

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

(повне найменування назва факультету)

Кафедра прикладної математики

(повна назва кафедри)

Магістерська робота

Декомпозиція областей у методі скінченних елементів при
розв'язуванні крайових задач

Виконав: студент групи _____ ПМПм-22с
спеціальності

113 Прикладна математика

(шифр і назва спеціальності)

_____	Лесів О. М.
(підпис)	(прізвище та ініціали)
Керівник _____	Дяконюк Л. М.
(підпис)	(прізвище та ініціали)
Рецензент _____	Ярмола Г. П.
(підпис)	(прізвище та ініціали)

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет _____ прикладної математики та інформатики

Кафедра _____ прикладної математики

Спеціальність _____ 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Завідувач кафедри Ящук Ю. О.

" " 2022 року

ЗАВДАННЯ

НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Лесіву Олегу Михайловичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

(прізвище, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи Декомпозиція областей у методі скінченних елементів при розв'язуванні крайових задач

керівник роботи Дяконюк Лілія Миколаївна,
доцент кафедри _____ прикладної математики, кандидат фізико-
математичних наук _____

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від "22" вересня 2021 року № 6

2. Строк подання студентом роботи 16 травня 2022 р.

3. Вихідні дані до роботи

1. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами.

- Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. 207 с.

2. A. Quarteroni Numerical Models for Differential problems. - Springer-Verlag Italia, Milano 2008. 530 с.

4. Зміст магістерської роботи (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Дослідити підходи вирішення крайових задач, зокрема методи декомпозиції для
метода _____ скінченних
елементів _____

2. Створити програмний застосунок для вирішення крайових задач за допомогою
МСЕ та методів декомпозиції _____

3. Проаналізувати отримані за допомогою написаної програми результати, та
зробити висновки щодо застосування методів _____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

1. Таблиці чисельних експериментів _____

2. Графічні зображення областей задач _____

3. Графіки розв'язку

6. Консультанти розділів роботи


Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.09.2021р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН


№ з/п	Назва етапів магістерської роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Аналіз літератури	Вересень-Жовтень 2021р.	
1.	Проведення теоретичних досліджень	Листопад 2021р. - Січень 2022р.	
2.	Практична реалізація алгоритмів	Лютий-квітень 2022р.	
3.	Оформлення роботи	Травень 2022р.	

Студент


(підпис)

Лесів О. М.
(прізвище та ініціали)

Керівник роботи


(підпис)

Дяконюк Л. М.
(прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ	3	
1	Метод скінченних елементів	4
1.1	Формулювання задачі	4
1.2	Варіаційне формулювання	5
1.3	Дискретизація і побудова розв'язку з лінійним базисом	6
1.3.1	Триангуляція області	6
1.3.2	Дискретизація	7
1.3.3	Матриці МСЕ	8
1.4	Формування СЛАР	12
1.4.1	СЛАР	12
1.4.2	Заповнення СЛАР	12
1.4.3	Алгоритм заповнення СЛАР	13
2	Методи декомпозиції	14
2.1	Мультиплікативний метод Шварца	14
2.2	Багатопотоковий підхід	16
3	Реалізація	18
3.1	Опис програми	18
3.2	Приклад 1	18
3.3	Результати	19
3.4	Аналіз	21
3.5	Приклад 2	22
3.6	Результат	23
3.7	Аналіз	23
Висновок	24	
Список використаних джерел	25	

Вступ

Метод скінченних елементів першочергово виник як інструмент для розв'язання складних задач еластичності та структурного аналізу, а перший розвиток у цьому напрямі датується 1941. Сьогодні ж, це потужний напрямок, що використовується у безлічі сферах діяльності, де застосовують диференціальні рівняння як опис фізичних явищ. Разом з тим, метод скінченних елементів часто комбінують з іншими підходами або модифікують, для досягнення кращого результату у кожній окремій сфері. Таким чином і розвивався напрям декомпозиції областей, починаючи з методу доповнення Шура (Schur complement method), що вже відомий декілька десятиліть. На сьогодні найбільшою популярністю серед методів декомпозицій областей користується метод FETI (finite element tearing and interconnect), котрий вимагає меншої кількості інтерактивних операцій, одночасно зберігаючи ступінь паралелізму методу доповнення Шура.

З покращенням комп'ютерних технологій та поширення так званого "багатопроесорного" підходу всяка промисловість очікує покращень підходів задля більш ефективного процесу, а значить і більш прибуткового результату. У випадку декомпозицій областей таким критерієм покращення є час, витрачений на розв'язання проблеми методом скінченних елементів. А отже, таке покращення буде доцільним для будь-якої сфери діяльності, особливо, для задач з надвеликими областями рішення.

Метою даної роботи є вивчення застосування підходів декомпозицій областей до методу скінченних елементів, і зокрема конкретного методу. Цим методом буде мультиплікативний метод Шварца, котрий використовує поділ на області, що перетинаються. Користуючись теоретичною базою такого вивчення, ми напишемо реальний код, що б показував на прикладі доцільність використання таких методів у порівнянні з оригінальним методом скінченних елементів.

1 Метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів (МСЕ) - числова техніка знаходження розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП). Метою даної роботи є дослідження точності методу скінченних елементів для задачі. При використанні МСЕ, схема розв'язування задач на граничні значення має такий алгоритм:

1. Перетворення задачі у її варіаційну форму;
2. Дискретизація.

Після цього ми отримуємо формулу для скінченновимірної лінійної задачі, розв'язок якої буде приблизним розв'язком задачі. Опісля скінченновимірну задачу розв'язують на комп'ютері.

1.1 Формулювання задачі

Нехай Ω – область з Ліпшицевою границею Γ . Необхідно знайти невідому

$u \in \bar{C}_2(\Omega)$, що задовольняє розв'язок задачі:

$$\begin{cases} -a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + du = f, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} + \sigma(u - u_c) = 0, & (x_1, x_2) \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

де \mathbf{v} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,

$v_i = \cos(\mathbf{v}, x_i), i = 1, 2, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} v_2,$

$a_{11}, a_{22}, d, f, \beta, \sigma, u_c$ - const.

1.2 Варіаційне формулювання

Нехай $V = \{u(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) \in W_2^{(2)}(\Omega); \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(u - u_c) = 0, x \in \Gamma\}$ – простір Соболева (інтегровних з квадратом функції до 2-ої похідної включно). Домножимо скалярно перше рівняння системи (1.1) на $\forall v \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Отримаємо :

$$\int_{\Omega} \left(-a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\Omega + d \int_{\Omega} (uv) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.1)$$

Застосуємо формулу Остроградського-Гріна:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} v_2 \right) v d\Gamma + \\ + d \int_{\Omega} (uv) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким чином, варіаційне формулювання полягає у тому, щоб знайти $u \in V$ таку, що виконується (2.2) для $\forall v \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

З рівняння 2 системи (1.1) одержуємо: $a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} v_2 = -\frac{\sigma}{\beta}(u - u_c)$. Підставимо це подання у (2.2), перенесемо доданок із u_c в праву частину, отримаємо:

$$K + R + M = Q + P \quad (2.3)$$

де

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Omega} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\Omega \\ M &= d \int_{\Omega} (uv) d\Omega, \quad Q = \int_{\Omega} f v d\Omega \\ R &= \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma} u v d\Gamma, \quad P = \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma} u_c v d\Gamma \end{aligned} \quad (2.4)$$

Розв'язок системи (2.3) і будемо вважати вихідними даними.

1.3 Дискретизація і побудова розв'язку з лінійним базисом

1.3.1 Триангуляція області

Для триангуляції області Ω використаємо пакет мови програмування **C#** для триангуляції під назвою `Triangle.Net`. Нехай границя області Ω – задана скінченною кількістю відрізків, визначених вузлами, поданими у порядку проти годинникової стрілки. Для побудови триангуляції використовуємо інкрементний алгоритм побудови та вимагаємо від результату забезпечення α – мінімального кута скінченного елемента та h – його максимальної площі. Окрім цього, така триангуляція має відповідати умовам триангуляції Делоне (Рис. 1). Умова Делоне стверджує, що триангуляція є триангуляцією Делоне, якщо всі описані кола трикутників не мають в собі іншого вузла. Пакет `Triangle.Net`, котрий на момент 2020 року знаходився у вільному доступі, дозволяє нам побудувати таку триангуляцію.

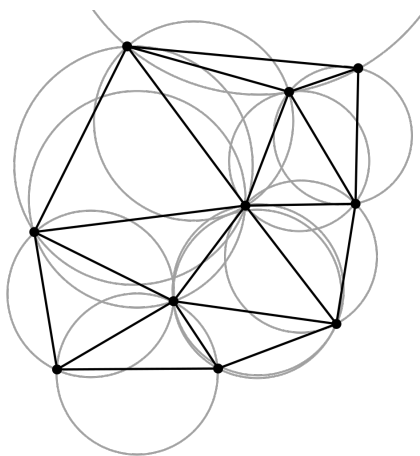


Рис 1. Триангуляція Делоне

Алгоритм інкрементної триангуляції:

1. Область Ω обмежують трикутником з уявними ребрами;
2. Кожен вузол у порядку задання додають в обмежувальну область:
 - Якщо вузол попадає у внутрішню область трикутника, тоді цей трикутник розбивається на три;

- Якщо вузол попадає на ребро розбиття, тоді всі елементи, для яких це ребро є гранню, розбиваються на два;
 - Якщо вузол попадає у вершину триангуляції, то він ігнорується;
3. Вилучення уявних граней;
 4. Забезпечення параметрів триангуляції.

Результати триангуляції: CT - масив вузлів триангуляції; NT - масив скінченних елементів, заданих індексами вузлів; NTG - масив граничних елементів, заданих індексами вузлів.

1.3.2 Дискретизація

$\Omega = \bigcup_{e=0}^N \Omega_e$, де N - кількість скінченних елементів.

$\Gamma = \bigcup_{e=0}^M \Gamma_e$, де M - кількість граничних елементів.

Орієнтація елемента – проти годинникової стрілки.

Подано розв'язок задачі (1.1) на елементі Ω_e через базисні функції ϕ_i , ϕ_j , ϕ_m :

$$u_h = u_i \phi_i + u_j \phi_j + u_m \phi_m \quad (4.1)$$

де u_i, u_j, u_m – невідомі коефіцієнти.

Визначимо базисну функцію ϕ_i :

$$\phi_i = \frac{S_{pjm}}{S_{ijm}} = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ \frac{1}{\delta}(a_i + b_i x_1 + c_i x_2), & \text{інакше} \\ 0, & p \in \overline{j\bar{m}} \end{cases} \quad (4.2)$$

де в (4.2)

$$S_{pjm} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix} \quad S_{ijm} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix}$$

$$P(x_1, x_2) \quad \delta = 2S_{ijm}$$

$$j(x_1^j, x_2^j) \quad a_i = x_1^j x_2^m - x_2^j x_1^m$$

$$i(x_1^i, x_2^i) \quad b_i = x_2^j - x_2^m$$

$$m(x_1^m, x_2^m) \quad c_i = x_1^m - x_1^j$$

Аналогічним чином, можна визначити інші базисні функції. Послідовності точок для визначення кожної з базисних функцій: $ijm - \phi_i$, $jmi - \phi_j$, $mij - \phi_m$.

Нехай $x = x(x_1, x_2) \in \Omega$, тоді наближений розв'язок в точці x :

$$u_h(x) = \sum_i u_i \phi_i^h$$

.

1.3.3 Матриці МСЕ

Нехай нижній індекс e означає, що ми розглядаємо відповідне значення на елементі з індексом e . Тоді :

$$u_h = N_e q_e$$

$$N_e = (\phi_i, \phi_j, \phi_m)$$

$$q_e = (u_i, u_j, u_m)^T$$

$\forall v \in V \Rightarrow v \rightarrow N_e$, оскільки замість довільної функції v можна підставити базисні функції.

Матриця M_e

$$\begin{aligned}
 M_e &= d \int_{\Omega_e} f v d\Omega = d \int_{\Omega_e} N_e^T N_e d\Omega_e = d \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{pmatrix} (\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_m) d\Omega_e = \\
 &= d \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \phi_j & \phi_i \phi_m \\ \phi_i \phi_j & \phi_j^2 & \phi_j \phi_m \\ \phi_i \phi_m & \phi_j \phi_m & \phi_m^2 \end{pmatrix} d\Omega_e
 \end{aligned}$$

Формула явного вигляду для обчислення інтегралів у M_e :

$$\int_{\Omega_e} \phi_i^a \phi_j^b \phi_m^c d\Omega_e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \delta \quad (4.3)$$

Використавши формулу (4.3) одержуємо:

$$M_e = d \frac{\delta}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{dS_{\Omega_e}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Матриця K_e

$$K_e = \int_{\Omega_e} \left(a_{11} \frac{\partial N_e^T}{\partial x_1} \frac{\partial N_e}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial N_e^T}{\partial x_2} \frac{\partial N_e}{\partial x_2} \right) d\Omega_e \quad (4.5)$$

Позначимо:

$$\frac{\partial N_e}{\partial x_1} = (b_i \quad b_j \quad b_m), \quad \frac{\partial N_e}{\partial x_2} = (c_i \quad c_j \quad c_m)$$

Отримаємо:

$$K_e = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} a_{11}b_i^2 + a_{22}c_i^2 & a_{11}b_i b_j + a_{22}c_i c_j & a_{11}b_i b_m + a_{22}c_i c_m \\ a_{11}b_i b_j + a_{22}c_i c_j & a_{11}b_j^2 + a_{22}c_j^2 & a_{11}b_j b_m + a_{22}c_j c_m \\ a_{11}b_i b_m + a_{22}c_i c_m & a_{11}b_j b_m + a_{22}c_j c_m & a_{11}b_m^2 + a_{22}c_m^2 \end{pmatrix} d\Omega_e$$

Підставивши δ , проінтегрувавши та спростивши одержуємо:

$$K_e = \frac{1}{4S_{ijm}} \begin{pmatrix} a_{11}b_i^2 + a_{22}c_i^2 & a_{11}b_i b_j + a_{22}c_i c_j & a_{11}b_i b_m + a_{22}c_i c_m \\ a_{11}b_i b_j + a_{22}c_i c_j & a_{11}b_j^2 + a_{22}c_j^2 & a_{11}b_j b_m + a_{22}c_j c_m \\ a_{11}b_i b_m + a_{22}c_i c_m & a_{11}b_j b_m + a_{22}c_j c_m & a_{11}b_m^2 + a_{22}c_m^2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Проінтерполювавши функцію f на елементі Ω_e , отримаємо:

$$f = N_e f_e \quad , f_e = \begin{pmatrix} f(i) & f(j) & f(m) \end{pmatrix}^T$$

Матриця Q_e

$$Q_e = \int_{\Omega_e} N_e^T N_e f_e d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i & \phi_j & \phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1^i, x_2^i) \\ f(x_1^j, x_2^j) \\ f(x_1^m, x_2^m) \end{pmatrix} d\Omega_e \quad (4.8)$$

Враховуючи попередні обчислення:

$$Q_e = \frac{M_e}{d} f_e = \frac{S_{\Omega_e}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(i) \\ f(j) \\ f(m) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Проінтерполювавши функцію u на граничному елементі Γ_e , отримаємо:

$$u = N_e q_e, \quad N_e = (\phi_i, \phi_j), \quad q_e = (u_i, u_j)^T$$

Матриця R_e

$$R_e = \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma} uv d\Gamma = \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma_e} N_e^T N_e d\Gamma_e = \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} \phi_i^2 & \phi_i \phi_j \\ \phi_i \phi_j & \phi_j^2 \end{pmatrix} d\Gamma_e \quad (4.10)$$

Формула явного вигляду для обчислення інтегралів у R_e :

$$\int_{\Gamma_e} \phi_i^a \phi_j^b d\Gamma_e = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \Gamma, \quad (4.11)$$

де Γ — довжина граничного елемента Γ_e .

Використавши формулу (4.11) одержуємо:

$$R_e = \frac{\sigma}{\beta} \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} \Gamma \quad (4.12)$$

Матриця P_e

$\forall v \in V \Rightarrow v \rightarrow N_e$, оскільки замість довільної функції v можна підставити базисні функції.

$$P_e = u_c \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma} v d\Gamma = u_c \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{pmatrix} \Gamma_e = u_c \frac{\sigma}{\beta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Gamma \quad (4.13)$$

1.4 Формування СЛАР

1.4.1 СЛАР

Для знаходження невідомих коефіцієнтів u_i сформуємо систему лінійних рівнянь:

$$Au = b, \quad (5.1)$$

де $A \in R^{l \times l}$, $b \in R^{l \times 1}$, $u = (u_0, \dots, u_{l-1})^T \in R^{l \times 1}$,

l - кількість вузлів триангуляції.

Заповнювати матрицю такого рівняння справа, та вектор-стовбець зліва ми будем за допомогою сукупності даних з матриць, що були сформовані на попередньому етапі.

1.4.2 Заповнення СЛАР

Нехай, кожна матриця МСЕ має глобальні індекси — індекси вузлів, на яких вона побудована (для стовпця — індексування тільки по рядках).

Наприклад, для M_e — глобальні індекси: i, j, m .

Нехай, кожна матриця МСЕ має локальні індекси — індекси номерів рядків чи стовпців (для стовпця — індексування тільки по рядках), що починаються від 0. Наприклад, для M_e — локальні індекси: 0, 1, 2.

Нехай, Ω_e — скінченний елемент, побудований на вузлах триангуляції з індексами: i, j, m , що має ребро — граничний елемент $\Gamma_e - i, j$. Покажемо для них занесення чисел у матрицю A та вектор b .

$$\begin{pmatrix}
A_{00} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{0,l-1} \\
\cdot & A_{11} + K_e[0][0] + M_e[0][0] + R_e[0][0] & A_{12} + K_e[0][1] + M_e[0][1] + R_e[0][1] & A_{13} + K_e[0][2] + M_e[0][2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & A_{21} + K_e[1][0] + M_e[1][0] + R_e[1][0] & A_{22} + K_e[1][1] + M_e[1][1] + R_e[1][1] & A_{23} + K_e[1][2] + M_e[1][2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & A_{31} + K_e[2][0] + M_e[2][0] & A_{32} + K_e[2][1] + M_e[2][1] & A_{33} + K_e[2][2] + M_e[2][2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{l-1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{l-1,l-1}
\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_i \\ u_j \\ u_m \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_i + P_e[0] + Q_e[0] \\ b_j + P_e[1] + Q_e[1] \\ b_m + Q_e[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{l-1} \end{pmatrix}$$

(5.2)

1.4.3 Алгоритм заповнення СЛАР

Будемо вважати що матриця A та вектор b заповнені нулями.

Псевдокод заповнення матриці A :

Для $e = 0..N$:

Обчислити M_e, Q_e, K_e

Для $i = 0, 1, 2$:

Для $j = 0, 1, 2$:

$$A[NT[e][i], NT[e][j]] + = K_e[i][j] + M_e[i][j]$$

$$b[NT[e][i]] + = Q_e[i]$$

Псевдокод заповнення вектора b :

Для $e = 0..M$:

Обчислити P_e, R_e

Для $i = 0, 1$:

Для $j = 0, 1$:

$$A[NTG[e][i], NTG[e][j]] + = R_e[i][j]$$

$$b[NTG[e][i]] + = P_e[i]$$

Сформувавши матрицю та вектор, розв'яжемо методом Гаусса таку СЛАР для знаходження наближених значень функції u у вузлах триангуляції.

2 Методи декомпозиції

Суть декомпозиції полягає у розділенні одного великого завдання на серію менших завдань, які своєю чергою простіше розв'язати, аніж одне велике. Цей метод використовують не лише в математиці, а також в інших наукових сферах діяльності людини. У своїй найбільш поширеній версії, декомпозицію областей можна використовувати в рамках будь-якого методу дискретизації для рівнянь з частинними похідними (наприклад метод скінченних елементів, що, власне, і є нашим випадком), щоби зробити їхній алгебраїчний розв'язок більш ефективним на паралельних комп'ютерних платформах.

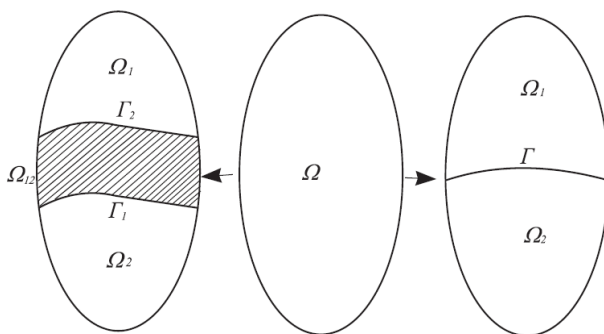


Рис. 2: Два способи декомпозиції області

2.1 Мультиплікативний метод Шварца

Існує два способи декомпозиції доменів: з перетином у підобластей, та без перетину (Рис 2.). Розглянемо один з перших відомих способів розв'язання рівнянь з частковими похідними на областях, що перетинаються — це мультиплікативний варіант методу Шварца, названий на честь Германа Шварца, який і запропонував даний метод у 1869 році, як ітераційний метод для доведення існування розв'язків для еліптичних рівнянь в областях, форма яких не дозволяє прямого застосування ряду Фур'є[2]. В сьогоденні популярність методу обумовлена розробкою обчислювальних чисельних алгоритмів з урахуванням сучасних паралельних комп'ютерних архітектур. Наприклад, у пакеті для опрацювання та імітації фізичних явищ

Comsol Multiphysics наявний окремий інструмент для декомпозицій, серед яких є і запропонований нами мультиплікативний варіант декомпозиції Шварца. Розглянемо двовимірну область Ω . Нехай $\partial\Omega$ — границя області Ω . Введемо штучні границі Γ_1 та Γ_2 так, що утворюються дві підобласті (Рис. 3) Ω_1 та Ω_2 з границями $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_2$. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. У процесі побудови числового розв'язку задачі методом скінченних елементів, використовуючи методи декомпозиції, використовують процес дискретизації підобластей Ω_1 і Ω_2 скінченними елементами. В такому разі вузли сіток у підобластях можуть або збігатися, або не збігатися. В такій ситуації розглядатимемо, коли вузли сіток двох підобластей Ω_1 і Ω_2 збігаються[1].

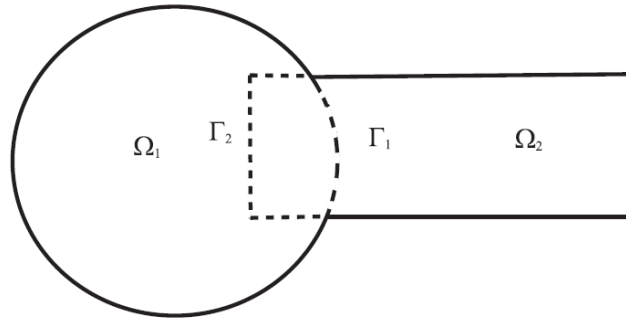


Рис. 3: Двовимірну область, поділена на 2 підобласті

В області Ω розглянемо задачу

$$\begin{cases} Du = f, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u = g & (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.3)$$

де D — заданий лінійний диференціальний оператор; $f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)$ - задані функції. Для побудови наближеного розв'язку задачі (5.3) використаємо алгоритм мультиплікативного методу Шварца, який складається з двох півкроків. Для початку, необхідно вибрати два початкових наближення розв'язку $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}$ в підобластях Ω_1 і Ω_2 . Тоді для $k \geq 1$ розв'яжемо наступні задачі:

$$\begin{cases} Du_1^{(k)} = f & \text{в } \Omega_1 \\ u_1^{(k)} = u_2^{(k-1)} & \text{на } \Gamma_1 \\ u_1^{(k)} = g & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Du_2^{(k)} = f & \text{в } \Omega_2 \\ u_2^{(k)} = u_1^{(k-1)} & \text{на } \Gamma_2 \\ u_2^{(k)} = g & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{cases}$$

2.2 Багатопотоковий підхід

Ідея застосування методів декомпозиції полягає у пришвидшенні обчислювальних процесів. Частково це досягається шляхом поділу СЛАР для усієї області на менші системи рівнянь для підобластей. Таке розбиття дійсно може дати пришвидшення у випадку надвеликих систем, як результат зменшення навантаження на використаний нами метод розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що у нашому випадку — метод Гаусса. Проте, постає запитання, чи можливо зменшити час виконання обчислень окрім як зменшення навантаження на метод для вирішення СЛАР. Зазвичай, перше, що приходить у голову в таких випадках, це використання паралелізму у процесах. Це ж використаємо і ми для нашого підходу.

Одразу ж виникає питання: як, попри покеровість деяких методів декомпозиції, імплементувати поділ на потоки? Розглянемо більш детально на прикладі мультиплікативного методу Шварца, описаного вище. Тут нам у пригоді стануть наші визначені підобласті, оскільки один потік буде обробляти саме одну таку підобласть. Проте, для збереження послідовності кроків алгоритму, підобласті, котрі можуть обчислюватись паралельно, мають бути на одному півкроці. Таке можливо тільки тоді, коли дві такі

підобласті не перетинаються, тобто:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$$

Таким чином, ми отримуємо подвійний зиск від найдрібнішого (наскільки це оптимально з точки зору мультипроцесорної інфраструктури мови програмування) поділу на підобласті: зменшення навантаження на метод розв'язування систем лінійних рівнянь, та більша кількість підобластей обчислюваних паралельно на одному кроці алгоритму. Варто зазначити, що для досягнення оптимального поділу на підобласті, потрібно розглядати окремо випадки з різною специфікою задачі та способів знаходження розв'язку, зокрема: специфіку областей та особливості застосування мультипроцесорних компонентів у вибраній мові програмування.

3 Реалізація

3.1 Опис програми

Мені вдалося реалізувати застосунок, що дає змогу застосувати мультиплікативний метод Шварца та метод скінченних елементів до розв'язування крайових задач на практиці. Програма була написана мовою програмування C, а для зображення результатів роботи програми було обрано засіб математичного обчислювання Matlab. У процесі написання даної програми було використано додаткові пакети, такі як Triangle.NET. Розв'язок, отриманий в результаті роботи програми, записується у вихідні файли (Un1.txt, Un2.txt) у вигляді координат точок X, Y та Z окремо для кожної з підобластей Ω_1 і Ω_2 , за допомогою яких можна зобразити графік функції-розв'язку вхідної задачі. У наступних підпунктах цього розділу можливо буде детальніше ознайомитись з результатами роботи даного застосунку.

3.2 Приклад 1

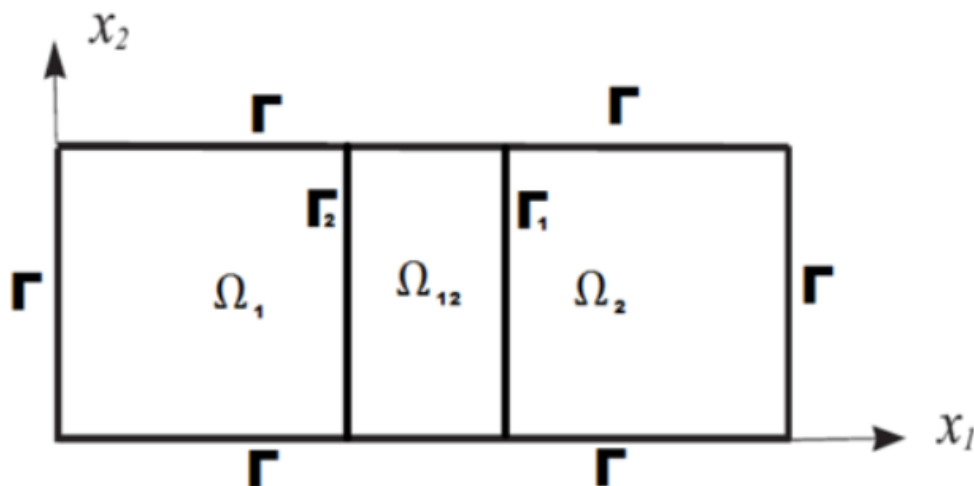


Рис. 4: Область дослідження

Розглянемо задачу на такій тривіальній області (Рис. 3). Поділимо область Ω . Нехай, Γ — границя області Ω . Введемо штучні границі Γ_1 та Γ_2 так, що утворюються дві підобласті Ω_1 та Ω_2 з границями Γ_1 і Γ_2 . $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

В області Ω розглянемо задачу

$$\begin{cases} -2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u = \frac{1}{2}, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u = 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma, \end{cases} \quad (5.4)$$

Визначимо початкове наближення для границі Γ_1 в одній з області: $u_2^{(0)} = \frac{1}{2}$.

3.3 Результати

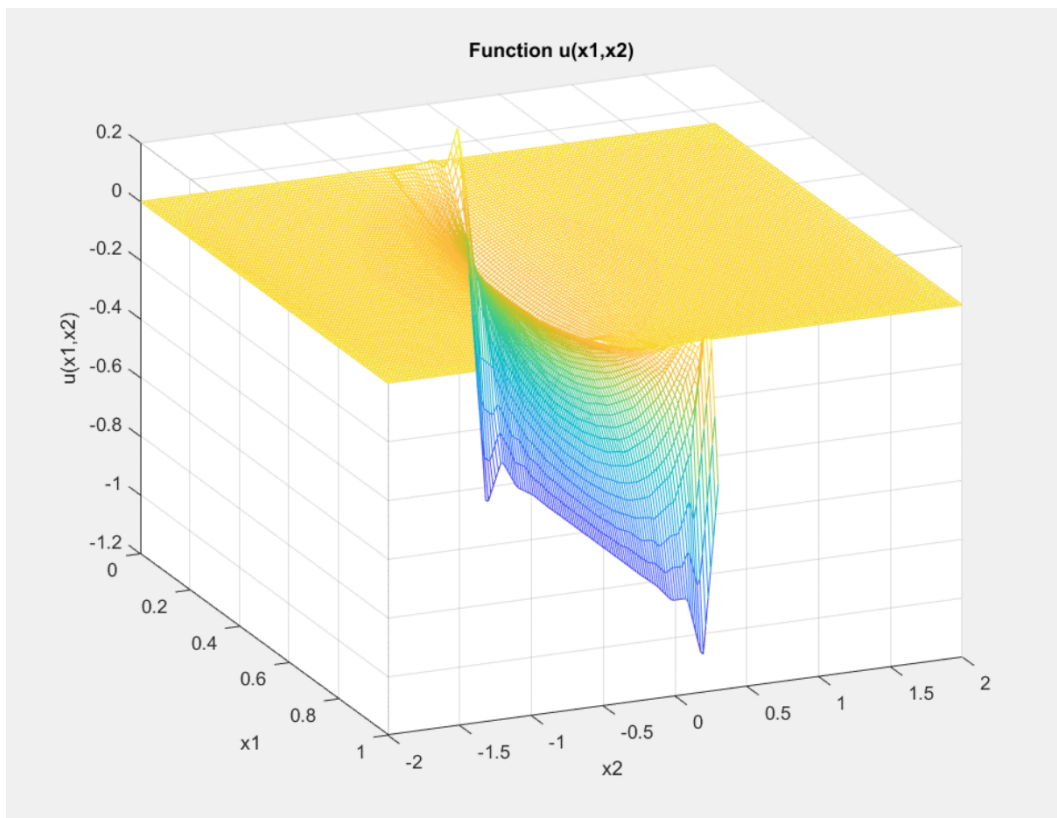


Рис. 5. Задана умова на одній підобласті та перша ітерація мультиплікативного методу

На рисунку 5 можемо спостерігати деякий розрив між областями. Це зумовлено лише параметром заданого початкового наближення $u_2^{(0)}$ на підобласті розташованій зліва. Права підобласть вже виконала першу ітерацію методу.

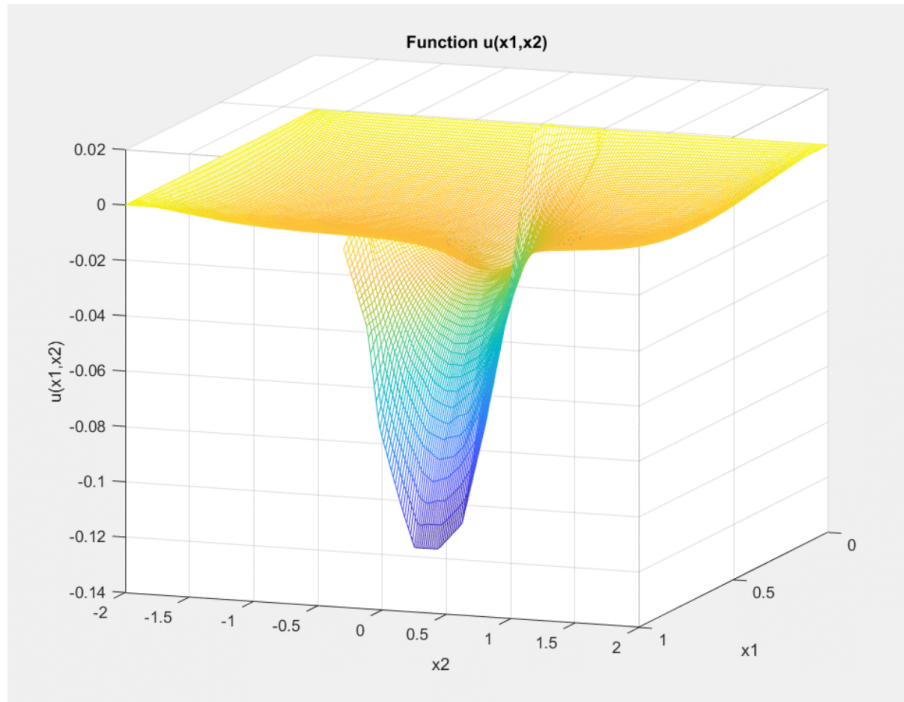


Рис. 6. Друга та третя ітерація

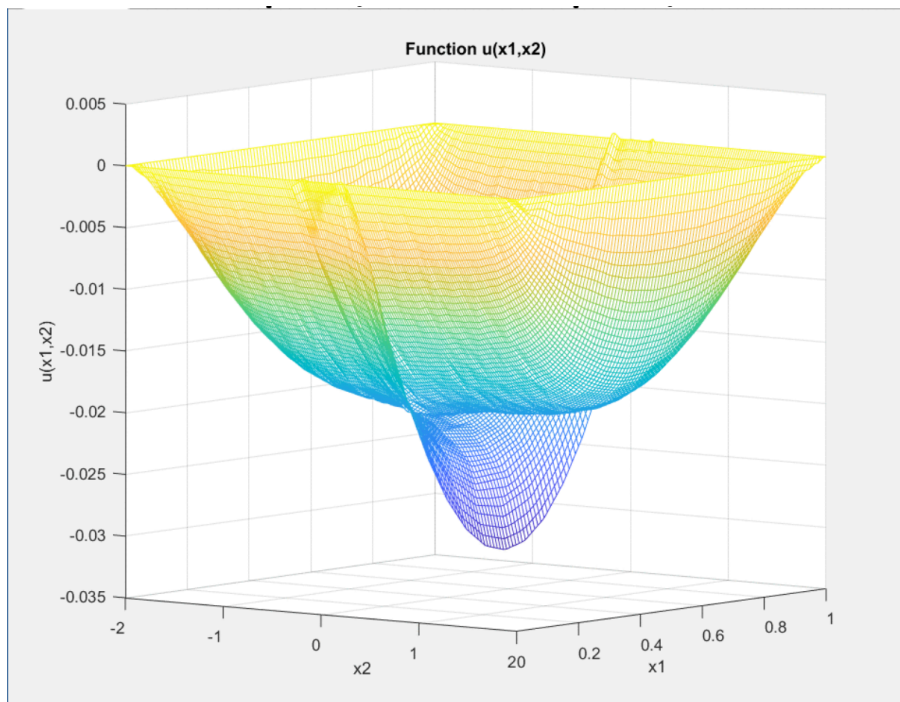


Рис. 7. Четверта ітерація

На рисунках 6 та 7 можемо бачити поступове зменшення розриву з кожною ітерацією.

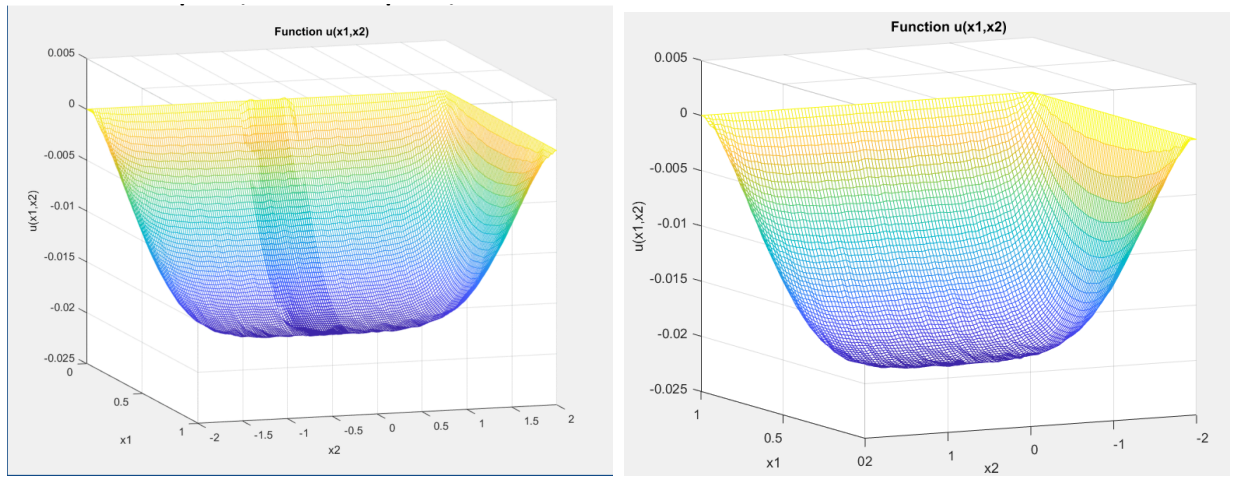


Рис. 8. Порівняння результатів сьомої ітерації(зліва) та немодифікованого МСЕ розв'язку(справа)

Iteration	ϵ	$\epsilon_{original}$
1	19.9751854132278	1.92121511625853
2	0.194883904508627	0.0299583616471939
3	0.0149783505955193	0.0117618387727016
4	0.0137445836997884	0.0145887997419817
5	0.0137343391156741	0.0145869659164804
6	0.0137342305460667	0.0145869464820443
7	0.0137342293954724	0.0145869462760827

Таблиця 1. Похибки ітераційного процесу

Зображені в таблиці 1 похибки на ітераціях ϵ та $\epsilon_{original}$ ми визначили як суми різниць отриманих значень у перекритті між підобластями для ϵ , та в порівнянні з немодифікованим методом скінченних елементів для $\epsilon_{original}$.

3.4 Аналіз

Аналізуючи графічне подання результату ітераційного процесу на рисунку 8 та визначені похибки для перших семи ітерацій в порівнянні зі звичайним методом скінченних елементів, можна стверджувати про хорошу збіжність процесу.

3.5 Приклад 2

Розглянемо приклад зі складнішою областю.

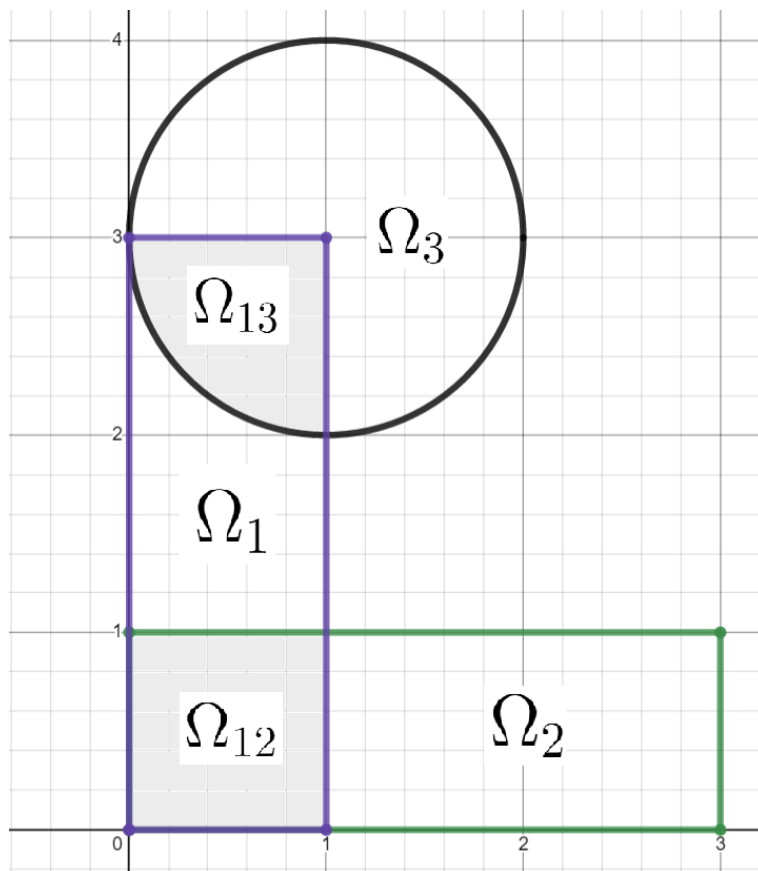


Рис. 9. Область з трьома підобластями

В області Ω розглянемо задачу

$$\begin{cases} 0.3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 0.9 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 10u = -3, & (x_1, x_2) \in \Omega \\ u = 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma, \end{cases} \quad (5.4)$$

Як бачимо на рисунку 9, нам вдалось поділити область Ω на три підобласті, кожна з яких має хоча б одну область з перекриттям Ω_{ij} . Оскільки області Ω_2 та Ω_3 не перетинаються, вони будуть виконуватись на одному кроці. Як було описано вище, це дає нам можливість паралельно обчислювати ці дві підобласті.

3.6 Результат

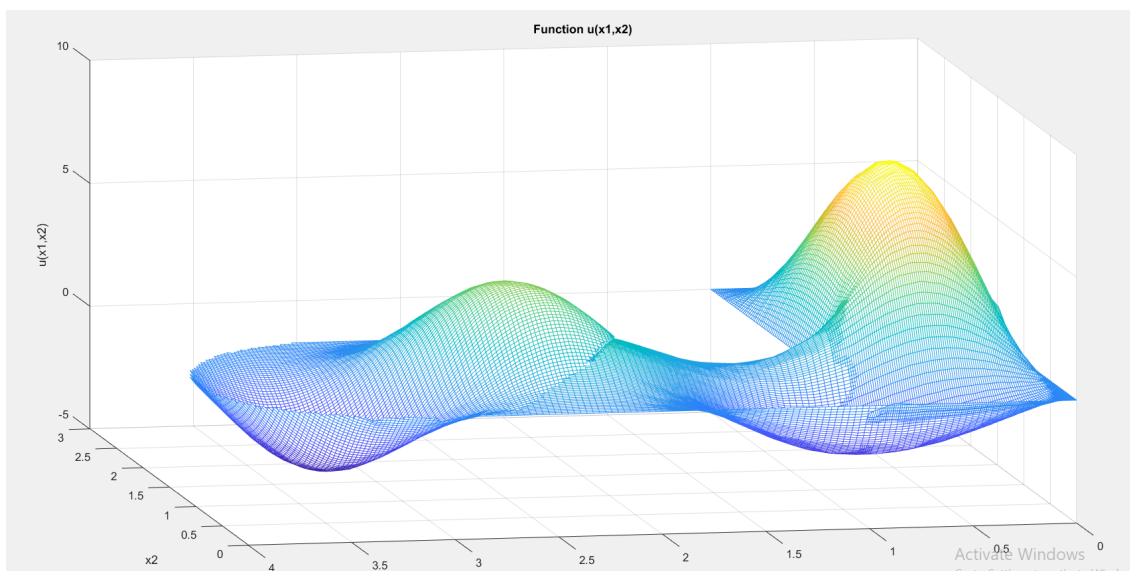


Рис. 10. Результат на сьомій ітерації

Iteration	ϵ	$\epsilon_{original}$
1	26.4609668278753562	4.365995849827397
2	3.7554929489783756	0.967588200693500
3	0.4235631840379794	0.255017805389163
4	0.0929605690585224	0.099788472146119
5	0.0449487359467832	0.058592135669026
6	0.0323490100293511	0.046920326762661
7	0.0321915070135540	0.046528885847964

Таблиця 2. Похибки ітераційного процесу

3.7 Аналіз

Проаналізувавши таблицю похибок, можна підтвердити хорошу збіжність написаного методу у випадках специфічних областей. Варто зазначати, що хоча багатопотоковість успішно використовувалась при розв'язанні такої задачі на області, але загалом на системі даної розмірності виграшу у часі досягти не вдалось, у порівнянні з оригінальним методом скінченних елементів. Як і очікувалось, реальну ефективність методу можна отримати лише у випадку надвеликих розмірностей систем рівнянь.

Висновок

Отже, у процесі роботи над цією темою ми дослідили шляхи, методи та підходи розв'язувань крайових задач. У результаті, ми розглянули застосування мультиплікативного методу Шварца для декомпозиції області розв'язаної МСЕ. Ми впевнились в ефективності обох методів, та зазначили особливості реалізації та результати двох прикладів різної складності.

Відповідно до проведеного аналізу наших прикладів, можна запевнитись у хорошій збіжності мультиплікативного методу Шварца для методу скінченних елементів. На жаль, не вдалось до кінця оцінити метод на покращення швидкодії процесу обчислень. Проте, наведені нами підходи для розв'язання вірні та несуть хороший демонстраційний та навчальний характер.

Окрім всього, ми створили програмний продукт для застосування вище наведених методів для розв'язання крайових задач у двовимірній області.

Тобто, дійсно метод скінченних елементів з модифікаціями декомпозицій областей може бути ефективним для розв'язування складних задач еластичності та структурного аналізу в цивільній, морській та авіаінженерії, а мультиплікативний метод Шварца є корисною модифікацією методу.

Список використаних джерел

- [1] Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, - 2004. - 207 с.
- [2] A. Quarteroni Numerical Models for Differential problems. - Springer-Verlag Italia, Milano - 2008. - 530 с.