Математична криптологія

Афінні шифри

Шифр зсуву

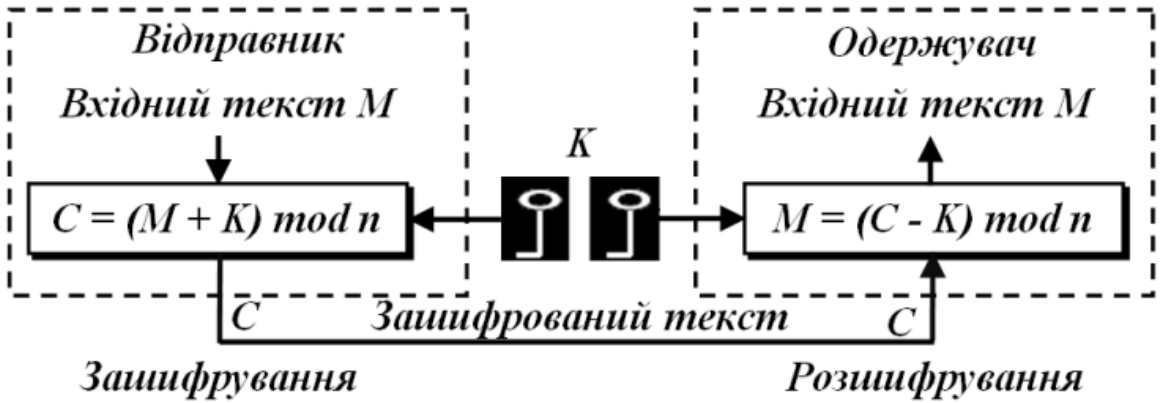
Афінні шифри - це підклас шифрів заміни, який включає як частковий випадок шифр Віженера та шифр перестановки з фіксованим періодом.

Шифр зсуву.

Ключ: s таке, що $0 \leq s < n$.

Шифрування. У повідомленні кожна буква x заміщується буквою $E(x) = (x + s) \bmod n$.

Дешифрування. У криптотексті кожна буква x' заміщується буквою $D(x') = (x' + s') \bmod n$, де $s' = n - s$. Величину зворотнього зсуву s' будемо називати *дешифруючим ключем.*



Шифр зсуву

Приклад: Зашифрувати повідомлення “hello” з використанням шифру зсуву з ключем $K = 15$.

Розв'язання:

m1 = h → 07; c1 = (07 + 15) mod 26 = 22 → W;

m2 = e → 04; c2 = (04 + 15) mod 26 = 19 → T;

m3 = l → 11; c3 = (11 + 15) mod 26 = 0 → A;

m4 = l → 11; c4 = (11 + 15) mod 26 = 0 → A;

m5 = o → 14; c4 = (14 + 15) mod 26 = 3 → D;

як наслідок отримаємо зашифроване повідомлення “WTAAD”.

Приклад: Розшифрувати повідомлення “WTAAD”, використовуючи адитивний шифр з ключем $K = 15$.

Розв'язання: Застосовуємо алгоритм розшифрування (2.2) до зашифрованого тексту літера за літерою:

c1 = W → 22; m1 = (22 – 15) mod 26 = 07 → h;

c2 = T → 19; m2 = (19 – 15) mod 26 = 04 → e;

c3 = A → 00; m3 = (00 – 15) mod 26 = 11 → l;

c4 = A → 00; m4 = (00 – 15) mod 26 = 11 → l;

c5 = D → 03; m5 = (03 – 15) mod 26 = 14 → o,

як наслідок отримаємо вихідне повідомлення “hello”.

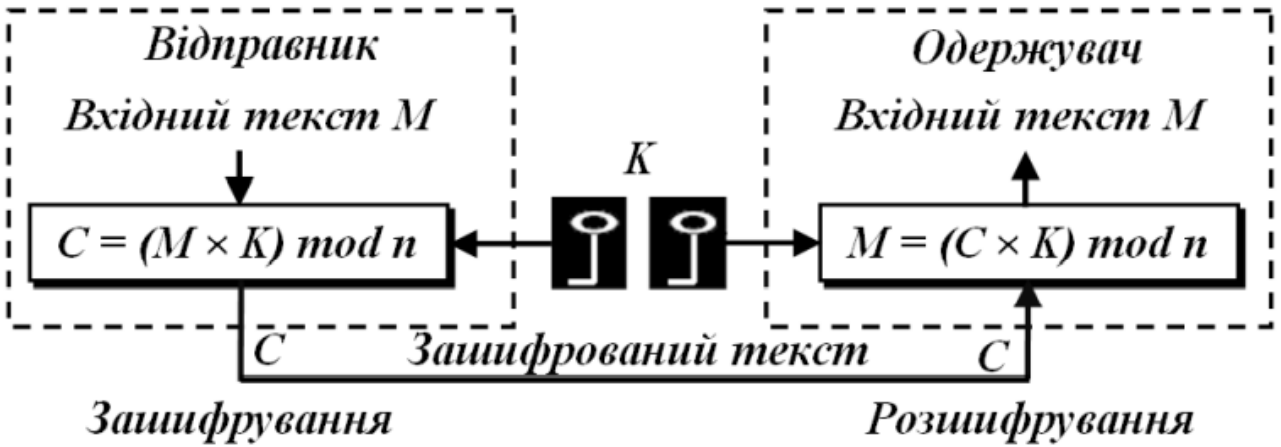
Лінійний шифр

Лінійний шифр.

Ключ: a таке, що $0 < a < n$ і НСД $(a, n) = 1$.

Шифрування. У повідомленні кожна буква x заміщується буквою $E(x) = (ax) \bmod n$.

Дешифрування. У криптотексті кожна буква x' заміщується буквою $D(x') = (a'x') \bmod n$, де $a' = a^{-1} \bmod n$ — дешифруючий ключ.



Лінійний шифр

Приклад 3.1. Припустимо, повідомлення записуються українською абеткою без пропусків між словами та розділових знаків, тобто $n = 33$. Нехай для шифрування використовується ключ $a = 2$. За допомогою розширеного алгоритму Евкліда знаходимо, що $a' = 17$ (див. приклад 2.9). Розглянемо процедуру шифрування повідомлення **завтра**. У цифровій формі воно представляється послідовністю чисел `9,0,2,22,20,0`. Множення на 2 за модулем 33 дає послідовність `18,0,4,11,7,0`, яка відповідає криптотекстові **оаґіва**.

Співвідношення $D(E(x)) = x$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}_n$ доводиться просто: $a'(ax) = (a'a)x = 1x = x$ (операції виконуються в $\mathbb{Z}_n$). Існування a' для a гарантоване умовою НСД $(a, n) = 1$ за твердженням 2.8. Більше того, a' для заданого a ефективно обчислюється за допомогою розширеного алгоритму Евкліда (приклад 2.9). Нарешті покажемо, що ті a, які не задовольняють накладену нами умову, непридатні для використання в якості ключа.

Твердження 3.2. *Відображення* $E \quad \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, *задане формулою* $E(x) = (ax) \bmod n$, *має обернене тоді і тільки тоді, коли* НСД $(a, n) = 1$.

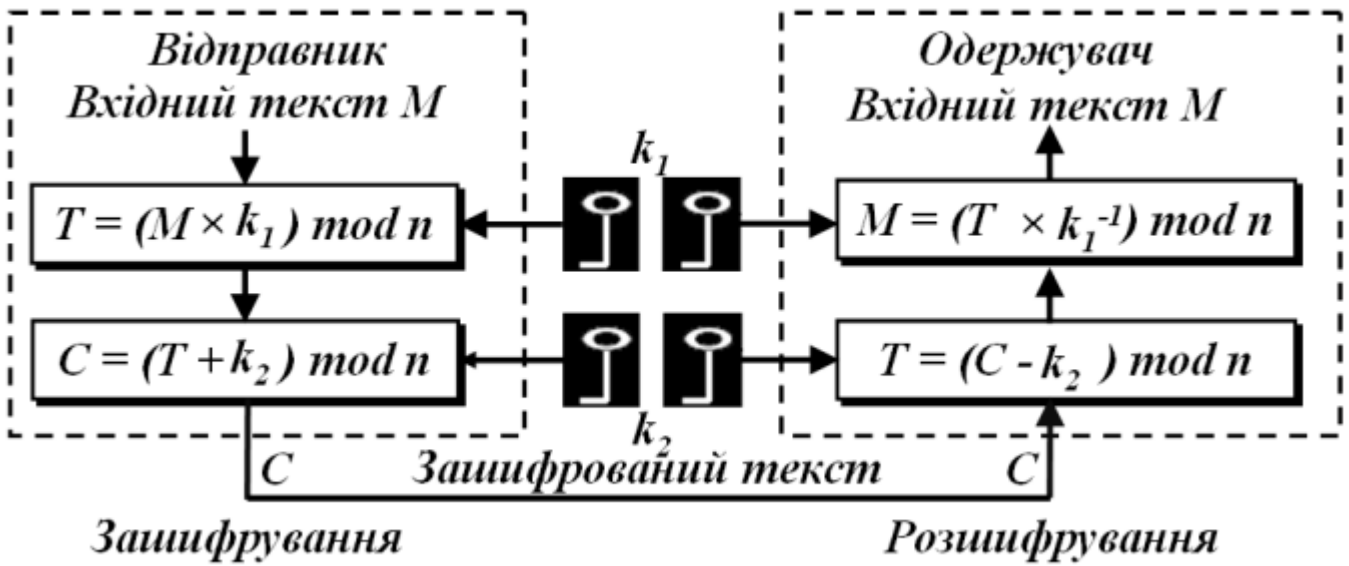
Доведення. В один бік твердження нами щойно було доведене. Навпаки, припустимо, що відображення E має обернене. За теоремою про обернене відображення (див. кінець пункту 1.1), E сюр'єктивне. Позначимо через e прообраз одиниці: $E(e) = 1$. Це означає, що $ae \equiv 1 \pmod n$, звідки й випливає, що НСД $(a, n) = 1$. ∎

Афінний шифр

Ключ: a, s такі, що $0 \leq s < n$, $0 < a < n$ і НСД $(a, n) = 1$.

Шифрування. У повідомленні кожна буква x заміщується буквою $E(x) = (ax + s) \bmod n$.

Дешифрування. У криптотексті кожна буква x' заміщується буквою $D(x') = (a'x' + s') \bmod n$, де пара $a' = a^{-1} \bmod n$ і $s' = (-a's) \bmod n$ є дешифруючим ключем.



Афінний шифр

Приклад. Використовуючи афінний шифр, зашифрувати повідомлення “hello” з ключовою парою k1 = 7 і k2 = 2.

m1 = h → 7; c1 = (7 ×7 + 2) mod 26 = 25 → Z;

m2 = e → 4; c2 = (4 × 7 + 2) mod 26 = 4 → E;

m3 = l → 11; c3 = (11 × 7 + 2) mod 26 = 1 → B;

m4 = l → 11; c4 = (11 × 7 + 2) mod 26 = 1 → B;

m5 = o → 14; c5 = (14 × 7 + 2) mod 26 = 22 → W: отримаємо зашифроване повідомлення “ZEBBW”.

Приклад. Використовуючи афінний шифр розшифрувати повідомлення “ZEBBW” із ключовою парою k1 = 7 і k2 = 2.
Розв’язування.

Щоб знайти символи вхідного тексту, додамо адитивну інверсію від (–k2) mod 26 = (–2) mod 26 = 24 до отриманого зашифрованого тексту. Потім помножимо результат на мультиплікативну інверсію від

$$k1^{-1} \bmod 26 = 7^{-1} \bmod 26 = 15.$$

c1 = Z → 25; m1 = ((25 + 24) × 15) mod 26 = 7 → h;

c2 = E → 4; m2 = ((4 + 24) × 15) mod 26 = 4 → e;

c3 = B → 1; m3 = ((1 + 24) × 15) mod 26 = 11 → l;

c4 = B → 1; m4 = ((1 + 24) × 15) mod 26 = 11 → l;

c5 = W → 22; m5 = ((22 + 24) × 15) mod 26 = 14 → o. Отже, отримаємо вихідне повідомлення “hello”.

Афінний шифр

Вправа для самостійгого виконання:

Довести, афінний шифр утворює групу. Знайти порядок цієї групи як функцію *n*. Обчислити його при n = 26, 33.

Шифр зсуву k-ого порядку (шифр Віженера з періодом k)

3.2. Афінні шифри вищих порядків. Подумаємо, як можна розширити монограмні шифри попереднього пункту так, щоб вони оперували з k-грамами для довільного $k > 1$. Спочатку введемо операцію додавання в $\mathbb{Z}_n^k$. Сумою векторів $X = (x_1, \ldots, x_k)$ і $S = (s_1, \ldots, s_k)$ з $\mathbb{Z}_n^k$ є вектор $X + S = ((x_1 + s_1) \bmod n, \ldots, (x_k + s_k) \bmod n)$. $\mathbb{Z}_n^k$ з операцією додавання є групою. Вектор $-S = (n - s_1, \ldots, n - s_k)$ є оберненим до вектора $S = (s_1, \ldots, s_k)$.

ШИФР ЗСУВУ k-ГО ПОРЯДКУ (ШИФР ВІЖЕНЕРА З ПЕРІОДОМ k).

Ключ: $S \in \mathbb{Z}_n^k$.

Шифрування. Повідомлення розбивається на k-грами. Кожна k-грама X заміщується k-грамою $E(X) = X + S$.

Дешифрування. Кожна k-грама X' криптотексту заміщується k-грамою $D(X') = X' + S'$, де $S' = -S$ є дешифруючим ключем.

Лінійний шифр k-ого порядку

Перед тим як перейти до лінійного шифру нагадаємо, що через $\mathrm{M}_k(\mathbb{Z}_n)$ ми позначаємо множину матриць розміру $k \times k$ з коефіцієнтами з кільця $\mathbb{Z}_n$, а через $\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$ — підмножину оборотних матриць. Для $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$ обернену до неї матрицю позначаємо через A^{-1}. Добутком AX матриці $A = (a_{ij})$ з $\mathrm{M}_k(\mathbb{Z}_n)$ на вектор-стовпчик $X = (x_1, \ldots, x_k)$ з $\mathbb{Z}_n^k$ є вектор-стовпчик

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \\ \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k \end{pmatrix}$$

Лінійний шифр k-го порядку.

Ключ: $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$.

Шифрування. Повідомлення розбивається на k-грами. Кожна k-грама X заміщується k-грамою $E(X) = AX$.

Дешифрування. Кожна k-грама X' криптотексту заміщується k-грамою $D(X') = A'X'$, де $A' = A^{-1}$ — дешифруючий ключ.

Лінійний шифр k-ого порядку

Приклад 3.4. Лінійний шифр 1-го порядку обговорювався у попередньому пункті. Розглянемо докладніше випадок $k = 2$, тобто біграмний лінійний шифр. В якості ключа вибирається матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ з коефіцієнтами $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$. Матриця A повинна бути оборотною. За твердженням Б.5 це рівнозначно умові НСД$(w, n) = 1$ для $w = ad - bc$ — визначника матриці. За цієї умови з допомогою розширеного алгоритму Евкліда ми можемо знайти в $\mathbb{Z}_n$ обернений елемент w^{-1} і за формулою оберненої матриці обчислити дешифруючий ключ

$$A' = \begin{pmatrix} dw^{-1} \bmod n & -bw^{-1} \bmod n \\ -cw^{-1} \bmod n & aw^{-1} \bmod n \end{pmatrix}$$

Наприклад, для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}$ над $\mathbb{Z}_{33}$ маємо $w = 2$. За розширеним алгоритмом Евкліда знаходимо $w^{-1} = 17$ (див. приклад 2.9) і $A' = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$

Лінійний шифр *k*-ого порядку

Нехай потрібно зашифрувати повідомлення **завтра**. Першій біграмі **за** відповідає вектор $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ Множення на матрицю A дає $\begin{pmatrix} (1 \cdot 9 + 1 \cdot 0) \bmod 33 \\ (32 \cdot 9 + 1 \cdot 0) \bmod 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ Таким же чином знаходимо образи біграм **вт** $= \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix}$ та **ра** $= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що множення матриці A на три вектори-біграми еквівалентне множенню цієї матриці на матрицю розміру 2 на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 20 \\ 0 & 22 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 24 & 20 \\ 24 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

Насамкінець перетворюємо стовпчики отриманої матриці у біграми і отримуємо криптотекст **эффррй**.

Дешифрування відбувається так само, лише із використанням оберненої матриці. Наприклад, якщо ми маємо криптотекст **рьгк**, то розбиваємо його на біграми $\begin{pmatrix} \text{р} & \text{г} \\ \text{ь} & \text{к} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 30 & 14 \end{pmatrix}$ і виконуємо множення на матрицю A':

$$\begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 17 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 30 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{н} & \text{н} \\ \text{и} & \text{і} \end{pmatrix}$$

В результаті дістаємо повідомлення **нині**.

Лінійний шифр k-ого порядку

Повернемось до загального аналізу лінійного шифру. Співвідношення $D(E(X)) = X$ для будь-якого $X \in \mathbb{Z}_n^k$ випливає з рівностей $A'(AX) = (A'A)X = I_k X = X$, де I_k — одинична матриця порядку k. Дешифруючий ключ A' для вибраної оборотною матриці A обчислюється ефективно за формулою для оберненої матриці (див. пункт Б.6). Потрібне для цього значення $(\det A)^{-1} \bmod n$ знаходиться за допомогою розширеного алгоритму Евкліда (приклад 2.9). На довершення доведемо, що необоротні матриці A непридатні для використання в якості ключа.

Твердження 3.5. *Відображення $E \quad \mathbb{Z}_n^k \to \mathbb{Z}_n^k$, задане формулою $E(X) = AX$, має обернене тоді і тільки тоді, коли $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$.*

Доведення. При $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$ існування відображення, оберненого до E, було встановлене вище. Навпаки, припустимо, що E має обернене відображення D. Позначимо через X_i, $1 \le i \le k$, вектор з i-тою компонентою 1 і з рештою компонент, що дорівнюють 0. Розглянемо матрицю U із стовпчиками $D(X_1), \ldots, D(X_k)$. Зауважимо, що $AU = I_k$, тобто матриця U є правою оберненою до A. Отже, матриця A оборотна (див. твердження Б.5). ∎

Афінний шифр k-ого порядку

Афінний шифр k-го порядку.
Ключ: $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$ і $S \in \mathbb{Z}_n^k$.

Шифрування. Повідомлення розбивається на k-грами. Кожна k-грама X заміщується k-грамою $E(X) = AX + S$.[1]

Дешифрування. Кожна k-грама X' криптотексту заміщується k-грамою $D(X') = A'X' + S'$, де $A' = A^{-1}$ і $S' = -A'S$ — дешифруючий ключ.

Приклад 3.6. Хочемо зашифрувати повідомлення **завтра** за допомогою ключа $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}$ і $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$ над $\mathbb{Z}_{33}$.

Частина роботи вже виконана нами у прикладі 3.4. Після розбиття повідомлення на вектори-біграми і множення їх на матрицю A за модулем 33 ми були отримали $\begin{pmatrix} 9 & 24 & 20 \\ 24 & 20 & 13 \end{pmatrix}$. Додаємо до кожного стовпчика вектор S і отримуємо $\begin{pmatrix} 10 & 25 & 21 \\ 6 & 2 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textbf{и} & \textbf{х} & \textbf{с} \\ \textbf{е} & \textbf{в} & \textbf{ш} \end{pmatrix}$ тобто криптотекст **иехвсш**.

Знайдемо також дешифруючий ключ. У прикладі 3.4 була отримана матриця $A' = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$. Обчислюємо $S' = -\begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Криптоаналіз

3.3. Криптоаналіз. *Атака з вибором відкритого тексту.* Нескладно зауважити, що афінний шифр нестійкий до цього виду криптоаналізу. Позначимо через X_i, $1 \le i \le k$, вектор з i-тою компонентою 1 і з рештою компонент, що дорівнюють 0, а через X_0 нульовий вектор. Суперникові досить довідатись, в які криптотексти переходять відповідні цим векторам k-грами. Справді, $E(X_0) = S$, а образ $E(X_i)$ рівний i-тому стовпчику матриці A, що дозволяє повністю визначити ключ.

Атака з відомим відкритим текстом. Спочатку покажемо, що лінійний шифр вразливий від такої атаки. Припустимо суперник знає, що шифруюче відображення $E(X) = AX$ перетворює вектори $X_1, \ldots, X_k$ у вектори $X'_1, \ldots, X'_k$. Сформуємо із стовпчиків $X_1, \ldots, X_k$ матрицю M, а із стовпчиків $X'_1, \ldots, X'_k$ матрицю C. Як неважко зрозуміти, $C = AM$ і $M = A'C$. Якщо матриця C оборотна, то звідси зразу можна визначити дешифруючий ключ $A' = MC^{-1}$. Якщо суперникові пощастить менше і матриця C виявиться необоротною, то він не зможе визначити A' однозначно. Однак кількість можливостей може зменшитись настільки, що A' вдасться знайти після деякого перебору.

Для афінного шифру $E(X) = AX + S$ необхідно знати на одну пару (X, X'), де $X' = E(X)$, більше. Віднявши рівність $AX + S = X'$ від кожної з рівностей $AX_i + S = X'_i$, $i \le k$, ми зведемо задачу визначення дешифруючого ключа до попереднього випадку.

Криптоаналіз

Атака лише за криптотекстом. Афінний шифр 2-го порядку піддається частотному аналізу як і будь-який біграмний шифр. Якщо порядок k дещо збільшити, частотний метод перестане працювати.

Розглянемо лінійний шифр k-го порядку над алфавітом $\mathbb{Z}_n$. Подивимось, які перспективи може мати брутальна атака, іншими словами, наскільки реально влаштувати повний перебір ключів. Очевидно, кількість ключів дорівнює кількості матриць в $\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)$, для якої в пункті 2.5 було введено позначення $\phi_k(n)$. Там же була виведена формула $\phi_k(n) = n^{k^2} \prod_{p|n} \prod_{i=1}^{k} (1 - 1/p^i)$. З одного боку видно, що $\phi_k(n) \le n^{k^2}$ З іншого, порівнюючи із формулою для функції Ойлера $\phi(n) = \phi_1(n)$, отримуємо $\phi_k(n) \ge n^{k^2-k}(\phi(n))^k$ З використанням твердження 2.15 маємо оцінку $\phi_k(n) \ge n^{k^2}/(6 \ln \ln n)^k$ при $n > 4$. Асимптотично, значення $\phi_k(n)$ зростає за n як поліном і за k як експоненційна функція. Отримана оцінка дозволяє оцінити розмір простору ключів для будь-яких конкретних k і n (див. також вправу 3.20). Як видно, перебір ключів напевне є нереальним скажімо при $k = 5$, $n = 32$. Платою за збільшення порядку шифру є збільшення часу криптування і декриптування.

Криптоаналіз

Вправа для самостійгого виконання:

Перехоплене повідомлення отримане за допомогою лінійного шифру 3-го порядку над 33-літерним алфавітом (пропуски між словами ігноруються):

ЕЬЩИЦЕППІДНПТЛЧТХХИШХКПСҐТНВТУ

Повідомлення закінчується підписом:

ДЖЕЙМСБОНД

що дає можливість встановити відповідність між трьома триграмами повідомлення і криптотексту. Знайти дешифруючий ключ і прочитати повідомлення.