = 1$  (2352 елементів)

Сітка з 2352 лінійними (а) та квадратичними (б) елементами показана на

Рис. 4.2. Табл. 4.1 містить дані про час виконання програми для різних сіток.

Таблиця 4.1 Дані про час виконання програми для різних сіток

<b>S</b> максимальна (м)	<b>Кількість</b> трикутних елементів	<b>Кількість</b> лінійних вузлів	<b>Кількість</b> квадратичних вузлів	<b>Час</b> виконання для лінійних вузлів(хв)	<b>Час</b> виконання для квадратичних вузлів (хв)
<b>32</b>	76	52	179	5	9
<b>16</b>	137	86	308	5	9
<b>8</b>	289	170	628	9	17
<b>4</b>	584	328	1329	13	25
<b>2</b>	1178	639	2455	17	33
<b>1</b>	2352	1248	4847	23	45

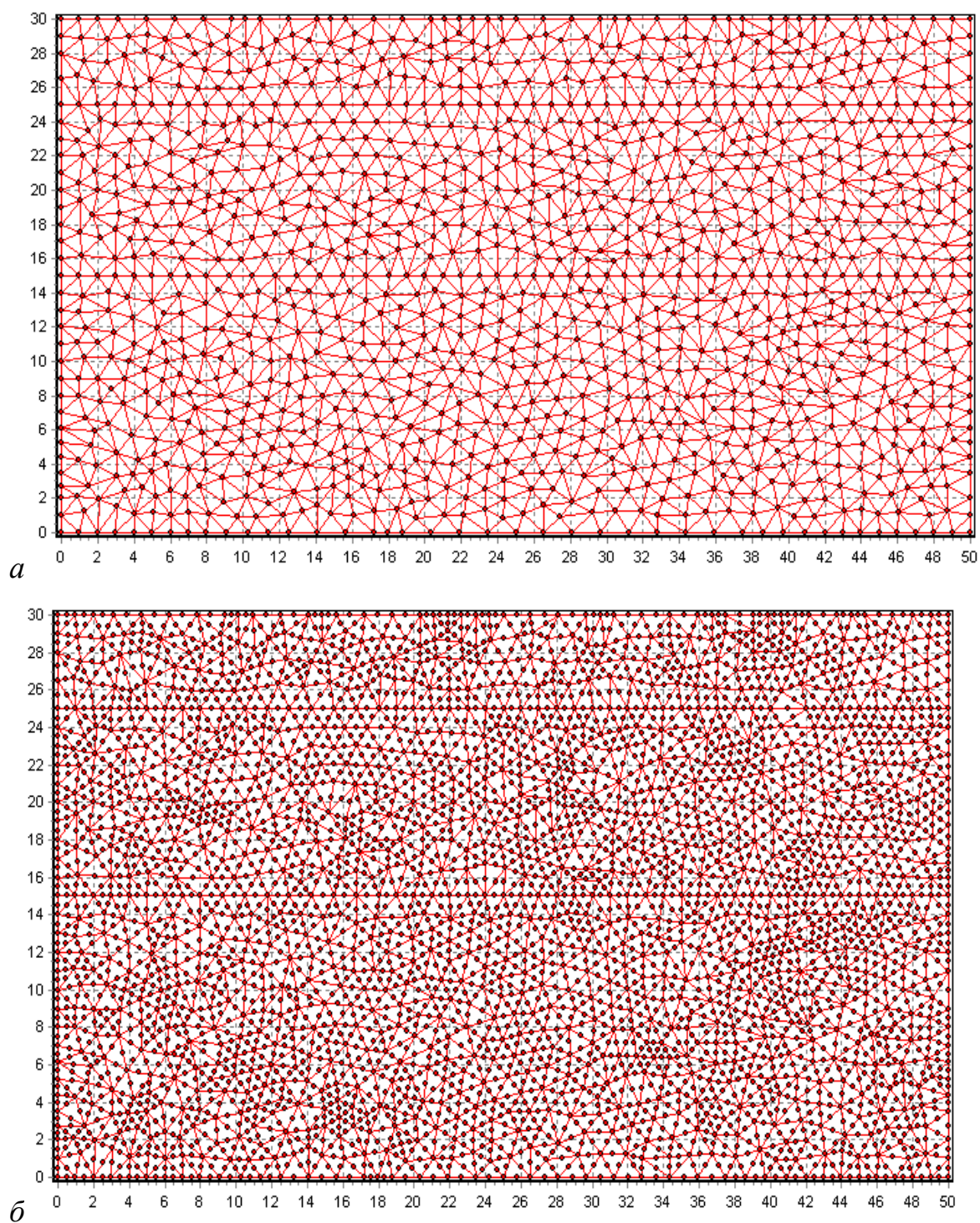


Рис. 4.2. Сітка з 2352 лінійними (а) та квадратичними (б) елементами

Програма надає можливість виводити переміщення у всіх вузлах сітки, а також їх графіки по заданих перерізах  $x = const$  та  $y = const$ . На рис. 4.3 показано графіки переміщень в перерізах для різних переміщень у отримані на

сітці, яка містить 2352 квадратичні елементи ( $S=I$ ). Результати розрахунку напружень для цих випадків зображено на Рис. 4.4.

На Рис. 4.4 показано розподіл напружень  $\sigma_{xx}$  вздовж осі  $Ox$  при для цих випадків, а на рис. 4.5 – розподіл напружень  $\sigma_{yy}$  вздовж осі  $Ox$ .

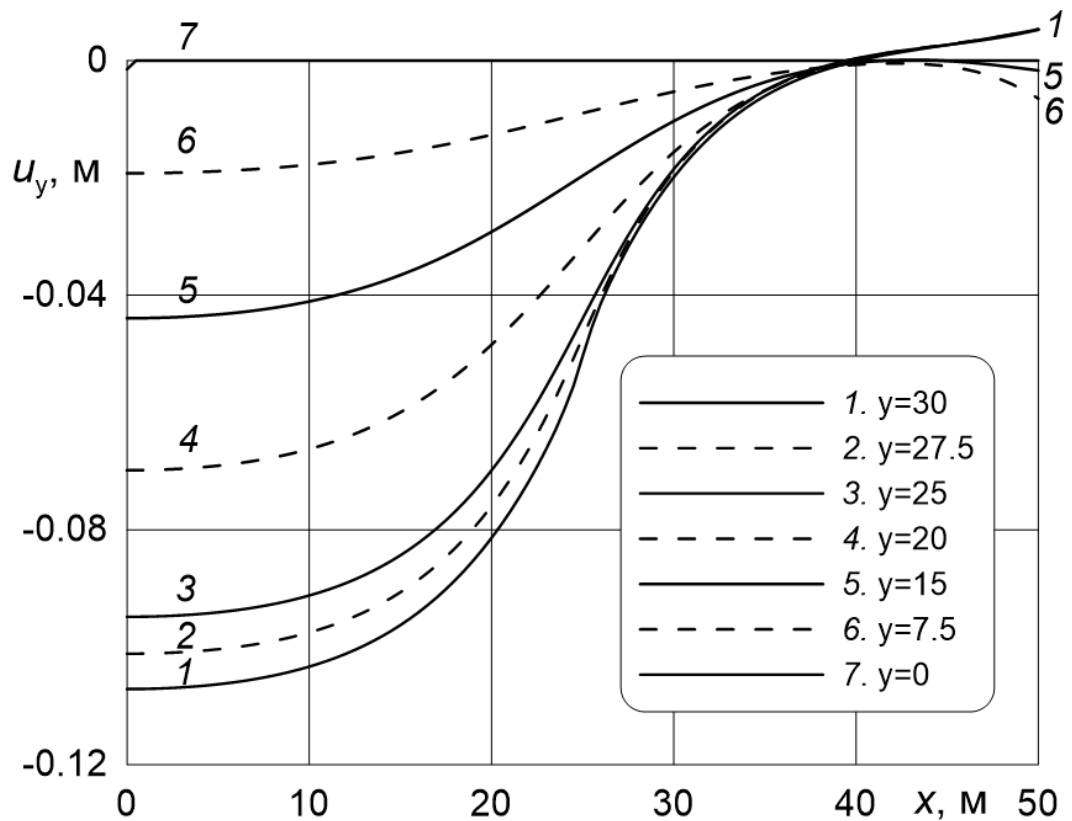


Рис. 4.3. Графіки переміщень в перерізах для різних переміщень у

Також був побудований графік дотичних напружень за формулою:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + 3\sigma_{xy}^2},$$

що зображений на Рис 4.6.

Збіжність, згідно ущільнення сітки елементів, проілюстрована на графіках для переміщень та напружень отриманих на вказаних сітках елементів. Вони зображені на Рис 4.7. та Рис. 4.8. відповідно. На Рис. 4.9 показана збіжність дотичних напружень.

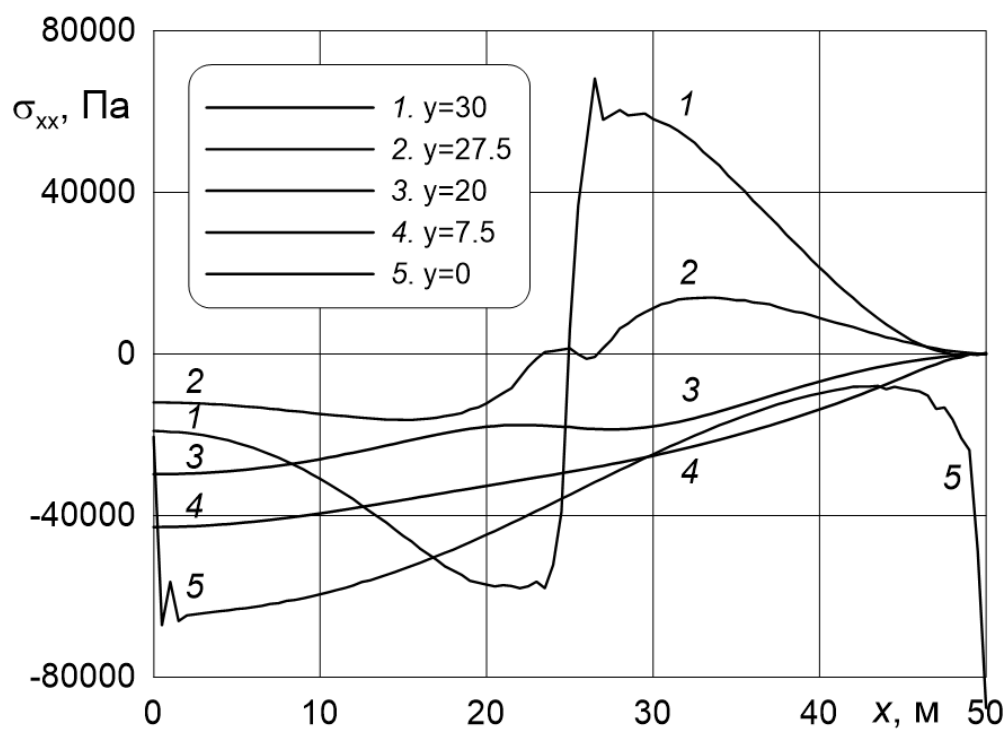


Рис. 4.4. Розподіл напружень  $\sigma_{xx}$  вздовж осі  $Ox$

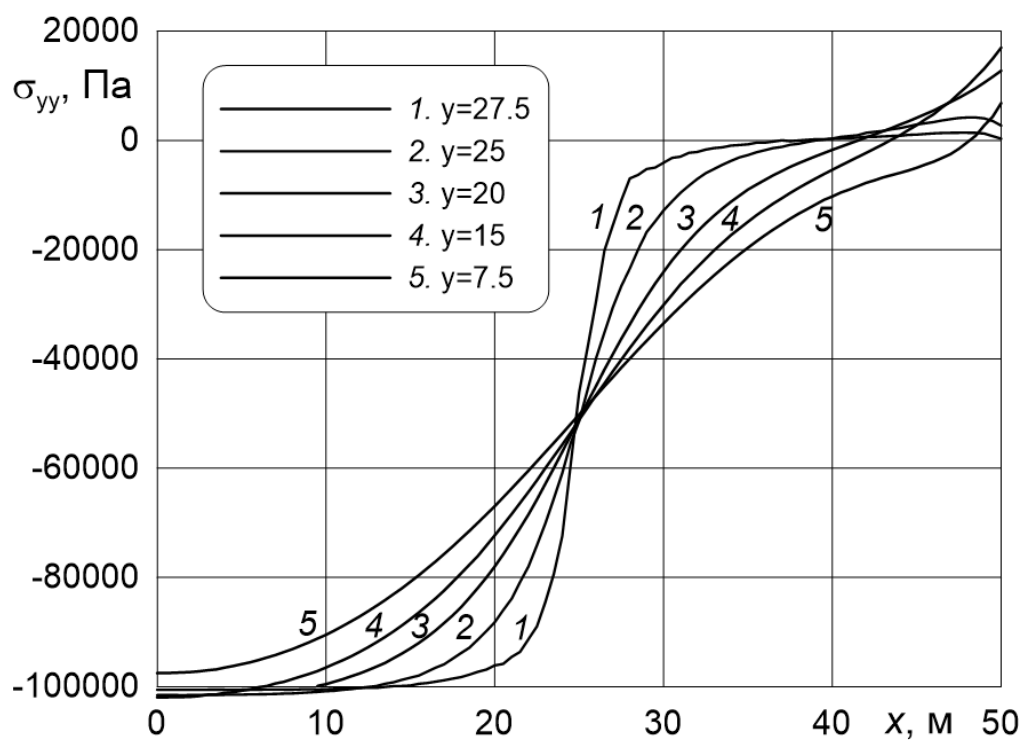


Рис. 4.5. Розподіл напружень  $\sigma_{yy}$  вздовж осі  $Ox$

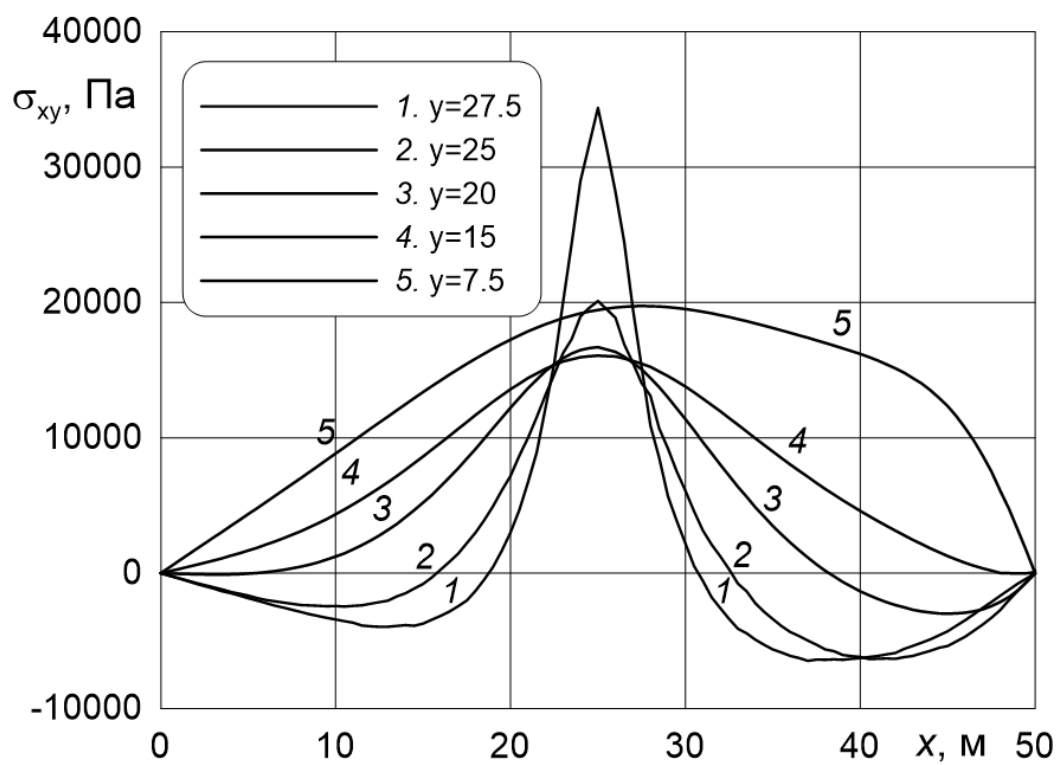


Рис. 4.6. Графік дотичних напружень

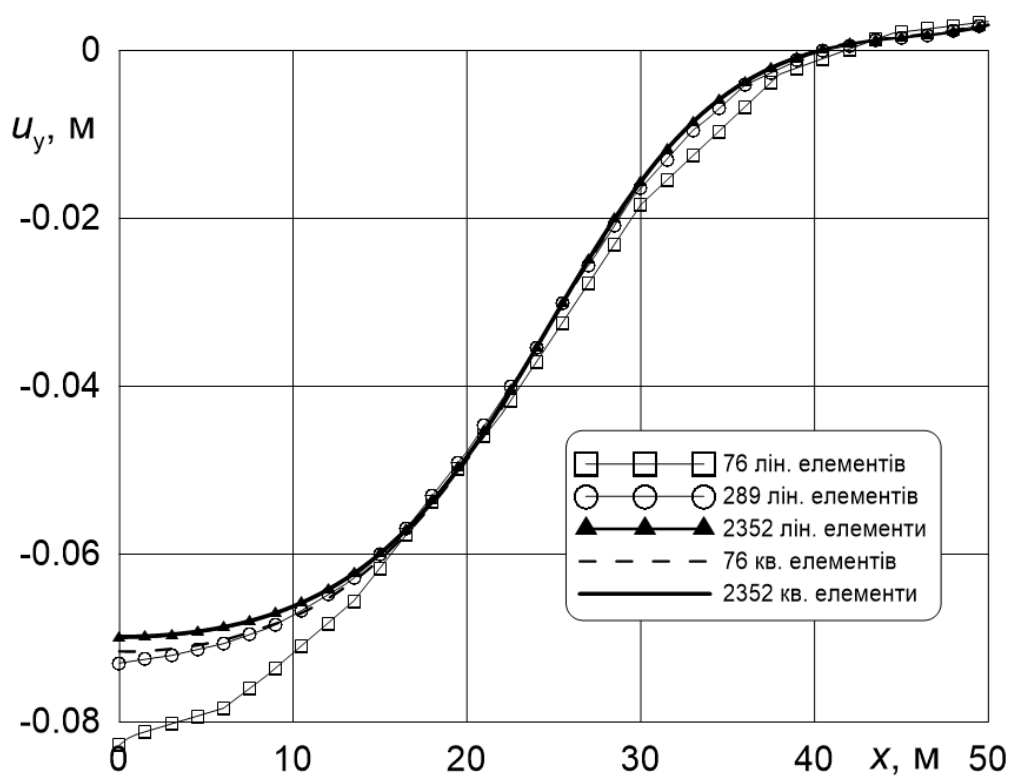


Рис. 4.7. Графіки переміщень

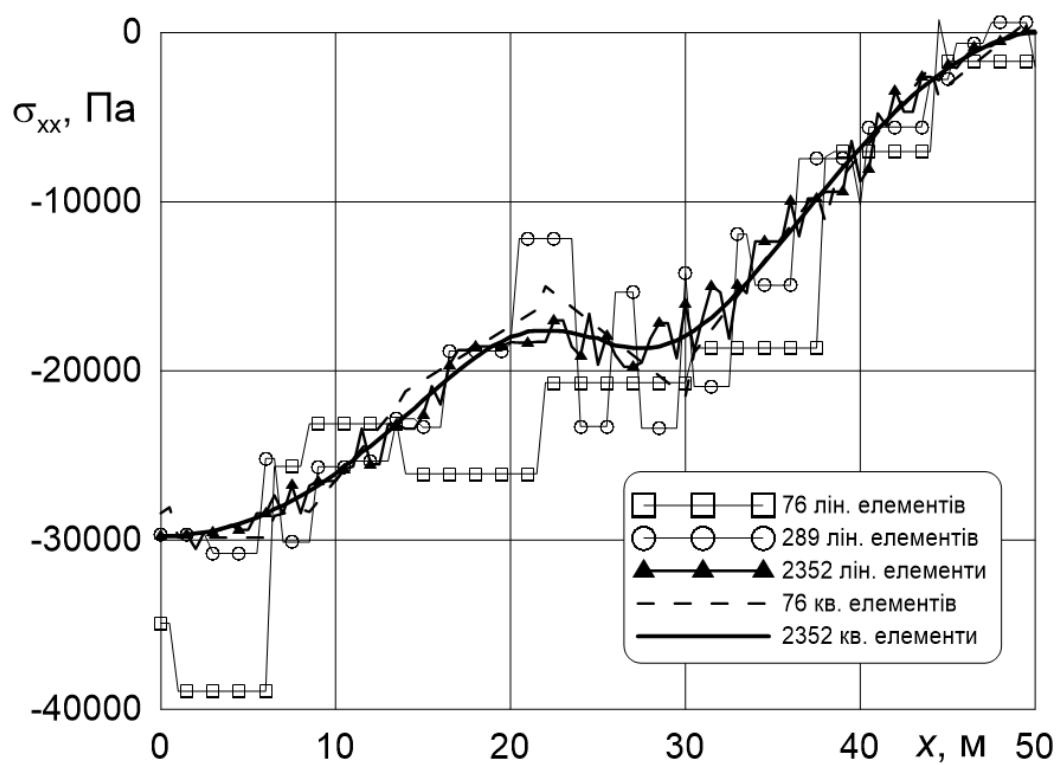


Рис. 4.8. Графіки напружень

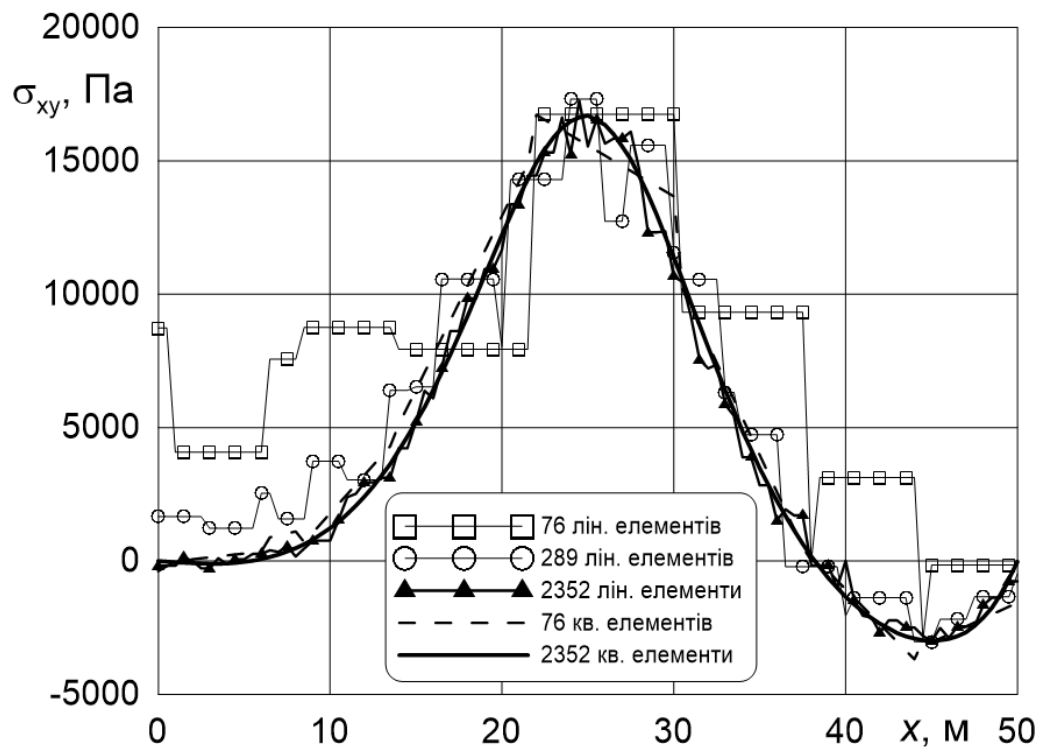


Рис. 4.9. Збіжність дотичних напружень

Варто зазначити, що для лінійних трикутних елементів помітна збіжність з ущільненням сітки. Так для 2352 лінійних елементів результат точніший, ніж для 289 лінійних елементів, але як гарно видно на Рис 4.7 – 4.9 вже для 76 квадратичних елементів результат є майже тим самим, що й для 2352 лінійних елементів.

Користуючись програмою Surfer на основі одержаних результатів, отримано графіки пластичних деформацій (Рис. 4.10 «Пластичні деформації»).

На рис. 4.11. наведено результати розв'язку аналогічної задачі в спеціалізованій програмі GEO 5. Можна зробити висновки про високу збіжність отриманих результатів моделювання. Розбіжності результатів пояснюються припущеннями.

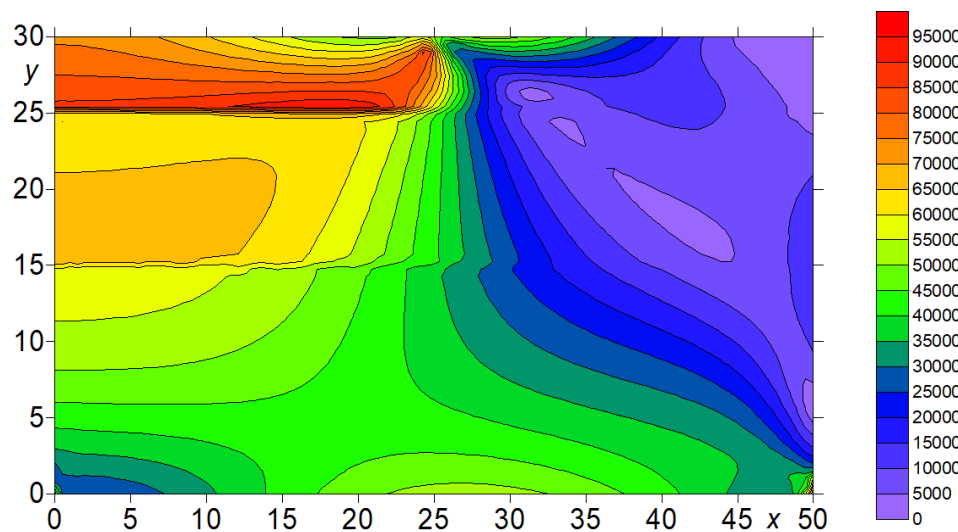


Рис. 4.10. Пластичні деформації

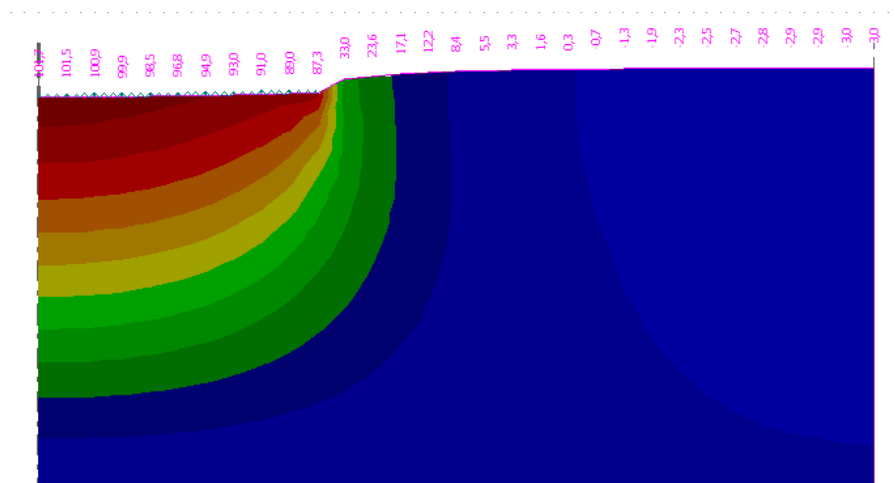


Рис. 4.11. Розрахунки в програмі GEO 5

Тепер перейдемо до 2ї частини досліджень, а саме дослідження стійкості схилів за допомогою ненавантаженої лінійної багатошарової моделі ґрунту. Дане дослідження почалося через те, що останнім часом спостерігається збільшення кількості опадів і вказується: «Найпоширенішим стихійним метеорологічним явищем в Україні виступає дуже сильний дощ, що зумовлює селі, повені, катастрофічні зливи, затоплює значні території сільськогосподарських угідь, житлові та виробничі приміщення і навіть призводить до зміни ландшафту.

Було зафіксовано близько 1355 випадків такого дощу за 1986–2010 рр. (це 44 % від усієї кількості СМЯ, що спостерігалися в Україні в цей період). За даними у середньому щорічно реєструється 53 випадки дуже сильного дощу.» Також в [11-12] наводиться Рис. 4.12 «Повторюваність дуже сильних дощів для території України в різні місяці» та наступна фраза: «Найвища повторюваність дуже сильних дощів (30 мм і більше за 12 годин і більше) для всієї території України характерна для літнього сезону – 61 %.» Таким чином можна констатувати, що значна кількість опадів та стихійних явищ відбувається саме в літні місяці, коли на поля виводиться велика кількість техніки.



Рис. 4.12. Повторюваність дуже сильних дощів для території України в різні місяці

Під час досліджень стійкості схилу також використовується метод скінчених елементів, адже:

МСЕ-програми забезпечують широкий спектр можливостей моделювання контролю складності систем різного порядку.

Сутність методу полягає в чисельному знаходженні розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у часткових похідних.

На Рис. 4.13. «Побудова кордонів ґрунтів» – 4.14 «Генерування триангуляційної сітки трикутних скінчених елементів» наведено приклади програмної реалізації методу. На даному етапі для перевірки модуля моделі, який відповідає за побудову еквівалентних пластичних деформацій  $\epsilon_{eq,pl}$ , ми здійснюємо графічну інтерполяцію дотриманих даних здійснюємо знову ж таки застосовуючи допомогу програми Surfer (Рис. 4.15 «Генерування еквівалентних пластичних деформацій  $\epsilon_{eq,pl}$  в програмі Surfer»).

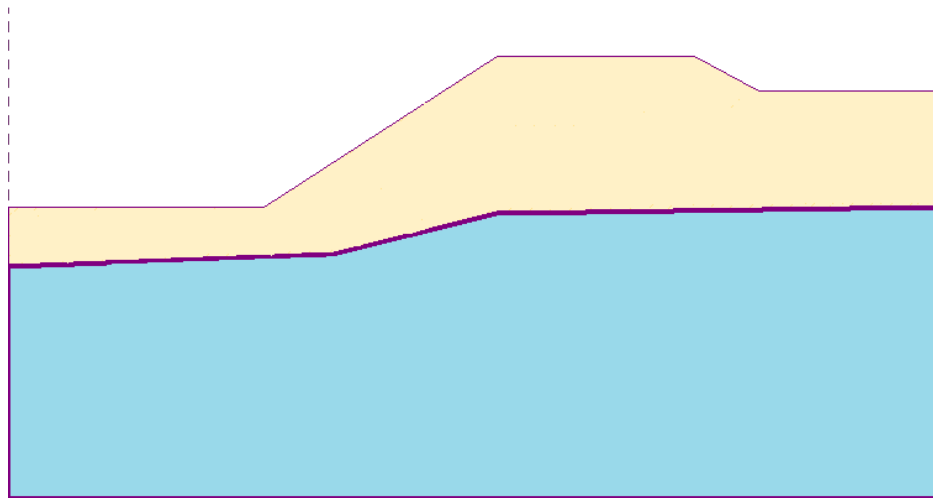


Рис. 4.13. Побудова кордонів ґрунтів

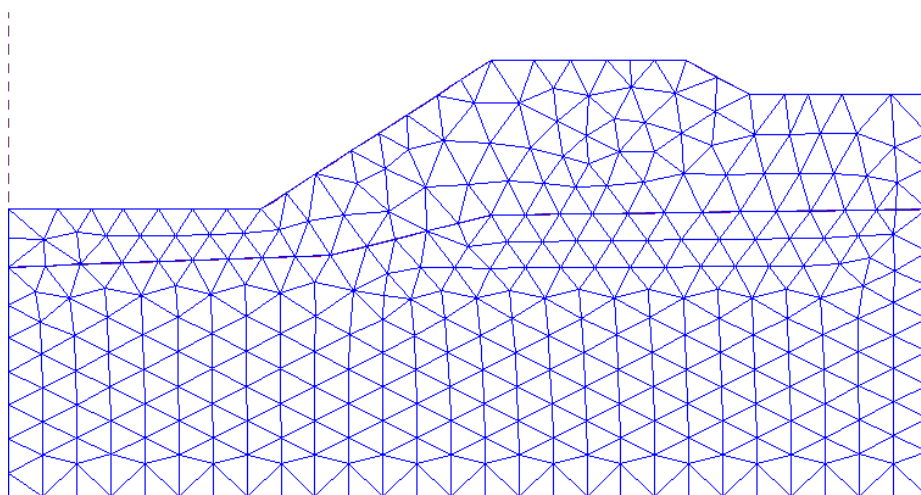


Рис. 4.14. Генерування триангуляційної сітки трикутних скінчених елементів

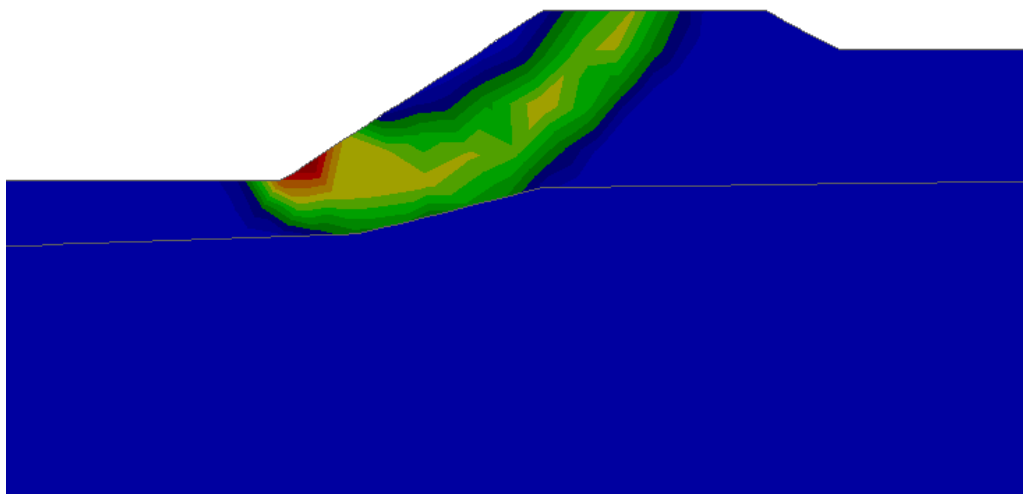


Рис. 4.15. Генерування еквівалентних пластичних деформацій  $\varepsilon_{eq,pl}$  в програмі Surfer

В якості одного з напрямків подальших досліджень можна вважати програмування привантаження різних областей зони дослідження (Рис. 4.16).

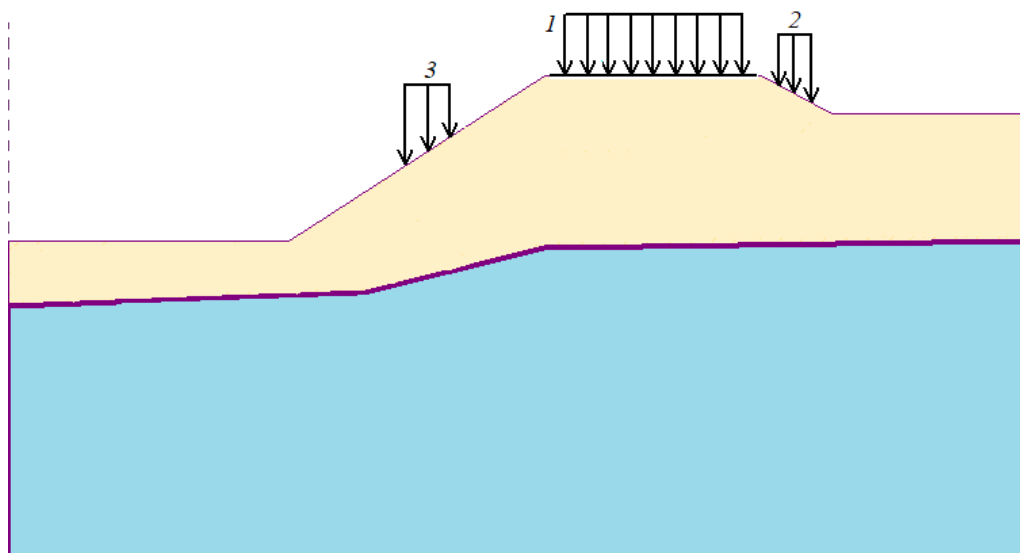


Рис. 4.16. Варіанти навантаження на схил

## ВИСНОВКИ

Було проведено моделювання та порівняння напружень та деформацій основ в районі будівництва за допомогою методу скінченних елементів, що розглядалися на прикладах з реального життя. Беручи за основу одержані результати, були зроблені наступні висновки.

По-перше, тотожність результатів, що були здобуті в результаті моделювання за допомогою моїх програмних продуктів, Surfer та інших програм (AutoCAD Civil 3D, GEO 5) доводить правильність припущень та розробленої моделі, що наочно видно на Рис. 4.10 «Результат побудований на Surfer згідно одержаних даних» та 4.11. «Розрахунки в програмі GEO 5». Також зазначимо, що підтвердженням правильності обрахунків слугує те, що напруження  $\sigma_{yy}$  на поверхні навантаження дорівнюють зовнішньому навантаженню.

По-друге, згущення сітки, як у випадку лінійних вузлів так, і у випадку квадратичних, позитивно впливає на одержані результати. Збіжність згідно ущільнення сітки елементів проілюстрована на графіках для переміщень та напружень отриманих на вказаних сітках елементів (Рис. 4.7. – Рис. 4.9.).

По-третє, я зробила висновок, що результати, одержані за допомогою використання тріангуляції з квадратичними вузлами є точнішими, ніж використання тріангуляції з лінійними вузлами при однакових початкових умовах і припущеннях. Вже при 76 квадратичних елементах результат майже збігається з тим, що одержаний для 2352 лінійних елементів. Це є достатньо суттєвим при виборі методу тріангуляції і при використанні великої кількості елементів навіть значно економить час, адже нам не має необхідності використовувати стільки квадратичних трикутних скінченних елементів.

І, на кінець, варто зазначити, що дані дослідження є достатньо актуальними не лише для України, а й для світу загалом.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Корупція вбиває. Як забудовники і влада помножили кількість жертв землетрусу в Туреччині. Економічна правда: веб-сайт URL: <https://www.epravda.com.ua/publications/2023/02/15/697076/> (дата звернення 11.05.2023).
2. Росіяни вдарили ракетами по центру Вінниці, багато загиблих і поранених Українська правда: веб-сайт URL: <https://www.pravda.com.ua/news/2022/07/14/7358046/> (дата звернення: 11.07.2022).
3. ДБН А.2.1-1-2014 Інженерні вишукування для будівництва. Друга редакція [на заміну ДБН В.2.1-1-2008; чинний від 2019-01-01]. – К.: Мінрегіон України, 2014. – 126 с.
4. ДБН В.2.1-10-2009: Об'єкти будівництва та промислова продукція будівельного призначення. Основи та фундаменти споруд. Основні положення проектування. [Чинний від 2009-01-07]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 104 с.
5. Корнієнко М. В. Основи і фундаменти: навчальний посібник. – К.: КНУБА. 2012. – 164 с.
6. ДСТУ-Н Б В.1.1-39:2016. Настанова щодо інженерної підготовки ґрунтової основи будівель і споруд. [Чинний від 2016-06-24]. – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2016. – 48 с.
7. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости. М.:Мир, 1987. 542 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Наука, 1975. 392 с.
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

11. О. Шевченко Оцінка вразливості до зміни клімату: Україна [Електронний ресурс] / О. Власюк, І. Ставчук, М. Ваколюк, О. Ілляш, А. Рожкова – Кліматичний форум східного партнерства (КФСП) та Робоча група громадських організацій зі зміни клімату (РГ НУО ЗК), 2014. – Режим доступу: [https://necu.org.ua/wp-content/uploads/ukraine\\_cc\\_vulnerability.pdf](https://necu.org.ua/wp-content/uploads/ukraine_cc_vulnerability.pdf)
12. Дутчин М. Дослідження точності визначення осідань фундаментів інженерних споруд на стадії ущільнення ґрунтів / Дутчин М., Грицюк Т., Ничвид М. // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК. – 2014. – Випуск I (27). – С. 45-56.
13. Majowski M. Conceptual design of long span structures a knowledge based synthetical approach // Proceedings of the IASS/University of Bologna, Italy. Symposium, October 7—1, 1996. Stuttgart/Germany, 1996. – Vol. 1.
14. Мельчаков А.П. Прогноз, оценка и регулирование риска аварии зданий и сооружений: теория, методология и инженерные приложения. / Мельчаков А.П., Чебоксаров Д.В. – Монография. Челябинск: УГТУ-УПИ, 2009. – 384 с.
15. Мельчаков А. П. Прогноз, оценка и регулирование риска аварии зданий и сооружений: теория, методология, инженерные приложения / Мельчаков А. П., Чебоксаров Д. В. – Монография. Челябинск УГТУ-УПИ. 2006. – 384 с.
16. Большаков В. И. Напряженно-деформированное состояние однородного массива грунта от нагрузки, передаваемой через ограниченную в плане площадь, приложенную внутри упругого однородного массива грунта. / Большаков В. И., Моторный А. Н., Моторный Н. А. // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. № 3 –2017. – С. 22-30.
17. Моторный Н. А. Распределение напряжений в массиве грунта от собственного веса грунта, передаваемой по ограниченной горизонтальной поверхности / Н. А. Моторный // Theoretical foundations of civil engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (conference), Warsaw, September, 2010/ ed. by W. Szczesniak. – Warsaw, 2010. – Vol. 18. – P. 393-398.

18. Большаков В. И. Обоснование сил трения грунта на боковую поверхность ствола свай и подземных сооружений при изменении гидрогеологических условий подтопляемой строительной площадки / В. И. Большаков, А. Н. Моторный, Н. А. Моторный // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2016. – № 7. – С. 10-20.
19. Андреев В. С., Тюткин А. Л., Селихова Т. А. // Математическое моделирование внецентренно нагруженных фундаментов на слоистых основаниях методом конечных элементов. Наука та прогресс транспорту. – 2004. – С.183- 187.