

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра прикладної математики

Оновлено та затверджено
на засіданні
кафедри прикладної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 5 від 17.11 2023 р.)



Завідувач кафедри

Юрій ЯЩУК

Силабус з навчальної дисципліни
«Оптимізація складних систем (англійською мовою)»,
що викладається в межах ОНП Прикладна математика
другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів
з спеціальності 113 – прикладна математика

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Оптимізація складних систем (англійською мовою)
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра прикладної математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – математика та статистика 113 – прикладна математика
Викладачі дисципліни	Щербатий Михайло Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики,
Контактна інформація викладачів	mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 278. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/optymizatsiia-skladnykh-system-pm-1-9
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Оптимізація складних систем (англійською мовою)» є нормативною навчальною дисципліною зі спеціальності 113 – прикладна математика для ОНП «Прикладна математика» (тривалість навчання 1.9), яка викладається в 3-му семестрі в обсязі 6-ти кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Даний курс стосується постановки задач оптимізації складних систем, поведінка яких описується звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в частинних похідних. Для розв'язування задач оптимізації розглянуто чисельні методи, які базуються на прямому і непрямому підходах. Приведено співвідношення аналізу чутливості в дискретному і неперервному формулюванні, які отримано з допомогою різних методів. Отримано необхідні умови оптимальності першого порядку для випадку скінченновимірних та неперервних керувань. Приклади задач (застосувань) із різних галузей демонструють матеріал даного курсу.
Мета та цілі дисципліни	Мета та цілі курсу - навчити студентів: <ul style="list-style-type: none"> • формулювати задачі оптимального керування (задачі оптимізації) для систем, поведінка яких описується звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в частинних похідних; • записувати необхідні умови оптимальності; • будувати схеми розв'язування задач оптимального керування; • проводити аналіз чутливості; • використовувати можливості систем комп'ютерної математики (напр. Matlab, Octave) для розв'язування сформульованих задач оптимізації.
Література для вивчення дисципліни	Основна література <ol style="list-style-type: none"> 1. F. Tröltzsch. <i>Optimal Control of Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics)</i>. AMS, 2010. 2. M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. <i>Optimization with PDE</i>

	<p><i>Constraints</i>. Springer, 2009.</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Reyes J.C. <i>Numerical PDE-Constrained Optimization</i>. Springer, 2015. 4. Borzi A., <i>Modelling with Ordinary Differential Equations. A Comprehensive Approach</i>. CRC Press, 2020. 5. Arora J.S., <i>Introduction to Optimum Design</i>. Elsevier Inc., 2017. 6. Quarteroni A. <i>Numerical Models for Differential Problems</i>. Springer, 2017. <p style="text-align: center;">Додаткова література</p> <ol style="list-style-type: none"> 7. Choi K. K., Kim N. H. <i>Structural Sensitivity Analysis and Optimization I. Linear Systems</i>. Springer, 2005. 8. Speyer J. L., Jacobson D. H., <i>Primer on optimal control theory</i>. SIAM, 2010. 9. Shcherbatyy M.V. <i>Sensitivity analysis for one-dimensional semilinear partial differential equations</i>. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – №2. – С. 157-164. 10. Наконечний О.Г. <i>Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними.: Навчальний посібник</i>. К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. 11. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. <i>Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Навчальний посібник</i>. Рівне, 2011. 12. MATLAB Homepage: http://www.mathworks.com/products/matlab/. 13. GNU Octave Homepage: http://www.gnu.org/software/octave/ 14. https://optpde.math.uni-hamburg.de/
<p>Обсяг курсу</p>	<p>Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 години лекцій та 32 годин лабораторних робіт. Самостійної роботи: 116 год.</p>
<p>Очікувані результати навчання</p>	<p><i>В результаті вивчення даного курсу студент буде:</i></p> <p>знати: постановки задач оптимального керування складних систем з обмеженнями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних; числові схеми розв'язування відповідних задач оптимального керування.</p> <p>вміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> • формулювати задачі оптимального керування з обмеженнями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних; записувати відповідні задачі у розширеному та скороченому формулюваннях; • записувати необхідні умови оптимальності першого порядку в дискретній та неперервній формі; • будувати алгоритми для розв'язування сформульованих задач; шляхом апроксимації функцій керування приводити дані задачі до задач нелінійного математичного програмування; • отримувати співвідношення для обчислення коефіцієнтів чутливості з використанням різних підходів (прямого методу диференціювання, методу спряжених змінних, дискретне та неперервне формулювання); будувати ефективні алгоритми обчислення коефіцієнтів чутливості. <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних</p>

	<p>результатів навчання:</p> <p>Загальні компетентності (ЗК):</p> <ul style="list-style-type: none"> - ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. - ЗК06. Здатність спілкуватися іноземною мовою з професійних питань як усно, так і письмово. <p>Фахові компетентності спеціальності (ФК):</p> <ul style="list-style-type: none"> - ФК01. Знання принципів побудови математичних моделей, а також методів їх розв'язування. - ФК02. Знання методів теоретичного аналізу математичних моделей. - ФК03. Знання принципів оптимального керування. - ФК05. Здатність розробляти та оптимізувати комп'ютерні програми зі складною логікою. <p>Програмні результати навчання:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ПРН01. Проводити теоретичний аналіз математичних моделей. - ПРН02. Застосовувати, модифікувати і досліджувати аналітичні та чисельні методи для розв'язування складних прикладних задач. - ПРН03. Розробляти та програмно реалізовувати алгоритми розв'язування складних прикладних задач. - ПРН04. Визначати найбільш ефективний чисельний метод розв'язування задачі з точки зору обчислювальних затрат та точності отриманих результатів. - ПРН06. Спілкуватися іноземною мовою як усно, так і письмово при обговоренні професійних питань та проведенні досліджень.
Ключові слова	Задача оптимального керування, критерій оптимізації, функція керування, множина допустимих керувань, задача оптимального проектування, задача ідентифікації параметрів, скорочена форма задачі оптимізації; прямі і непрямі методи розв'язування задач оптимізації, необхідні умови оптимальності (умови Каруша-Куна-Такера), аналіз чутливості, коефіцієнти чутливості, прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.
Теми	Подано нижче у таблиці Схема курсу “Оптимізація складних систем”
Підсумковий контроль, форма	Екзамен
Пререквізити	<p>Для вивчення даного курсу студенти потребують базових знань з курсів:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Математичний аналіз; - Лінійна алгебра; - Методи оптимізації; - Диференціальні рівняння; - Рівняння математичної фізики; - Функціональний аналіз; - Чисельні методи; - Систем комп'ютерної математики (напр., Matlab, Octave) або бібліотек чисельних методів інших програмних продуктів (напр.

	NumPy для Python).					
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції, матеріали лабораторних занять Домашні та індивідуальні завдання					
Необхідне обладнання	Комп'ютер із однією із систем комп'ютерної математики (Matlab, Octave) або програмний продукт із наявними бібліотеками чисельних методів розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, методів оптимізації.					
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.					
	Оцінка за шкалою ECTS		Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою		
				Екзамен, диференційований залік		залік
	A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5	зараховано
	B	Дуже добре	81 - 89	Добре	4	
	C	Добре	71 - 80			
	D	Задовільно	61 - 70	Задовільно	3	
	E	Достатньо	51 - 60			
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано	
<p>Поточне оцінювання: впродовж семестру студент може отримати 50 балів.</p> <p>Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • домашні завдання : 12% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 12 (4 завдання; 3, 3, 2, 4 бали); • індивідуальні завдання : 28% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 28 (4 завдання по 5, 5, 8, 10 балів); • контрольні заміри (модулі): 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10 (1 модуль, 10 балів). <p>Підсумкове оцінювання проводиться у вигляді письмового екзамену на 50 балів: два теоретичних питання по 15 балів та одне практичне завдання на 20 балів.</p> <p>Загалом протягом семестру 100 балів.</p> <p>Для кожного завдання встановлено терміни здачі. Завдання, які здаються із порушенням термінів без поважних причин, оцінюються на нижчу оцінку.</p> <p>Критерії оцінювання домашніх та індивідуальних завдань. За кожне завдання студент отримує SZ балів, які обчислюється за формулою</p> $SZ=S*k,$						

де k – коефіцієнт виконання завдання, $k \in [0,1]$, S – максимальне кількість балів за дане завдання.

k – коефіцієнт виконання завдання	Критерії оцінювання
$k \in [0.9,1]$	Студент повністю виконав умови завдання; алгоритм реалізовано правильно; відповідає на практично на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання; проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів.
$k \in [0.7,0.9)$	Студент повністю виконав умови завдання; алгоритм реалізовано правильно; на деякі питання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями; проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями.
$k \in [0.5,0.7)$	Студент виконав завдання з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач; на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з неточностями; проводить аналіз отриманих результатів з неточностями.
$k \in [0.3,0.5)$	Студент виконав завдання частково; алгоритм реалізовано з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач; на запитання відповідає з помилками; проводить аналіз отриманих результатів з помилками.
$k \in [0.1,0.3)$	Студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які самостійно не може виправити; переважно не відповідає на запитання.
$k \in (0,0.1)$	Студент виконав завдання частково або з грубими помилками, які самостійно не може виправити; демонструє незнання матеріалу.
$k = 0$	Студент не виконав завдання.

Критерії оцінювання завдань модуля та екзамену:

Модуль (10 балів)	Екзамен (50 балів)	Критерії оцінювання
9-10 балів	45-50 балів	Студент вільно володіє навчальним матеріалом; чітко розкриває зміст теоретичних питань; правильно виконав практичні завдання
7-8 балів	36-44 бали	Студент добре володіє навчальним матеріалом; розкриває повністю зміст

		теоретичних питань з незначними неточностями; виконав практичні завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв'язування знає і вміє його застосовувати.
5-6 балів	26-35 балів	Студент володіє навчальним матеріалом на достатньому рівні, розкриває зміст теоретичних питань невичерпно та з неточностями, виникають труднощі під час аналізу матеріалу; практичні завдання виконав із помилками, алгоритм виконання, в основному, знає.
1-4 бали	1-25 балів	Студент частково знає теоретичний матеріал (основні поняття, твердження, нескладні алгоритми), розкриває зміст питань зі значними помилками; виконав лише частину практичних завдань або повністю, але зі значними помилками.
	0 балів	Студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання.

Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання домашніх та індивідуальних завдань, передбачених курсом.

Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні та самостійній роботі. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.

Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.

Питання до заліку чи екзамену.

1. Вступ та приклади задач оптимізації.
2. Загальна постановка задач оптимізації. Скорочене формулювання.
3. Постановка задач оптимізації для систем, які описуються задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).

	<ol style="list-style-type: none"> 4. Постановка задач оптимізації для систем еліптичного типу. 5. Постановка задач оптимізації для систем параболічного типу. 6. Постановка задач ідентифікації параметрів. 7. Схема розв'язання задач оптимізації. Прямі та непрямі методи (спочатку дискретизуй – потім оптимізуй; спочатку оптимізуй – потім дискретизуй). 8. Приведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного математичного програмування. 9. Класифікація методів оптимізації (методи найшвидшого спуску, методи типу Ньютона). 10. Необхідні умови оптимальності у випадку скінченновимірних керувань (функція Лагранжа/Лагранжіан, умови Каруша-Куна-Таккера). 11. Задачі умовної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей. 12. Постановка задач аналізу чутливості (АЧ). Методи АЧ (випадок скінченновимірною керування). Прямий метод диференціювання. Метод спряжених змінних. 13. АЧ для крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, випадок скінченновимірною керування. 14. Аналіз чутливості в задачах оптимального керування системами еліптичного типу. 15. Необхідні умови оптимальності на основі Лагранжіану в системах еліптичного типу. Скінченновимірний випадок функції керування. 16. Диференційованість у банахових просторах. Спряжені оператори та спряжені функції. 17. Аналіз чутливості у нескінченновимірних просторах. Метод прямого диференціювання. Метод спряжених функцій. 18. Аналіз чутливості в початкових задачах для СЗДР. 19. Аналіз чутливості методом спряжених функцій для задач оптимального керування еліптичними та параболічними системами з квадратичним критерієм оптимізації 20. Аналіз чутливості методом спряжених функцій на основі Лагранжіану. Застосування Лагранжіану задач оптимального керування задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. 21. Ітераційний процес розв'язання задачі оптимального керування (підхід на основі аналізу чутливості, підхід на основі функції Лагранжа 22. Достатні умови оптимальності другого порядку.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу «Оптимізація складних систем»

Тиж.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)	Література, Ресурси в інтернеті	Завдан ня, год.	Термін виконан ня
1	Тема 1. Вступ та приклади задач оптимізації. Загальна постановка задач оптимізації (<i>Основні складові задач оптимізації. Скорочене формулювання задач оптимізації</i>).	Лекція, Самостійна робота	[1-5]	2 3	1 тиждень
	Тема 1. Постановка задач оптимізації складних систем. Розширене та скорочене формулювання. (<i>Задачі оптимального керування та задачі оптимального проектування. Основні етапи при формулюванні задачі оптимізації. Приклади задач оптимізації. Солвери систем комп'ютерної математики (на прикладі Matlab/Octave) для розв'язування задач нелінійного математичного програмування (НМП). Приклади використання відповідних солверів до розв'язування скінченновимірних задач оптимального проектування</i>).	Лабораторна Самостійна робота	[1-5], [12], [13]	2 3	1 тиждень
2	Тема 2. Постановка задач оптимізації для систем, які описуються задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР). Постановка задач оптимізації для систем еліптичного типу. (<i>Інтегральні, локальні та точкові характеристики. Скорочене формулювання задач оптимального керування. Приклади задач оптимального керування для СЗДР та систем еліптичного типу</i> .)	Лекція, Самостійна робота	[4], [8], [1-3], [10]	2 3	1 тиждень
	Тема 2. Формулювання	Лабораторна	[4], [7], [12],	2	1

	<p>задач оптимального керування для СЗДР. Вибір функцій керування. Вибір характеристик системи. Вибір критерію мети. (Солвери систем комп'ютерної математики (на прикладі Matlab/Octave) для розв'язування СЗДР. Обчислення характеристик (функціоналів) розглядуваних систем з використанням функцій керування та розв'язків задач аналізу (функцій стану)).</p> <p>Домашнє завдання 1.</p>	Самостійна робота	[13]	4	тиждень
3	<p>Тема 3. Постановка задач оптимізації для систем параболічного типу. Постановка задач ідентифікації параметрів. (Інтегральні, локальні та точкові характеристики. Скорочене формулювання задач оптимального керування. Приклади задач оптимального керування)</p>	Лекція, Самостійна робота	[1-3]	2 3	1 тиждень
	<p>Тема 3. Формулювання задач оптимізації для систем еліптичного та параболічного типів. (Вибір функцій керування. Вибір характеристик системи. Вибір критерію мети. Задачі оптимального керування та задачі оптимального проектування. Приклади задач оптимального керування)</p> <p>Домашнє завдання 2.</p>	Лабораторна Самостійна робота	[1-3]	2 3	1 тиждень
4	<p>Тема 4. Схема розв'язання задач оптимізації. Прямі та непрямі методи. (Приведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного математичного програмування (НМП). Методи розв'язування задач НМП-методи найшвидшого спуску, методи типу Ньютона)</p>	Лекція, Самостійна робота	[1], [3], [5], [7]	2 4	1 тиждень

	<p>Тема 4. Розробка алгоритму розв'язування задач оптимального керування для моделей у вигляді СЗДР (<i>апроксимація функції керування, приведення задачі оптимізації до задачі НМП,</i> розв'язування отриманої задачі з використанням солверів СКМ для розв'язування прямих задач та задач НМП).</p> <p>Індивідуальне завдання 1.</p>	Лабораторна Самостійна робота	[4], [5], [7], [11-13]	2 6	2 тижні
5	<p>Тема 5. Необхідні умови оптимальності (скінченновимірний випадок). Функція Лагранжа. Умови Кароша-Куна-Такера.</p>	Лекція, Самостійна робота	[1], [3], [5], [11]	2 5	1 тиждень
	<p>Тема 5. Необхідні умови оптимальності для задач оптимізації з обмеженнями рівностями і нерівностями. (<i>Схема розв'язання задач оптимізації з використанням необхідних умов оптимальності у випадку скінченновимірних керувань.</i> Структура програми).</p> <p>Домашнє завдання 3.</p>	Лабораторна Самостійна робота	[1], [3], [5], [11-13]	2 5	1 тиждень
6	<p>Тема 6. Постановка задач аналізу чутливості (АЧ). Методи АЧ (випадок скінченновимірною керування). АЧ для крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, (випадок скінченновимірною керування). (<i>Метод скінчених різниць; прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних.</i>)</p>	Лекція, Самостійна робота	[1], [5], [7], [9]	2 3	1 тиждень
	<p>Тема 6. Програмна реалізація алгоритму оптимізації для розв'язування задачі оптимального керування в СЗДР (обмеження на</p>	Лабораторна Самостійна робота	[3-4], [8], [12-13]	2 4	2 тижні

	функції керування та функції поведінки системи). Індивідуальне завдання 2.				
7	Тема 7. Аналіз чутливості в системах еліптичного типу. Скінченновимірний випадок. <i>(Дискретизація функції керування та функції стану. Прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних)</i>	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [7], [9]	2 6	1 тиждень
	Тема 7. Семестрова контрольна робота.	Лабораторна	[1], [7], [9]	2	1 тиждень
8	Тема 8. Необхідні умови оптимальності на основі Лагранжіану для систем еліптичного типу. Скінченновимірний випадок функції керування.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [5], [11]	2 3	1 тиждень
	Тема 8. Алгоритми розв'язування задачі оптимального керування на основі Лагранжіану.	Лабораторна Самостійна робота	[1], [3]	2 3	1 тиждень
9	Тема 9. Диференційованість у банахових просторах. Спряжені оператори та спряжені функції.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [5], [6]	2 3	1 тиждень
	Тема 9. Диференційованість функціоналів в задачах оптимального керування Спряжені оператори та спряжені функції. <i>(Системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) та рівняння в часткових похідних еліптичного та параболічного типів).</i>	Лабораторна Самостійна робота	[1], [3]	2 3	1 тиждень
10	Тема 10. Аналіз чутливості (АЧ) у нескінченновимірних просторах. Метод прямого диференціювання. Метод спряжених функцій.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [6-8], [14]	2 4	1 тиждень
	Тема 10. Загальний підхід до отримання співвідношень аналізу чутливості <i>(спряжені оператори, метод прямого</i>	Лабораторна Самостійна робота	[1-3], [6-8],	2 4	1 тиждень

	<i>диференціювання, метод спряжених функцій, порівняння методів).</i>				
11	Тема 11. Аналіз чутливості в початкових задачах для СЗДР. Метод прямого диференціювання. Метод спряжених функцій.	Лекція, Самостійна робота	[4], [6]	2 3	1 тиждень
	Тема 11. Отримання співвідношень аналізу чутливості в в початкових задачах для СЗДР. <i>Індивідуальне завдання 3.</i>	Лабораторна Самостійна робота	[4], [6]	2 5	2 тижні
12	Тема 12. Аналіз чутливості з допомогою методу спряжених функцій для задачі оптимального керування правими частинами для рівнянь еліптичного типу.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [14]	2 3	1 тиждень
	Тема 12. Отримання співвідношень аналізу чутливості для рівнянь для рівнянь еліптичного та параболічного типів (двовимірні рівняння за просторовою координатою). <i>Домашнє завдання 4.</i>	Лабораторна Самостійна робота	[1-3], [6], [14]	2 5	1 тиждень
13	Тема 13. Аналіз чутливості методом спряжених функцій на основі Лагранжіану. Застосування лагранжіану до задач оптимального керування СЗДР.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [6-7], [14]	2 4	1 тиждень
	Тема 13. Схема обчислення коефіцієнтів чутливості в СЗДР та його використання в алгоритмах оптимізації. <i>Індивідуальне завдання 4.</i>	Лабораторна Самостійна робота	[3], [6]	2 4	3 тижні
14	Тема 14. Необхідні умови оптимальності на основі Лагранжіану. Розв'язування задач оптимального керування на основі Лагранжіану.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [6]	2 4	1 тиждень

	Тема 14. Отримання співвідношень для коефіцієнтів чутливості на основі Лагранжіану у випадку систем еліптичного типу (двовимірні рівняння за просторовою координатою).	Лабораторна Самостійна робота	[1-3], [6], [14]	2 4	1 тиждень
15	Тема 15. Ітераційний процес розв'язання задачі оптимального керування (підхід на основі аналізу чутливості, підхід на основі функції Лагранжа)	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [6]	2 3	1 тиждень
	Тема 15. Отримання співвідношень для коефіцієнтів чутливості на основі Лагранжіану у випадку систем параболічного типу (двовимірні рівняння за просторовою координатою).	Лабораторна Самостійна робота	[1-3], [14]	2 3	1 тиждень
16	Тема 16. Достатні умови оптимальності другого порядку.	Лекція, Самостійна робота	[1-3], [6]	2 6	1 тиждень
	Тема 16. Обговорення результатів розв'язування задач оптимального керування, отриманих різними підходами. Підведення підсумків.	Лабораторна	[1-3], [6]	2	1 тиждень

Discipline name	Optimization of Complex Systems
Address where the discipline is taught	The main building of Ivan Franko National University of Lviv 1, Universytetska st., Lviv
The faculty and department under which the discipline is established	Faculty of Applied Mathematics and Informatics Department of Computational Mathematics
Field of knowledge, code and name of specialty	11 – mathematics and statistics 113 – applied mathematics
Teachers of the discipline	Shcherbatyy Mykhaylo Vasylovych, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, (laboratory classes)
Contact information of teachers	mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy Ihor.makar@lnu.edu.ua; https://ami.lnu.edu.ua/employee/makar-i-h Room 278, The main building of Ivan Franko National University of Lviv, 1, Universytetska st., Lviv
Consultations on issues of training in the discipline are taking place	Consultations on the day of lectures/laboratory sessions (by prior agreement).
Course page	https://ami.lnu.edu.ua/en/course/optimization-complex-systems(master,1.4)
Information about the discipline	The discipline "Optimization of complex systems" is a mandatory discipline from specialty 113 - applied mathematics for the Educational and Scientific Program (ESP) "Applied Mathematics" (duration of training 1.9), which is taught in the 3rd semester in the amount of 6 credits (according to the European Credit Transfer System ECTS).
Brief abstract of the discipline	This course concerns optimization problems of complex systems, governed by ordinary differential equations and partial differential equations. Numerical methods for solution of optimization problems, which are based on direct and indirect approaches, are considered. Sensitivity analysis relations in discrete and continuous formulation that are obtained using various methods are presented. First-order necessary optimality conditions for finite-dimensional and continuous controls are obtained. A number of applications examples from different fields illustrate the material of this course.

<p>Goal and objectives of the discipline</p>	<p>The goal and objectives of the discipline are to teach students:</p> <ul style="list-style-type: none"> • formulate optimal control problems (optimization problems) for systems governed by ordinary differential equations (ODEs) and partial differential equations (PDEs); • write the necessary optimality conditions; • construct numerical schemes for solution of optimal control problems; • derive expressions of sensitivity analysis; • apply the capabilities of computer algebra systems (e.g., Matlab, Octave) to solve the optimization problems.
<p>Literature for the discipline</p>	<p style="text-align: center;">Basic literature</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. F. Tröltzsch. <i>Optimal Control of Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics)</i>. AMS, 2010. 2. M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. <i>Optimization with PDE Constraints</i>. Springer, 2009. 3. Reyes J.C. <i>Numerical PDE-Constrained Optimization</i>. Springer, 2015. 4. Borzi A., <i>Modelling with Ordinary Differential Equations. A Comprehensive Approach</i>. CRC Press, 2020. 5. Arora J.S., <i>Introduction to Optimum Design</i>. Elsevier Inc., 2017. 6. Quarteroni A. <i>Numerical Models for Differential Problems</i>. Springer, 2017. <p style="text-align: center;">Additional literature</p> <ol style="list-style-type: none"> 7. Choi K. K., Kim N. H. <i>Structural Sensitivity Analysis and Optimization I. Linear Systems</i>. Springer, 2005. 8. Speyer J. L., Jacobson D. H., <i>Primer on optimal control theory</i>. SIAM, 2010. 9. Shcherbatyy M.V. <i>Sensitivity analysis for one-dimensional semilinear partial differential equations</i>. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – №2. – С. 157-164. 10. Наконечний О.Г. <i>Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними.: Навчальний посібник</i>. К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. 11. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. <i>Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Навчальний посібник</i>. Рівне, 2011. 12. MATLAB Homepage: http://www.mathworks.com/products/matlab/. 13. GNU Octave Homepage: http://www.gnu.org/software/octave/ 14. https://optpde.math.uni-hamburg.de/
<p>Scope of the course</p>	<p>Total volume: 180 hours. Classroom classes: 64 hours, including 32 hours of lectures -and 32 hours of laboratory work. Independent work: 116 hours.</p>
<p>Expected learning outcomes</p>	<p>Upon completion of this course, the student will:</p> <p>Know:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Formulation of optimal control problems for systems with ODEs constraints and PDEs constraints; • numerical schemes for solution of optimal control problems with ODEs constraints and PDEs constraints. <p>Be able to:</p> <ul style="list-style-type: none"> • formulate optimal control problems for systems with ODEs and equations PDEs constraints; write these problems in extended and reduced forms; • write first order necessary optimality conditions in discrete and

	<p>continuous form;</p> <ul style="list-style-type: none"> • construct numerical schemes for solution of optimal control problems; transform optimal control problem into nonlinear programming problem; • derive expressions of sensitivity analysis using different methods (direct differentiation method, adjoint method; discrete and continuous formulation); construct efficient algorithms for calculation of sensitivity coefficients. <p>The course provides the acquisition of the following competencies and program learning outcomes:</p> <p>General Competencies:</p> <ul style="list-style-type: none"> - GC01. Ability to think abstractly, analyze and synthesize. - GC06. Ability to communicate in a foreign language on professional issues both orally and in writing. <p>Professional Competencies of the Specialty (PC):</p> <ul style="list-style-type: none"> - PC01. Knowledge of the principles of building mathematical models, as well as methods for their solution. - PC02. Knowledge the methods of theoretical analysis of mathematical models. - PC03. Knowledge of the principles of optimal control. - PC05. Ability to develop and optimize computer programs with complex logic. <p>Learning Outcomes:</p> <ul style="list-style-type: none"> - LO01. Conduct theoretical analysis of mathematical models. - LO02. Apply, modify, and investigate analytical and numerical methods for solving complex applied problems. - LO03. Develop and programmatically implement algorithms for solving complex applied problems. - LO04. Determine the most effective numerical method for solving a problem in terms of computational costs and the accuracy of the obtained results. - LO06. Communicate in a foreign language both orally and in writing when discussing professional issues and conducting research.
Keywords	Optimal control problem, optimization criterion, control function, set of admissible controls, optimal design problem, parameter identification problem, reduced form of the optimization problem; direct and indirect methods for solving optimization problems, necessary optimality conditions (Karush-Kuhn-Tucker conditions), sensitivity analysis, sensitivity coefficients, direct differentiation method, adjoint method.
Course format	Face-to-face, remote Conducting lectures, laboratory sessions and consultations.
Topics	See below in the table Scheme of the course "Optimization of complex systems".
Final control, form	Exam
Prerequisites	To study this course, students need basic knowledge of the following courses: <ul style="list-style-type: none"> - Mathematical Analysis; - Linear algebra;

	<ul style="list-style-type: none"> - Optimization methods; - Differential equations; - Equations of mathematical physics; - Functional analysis; - Numerical Methods; - Computer algebra systems (e.g., MATLAB, Octave) or numerical method libraries of other software products (e.g., NumPy for Python). 																																				
Teaching methods -and techniques that will be used during the teaching of the course	<p>Presentations, lectures, laboratory materials</p> <p>Homework and individual assignments</p>																																				
Required equipment	Computer with one of the computer algebra systems (MATLAB, Octave) or a software product with available libraries of numerical methods for solving systems of ordinary differential equations, partial differential equations, and optimization methods.																																				
Evaluation criteria -(separately for each type of educational activity)	Assessment is conducted on a 100-point scale.																																				
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2">ECTS Grade</th> <th rowspan="2">Grade in Points</th> <th colspan="3">National Scale Grade</th> </tr> <tr> <th colspan="2">Exam, Differentiated Credit</th> <th>Credit</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>Excellent</td> <td>100 - 90</td> <td>Excellent</td> <td>5</td> <td rowspan="5">Passed</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>Very Good</td> <td>81- 89</td> <td rowspan="2">Good</td> <td rowspan="2">4</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>Good</td> <td>71 -80</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>Satisfactory</td> <td>61 - 70</td> <td rowspan="2">Satisfactory</td> <td rowspan="2">3</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>Sufficient</td> <td>51- 60</td> </tr> <tr> <td>FX (F)</td> <td>Unsatisfactory (Fail)</td> <td>0 - 50</td> <td>Unsatisfactory</td> <td>2</td> <td>Not Passed</td> </tr> </tbody> </table> <p>Current assessment: Throughout the semester, a student can obtain up to 50 points.</p> <p>Points are distributed according to the following scheme:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Homework: 12% of the semester grade; maximum score of 12 (4 assignments; 3, 3, 2, 4 points). • Individual assignments: 28% of the semester grade; maximum score of 28 (4 assignments worth 5, 5, 8, 10 points). • Module assessments: 10% of the semester grade; maximum score of 10 (1 module, 10 points). <p>The final assessment is conducted through a written exam worth 50 points: two theoretical questions at 15 points each and one practical task at 20 points. In total, throughout the semester, there are 100 points available.</p> <p>Assessment criteria for homework and individual assignments. For each task, a student receives <i>SZ</i> points, which are calculated using the formula</p>	ECTS Grade		Grade in Points	National Scale Grade			Exam, Differentiated Credit		Credit	A	Excellent	100 - 90	Excellent	5	Passed	B	Very Good	81- 89	Good	4	C	Good	71 -80	D	Satisfactory	61 - 70	Satisfactory	3	E	Sufficient	51- 60	FX (F)	Unsatisfactory (Fail)	0 - 50	Unsatisfactory	2
ECTS Grade					Grade in Points	National Scale Grade																															
		Exam, Differentiated Credit		Credit																																	
A	Excellent	100 - 90	Excellent	5	Passed																																
B	Very Good	81- 89	Good	4																																	
C	Good	71 -80																																			
D	Satisfactory	61 - 70	Satisfactory	3																																	
E	Sufficient	51- 60																																			
FX (F)	Unsatisfactory (Fail)	0 - 50	Unsatisfactory	2	Not Passed																																

$$SZ = S * k,$$

where k is the task performance coefficient, $k \in [0,1]$, S is the maximum number of points for the specific task.

k – task performance coefficient	Evaluation Criteria
$k \in [0.9,1]$	The student has fully completed the task requirements; the algorithm is implemented correctly; responds to practically all questions related to the task's theme; conducts a clear analysis and comparison of the obtained results.
$k \in [0.7,0.9)$	The student has fully complied with the task requirements; the algorithm is implemented correctly; responds to some questions related to the task theme with minor inaccuracies; conducts an analysis of the obtained results with minor inaccuracies.
$k \in [0.5,0.7)$	The student completed the task with minor errors but corrects them independently if pointed out by the instructor; responds to some questions related to the task theme with inaccuracies; conducts an analysis of the obtained results with inaccuracies.
$k \in [0.3,0.5)$	The student partially completed the task; the algorithm is implemented with errors that can be partially corrected if pointed out by the instructor; answers questions with errors; conducts an analysis of the obtained results with errors.
$k \in [0.1,0.3)$	The student partially completed the task; the algorithm is implemented with errors that cannot be corrected independently; mostly does not answer questions.
$k \in (0,0.1)$	The student partially completed the task or with significant errors that cannot be corrected independently; demonstrates a lack of understanding of the material.
$k = 0$	The student did not complete the task.

Evaluation criteria for module tasks and the exam:

Module (10 points)	Exam (50 points)	Evaluation Criteria
9-10 points	45-50 points	The student has a strong command of the study material; clearly elaborates on the content of theoretical questions; correctly completed practical tasks.
7-8 points	36-44 points	The student has a good knowledge of the study material; fully explains the content of

			theoretical questions with minor inaccuracies; completed practical tasks with minor errors (at the final stage), but understands the solution algorithm and can apply it.
	5-6 points	26-35 points	The student has a sufficient command of the study material, elaborates on the content of theoretical questions exhaustively but with inaccuracies; faces difficulties during material analysis; completed practical tasks with errors, primarily knowing the execution algorithm.
	1-4 points	1-25 points	The student partially knows the theoretical material (basic concepts, statements, simple algorithms), explains the content of questions with significant errors; completed only a portion of practical tasks, or completed them all but with significant errors.
	0 point		The student does not have a command of the study material and did not complete the tasks.
<p>Academic Integrity: Students' works are expected to be their own original research or reasoning. Lack of references to used sources, fabrication of sources, plagiarism, interference in the work of other students are, but are not limited to, examples of possible -academic dishonesty. The detection of signs of academic dishonesty in a student-'s written work is a reason for its rejection by -the teacher, regardless of the scale of plagiarism or deception.</p> <p>Attending classes is an important part of learning. All students are expected to attend all lectures and laboratory sessions of the course. Students must inform the teacher about the impossibility to attend classes. In any case, students are obliged to adhere to the deadlines -set for homework and individual assignments provided by the course.</p> <p>Literature. All literature that students cannot find on their own will be provided by the teacher for educational purposes only, without the right to transfer it to third parties. Students are also encouraged to use other literature and sources that are not among the recommended ones.</p> <p>Scoring policy. Points scored during testing and independent work are taken into account. At the same time, attendance of classes and the student's activity during practical sessions must be taken into account; inadmissibility of absences and lateness to classes; using a mobile phone, tablet or other mobile -devices during class for purposes not related to education; plagiarism; untimely performance of the assigned task, etc.</p> <p>Any form of breach of academic integrity will not be tolerated.</p>			
Questions for test or exam.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Introduction and examples of optimization problems. 2. Formulation of Optimization Problem. Reduced formulation 3. Optimization problems for ODEs. 		

	<ol style="list-style-type: none"> 4. Optimization problems for PDEs of elliptic type. 5. Optimization problems for PDEs of parabolic type. 6. Parameter identification problems. 7. The scheme of solving optimization problems. Direct and indirect methods (first discretize - then optimize; first optimize - then discretize). 8. Formulation of optimal control problem (OCP) as nonlinear programming problem 9. Classification of optimization methods (line search methods, trust region methods). 10. Necessary optimality conditions (Lagrangian, Karush-Kuhn Tucker conditions). Finite dimensional case. 11. Optimization problems with equality and inequality constraints. 12. Formulation of sensitivity analysis (SA) problems. Methods of SA (finite dimensional case of control function). Direct differentiation method. Adjoint method. 13. Sensitivity analysis for boundary value problem of ordinary differential equation. Finite dimensional case of control function. 14. Sensitivity analysis in optimal control problems of elliptic systems. 15. Necessary conditions optimality based on Lagrangian for elliptic systems. Finite dimensional case of control function. 16. Differentiability in Banach spaces. Adjoint operators and adjoint functions. 17. Continuum sensitivity analysis. Direct differentiation method. Adjoint method. 18. Sensitivity analysis in initial value problems for ordinary differential equations (ODEs). 19. AM of sensitivity analysis for quadratic elliptic control problems and quadratic parabolic control problems. 20. A Lagrangian-based view of the adjoint approach. Lagrangian approach in initial value problems for ordinary differential equations (ODEs). 21. Iterative solution of the optimal control problem (sensitivity approach, Lagrangian approach). 22. Second order sufficient optimality conditions.
Poll	An evaluation questionnaire for the purpose of assessing the quality of the course will be provided upon completion -of the course.

Scheme of the course "*Optimization of Complex Systems*"

Week	Topic, plan, short theses	Form of activity (class)	Literature, Internet resources	Assignment, hours	Deadline
1	Topic 1. Introduction and examples of optimization problems. General formulation of optimization problems (<i>The main components of optimization</i>)	Lecture, Independent work	[1-5]	2 3	1 week

	<i>problems. Reduced formulation of optimization problems).</i>				
	Topic 1. Formulation of problems of optimization of complex systems. Extended and reduced formulation. (<i>Optimal control problems, optimal design problems. The main steps in formulating an optimization problem. Examples of optimization problems. Solvers of computer mathematics systems (for example, Matlab/Octave) for solving nonlinear programming problems (NPP). Examples of the use of appropriate solvers for solving finite-dimensional optimal design problems).</i>)	Laboratory Independent work	[1-5], [11], [12]	2 3	1 week
2	Topic 2. Formulation of optimization problems for systems of ordinary differential equations (ODEs). Formulation of optimization problems for systems of elliptic type. (<i>Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Examples of optimal control problems for ODEs and PDEs of elliptic type).</i>)	Lecture, Independent work	[4], [7], [1-3], [9]	2 3	1 week
	Topic 2. Formulation of optimal control problems for ODEs. Selection of control functions, system characteristics, optimization criterion. (<i>Solvers of computer algebra systems (for example, Matlab/Octave) for solving ODEs. Calculation</i>	Laboratory Independent work	[4], [7], [11], [12]	2 4	1 week

	<p><i>characteristics of the systems under consideration using control functions and solutions of analysis problem analysis (state functions)).</i></p> <p>Homework assignment 1.</p>				
3	<p>Topic 3. Optimization problems for PDEs of parabolic type. Parameter identification problems. (<i>Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Examples of optimal control problems for PDEs of parabolic type.</i>)</p>	Lecture, Independent work	[1-3]	2 3	1 week
	<p>Topic 3. Optimization problems for PDEs of elliptic type and PDEs of parabolic type. (<i>Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Optimal control problems and optimal design problems. Examples of optimal control problems.</i>)</p> <p>Homework assignment 2.</p>	Laboratory Independent work	[1-3]	2 3	1 week
4	<p>Topic 4. The scheme of solving optimization problems. Direct and indirect methods. (<i>Formulation of optimal control problem as nonlinear programming problem (NPP). Optimization methods for solution of NPP (line search methods, trust region methods).</i>)</p>	Lecture, Independent work	[1], [3], [5], [7]	2 4	1 week
	<p>Topic 4. Development of algorithm for solving optimal control problems for ODEs (<i>approximation of the control function,</i></p>	Laboratory Independent work	[4], [5], [7], [10-12]	2 6	2 weeks

	<p><i>transformation of the optimization problem into a nonlinear programming problem, solving the obtained problem using solvers of computer algebra systems for solving direct and nonlinear programming problems).</i></p> <p>Individual assignment 1.</p>				
5	<p>Topic 5. Necessary optimality conditions (finite-dimensional case). Lagrange function. Karush-Kuhn-Tucker conditions.</p>	<p>Lecture, Independent work</p>	<p>[1], [3], [5], [10]</p>	<p>2 5</p>	<p>1 week</p>
	<p>Topic 5. Necessary optimality conditions for optimization problems with equality and inequality constraints. (<i>Solution scheme for optimization problems using necessary optimality conditions in the case of finite-dimensional controls. Program structure.</i>)</p> <p>Homework assignment 3.</p>	<p>Laboratory Independent work</p>	<p>[1], [3], [5], [10-12]</p>	<p>2 5</p>	<p>1 week</p>
6	<p>Topic 6. Formulation of sensitivity analysis (SA) problems. Methods of SA (finite dimensional case of control function). Sensitivity analysis for boundary value problem of ordinary differential equation (finite dimensional case of control function). (<i>Finite difference method, Direct differentiation method, Adjoint method.</i>)</p>	<p>Lecture, Independent work</p>	<p>[1], [5], [6], [8]</p>	<p>2 3</p>	<p>1 week</p>
	<p>Topic 6. Software implementation of optimization algorithm for solving the optimal control problem of ODEs (<i>constraints on the control function and state function.</i>)</p> <p>Individual Assignment 2.</p>	<p>Laboratory Independent work</p>	<p>[3-4], [7], [11-12]</p>	<p>2 4</p>	<p>2 weeks</p>

7	Topic 7. Sensitivity analysis for PDEs of elliptic types Finite dimensional case. <i>(Approximation of control and state functions. Direct differentiation method, Adjoint method.)</i>	Lecture, Independent work	[1-3], [6], [8]	2 6	1 week
	Topic 7. Control measurement (module)	Laboratory	[1], [6], [8]	2	4 weeks
8	Topic 8. Necessary conditions optimality based on Lagrangian for elliptic systems. Finite dimensional case of control function.	Lecture, Independent work	[1-3], [5], [10]	2 3	1 week
	Topic 8. Algorithms for solving the optimal control problem based on the Lagrangian.	Laboratory Independent work	[1], [3]	2 3	1 week
9	Topic 9. Differentiability in Banach spaces. Adjoint operators and adjoint functions.	Lecture, Independent work	[1-3], [5], [6]	2 3	1 week
	Topic 9. Differentiability of functionals in optimal control problems. Adjoint operators and adjoint functions. <i>(Systems of ordinary differential equations (ODEs) and equations of elliptic and parabolic partial derivatives).</i>	Laboratory Independent work	[1], [3]	2 3	1 week
10	Topic 10. Continuum sensitivity analysis (SA). Direct differentiation method (DDM). Adjoint Method (AM).	Lecture, Independent work	[1-3], [6-8], [14]	2 4	1 week
	Topic 10. A general approach to obtaining sensitivity analysis expressions (<i>conjugate operators, direct differentiation method, adjoint method, comparison of methods</i>).	Laboratory Independent work	[1-3], [6-8],	2 4	1 week

11	Topic 11. Sensitivity analysis in initial value problems for ODEs. The direct differentiation method. The method of adjoint functions.	Lecture, Independent work	[4], [6]	2 3	1 week
	Topic 11. Derivation of sensitivity analysis relationships in initial value problems for ODEs. Individual assignment 3.	Laboratory Independent work	[4], [6]	2 5	2 week
12	Topic 12. AM of sensitivity analysis for quadratic elliptic control problems with distributed control.	Lecture, Independent work	[1-3], [14]	2 3	1 week
	Topic 12. Derivation of sensitivity analysis relationships for equations of elliptic and parabolic types (<i>two-dimensional equations in spatial coordinates</i>). Homework assignment 4.	Laboratory Independent work	[1-3], [6], [14]	2 5	1 week
13	Topic 13. Sensitivity analysis using the adjoint method based on the Lagrangian. Application of the Lagrangian to optimal control problems for ODEs.	Lecture, Independent work	[1-3], [6-7], [14]	2 4	1 week
	Topic 13. Scheme of computing sensitivity coefficients in ODEs and their utilization in optimization algorithms. Individual assignment 4.	Laboratory Independent work	[3], [6]	2 4	3 weeki
14	Topic 14. Necessary optimality conditions based on the Lagrangian. Solving optimal control problems based on the Lagrangian.	Lecture, Independent work	[1-3], [6]	2 4	1 week
	Topic 14. Derivation of relationships for sensitivity coefficients based on the Lagrangian in the case of elliptic type systems (<i>two-dimensional equations in spatial coordinates</i>).	Laboratory Independent work	[1-3], [6], [14]	2 4	1 week

15	Topic 15. Iterative solution of the optimal control problem (sensitivity approach, Lagrangian approach).	Lecture, Independent work	[1-3], [6]	2 3	1 week
	Topic 15. Derivation of relationships for sensitivity coefficients based on the Lagrangian in the case of parabolic type systems (two-dimensional equations in spatial coordinates).	Laboratory Independent work	[1-3], [14]	2 3	1 week
16	Topic 16. Second order sufficient optimality conditions.	Lecture, Independent work	[1-3], [6]	2 6	1 week
	Topic 16. Discussion of results obtained through various approaches to solving optimal control problems. Summary and conclusion.	Laboratory	[1-3], [6]	2	1 week