


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Оновлено та затверджено
на засіданні
кафедри обчислювальної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 6 від 21 грудня 2023 р.)



Завідувач кафедри

 Роман ХАПКО

Силабус з навчальної дисципліни
«Методи регуляризації для розв'язування обернених задач»,
що викладається в межах ОНП Прикладна математика
другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів з
спеціальності 113 – прикладна математика

Львів 2023 р.

| | |
|--|---|
| Назва дисципліни | Методи регуляризації для розв'язування обернених задач |
| Адреса викладання дисципліни | Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1 |
| Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна | Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики |
| Галузь знань, шифр та назва спеціальності | 11 – математика та статистика 113 – прикладна математика |
| Викладачі дисципліни | Хапко Роман Степанович, завідувач кафедри обчислювальної математики, професор; Бешлей Андрій Володимирович, к.ф.-м.н., асистент кафедри обчислювальної математики; |
| Контактна інформація викладачів | roman.chapko@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/chapko ; andriy.beshley@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/beshley ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1 |
| Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються | Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю). |
| Сторінка курсу | https://ami.lnu.edu.ua/course/metody-rehuliyaryzatsii-dlia-rozv-iazuvannia-obernenykh-zadach-prykladna-matematyka-1-9 |
| Інформація про дисципліну | Методи регуляризації для розв'язування обернених задач є нормативною дисципліною з циклу професійної та практичної підготовки магістрів зі спеціальності 113 – прикладна математика, для ОНП «Прикладна математика», яка викладається в 2-му семестрі (4,5 кредити ECTS). |
| Коротка анотація дисципліни | У даному курсі вдало поєднуються як глибоко теоретичні результати, так і алгоритмічні аспекти, пов'язані з дослідженням та наближеним розв'язуванням обернених задач. Курс розроблено таким чином, щоб ознайомити студентів з ідеями побудови методів регуляризації як для лінійних, так і для нелінійних обернених задач, принципами обґрунтування їх збіжності та аналізу похибки, нюансами алгоритмів, що реалізують ці методи. |
| Мета та цілі дисципліни | Даний курс має на меті ознайомити студентів з питаннями дослідження та наближеного розв'язування обернених задач математичної фізики. Основна увага приділяється оберненим задачам реконструкції граничних значень та реконструкції границі у теорії потенціалу. При цьому спершу розглядаються загальні проблеми розв'язування некоректних задач на операторному рівні. Далі вивчені методи застосовуються для розв'язування конкретних обернених задач теорії потенціалу. |
| Література для вивчення дисципліни | Основна література 1. Chapko R., Johansson B.T. Calculating heat and wave propagation from lateral Cauchy data // Український математичний журнал. – 2022. – Vol.74, №2 – P. 274-285. (DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6880). 2. Chapko R., Mindrinos L. On the numerical solution of a hyperbolic inverse boundary value problem in bounded domains // Mathematics. – 2022. – Vol.750, №10 – P. 1-11 (DOI: 10.3390/math10050750). |

| | |
|--------------------------------------|--|
| | <p>3. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. An inverse elastodynamic data reconstruction // Journal of Engineering Mathematics. – 2022. – Vol.134, №3 – P. 1-13 (DOI: 10.1007/s10665-022-10219-6).</p> <p>4. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 2012.</p> <p>5. Rieder A. Keine Problem mit inversen Problemen.- Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2003.</p> <p>Додаткова література</p> <p>6. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems.- London: Kluwer, 1996.</p> <p>7. Burger M. Inverse Problems, Lecture notes, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Münster, 2021.</p> <p>8. Hohage T. Inverse Problems, Lecture notes, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, 2020.</p> |
| Обсяг курсу | Загальний обсяг: 135 годин (аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 год. лабораторних; самостійної роботи: 87 год). |
| Очікувані результати навчання | <p>Після завершення цього курсу студент буде <i>знати</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"> • основні методи регуляризації для лінійних та нелінійних обернених задач; • регуляризація Тіхонова; • метод Ландвебера; • метод усіченого сингулярного розкладу; • принцип нев'язки Морозова; • метод Гаусса-Ньютона; • метод Левенберга-Маквардта; <p><i>вміти</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"> • застосовувати вивчені методи до конкретних прикладних задач; • здійснювати програмну реалізацію вивчених алгоритмів. <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. <p>Спеціальні компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ФК01. Знання принципів побудови математичних моделей, а також методів їх розв'язування. • ФК02. Знання методів теоретичного аналізу математичних моделей. • ФК05. Здатність розробляти та оптимізувати комп'ютерні програми зі складною логікою. <p>Програмні результатів навчання:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ПРН01. Проводити теоретичний аналіз математичних моделей. • ПРН02. Застосовувати, модифікувати і досліджувати аналітичні та чисельні методи для розв'язування складних прикладних задач. • ПРН03. Розробляти та програмно реалізувати алгоритми розв'язування складних прикладних задач. • ПРН04. Визначати найбільш ефективний чисельний метод розв'язування задачі з точки зору обчислювальних затрат та точності отриманих результатів. |
| Ключові слова | Прямі та обернені задачі; коректність за Адамаром; компактні оператори; регуляризація; метод Тіхонова; метод Ландвебера; принцип нев'язки Морозова; усічений сингулярний розклад; задача Коші для рівняння Лапласа; нелінійна регуляризація Тіхонова; ітераційні регуляризуючі методи для нелінійних обернених задач; реконструкція межі області. |

| | | | | | | |
|---|--|------------|-----------------------|--|---------------|------------|
| Формат курсу | Очний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій. | | | | | |
| Теми | Подано у таблиці нижче. | | | | | |
| Підсумковий контроль, форма | Екзамен | | | | | |
| Пререквізити | Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> - Математичного аналізу; - Алгебри і геометрії; - Диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики; - Функціонального аналізу; - Чисельних методів лінійної алгебри; - Чисельних методів; - Чисельних методів математичної фізики; - Лінійних інтегральних рівнянь; - Методів функціонального аналізу у прикладних наукових дослідженнях; - Нелінійних задач математичної фізики та їх розв'язування. | | | | | |
| Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу | Презентації, лекції Індивідуальні завдання | | | | | |
| Необхідне обладнання | Комп'ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі. | | | | | |
| Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності) | Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. | | | | | |
| | Оцінка за шкалою ECTS | | Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | | |
| | | | | Екзамен, диференційований залік | залік | |
| | A | Відмінно | 100 - 90 | Відмінно | 5 | зараховано |
| | B | Дуже добре | 81- 89 | Добре | 4 | |
| | C | Добре | 71 -80 | | | |
| | D | Задовільно | 61 - 70 | Задовільно | 3 | |
| | E | Достатньо | 51- 60 | | | |
| FX (F) | Незадовільно | 0 - 50 | Незадовільно | 2 | не зараховано | |
| <p>Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • індивідуальні завдання: максимальна кількість балів 30 • колоквиум: максимальна кількість балів 20 • екзамен: максимальна кількість балів 50 <p>Індивідуальні завдання. №1. Кожен студент отримує задачу, для розв'язування якої треба використати один із розглянутих на лекціях регуляризованих методів. Алгоритм необхідно запрограмувати на мові високого рівня, відлагодити програму і отримати результати тестових прикладів (10 балів).</p> | | | | | | |

Критерії оцінювання завдання №1:

10 балів - студент повністю виконав умови завдання, алгоритм реалізовано правильно, відповідає на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання, проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів, пропонує інші підходи до вирішення поставленого завдання;

8-9 балів - студент повністю виконав умови завдання, на деякі запитання, алгоритм реалізовано правильно, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями;

6-7 балів - студент виконав завдання з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач, на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з неточностями;

4-5 бали - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач, на запитання відповідає з помилками, проводить аналіз отриманих результатів з помилками;

2-3 бали - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які самостійно не може виправити, переважно не відповідає на запитання;

1 бал - студент виконав завдання частково або з грубими помилками, які самостійно не може виправити, демонструє незнання матеріалу;

0 балів - студент не виконав завдання.

№2. Кожен студент отримує наукову публікацію з даної предметної області на англ. мові. Необхідно прореферувати її, підготувати презентацію у системі LaTeX (10 балів) і зробити публічну доповідь (10 балів).

Критерії оцінювання завдання №2:**А) презентація**

10 балів - студент підготував презентацію в LaTeXу без жодних помилок;

7-9 балів - студент підготував презентація з незначними неточностями;

4-6 балів - студент підготував презентацію з великою кількістю помилок, скопійованих таблиць і малюнків з реферованої статті;

1-3 бали - студент пробував зробити презентацію;

0 балів - студент не підготував презентацію.

Б) доповідь:

10 балів – студент, повністю розкрив тему доповіді, схема доповіді логічна, впевнено відповідає на всі запитання, які пов'язані з тематикою доповіді та демонструє глибокі знання;

7-9 балів – студент повністю розкрив тему доповіді з незначними неточностями, схема доповіді логічна, відповідає на більшість запитань, які пов'язані з тематикою доповіді;

4-6 балів - студент розкрив тему доповіді і розуміє основні ідеї реферованої статті;

1-3 бали – студент в основному розкрив тему доповіді з незначними неточностями, демонструє слабкі знання, відповідає лише на окремі запитання, які пов'язані з тематикою доповіді;

0 балів – студент не підготував доповіді або тему доповіді не розкрито і під час захисту студент не може відповісти на жодне запитання за тематикою доповіді.

Колоквіум. Проводиться у письмовій формі у середині семестру (4 завдання по 5 балів кожне).

Екзамен. Проводиться у письмовій формі (5 завдань по 10 балів кожне). До здачі допускаються студенти, які отримали більше 10 балів за роботу протягом семестру.

Критерії оцінювання теоретичних/практичних завдань (колоквіум, екзамен):

| Колоквіум (5балів) | Екзамен (10балів) | Критерії оцінювання |
|--------------------|-------------------|---|
| 5 балів | 10 балів | студент правильно виконав практичне завдання; вільно володіє навчальним матеріалом, чітко розкриває зміст теоретичних питань; |
| 4 бали | 7-9 балів | студент виконав завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв'язування знає і вміє його застосовувати; добре володіє навчальним матеріалом, розкриває повністю зміст теоретичних питань з незначними неточностями; |
| 3 бали | 4-6 балів | студент виконав завдання з помилками, алгоритм виконання, в основному, знає; володіє навчальним матеріалом на достатньому рівні, розкриває зміст теоретичних питань невичерпно та з неточностями, виникають труднощі під час аналізу матеріалу; |
| 1-2 бали | 1-3 бали | студент виконав лише частину завдання або повністю, але зі значними помилками; частково знає теоретичний матеріал (основні поняття, твердження, нескладні алгоритми), розкриває зміст питань зі значними помилками; |
| 0 балів | | студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання. |

Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних

| | |
|------------------------------------|---|
| | <p>завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при виконанні індивідуальних завдань, самостійній роботі, колоквиуму та бали за екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторні заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> |
| <p>Питання до екзамену.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Коректність задачі за Адамаром на мові операторів. 2. Доведіть, що лінійне операторне рівняння з компактним оператором є некоректною задачею. 3. Комп'ютерна томографія як приклад лінійної оберненої задачі. 4. Електрична імпедансна томографія як приклад нелінійної оберненої задачі. 5. Зворотня в часі теплопровідність як приклад лінійної оберненої задачі. 6. Задача визначення товщини стінки домни як приклад нелінійної оберненої задачі. 7. Чисельне диференціювання як некоректна задача. 8. Регуляризація для лінійних задач. Функціонал Тіхонова і його мінімум. 9. Регуляризація для лінійних задач. Метод Ландвебера. 10. Загальна теорія регуляризації. 11. Сингулярний розклад компактного оператора. Метод усіченого сингулярного розкладу. 12. Сингулярний розклад компактного оператора. Регуляризація Тіхонова в цьому контексті. 13. Сингулярний розклад компактного оператора. Метод Ландвебера в цьому контексті. 14. Збіжність методу усіченого сингулярного розкладу. 15. Збіжність методу регуляризації Тіхонова. 16. Збіжність методу Ландвебера. 17. Принцип нев'язки Морозова. 18. Задача Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Зведення до системи інтегральних рівнянь. 19. Регуляризація Тіхонова для некоректної системи IP задачі Коші для рівняння Лапласа. 20. Метод Ландвебера для задачі Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області. 21. Нелінійна регуляризація Тіхонова. 22. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного рівняння. Метод Левенберга-Маквардта. 23. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного рівняння. Метод Гаусса-Ньютона. 24. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного рівняння. Метод Ньютона-Ландвебера. 25. Загальна концепція ітераційних регуляризуючих методів для нелінійного операторного рівняння. |

| | |
|-------------------|--|
| | <p>26. Обернена задача реконструкції межі області. Постановка задачі та теорема про ідентифіковність.</p> <p>27. Обернена задача реконструкції межі області. Запис у формі операторного рівняння. Вигляд похідної Фреше.</p> <p>28. Обернена задача реконструкції межі області. Запис у формі операторного рівняння. Вигляд оператора спряженого до похідної Фреше.</p> <p>29. Обернена задача реконструкції межі області. Ін'єктивність оператора похідної Фреше у випадку зіркової області.</p> <p>30. Обернена задача реконструкції межі області. Алгоритм методу Ньютона.</p> <p>31. Обернена задача реконструкції межі області. Алгоритм методу Ландвебера.</p> |
| Опитування | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу. |

Схема курсу

| Модуль 1. Регуляризація лінійних задач | | | | |
|---|--|-----------------|------------|-----------|
| № | Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | |
| | | Лекції (год) | Лаб. (год) | Сам. р-та |
| 1 | Приклади лінійних обернених задач [1,2,3,5]. | 2 | - | 4 |
| 2 | Загальна концепція регуляризації [4,5]. | 2 | - | 4 |
| 3 | Регуляризація Тіхонова [1,4,5]. | 2 | 2 | 4 |
| 4 | Метод Ландвебера. Принцип нев'язки Морозова і збіжність [2,4,5]. | 2 | 2 | 4 |
| 5 | Сингулярний розклад компактних операторів [4,5,6]. | 2 | 2 | 4 |
| 6 | Функції фільтри. Метод усіченого сингулярного розкладу [4,5,6]. | 2 | - | 4 |

| Модуль 2. Обернені задачі реконструкції граничних значень. | | | | |
|---|--|-----------------|------------|-----------|
| № | Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | |
| | | Лекції (год) | Лаб. (год) | Сам. р-та |
| 1 | Задача Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Існування та єдиність розв'язку. Відсутність стійкості за вхідними даними [1,4]. | 2 | 2 | 4 |
| 2 | Метод граничних інтегральних рівнянь та регуляризація Тіхонова [1,2]. | 2 | 2 | 5 |
| 3 | Застосування ітераційних регуляризуючих методів [1,4]. Колоквіум. | 2 | - | 5 |

| Модуль 3. Методи регуляризації для нелінійних обернених задач | | | | |
|--|--|-----------------|---------------|--------------|
| № | Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | |
| | | Лекції (год) | Лаб. (год) | Сам. р-та |
| 1 | Приклади нелінійних обернених задач [2,4,5]. | 2 | - | 5 |
| 2 | Нелінійна регуляризація Тіхонова [4,5]. | 2 | - | 5 |
| 3 | Ітераційні регуляризуючі методи [4,5]. | 2 | - | 5 |

| Модуль 4. Обернені задачі реконструкції меж області | | | | |
|--|--|-----------------|---------------|--------------|
| № | Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | |
| | | Лекції (год) | Лаб. (год) | Сам. р-та |
| 1 | Задача реконструкції недоступної межі області за відомими даними Коші. Теорема про ідентифіковність [2,4,5]. | 2 | - | 8 |
| 2 | Нелінійні оператори оберненої задачі та їх властивості [4,5]. | 2 | 2 | 8 |
| 3 | Метод Ньютона [2,4,5]. | 2 | 2 | 8 |
| 4 | Метод Ландвебера [4,5]. | 2 | 2 | 10 |

| | | | | |
|----------------|--|----|----|----|
| Усього: | | 32 | 16 | 87 |
|----------------|--|----|----|----|