

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра математичного моделювання соціально-економічних процесів

Затверджено

На засіданні  
кафедри математичного моделювання  
соціально-економічних процесів  
факультету прикладної математики та  
інформатики  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 28.08 2023 р.)



Завідувач кафедри Петро СЕНЬО

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Інтервальні обчислення та комп’ютерні технології”,**  
**що викладається в межах ОПП Інформатика**  
**другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів з**  
**спеціальності 122 – Комп’ютерні науки**

Львів 2023 р.

|  |   |
|--|---|
| <b>Назва дисципліни</b>  | Інтервальні обчислення та комп'ютерні технології  |
| <b>Адреса викладання дисципліни</b>                              | Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка<br>м. Львів, вул. Університетська 1   |
| <b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>       | Факультет прикладної математики та інформатики<br>Кафедра математичного моделювання соціально-економічних процесів  |
| <b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>                 | 12 – інформаційні технології<br>122 – комп'ютерні науки   |
| <b>Викладачі дисципліни</b>                                      | Сеньо Петро Степанович, доктор фізико - математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів<br>Добуляк Леся Петрівна, доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів   |
| <b>Контактна інформація викладачів</b>                           | <a href="mailto:petro.seno@lnu.edu.ua">petro.seno@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/seno/">https://ami.lnu.edu.ua/employee/seno/</a> ;<br><a href="mailto:lesia.dobuliak@lnu.edu.ua">lesia.dobuliak@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/dobuliak/">https://ami.lnu.edu.ua/employee/dobuliak/</a> ;<br>Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 361.<br>м. Львів, вул. Університетська, 1   |
| <b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b> | Консультації в день проведення лекцій/ лабораторних занять (за попередньою домовленістю).   |
| <b>Сторінка курсу</b>  | <a href="https://ami.lnu.edu.ua/course1/">https://ami.lnu.edu.ua/course1/</a>   |
| <b>Інформація про дисципліну</b>                                 | Дисципліна “Інтервальні обчислення та комп'ютерні технології” є нормативною дисципліною з спеціальності 122 – Комп'ютерні науки для освітньої програми Інформатика, яка викладається в 3-му семестрі в обсязі 3-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).   |
| <b>Коротка анотація дисципліни</b>                               | Курс розроблено таким чином, щоб надати учасникам знання методів інтервального аналізу, як необхідного інструменту у вигляді програмного забезпечення для інтелектуального аналізу даних, прогнозування, аналізу економічних та соціальних процесів, а також у багатьох інших галузях науки та техніки. Тому у курсі представлено застосування методів побудови гарантованих двосторонніх апроксимацій розв'язків задач обчислювальної математики. Основну частину курсу займає розгляд практичних і теоретичних аспектів інтервальної математики, математики функціональних інтервалів та їх основних програмних реалізацій засобами комп'ютерних пакетів Mathematica та Maple.                        |
| <b>Мета та цілі дисципліни</b>                                   | <i>Метою</i> вивчення нормативної дисципліни “Інтервальні обчислення та комп'ютерні технології” є освоєння студентами теоретичних і практичних основ інтервальної математики та принципів розробки програмного забезпечення інтервальних методів розв'язування задач обчислювальної математики для їх реалізації на робочих станціях і кластерах .<br><i>Завданням</i> вивчення навчальної дисципліни є сформулювати у студентів теоретичні знання та практичні навички в області роботи з інтервальними даними; надати студентам уявлення про завдання та цілі інтервального аналізу даних; надати студентам уявлення про основні способи розв'язування детермінованих та стохастичних задач на основі |

|   |   |
|---|---|
|   | інтервального аналізу; надати студентам практичні навички чисельних розрахунків з використанням комп'ютерних пакетів Mathematica та Maple   |
| <b>Література для вивчення дисципліни</b> | <p style="text-align: center;"><b>Основна література</b></p> <p>1. B.J. Kubica Interval methods for solving nonlinear constraint satisfaction, optimization and similar problems. From inequalities systems to game solutions. – Cham, Switzerland, 2019.</p> <p>2. G. Mayer Interval analysis and automatic result verification. – Berlin: De Gruyter, 2017.</p> <p>3. M.A. Sainz, J. Armengol, R. Calm, P. Herrero, L. Jorba, J. Vehi Modal interval analysis. New tools for numerical information. – Cham: Springer, 2014.</p> <p>4. Senio P.S. Two-sided approximation finding of a function based on mathematics of functional intervals / Senio P.S. // Proceedings of XXXII International Conference PDMU, Czech Republic, Prague, August 27–31, 2018, - P. 335 - 344.</p> <p>5. Senio P.S. The method of solving the Cauchy problem that is based on the adjustment the approximation of the function and its derivative / Senio P.S., Stoyko T.I. // East European Scientific Journal, No 9, Warsaw, Poland, - 2017, - P. 65 - 72.</p> <p style="text-align: center;"><b>Додаткова література</b></p> <p>6. Alefeld G., Herzberger J., Introduction to Interval Computations, Academic Press, New York, - 1983, - 356 p.</p> <p>7. Кветний Р.Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів / Р.Н. Кветний, І.В. Богач, О.Р. Бойко, О.Ю. Софіна, О.М. Шушура // Частина 2, - Вінниця, ВНТУ, - 2013, - 202 с.</p> <p>8. Сеньо П.С. Новий підхід до побудови інтервальних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь / П.С. Сеньо // Вісник Львівського університету. – 1989. - Серія мех.-мат. - Вип. 31. - С. 85-92.</p> <p>9. Сеньо П.С. Розв'язування варіаційних задач та задач оптимального управління методами інтервального аналізу // Праці міжнародної конференції з управління "Автоматика - 2000", - 2000, - т.1, - с. 231- 235.</p> <p>10. Сеньо П.С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. - 2014. – Вип. 21. С. 38 -57.</p> <p>11. Сеньо П.С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. - 2014. – Вип. 11. С. 209- 223.</p> <p>12. Сеньо П.С. Методи розв'язування граничних задач на основі математики функціональних інтервалів / Сеньо П.С. // Матем. та комп. моделювання. Серія: фіз.-мат. науки. – 2018. – Вип. 17. – С. 133–144.</p> <p>13. Stephen Wolfram, The Mathematica Book, 5th ed. (Wolfram Media, 2003).</p> |
| <b>Обсяг курсу</b>                        | Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 32 год., з них 16 год. лекцій та 16 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 58 год.  |
| <b>Очікувані результати навчання</b>      | <p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>Знати:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Дійсну інтервальну арифметику, інтервальні оцінювання множини значень функцій дійсної змінної, математику функціональних інтервалів;</li> <li>- Комп'ютерну, комплексну, розширену інтервальні арифметику;</li> <li>- Метрику простору інтервалів та простору функціональних</li> </ul>   |

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
|                                    | <p>інтервалів;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Інтервальний аналог методу січних, інтервальні аналоги методу Ньютона у формі Мура, Хансена, Кравчика;</li> <li>- Методи поділу інтервалів, організації стеку, перевірки існування розв'язку рівняння;</li> <li>- Операції над інтервальними матрицями, інтервальними векторами та дії з ними, метрику простору інтервальних векторів;</li> <li>- Інтервальний метод Ейлера, інтервальні методи Рунге-Кутта, інтервальні методи розв'язування задачі Коші на основі квадратурних формул;</li> <li>- Методи розв'язування початкових та крайових задач на основі математики функціональних інтервалів;</li> <li>- Означення інтервальних інтегралів та інтервальний аналог методу послідовних наближень розв'язування інтегральних рівнянь;</li> <li>- Інтервальні методи розв'язування крайових задач диференціальних рівнянь в частинних похідних.</li> </ul> <p>Вміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Виконувати арифметичні дії, унарні та теоретико-множинні операції над інтервалами та функціональними інтервалами;</li> <li>- Будувати об'єднані та інтервальні розширення функцій дійсної змінної, функціональні інтервали;</li> <li>- Перевіряти наявність розв'язків рівнянь та систем рівнянь у заданому інтервалі;</li> <li>- Реалізовувати інтервальні методи та методи математики функціональних інтервалів двосторонніх апроксимацій розв'язків рівнянь, систем рівнянь, задачі Коші, інтегральних рівнянь та крайових задач диференціальних рівнянь в частинних похідних;</li> <li>- Застосовувати комп'ютерні пакети Mathematica та Maple для реалізації методів інтервального аналізу.</li> </ul> <p><b>Курс забезпечує набуття таких компетентностей:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>інтегральна компетентність (ІК) – ІК,</b></li> <li>• <b>загальні компетентності (ЗК) – ЗК 2,</b></li> <li>• <b>спеціальні (фахові, предметні компетентності) (СК) – СК 5, СК 7,</b></li> <li>• <b>та програмних результатів навчання (ПРН) – ПРН 1, ПРН 2, ПРН 9, ПРН 14, ПРН 16, ПРН 19.</b></li> </ul> |
| <b>Ключові слова</b>               | Інтервал, інтервальний вектор, інтервальна матриця, інтервальні методи, інтервальний інтеграл, інтервальне розширення функції, математика функціональних інтервалів.  |
| <b>Формат курсу</b>                | Очний<br>Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.<br>Ознайомлення з Internet курсами з інтервальної математики<br><a href="#">Open University courses</a> ;<br><a href="http://www.wolfram.com">www.wolfram.com</a>  |
| <b>Теми</b>                        | Теми подані у Схемі курсу нижче   |
| <b>Підсумковий контроль, форма</b> | Екзамен у кінці семестру<br>Іспит – письмовий   |

|   |   |
|---|---|
| <b>Пререквізити</b>   | Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> <li>- Математичного аналізу;</li> <li>- Алгебри та геометрії;</li> <li>- Диференціальних рівнянь;</li> <li>- Програмування</li> </ul> достатніх для прийняття категоріального апарату методів інтервального аналізу.  |
| <b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b> | Презентації, лекції<br>Індивідуальні завдання<br>Групові проекти, менторство  |
| <b>Необхідне обладнання</b>   | Комп'ютер із програмним забезпеченням пакетів Mathematica та Maple, Internet доступ до обчислювального кластера.  |
| <b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>                | Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: <ul style="list-style-type: none"> <li>• індивідуальні завдання : 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 50, всіх індивідуальних завдань 6, максимальна кількість балів: <ul style="list-style-type: none"> <li>за перше індивідуальне завдання – 5 балів,</li> <li>за друге індивідуальне завдання – 5 балів,</li> <li>за третє індивідуальне завдання – 10 балів,</li> <li>за четверте індивідуальне завдання – 5 балів</li> </ul> </li> <li>за п'яте індивідуальне завдання – 10 балів,</li> <li>за шосте індивідуальне завдання – 15 балів;</li> <li>• екзамен: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.</li> </ul> Підсумкова максимальна кількість балів 100.<br><b>Письмові роботи:</b> Очікується, що студенти виконають одну письмову роботу (тест з теоретичних завдань) і подадуть письмові звіти про виконання індивідуальних завдань.<br><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.<br><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.<br><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.<br><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та |

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <p>запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>   |
| <b>Питання до екзамену</b> | <p>Інтервали. Класифікація. Функціональні інтервали. Арифметичні, теоретико - множинні та унарні операції над інтервалами та функціональними інтервалами.</p> <p>Властивості інтервальних арифметичних та унарних операцій.</p> <p>Відстань між інтервалами та функціональними інтервалами. Метричні простори інтервалів та функціональних інтервалів. Збіжність послідовностей інтервалів та функціональних інтервалів.</p> <p>Неперервність арифметичних та унарних операцій.</p> <p>Норма та ширина інтервалу та функціонального інтервалу. Властивості, породжені нормою та шириною інтервалу та функціонального інтервалу.</p> <p>Інтервальні функції. Інтервальне і об'єднане розширення функції дійсної змінної. Співвідношення між ними.</p> <p>Комп'ютерна інтервальна арифметика.</p> <p>Інтервальна математика з безмежними інтервалами.</p> <p>Інтервальні вектори та інтервальні матриці.</p> <p>Інтервальний аналог методу Гауса.</p> <p>Метод Хансена знаходження обернених інтервальних матриць.</p> <p>Інтервальний метод Ньютона у формі Мура та у формі Кравчика.</p> <p>Інтервальні інтеграли. Три форми визначення таких інтегралів.</p> <p>Властивість монотонності інтервальних інтегралів.</p> <p>Інтервальний аналог методу послідовних наближень для інтегрального рівняння типу Вольтера.</p> <p>Числова реалізація інтервального методу послідовних наближень.</p> <p>Інтервальний аналог методу Ейлера (метод Мура) розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.</p> <p>Методи на основі математики функціональних інтервалів розв'язування початкових та крайових задач.</p> |
| <b>Опитування</b>          | <p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>  |

| Ти ж. | Тема, план, короткі тези   | Форма діяльності (заняття)      | Література . Ресурси в інтернеті | Завдання, год.                      | Термін виконання |
|-------|--|---------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|------------------|
| 1     | <b>Тема 1. Дійсна інтервальна математика. Метрика простору інтервалів</b> (Інтервали. Класифікація. Функціональні інтервали. Арифметичні, теоретико - множинні та унарні операції над інтервалами та функціональними інтервалами. Властивості інтервальних арифметичних та унарних операцій та операцій над функціональними інтервалами. Відстань між інтервалами та функціональними інтервалами. Норма та ширина інтервалу та функціонального інтервалу. Властивості, породжені нормою та шириною інтервалу та функціонального інтервалу. Метричні простори інтервалів та функціональних інтервалів. Збіжність послідовностей інтервалів та функціональних інтервалів. Неперервність арифметичних та унарних операцій). | Лекція, самостійна робота.      | [1, 2, 4, 6, 7, 10, 11]          | 2<br>3                              | 1 тиждень        |
|       | <b>Тема 1. Дійсна інтервальна математика. Метрика простору інтервалів</b><br>Інтервали. Класифікація. Функціональні інтервали. Арифметичні, теоретико - множинні та унарні операції над інтервалами та функціональними інтервалами. Властивості інтервальних арифметичних та унарних операцій та операцій над функціональними інтервалами. Відстань між інтервалами та функціональними інтервалами. Норма та ширина інтервалу та функціонального інтервалу. Властивості, породжені нормою та шириною інтервалу та функціонального інтервалу.   | лабораторна, самостійна робота. | [1, 2, 4, 6, 7, 10, 11]          | Індивідуальне завдання №1<br>2<br>4 | 1 тиждень        |
| 2     | <b>Тема 2. Інтервальні функції</b> (Інтервальний оператор звуження. Інтервальні розширення функції. Об'єднане розширення функції.  | Лекція, самостійна робота.      | [1, 2, 6, 7]                     | 2<br>3                              | 1 тиждень        |

|   |  |                                 |                    |                                     |           |
|---|--|---------------------------------|--------------------|-------------------------------------|-----------|
|   | Інтервальне оцінювання і множина значень функцій дійсної змінної. Співвідношення між ними).  |                                 |                    |                                     |           |
|   | <b>Тема 2. Інтервальні функції</b> (Інтервальний оператор звуження. Інтервальні розширення функції. Об'єднане розширення функції. Інтервальне оцінювання і множина значень функцій дійсної змінної).   | лабораторна, самостійна робота. | [1, 2, 6, 7]       | 2<br>4                              | 1 тиждень |
| 3 | <b>Тема 3. Інтервальні методи розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь</b> (Методи локалізації коренів рівняння. Інтервальний аналог методу січних. Інтервальні аналоги методу Ньютона у формі Мура, Хансена, Кравчика).                    | Лекція, самостійна робота       | [1, 2, 4, 6, 7]    | 2<br>4                              | 1 тиждень |
|   | <b>Тема 3. Інтервальний аналог методу січних</b> (Методи локалізації коренів рівняння. Інтервальний аналог методу січних).   | лабораторна, самостійна робота  | [1, 2, 4, 6, 7]    | Індивідуальне завдання №2<br>2<br>4 | 1 тиждень |
| 4 | <b>Тема 4. Комп'ютерна інтервальна математика. Модифікації інтервальної математики</b> (Комп'ютерна інтервальна арифметика. Комплексна інтервальна арифметика. Інтервальна математика з безмежними інтервалами. Інтервальна математика Хансена). | Лекція, самостійна робота       | [1, 2, 3, 6, 7]    | 2<br>3                              | 1 тиждень |
|   | <b>Тема 4. Інтервальні аналоги методу Ньютона</b> (Інтервальні аналоги методу Ньютона у формі Мура, Хансена, Кравчика).  | лабораторна, самостійна робота  | [1, 2, 4, 6, 7, 8] | Індивідуальне завдання №3<br>2<br>4 | 1 тиждень |
| 5 | <b>Тема 5. Багатовимірні інтервальна математика</b> (Інтервальні вектори та інтервальні матриці. Дії з ними. Метрика простору інтервальних векторів та матриць. Метод Хансена знаходження обернених інтервальних матриць).                       | Лекція, самостійна робота       | [1, 2, 4, 6, 7, 8] | 2<br>4                              | 1 тиждень |



|   |   |                                |                    |                                     |           |
|---|---|--------------------------------|--------------------|-------------------------------------|-----------|
|   | Інтервальні методи розв'язування систем лінійних та нелінійних рівнянь. Інтервальний аналог методу Гауса та циклічної прогонки. Інтервальний метод Ньютона у формі Мура, Хансена та у формі Кравчика для розв'язування систем нелінійних рівнянь).  |                                |                    |                                     |           |
|   | <b>Тема 5. Багатовимірні інтервальна математика</b><br>(Інтервальні вектори та інтервальні матриці. Дії з ними. Метрика простору інтервальних векторів та матриць).   | лабораторна, самостійна робота | [1, 2, 4, 6, 7, 8] | Індивідуальне завдання №4<br>2<br>4 | 1 тиждень |
| 6 | <b>Тема 6. Інтервальні інтеграли. Інтервальні методи розв'язування інтегральних рівнянь</b> (Три форми визначення інтервальних інтегралів. Властивість монотонності інтервальних інтегралів. Інтервальний аналог методу послідовних наближень для інтегрального рівняння типу Вольтера. Числова реалізація інтервального методу послідовних наближень).   | Лекція, самостійна робота      | [1, 2, 4, 7, 9]    | 2<br>3                              | 1 тиждень |
|   | <b>Тема 6. Інтервальний аналог методу січних для розв'язування систем нелінійних рівнянь</b> (Методи локалізації коренів системи рівнянь. Інтервальний аналог методу січних для розв'язування систем нелінійних рівнянь).   | лабораторна, самостійна робота | [1, 2, 4, 6, 7, 8] | Індивідуальне завдання №5<br>2<br>4 | 1 тиждень |
| 7 | <b>Тема 7. Інтервальні методи розв'язування задачі Коші та крайових задач</b> (Інтервальні методи двосторонніх апроксимацій розв'язків задачі Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь у звичайних похідних. Інтервальний аналог методу Ейлера (метод Мура) розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Інтервальні аналоги методів Рунге-Кутта. Метод послідовних узгоджень). | Лекція, самостійна робота.     | [1, 2, 4, 5, 12]   | 2<br>3                              | 1 тиждень |

|   |   |                                 |                      |                                     |           |
|---|---|---------------------------------|----------------------|-------------------------------------|-----------|
|   | Розв'язування двоточної крайової задачі). Методи на основі математики функціональних інтервалів розв'язування початкових та крайових задач.   |                                 |                      |                                     |           |
|   | <b>Тема 7. Інтервальний метод Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь</b> (Інтервальний метод Ньютона у формі Мура, Хансена та у формі Кравчика для розв'язування систем нелінійних рівнянь).   | лабораторна, самостійна робота. | [1, 2, 4, 6, 7, 8]   | Індивідуальне завдання №6<br>2<br>4 | 1 тиждень |
| 8 | <b>Тема 8. Комп'ютерна реалізація інтервальної математики та математики функціональних інтервалів. Методи інтервального аналізу в комп'ютерних пакетах</b> (Специфіка програмної реалізації операцій з інтервалами, інтервальними векторами та інтервальними матрицями. Методи інтервального аналізу в комп'ютерних пакетах Mathematica та Maple).  | Лекція, самостійна робота       | [1, 2, 4, 7, 10, 13] | 2<br>3                              | 1 тиждень |
|   | <b>Тема 8. Інтервальні методи розв'язування задачі Коші та крайових задач</b> (Інтервальні методи двосторонніх апроксимацій розв'язків задачі Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь у звичайних похідних. Інтервальний аналог методу Ейлера (метод Мура) розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Метод послідовних узгоджень. Розв'язування двоточної крайової задачі). | лабораторна, самостійна робота  | [1, 2, 4, 5, 12]     | 2<br>4                              | 1 тиждень |