

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Факультет прикладної математики та інформатики**  
**Кафедра прикладної математики**

**Затверджено**

На засіданні  
кафедри прикладної математики  
факультету прикладної математики та  
інформатики  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 31 серпня 2023 р.)



Завідувач кафедри

Юрій ЯЩУК

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Оптимізація складних систем (англійською мовою)”**,  
що викладається в межах ОПП Прикладна математика  
другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів з  
спеціальності 113 – прикладна математика

Львів 2023 р.

|  |  |
|--|--|
| <b>Назва дисципліни</b>  | <b>Оптимізація складних систем (англійською мовою)</b>   |
| <b>Адреса викладання дисципліни</b>                              | Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка<br>м. Львів, вул. Університетська 1  |
| <b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>       | Факультет прикладної математики та інформатики<br>Кафедра прикладної математики  |
| <b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>                 | 11 – математика та статистика<br>113 – прикладна математика  |
| <b>Викладачі дисципліни</b>                                      | Щербатий Михайло Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики,<br>Кухарський Віталій Михайлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики (лабораторні заняття)  |
| <b>Контактна інформація викладачів</b>                           | <a href="mailto:mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua">mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua</a> ;<br><a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy">https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy</a><br><a href="mailto:vitaliy.kukharsky@lnu.edu.ua">vitaliy.kukharsky@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/kukharsky">https://ami.lnu.edu.ua/employee/kukharsky</a><br>Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 278.<br>м. Львів, вул. Університетська, 1   |
| <b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b> | Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю).   |
| <b>Сторінка курсу</b>  | <a href="https://ami.lnu.edu.ua/course/optymizatsiia-skladnykh-system-pm-1-4">https://ami.lnu.edu.ua/course/optymizatsiia-skladnykh-system-pm-1-4</a>  |
| <b>Інформація про дисципліну</b>                                 | Дисципліна “Оптимізація складних систем” є нормативною навчальною дисципліною зі спеціальності 113 – прикладна математика для освітньої програми “Прикладна математика”, яка викладається в 3-му семестрі в обсязі 3-х кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).  |
| <b>Коротка анотація дисципліни</b>                               | Даний курс стосується постановки задач оптимізації складних систем, поведінка яких описується звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в частинних похідних. Для розв’язування задач оптимізації розглянуто чисельні методи, які базуються на прямому і непрямому підходах. Приведено співвідношення аналізу чутливості в дискретному формулюванні, які отримано з допомогою різних методів. Отримано необхідні умови оптимальності першого порядку для випадку скінченновимірних керувань. Приклади задач (застосувань) із різних галузей демонструють матеріал даного курсу.     |
| <b>Мета та цілі дисципліни</b>                                   | Мета та цілі курсу - навчити студентів: <ul style="list-style-type: none"> <li>• формулювати задачі оптимального керування (задачі оптимізації) для систем, поведінка яких описується звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в частинних похідних;</li> <li>• записувати необхідні умови оптимальності;</li> <li>• будувати схеми розв’язування задач оптимального керування;</li> <li>• проводити аналіз чутливості;</li> <li>• використовувати можливості систем комп’ютерної математики (напр. Matlab, Octave) для розв’язування сформульованих задач оптимізації.</li> </ul> |
| <b>Література для</b>  | <b>Основна література</b>  |

|   |  |
|---|--|
| <p><b>вивчення дисципліни</b></p>           | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. F. Tröltzsch. <i>Optimal Control of Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics)</i>. AMS, 2010.</li> <li>2. M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. <i>Optimization with PDE Constraints</i>. Springer, 2009.</li> <li>3. Reyes J.C. <i>Numerical PDE-Constrained Optimization</i>. Springer, 2015.</li> <li>4. Borzi A., <i>Modelling with Ordinary Differential Equations. A Comprehensive Approach</i>. CRC Press, 2020.</li> <li>5. Arora J.S., <i>Introduction to Optimum Design</i>. Elsevier Inc., 2017.</li> </ol> <p style="text-align: center;"><b>Додаткова література</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>6. Choi K. K., Kim N. H. <i>Structural Sensitivity Analysis and Optimization I. Linear Systems</i>. Springer, 2005.</li> <li>7. Speyer J. L., Jacobson D. H., <i>Primer on optimal control theory</i>. SIAM, 2010.</li> <li>8. Shcherbatyy M.V. <i>Sensitivity analysis for one-dimensional semilinear partial differential equations</i>. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – №2. – С. 157-164.</li> <li>9. Наконечний О.Г. <i>Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними.: Навчальний посібник</i>. К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.</li> <li>10. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. <i>Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Навчальний посібник</i>. Рівне, 2011.</li> <li>11. MATLAB Homepage: <a href="http://www.mathworks.com/products/matlab/">http://www.mathworks.com/products/matlab/</a>.</li> <li>12. GNU Octave Homepage: <a href="http://www.gnu.org/software/octave/">http://www.gnu.org/software/octave/</a></li> </ol> |
| <p><b>Обсяг курсу</b></p>                   | <p>Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 32 год., з них 16 годин лекцій та 16 годин лабораторних робіт. Самостійної роботи: 58 год.</p>  |
| <p><b>Очікувані результати навчання</b></p> | <p><i>В результаті вивчення даного курсу студент буде:</i></p> <p><b>знати:</b> постановки задач оптимального керування складних систем з обмеженнями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних; числові схеми розв'язування відповідних задач оптимального керування.</p> <p><b>вміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• формулювати задачі оптимального керування з обмеженнями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних; записувати відповідні задачі у розширеному та скороченому формулюваннях;</li> <li>• записувати необхідні умови оптимальності першого порядку в дискретній формі;</li> <li>• будувати алгоритми для розв'язування сформульованих задач; шляхом апроксимації функцій керування приводити дані задачі до задач нелінійного математичного програмування;</li> <li>• отримувати співвідношення для обчислення коефіцієнтів чутливості з використанням різних підходів (прямого методу диференціювання, методу спряжених змінних, дискретне формулювання); будувати ефективні алгоритми обчислення коефіцієнтів чутливості.</li> </ul> <p><b>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</b></p> <p><b>Загальні компетентності:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</li> <li>- ЗК06. Здатність спілкуватися іноземною мовою з професійних питань як усно, так і письмово.</li> </ul>  |

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
|                                    | <p><b>Спеціальні компетентності:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- СК01. Знання принципів побудови та дослідження математичних моделей, а також чисельних методів їх розв'язування.</li> <li>- СК02. Здатність розробляти та досліджувати математичні моделі та методи їх розв'язування.</li> <li>- СК04. Здатність будувати дискретний аналог неперервної моделі.</li> <li>- СК05. Здатність програмної реалізації алгоритмів на одній з мов програмування.</li> <li>- СК07. Здатність відлагоджувати комп'ютерні програми зі складною логікою.</li> <li>- СК09. Здатність підвищувати ефективність обчислювальних схем та алгоритмів.</li> <li>- СК11. Здатність використовувати граматичні та стилістичні аспекти іноземної мови науково-професійного спрямування в області прикладної математики та ІТ.</li> </ul> <p><b>Програмні результати навчання:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ПРН01. Демонструвати знання й розуміння підходів до побудови та дослідження математичних моделей.</li> <li>- ПРН02. Застосовувати, модифікувати і досліджувати чисельні методи для розв'язування прикладних задач.</li> <li>- ПРН03. Розробляти та програмно реалізовувати алгоритми розв'язування прикладних задач.</li> <li>- ПРН06. Визначати найбільш ефективний метод розв'язування задачі з точки зору обчислювальних затрат та точності отриманих результатів.</li> <li>- ПРН09. Вільно спілкуватися іноземною мовою як усно, так і письмово при обговоренні професійних питань та проведенні досліджень.</li> </ul> |
| <b>Ключові слова</b>               | Задача оптимального керування, критерій оптимізації, функція керування, множина допустимих керувань, задача оптимального проектування, задача ідентифікації параметрів, скорочена форма задачі оптимізації; прямі і непрямі методи розв'язування задач оптимізації, необхідні умови оптимальності (умови Каруша-Куна-Такера), аналіз чутливості, коефіцієнти чутливості, прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних.   |
| <b>Формат курсу</b>                | Очний.<br>Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.   |
| <b>Теми</b>                        | Подано нижче у таблиці Схема курсу "Оптимізація складних систем"  |
| <b>Підсумковий контроль, форма</b> | Екзамен   |
| <b>Пререквізити</b>                | <p>Для вивчення даного курсу студенти потребують базових знань з курсів: Математичний аналіз; Лінійна алгебра; Методи оптимізації; Диференціальні рівняння; Рівняння математичної фізики; Чисельні методи; Систем комп'ютерної математики (напр., Matlab, Octave) або бібліотек чисельних методів інших програмних продуктів (напр. NumPy для Python).</p> <p>Також, для вивчення даного курсу студенти потребують знань з курсів:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Методи функціонального аналізу у прикладних наукових дослідженнях;</li> <li>- Іноземна мова за професійним спрямуванням.</li> </ul>   |

|  |   |
|--|---|
| <p><b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b></p> | <p>Презентації, лекції, матеріали лабораторних занять<br/>Домашні та індивідуальні завдання</p>   |
| <p><b>Необхідне обладнання</b></p>   | <p>Комп'ютер із однією із систем комп'ютерної математики (Matlab, Octave) або програмний продукт із наявними бібліотеками чисельних методів розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, методів оптимізації.</p>  |
| <p><b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b></p>                | <p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• домашні завдання : 14% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 14 (3 завдання; 5, 5, 4 бали);</li> <li>• індивідуальні завдання : 24% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 24 (2 завдання по 12 балів);</li> <li>• модуль: 12% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 12 (1 модуль, 12 балів);</li> </ul> <p>Загалом протягом семестру 50 балів.<br/>Екзамен: 50 балів.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання домашніх та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали набрані на індивідуальних, домашніх завданнях та модулі. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> |
| <p><b>Питання до екзамену.</b></p>   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вступ та приклади задач оптимізації.</li> <li>2. Загальна постановка задач оптимізації. Скорочене формулювання.</li> <li>3. Постановка задач оптимізації для систем, які описуються задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).</li> <li>4. Постановка задач оптимізації для систем еліптичного типу.</li> <li>5. Постановка задач оптимізації для систем параболічного типу.</li> <li>6. Постановка задач ідентифікації параметрів.</li> <li>7. Схема розв'язання задач оптимізації. Прямі та непрямі методи</li> </ol>   |

|                   |   |
|-------------------|---|
|                   | <p>(спочатку дискретизуй – потім оптимізує; спочатку оптимізує – потім дискретизуй).</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>8. Приведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного математичного програмування.</li> <li>9. Класифікація методів оптимізації (методи найшвидшого спуску, методи типу Ньютона).</li> <li>10. Необхідні умови оптимальності у випадку скінченновимірних керувань (функція Лагранжа/Лагранжіан, умови Каруша-Куна-Таккера).</li> <li>11. Задачі умовної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей.</li> <li>12. Постановка задач аналізу чутливості (АЧ). Методи АЧ (випадок скінченновимірної керування). Прямий метод диференціювання. Метод спряжених змінних.</li> <li>13. АЧ для крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, випадок скінченновимірної керування.</li> <li>14. Аналіз чутливості в задачах оптимального керування системами еліптичного типу.</li> <li>15. Необхідні умови оптимальності на основі Лагранжіану в системах еліптичного типу. Скінченновимірний випадок функції керування.</li> </ol> |
| <b>Опитування</b> | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.  |

### Схема курсу “Оптимізація складних систем”

| Тиж. | Тема, план, короткі тези  | Форма діяльності (заняття) | Література, Ресурси в інтернеті | Завдання, год.   | Термін виконання |
|------|---|----------------------------|---------------------------------|--|------------------|
| 1    | <b>Тема 1.</b> Вступ та приклади задач оптимізації. Загальна постановка задач оптимізації ( <i>Основні складові задач оптимізації. Скорочене формулювання задач оптимізації</i> ).  | Лекція (2 год.)            | [1-5]                           | Опрацювання лекційного матеріалу (3 год.)  | 1 тиждень        |
|      | <b>Тема 1.</b> Постановка задач оптимізації складних систем. Розширене та скорочене формулювання. ( <i>Задачі оптимального керування та задачі оптимального проектування. Основні етапи при формулюванні задачі оптимізації. Приклади задач оптимізації. Солвери систем комп'ютерної математики (на прикладі Matlab/Octave) для розв'язування задач нелінійного математичного програмування (НМП).</i> ). | Лабораторна (2 год.)       | [1-5], [11], [12]               | Приклади використання відповідних солверів до розв'язування скінченновимірних задач оптимального проектування (3 год.) | 1 тиждень        |
| 2    | <b>Тема 2.</b> Постановка задач оптимізації для систем, які описуються задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).<br>Постановка задач оптимізації для систем еліптичного типу. ( <i>Інтегральні, локальні та точкові характеристики. Скорочене формулювання задач оптимального керування. Приклади задач оптимального керування для СЗДР та систем еліптичного типу.</i> )        | Лекція (2 год.)            | [4], [7]<br><br>[1-3], [9]      | Опрацювання лекційного матеріалу (3 год.)  | 1 тиждень        |
|      | <b>Тема 2.</b> Формулювання задач оптимального керування для СЗДР. Вибір функцій керування. Вибір характеристик системи.  | Лабораторна (2 год.)       | [4], [7], [11], [12]            | Виконання домашнього завдання 1 (4 год.)   | 1 тиждень        |

|   |   |                      |                        |   |           |
|---|---|----------------------|------------------------|---|-----------|
|   | <p>Вибір критерію мети. (Солвери систем комп'ютерної математики (на прикладі Matlab/Octave) для розв'язування СЗДР. Обчислення характеристик (функціоналів) розглянутих систем з використанням функцій керування та розв'язків задач аналізу (функцій стану)).</p> <p><b>Домашнє завдання 1.</b></p>                        |                      |                        |   |           |
| 3 | <p><b>Тема 3.</b> Постановка задач оптимізації для систем параболічного типу. Постановка задач ідентифікації параметрів. (Інтегральні, локальні та точкові характеристики. Скорочене формулювання задач оптимального керування. Приклади задач оптимального керування)</p>  | Лекція (2 год.)      | [1-3]                  | Опрацювання лекційного матеріалу (3 год.)     | 1 тиждень |
|   | <p><b>Тема 3.</b> Формулювання задач оптимізації для систем еліптичного та параболічного типів. (Вибір функцій керування. Вибір характеристик системи. Вибір критерію мети. Задачі оптимального керування та задачі оптимального проектування. Приклади задач оптимального керування)</p> <p><b>Домашнє завдання 2.</b></p> | Лабораторна (2 год.) | [1-3]                  | Виконання домашнього завдання 2 (3 год.)      | 1 тиждень |
| 4 | <p><b>Тема 4.</b> Схема розв'язання задач оптимізації. Прямі та непрямі методи. (Приведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного математичного програмування (НМП). Методи розв'язування задач НМП-методи найшвидшого спуску, методи типу Ньютона)</p>   | Лекція (2 год.)      | [1], [3], [5], [7]     | Опрацювання лекційного матеріалу (4 год.)     | 1 тиждень |
|   | <p><b>Тема 4.</b> Розробка алгоритму розв'язування задач оптимального керування для моделей у</p>   | Лабораторна (2 год.) | [4], [5], [7], [10-12] | Виконання індивідуального завдання 1 (8 год.) | 2 тижні   |



|   |   |                      |                        |   |           |
|---|---|----------------------|------------------------|---|-----------|
|   | <p>вигляді СЗДР (<i>апроксимація функції керування, приведення задачі оптимізації до задачі НМП,</i> розв'язування отриманої задачі з використанням солверів СКМ для розв'язування прямих задач та задач НМП).</p> <p><b>Індивідуальне завдання 1.</b></p>  |                      |                        |   |           |
| 5 | <p><b>Тема 5.</b> Необхідні умови оптимальності (скінченновимірний випадок). Функція Лагранжа. Умови Кароша-Куна-Такера.</p>  | Лекція (2 год.)      | [1], [3], [5], [10]    | Опрацювання лекційного матеріалу (5 год.)     | 1 тиждень |
|   | <p><b>Тема 5.</b> Необхідні умови оптимальності для задач оптимізації з обмеженнями рівностями і нерівностями. (<i>Схема розв'язання задач оптимізації з використанням необхідних умов оптимальності у випадку скінченновимірних керувань.</i> Структура програми).</p> <p><b>Домашнє завдання 3.</b></p>                         | Лабораторна (2 год.) | [1], [3], [5], [10-12] | Виконання домашнього завдання 2 (3 год.)      | 1 тиждень |
| 6 | <p><b>Тема 6.</b> Постановка задач аналізу чутливості (АЧ). Методи АЧ (випадок скінченновимірною керування). АЧ для крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, (випадок скінченновимірною керування). (<i>Метод скінчених різниць; прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних.</i>)</p> | Лекція (2 год.)      | [1], [5], [6], [8]     | Опрацювання лекційного матеріалу (3 год.)     | 1 тиждень |
|   | <p><b>Тема 6.</b> Програмна реалізація алгоритму оптимізації для розв'язування задачі оптимального керування в СЗДР (обмеження на функції керування та функції поведінки системи).</p> <p><b>Індивідуальне завдання 2.</b></p>  | Лабораторна (2 год.) | [3-4], [7], [11-12]    | Виконання індивідуального завдання 2 (7 год.) | 2 тижні   |
| 7 | <p><b>Тема 7.</b> Аналіз чутливості в</p>   | Лекція               | [1-3], [6],            | Опрацювання                                   | 1         |

|   |   |                      |                  |   |                 |
|---|---|----------------------|------------------|---|-----------------|
|   | системах еліптичного типу. Скінченновимірний випадок.<br><i>(Дискретизація функції керування та функції стану. Прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних)</i> | (2 год.)             | [8]              | лекційного матеріалу (5 год.)             | тиждень         |
|   | <b>Тема 7.</b> Модуль.  | Лабораторна (2 год.) | [1], [6], [8]    |   | Під час заняття |
| 8 | <b>Тема 8.</b> Необхідні умови оптимальності на основі Лагранжіану для систем еліптичного типу. Скінченновимірний випадок функції керування.                              | Лекція (2 год.)      | [1-3], [5], [10] | Опрацювання лекційного матеріалу (4 год.) | 1 тиждень       |
|   | <b>Тема 8.</b> Приймання індивідуального завдання 2. Аналіз результатів. Підведення підсумків.  | Лабораторна (2 год.) | [1], [3]         |   | Під час заняття |

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE**  
**Ivan Franko National University of L'viv**  
**Faculty of Applied Mathematics and Informatics**  
**Department of Applied Mathematics**

**Approved**

At the meeting  
of the Department of Applied Mathematics  
Faculty of Applied Mathematics and  
Informatics  
Ivan Franko National University of L'viv  
(Protocol No. 1 dated August 31, 2023 )

Head of the Department Yuriy YASHCHUK

---

**Syllabus of the academic discipline**  
**"Optimization of Complex Systems (in English)"**  
**which is taught within the framework of the EPP**  
**"Applied Mathematics"**  
**Second (Master's) level of higher education for students**  
**specializing in 113 – Applied Mathematics**

**L'viv, 2023**

|   |  |
|---|--|
| <b>Discipline name</b>  | <b>Optimization of complex systems</b>   |
| <b>Address where the discipline is taught</b>                                 | The main building of Ivan Franko National University of Lviv<br>1, Universytetska st., Lviv  |
| <b>The faculty and department under which the discipline is established</b>   | Faculty of Applied Mathematics and Informatics<br>Department of Computational Mathematics  |
| <b>Field of knowledge, code and name of specialty</b>                         | 11 – mathematics and statistics<br>113 – applied mathematics   |
| <b>Teachers of the discipline</b>   | Shcherbatyy Mykhaylo Vasylovych, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics,<br>Kukharskyy Vitaliy Mykhaylovych, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, (laboratory classes)  |
| <b>Contact information of teachers</b>  | <a href="mailto:mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua">mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua</a> ;<br><a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy">https://ami.lnu.edu.ua/employee/shcherbatyy</a><br><a href="mailto:vitaliy.kukharskyy@lnu.edu.ua">vitaliy.kukharskyy@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/kukharskyy">https://ami.lnu.edu.ua/employee/kukharskyy</a><br>Room 278,<br>The main building of Ivan Franko National University of Lviv,<br>1, Universytetska st., Lviv   |
| <b>Consultations on issues of training in the discipline are taking place</b> | Consultations on the day of lectures/laboratory sessions (by prior agreement).   |
| <b>Course page</b>  | <a href="https://ami.lnu.edu.ua/en/course/optimization-of-complex-systems-am-1-4">https://ami.lnu.edu.ua/en/course/optimization-of-complex-systems-am-1-4</a>  |
| <b>Information about the discipline</b>                                       | The discipline "Optimization of complex systems" is a mandatory discipline from specialty 113 - applied mathematics for the educational program "Applied Mathematics", which is taught in the 3rd semester in the amount of 3 credits (according to the European Credit Transfer System ECTS).   |
| <b>Brief abstract of the discipline</b>                                       | This course concerns optimization problems of complex systems, governed by ordinary differential equations and partial differential equations. Numerical methods for solution of optimization problems, which are based on direct and indirect approaches, are considered. Sensitivity analysis relations in discrete formulation that are obtained using various methods are presented. First-order necessary optimality conditions for finite-dimensional controls are obtained. A number of applications examples from different fields illustrate the material of this course. |
| <b>Goal and objectives of the</b>   | The <b>goal</b> and <b>objectives</b> of the discipline are to teach students: <ul style="list-style-type: none"> <li>• formulate optimal control problems (optimization problems) for systems</li> </ul>  |

|   |  |
|---|--|
| <p><b>discipline</b></p>                    | <p>governed by ordinary differential equations (ODEs) and partial differential equations (PDEs);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• write the necessary optimality conditions;</li> <li>• construct numerical schemes for solution of optimal control problems;</li> <li>• derive expressions of sensitivity analysis;</li> <li>• apply the capabilities of computer algebra systems (e.g., Matlab, Octave) to solve the optimization problems.</li> </ul>   |
| <p><b>Literature for the discipline</b></p> | <p style="text-align: center;"><b>Basic literature</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. F. Tröltzsch. <i>Optimal Control of Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics)</i>. AMS, 2010.</li> <li>2. M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. <i>Optimization with PDE Constraints</i>. Springer, 2009.</li> <li>3. Reyes J.C. <i>Numerical PDE-Constrained Optimization</i>. Springer, 2015.</li> <li>4. Borzi A., <i>Modelling with Ordinary Differential Equations. A Comprehensive Approach</i>. CRC Press, 2020.</li> <li>5. Arora J.S., <i>Introduction to Optimum Design</i>. Elsevier Inc., 2017.</li> </ol> <p style="text-align: center;"><b>Additional literature</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>6. Choi K. K., Kim N. H. <i>Structural Sensitivity Analysis and Optimization I. Linear Systems</i>. Springer, 2005.</li> <li>7. Speyer J. L., Jacobson D. H., <i>Primer on optimal control theory</i>. SIAM, 2010.</li> <li>8. Shcherbatyy M.V. <i>Sensitivity analysis for one-dimensional semilinear partial differential equations</i>. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – №2. – С. 157-164.</li> <li>9. Наконечний О.Г. <i>Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними.: Навчальний посібник</i>. К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.</li> <li>10. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. <i>Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Навчальний посібник</i>. Рівне, 2011.</li> <li>11. MATLAB Homepage: <a href="http://www.mathworks.com/products/matlab/">http://www.mathworks.com/products/matlab/</a>.</li> <li>12. GNU Octave Homepage: <a href="http://www.gnu.org/software/octave/">http://www.gnu.org/software/octave/</a></li> </ol> |
| <p><b>Scope of the course</b></p>           | <p>Total volume: 90 hours. Classroom classes: 32 hours, including 16 hours of lectures -and 16 hours of laboratory work. Independent work: 58 hours.</p>   |
| <p><b>Expected learning outcomes</b></p>    | <p>Upon completion of this course, the student will:</p> <p><b>Know:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulation of optimal control problems for systems with ODEs constraints and PDEs constraints;</li> <li>• numerical schemes for solution of optimal control problems with ODEs constraints and PDEs constraints.</li> </ul> <p><b>Be able to:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• formulate optimal control problems for systems with ODEs and equations PDEs constraints; write these problems in extended and reduced forms;</li> <li>• write first order necessary optimality conditions in discrete form;</li> <li>• construct numerical schemes for solution of optimal control problems; transform optimal control problem into nonlinear programming problem;</li> <li>• derive expressions of sensitivity analysis using different methods (direct differentiation method, adjoint method; discrete formulation); construct efficient algorithms for calculation of sensitivity coefficients.</li> </ul>   |

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <p><b>The course provides the acquisition of the following competencies and program learning outcomes:</b></p> <p><b>General competencies:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- GC1. Ability to think abstractly, analyze and synthesize.</li> <li>- GC06. Ability to communicate in a foreign language on professional issues both orally and in writing.</li> </ul> <p><b>Special competencies:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- SC1. Knowledge of the principles of construction and research of mathematical models, as well as numerical methods for their solution.</li> <li>- SC2. Ability to develop and research mathematical models and methods for their solution.</li> <li>- SC04. Ability to build a discrete analog of a continuous model.</li> <li>- SC05. Ability to programmatically implement algorithms in one of the programming languages.</li> <li>- SC07. Ability to debug computer programs with complex logic.</li> <li>- SC09. Ability to increase the efficiency of computing schemes and algorithms.</li> <li>- SC11. Ability to use the grammatical and stylistic aspects of a foreign language for scientific and professional purposes in the field of applied mathematics and IT..</li> </ul> <p><b>Program learning outcomes:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- PLO 1. Demonstrate knowledge and understanding of approaches to the construction and research of mathematical models.</li> <li>- PLO02. Apply, modify and investigate numerical methods for solving applied problems.</li> <li>- PLO03. Develop and programmatically implement algorithms for solving applied problems..</li> <li>- PLO04. Develop and programmatically implement algorithms for solving applied problems.</li> <li>- PLO06. Determine the most effective method for solving a problem in terms of computational costs and accuracy of the results obtained.</li> <li>- PLO13. Communicate fluently in a foreign language, both orally and in writing, when discussing professional issues and conducting research.</li> </ul> |
| <b>Keywords</b>            | Optimal control problem, optimization criterion, control function, set of admissible controls, optimal design problem, parameter identification problem, reduced form of the optimization problem; direct and indirect methods for solving optimization problems, necessary optimality conditions (Karush-Kuhn-Tucker conditions), sensitivity analysis, sensitivity coefficients, direct differentiation method, adjoint method.  |
| <b>Course format</b>       | Face-to-face<br>Conducting lectures, laboratory sessions and consultations.  |
| <b>Topics</b>              | See below in the table Scheme of the course "Optimization of complex systems".   |
| <b>Final control, form</b> | Exam   |
| <b>Prerequisites</b>       | To study this course, students need basic knowledge of the following courses:  |

|   |  |
|---|--|
|   | <p>Mathematical Analysis; Linear algebra; Optimization methods; Differential equations; Equations of mathematical physics; Numerical Methods; Computer algebra systems (e.g., Matlab, Octave) or numerical method libraries of other software products (e.g., NumPy for Python).</p> <p>Also, to study this course, students require knowledge of the courses:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Methods of functional analysis in applied scientific research;</li> <li>- Foreign language for professional orientation.</li> </ul>  |
| <b>Teaching methods -and techniques that will be used during the teaching of the course</b> | <p>Presentations, lectures, laboratory materials</p> <p>Homework and individual assignments</p>  |
| <b>Required equipment</b>   | <p>Computer with one of the computer algebra systems (Matlab, Octave) or a software product with available libraries of numerical methods for solving systems of ordinary differential equations, partial differential equations, and optimization methods.</p>  |
| <b>Evaluation criteria - (separately for each type of educational activity)</b>             | <p>The assessment is carried out on a 100-point scale. Points are awarded according to the following ratio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• homework assignments: 14% of the semester grade; the maximum number of points is 14 (3 assignments; 5, 5, 4 points properly);</li> <li>• individual assignments: 24% of the semester grade; maximum number of points 24 (2 assignments of 12 points each);</li> <li>• module: 12% of the semester grade; the maximum -number of points is 12 (1 module, 12 points);</li> </ul> <p>A total of 50 points during the semester.<br/>Exam: 50 points.</p> <p><b>Academic Integrity:</b> Students' works are expected to be their own original research or reasoning. Lack of references to used sources, fabrication of sources, plagiarism, interference in the work of other students are, but are not limited to, examples of possible -academic dishonesty. The detection of signs of academic dishonesty in a student-'s written work is a reason for its rejection by -the teacher, regardless of the scale of plagiarism or deception.</p> <p><b>Attending classes</b> is an important part of learning. All students are expected to attend all lectures and laboratory sessions of the course. Students must inform the teacher about the impossibility to attend classes. In any case, students are obliged to adhere to the deadlines -set for homework and individual assignments provided by the course.</p> <p><b>Literature.</b> All literature that students cannot find on their own will be provided by the teacher for educational purposes only, without the right to transfer it to third parties. Students are also encouraged to use other literature and sources that are not among the recommended ones.</p> <p><b>Scoring policy.</b> Points obtained on individual and homework assignments and module are taken into account. At the same time, attendance of classes and the student's activity during laboratory sessions must be taken into</p> |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
|                                | <p>account; inadmissibility of absences and lateness to classes; using a mobile phone, tablet or other mobile -devices during class for purposes not related to education; plagiarism; untimely performance of the assigned task, etc.</p> <p>Any form of breach of academic integrity will not be tolerated.</p>  |
| <b>Questions for the exam.</b> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Introduction and examples of optimization problems.</li> <li>2. Formulation of Optimization Problem. Reduced formulation</li> <li>3. Optimization problems for ODEs.</li> <li>4. Optimization problems for PDEs of elliptic type.</li> <li>5. Optimization problems for PDEs of parabolic type.</li> <li>6. Parameter identification problems.</li> <li>7. The scheme of solving optimization problems. Direct and indirect methods (first discretize - then optimize; first optimize - then discretize).</li> <li>8. Formulation of optimal control problem (OCP) as nonlinear programming problem</li> <li>9. Classification of optimization methods (line search methods, trust region methods).</li> <li>10. Necessary optimality conditions (Lagrangian, Karush-Kuhn Tucker conditions). Finite dimensional case.</li> <li>11. Optimization problems with equality and inequality constraints.</li> <li>12. Formulation of sensitivity analysis (SA) problems. Methods of SA (finite dimensional case of control function). Direct differentiation method. Adjoint method.</li> <li>13. Sensitivity analysis for boundary value problem of ordinary differential equation. Finite dimensional case of control function.</li> <li>14. Sensitivity analysis in optimal control problems of elliptic systems.</li> <li>15. Necessary conditions optimality based on Lagrangian for elliptic systems. Finite dimensional case of control function.</li> </ol> |
| <b>Poll</b>                    | <p>An evaluation questionnaire for the purpose of assessing the quality of the course will be provided upon completion -of the course.</p>   |



Scheme of the course "*Optimization of complex systems*"

| Week | Topic, plan, short theses  | Form of activity (class) | Literature, Internet resources | Assignment, hours   | Deadline |
|------|--|--------------------------|--------------------------------|---|----------|
| 1    | <b>Topic 1.</b> Introduction and examples of optimization problems. General formulation of optimization problems ( <i>The main components of optimization problems. Reduced formulation of optimization problems</i> ).  | Lecture (2 hours)        | [1-5]                          | Elaboration of lecture material (3 hours)   | 1 week   |
|      | <b>Topic 1.</b> Formulation of problems of optimization of complex systems. Extended and reduced formulation. ( <i>Optimal control problems, optimal design problems. The main steps in formulating an optimization problem. Examples of optimization problems. Solvers of computer mathematics systems (for example, Matlab/Octave) for solving nonlinear programming problems (NPP)</i> ). | Laboratory (2 hours)     | [1-5], [11], [12]              | Examples of the use of appropriate solvers for solving finite-dimensional optimal design problems (3 hours) | 1 week   |
| 2    | <b>Topic 2.</b> Formulation of optimization problems for systems of ordinary differential equations (ODEs). Formulation of optimization problems for systems of elliptic type. ( <i>Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Examples of optimal control problems for ODEs and PDEs of elliptic type</i> ).                         | Lecture (2 hours)        | [4], [7]<br><br>[1-3], [9]     | Elaboration of lecture material (3 hours)   | 1 week   |
|      | <b>Topic 2.</b> Formulation of   | Laboratory               | [4], [7],                      | Fulfillment of  | 1 week   |

|   |  |                      |                    |  |        |
|---|--|----------------------|--------------------|--|--------|
|   | <p>optimal control problems for ODEs. Selection of control functions, system characteristics, optimization criterion.</p> <p><i>(Solvers of computer algebra systems (for example, Matlab/Octave) for solving ODEs. Calculation characteristics of the systems under consideration using control functions and solutions of analysis problem analysis (state functions)).</i></p> <p><b>Homework assignment 1.</b></p> | (2 hours)            | [11], [12]         | homework assignment 1 (4 hours)                |        |
| 3 | <p><b>Topic 3.</b> Optimization problems for PDEs of parabolic type. Parameter identification problems.</p> <p><i>(Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Examples of optimal control problems for PDEs of parabolic type).</i></p>   | Lecture (2 hours)    | [1-3]              | Elaboration of lecture material (3 hours)      | 1 week |
|   | <p><b>Topic 3.</b> Optimization problems for PDEs of elliptic type and PDEs of parabolic type.</p> <p><i>(Integral, local, and point type characteristics. Reduced formulation of optimal control problems. Optimal control problems and optimal design problems. Examples of optimal control problems).</i></p> <p><b>Homework assignment 2.</b></p>  | Laboratory (2 hours) | [1-3]              | Fulfillment of homework assignment 2 (3 hours) | 1 week |
| 4 | <p><b>Topic 4.</b> The scheme of solving optimization problems. Direct and indirect methods.</p> <p><i>(Formulation of optimal control problem as nonlinear programming problem</i></p>  | Lecture (2 hours)    | [1], [3], [5], [7] | Elaboration of lecture material (4 hours)      | 1 week |

|   |  |                         |                        |  |         |
|---|--|-------------------------|------------------------|--|---------|
|   | <i>(NPP). Optimization methods for solution of NPP (line search methods, trust region methods).</i>  |                         |                        |  |         |
|   | <b>Topic 4.</b> Development of algorithm for solving optimal control problems for ODEs ( <i>approximation of the control function, transformation of the optimization problem into a nonlinear programming problem, solving the obtained problem using solvers of computer algebra systems for solving direct and nonlinear programming problems</i> ).<br><b>Individual assignment 1.</b> | Laboratory<br>(2 hours) | [4], [5], [7], [10-12] | Fulfillment of individual assignment 1 (8 hours) | 2 weeks |
| 5 | <b>Topic 5.</b> Necessary optimality conditions (finite-dimensional case). Lagrange function. Karush-Kuhn-Tucker conditions.   | Lecture<br>(2 hours)    | [1], [3], [5], [10]    | Elaboration of lecture material (5 hours)        | 1 week  |
|   | <b>Topic 5.</b> Necessary optimality conditions for optimization problems with equality and inequality constraints. ( <i>Solution scheme for optimization problems using necessary optimality conditions in the case of finite-dimensional controls. Program structure</i> ).<br><b>Homework assignment 3.</b>   | Laboratory<br>(2 hours) | [1], [3], [5], [10-12] | Fulfillment of homework assignment 2 (3 hours)   | 1 week  |
| 6 | <b>Topic 6.</b> Formulation of sensitivity analysis (SA) problems. Methods of SA (finite dimensional case of control function).<br>Sensitivity analysis for boundary value problem of ordinary differential equation (finite dimensional case of control function). ( <i>Finite difference method, Direct differentiation method, Adjoint method.</i> )                                    | Lecture<br>(2 hours)    | [1], [5], [6], [8]     | Elaboration of lecture material (3 hours)        | 1 week  |

|   |   |                         |                        |   |                  |
|---|---|-------------------------|------------------------|---|------------------|
|   | <b>Topic 6.</b> Software implementation of optimization algorithm for solving the optimal control problem of ODEs ( <i>constraints on the control function and state function</i> ).<br><b>Individual Assignment 2.</b> | Laboratory<br>(2 hours) | [3-4], [7],<br>[11-12] | Fulfillment of individual assignment 2<br>(7 hours) | 2 weeks          |
| 7 | <b>Topic 7.</b> Sensitivity analysis for PDEs of elliptic types Finite dimensional case.<br>( <i>Approximation of control and state functions. Direct differentiation method, Adjoint method.</i> )                     | Lecture<br>(2 hours)    | [1-3], [6],<br>[8]     | Elaboration of lecture material<br>(5 hours)        | 1 week           |
|   | <b>Topic 7. Module.</b>   | Laboratory<br>(2 hours) | [1], [6], [8]          |   | During the class |
| 8 | <b>Topic 8.</b> Necessary conditions optimality based on Lagrangian for elliptic systems. Finite dimensional case of control function.  | Lecture<br>(2 hours)    | [1-3], [5],<br>[10]    | Elaboration of lecture material<br>(4 hours)        | 1 week           |
|   | <b>Topic 8.</b> Evaluation of the individual task 2. Analysis of the results. Summarizing the conclusions.  | Laboratory<br>(2 hours) | [1], [3]               |   | During the class |