Математична криптологія

Основні поняття.
Алгоритм Евкліда.

Основні поняття

Алфавітом називають довільну скінченну множину:

{а, б, в, г, ..., ь, ю, я} – український алфавіт,

{ _ , а, б, в, г, ..., ь, ю, я} – український алфавіт з пропуском між словами,

{ **.** , **,** , **?**, а, б, в, г, ..., ь, ю, я} – український алфавіт з розділовими знаками,

$\{0,1\}^6$– всі 0−1 послідовності довжини 6,
$Z_{33} = \{0, 1, 2, \dots, 32\}$ − кільце лишків за модулом 33.

Алфавіт позначатимемо рукописними літерами ***A***, ***B*, …**

Елементи алфавіту називатимемо символами або буквами.

Слово в алфавіті *A* – це скінчення послідовність букв цього алфавіту.
$\boldsymbol{A}^*$ − множина всіх слів у алфавіті ***A***.

Множина слів у алфавіті ***A*** довжини ***l*** - $\boldsymbol{A}^l$.

Довжина слова *w* - |*w*|.

Для слів *v* та *u* через *vu* позначатимо результат їх злиття.

Слово *v* називатимемо префіксом слова *w* у випадку, коли *v*=*w* або *w*=*vu* для деякого слова *u*.

Основні поняття

Коли говорять про криптосистему або шифр, мають на увазі такі об’єкти:

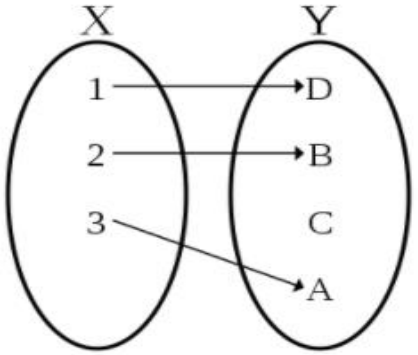
- Алфавіт $\mathcal{A}$, в якому записуються *повідомлення (відкриті тексти)*. Повідомлення M є словом в алфавіті $\mathcal{A}$ (яке може складатися з багатьох слів у звичному лінгвістичному розумінні), тобто $M \in \mathcal{A}^*$ Множина $\mathcal{A}^*$ називається *простором повідомлень* або *відкритих текстів*.
- Алфавіт $\mathcal{B}$, в якому записуються *криптотексти*. Множина $\mathcal{B}^*$ називається *простором криптотекстів*. Часто $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
- Простір ключів $\mathcal{K}$, який складається із слів у деякому алфавіті, що називаються *ключами*.
- *Шифруюче відображення* $E : \mathcal{K} \times \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$
- *Дешифруюче відображення* $D \quad \mathcal{K} \times \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ Відображення E і D повинні мати таку властивість:

$$D(K, E(K, M)) = M \text{ для всіх } M \in \mathcal{A}^* \text{ і } K \in \mathcal{K}. \qquad (1)$$

Фіксація ключа K визначає відображення $E_K : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ за формулою $E_K(M) = E(K, M)$ для кожного $M \in \mathcal{A}^*$ Подібним чином задається й відображення $D_K \quad \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$

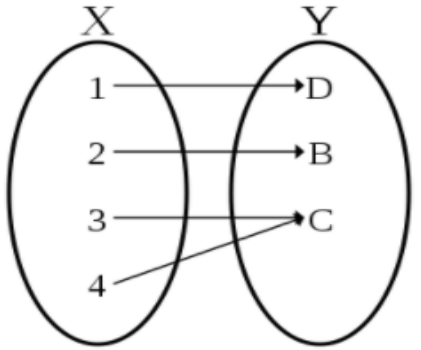
Відображення

Відображення $f: X \to Y$ називається **ін'єктивним**, якщо воно різним аргументам співставляє різні значення: $f(x_1) \neq f(x_2)$ для $x_1 \neq x_2$.



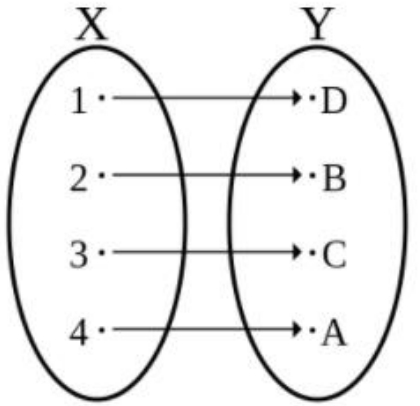
Ін'єктивне, але не сюр'єктивне відображення

Відображення $f: X \to Y$ називається **сюр'єктивним**, якщо кожен елемент y з множини Y має прообраз – такий елемент $x \in X$, що $f(x) = y$.



Сюр'єктивне, але не ін'єктивне відображення

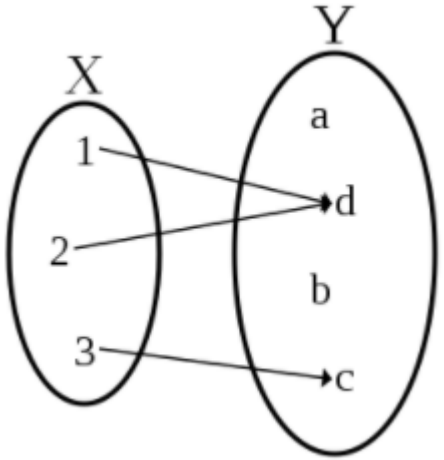
Бієктивним є відображення, яке **ін'єктивне** та **сюр'єктивне** одночасно.

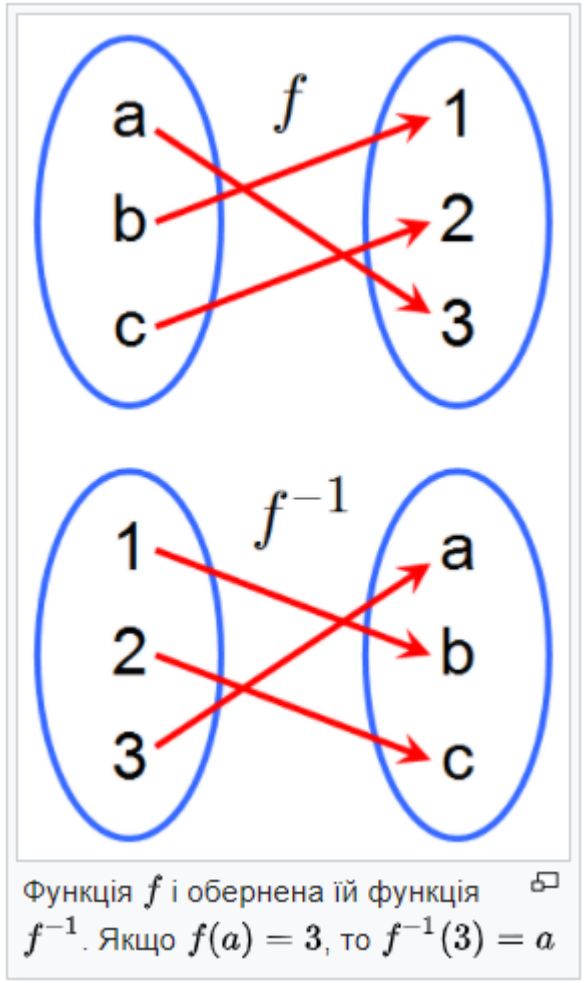


Бієктивне відображення (сюр'єктивне та ін'єктивне)

Відображення

Яким є наступне відображення?





Функція f і обернена їй функція f^{-1}. Якщо $f(a) = 3$, то $f^{-1}(3) = a$

Для двох відображень $f: X \to Y$ та $g: Y \to Z$ їх **композиція** задається співвідношенням $g \circ f(x) = g(f(x))$ для $x \in X$.

Тотожнє відображення $id_x: X \to X$ залишає елемент множини X на місці: $id_x(x)=x$.

Відображення $g: Y \to X$ вважається **лівим оберненим** до відображення $f: X \to Y$ за умови що їх композиція рівна $g \circ f = id_x$.

Відображення $g: Y \to X$ вважається **правим оберненим** до відображення $f: X \to Y$ за умови що їх композиція рівна $f \circ g = id_y$.

Відображення $g: Y \to X$ називається **оберненим** до відображення f, якщо воно є одночасно і лівим, і правим оберненим до f.

Теорема про обернене відображення

1) Відображення $f: X \to Y$ ін'єкнивне тоді і лише тоді, коли до нього існує ліве обернене.
2) Відображення $f: X \to Y$ сюр'єкнивне тоді і лише тоді, коли до нього існує праве обернене.
3) Якщо відображення бієктивне, то його ліве обернене збігається із правим оберненим.
4) У випадку, коли множини X та Y скінченні та містять однакову кількість елементів, відображення $f: X \to Y$ має ліве обернене тоді і лише тоді, коли воно має праве обернене.

$$D(K, E(K, M)) = M \text{ для всіх } M \in \mathcal{A}^* \text{ і } K \in \mathcal{K}. \qquad (1)$$

Для довільного K дешифруюче відображення $D_K: B^* \to A^*$ є оберненим зліва до шифруючого відображення $E_K: A^* \to B^*$. З теореми про обернене відображення випливає що E_K має бути ін'єкцією. Ця умова рівнозначна можливості дешифрування.

Будь-яка родина ін'єктивних відображень $\{E_k: A^* \to B^*\}_{k \in K}$ може розглядатись як шифруюча в тому плані, що для них існують обернені зліва відображення $\{D_k: B^* \to A^*\}_{k \in K}$, які можуть вважатись дешифруючими.

Досить часто шифруюче відображення крім ін'єктивності володіє також сюр'єктивністю. За теоремою про обернене відображення, дешифруюче відображення D_k є оберненим до E_k не тільки зліва, а й справа.

$$D_K(E_K(M)) = E_K(D_K(M)) = M.$$

Криптосистему називають ефективною, якщо шифруюче і дешифруюче відображення реалізуються швидким алгоритмом.

Блоковий шифр. Дешифрування ітераціями.

Шифр називається **блоковим** з періодом l, якщо шифруюче відображення задається на словах довжини l:

$$K \times A^l \to B^l$$

та поширюється на слова довільної довжини $M = M_1 M_2 \dots M_t$: $E(K, M) = E(K, M_1)\, E(K, M_2) \dots E(K, M_t)$.

Часто у блоковому шифрі шифруюче відображення зберігає довжину: $E: K \times A^l \to B^l$, окрім того A^lта B^l можуть містити однакову кількість символів, наприклад A=B.

Щоб перевірити чи відображення такого вигляду можна використовувати як шифруєче, достатньо довести одну з чотипьох умов теореми про обернене відображення:

1) ін'єктивність, 2) сюр'єктивність, 3) існування оберненого зліва, 4) існування оберненого спарава відображення.

Дешифрування ітераціями: Розглянемо блоковий шифр вигляду $E: K \times A^l \to A^l$. Для кожного ключа K шифруюче відображення є елементом групи Sym A^l. Шифр утворює групу, якщо множина $\{E_k\}_{k \in K}$ є в Sym A^l підгрупою.

Шифруюче відображення $E_k: A^l \to A^l$ можна застосовувати декілька разів: $E_k^1 = E_k$; $E_k^i = E_k \circ E_k^{i-1}$, i >1.

Методом ітерацій суперник може скористатись у разі, коли він має доступ до шифруючого відображення з фіксованим ключем. Підслухавши криптотекст $C = E_k(M)$, суперник може спробувати знайти повідомлення M, обчислюючи послідовність $E_k^1(C), E_k^2(C), E_k^3(C)$, ... доки не виявиться що $E_k^m(C) = C$. Це означає, що відкрите повідомлення було отримане на попередньому кроці: $M = E_k^{m-1}(C)$.

Групи

Б.3. Групи. *Групою* називається множина G, наділена бінарною операцією $\star$ з такими властивостями:

1) $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ для будь-яких елементів $x, y, z \in G$ *(асоціативність)*;
2) в G існує *нейтральний* елемент e такий, що $x \star e = e \star x = x$ для всіх $x \in G$;
3) для кожного елемента $x \in G$ в G є *обернений* елемент x' такий, що $x \star x' = x' \star x = e$.

Якщо підмножина H множини G утворює групу відносно тієї ж операції $\star$, то вона називається *підгрупою* групи G. Так, множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ утворює групу за додаванням ($e = 0$, $x' = -x$), а множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ є її підгрупою. Множина додатніх раціональних чисел $\mathbb{Q}_+$ утворює групу за множенням ($e = 1$, $x' = 1/x$). Якщо групову операцію називаємо множенням, то саму групу називаємо *мультиплікативною*, а її нейтральний елемент — одиницею. Якщо ж операцію називаємо додаванням, то групу називаємо *адитивною*, нейтральний елемент нулем, а обернений елемент — протилежним елементом.

Для елемента x групи G через x^i позначається його i-тий степінь — елемент $x \star x \star \ldots \star x$, де операція виконана $i - 1$ раз. (В адитивній формі те ж саме записується як $ix = x + \ldots + x$.) Нескладною вправою є доведення того, що для кожного елемента x скінченної групи для деякого показника m виконується рівність $x^m = e$. Найменше з таких m називається *порядком елемента* x у групі G.

Порядок групи. Теорема Лагранжа. Гомоморфізм

Порядком скінченної групи називається кількість її елементів. Легко зауважити, що всі степені елемента групи утворюють у ній підгрупу, порядок якої дорівнює порядку елемента.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА (1771).

1) ***Порядок підгрупи є дільником порядку групи.***
2) ***Порядок елемента є дільником порядку групи.***

Нехай маємо дві групи G і G' з операціями $\star$ і $\circ$ відповідно. Кажемо, що відображення $f \quad G \to G'$ ***зберігає операцію,*** якщо $f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$ для всіх $x, y \in G$. Таке відображення $f \quad G \to G'$ називається ***гомоморфізмом*** з групи G у групу G' ***Ядром*** гомоморфізму $f \quad G \to G'$ є множина всіх тих елементів групи G, які f відображає в нейтральний елемент групи G' Наприклад, відображення, яке кожному цілому числу ставить у відповідність його остачу від ділення на натуральне n, є гомоморфізмом із адитивної групи $\mathbb{Z}$ в адитивну групу $\mathbb{Z}_n$, ядро якого утворюють цілі числа, кратні n. Легко показати, що ядро гомоморфізму $f \quad G \to G'$ утворює в G підгрупу.

Гомоморфізм $f \quad G \to G'$ є ін'єктивним тоді і лише тоді, коли його ядро складається тільки із нейтрального елемента групи G. Таке ядро називається ***тривіальним.***

Гомоморфізм, який є бієктивним відображенням, називається ***ізоморфізмом.*** Дві групи ***ізоморфні,*** якщо існує ізоморфізм з однієї з них на іншу. Наприклад, двійковий логарифм $\log_2 \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задає ізоморфізм із мультиплікативної групи невід'ємних дійсних чисел $\mathbb{R}_+$ в адитивну групу всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$. Ізоморфні групи мають тотожні алгебраїчні властивості.

Група перестановок

Б.4. Група перестановок. Іншим прикладом групи є множина $\mathrm{Sym}\, X$ бієктивних відображень множини X на себе з операцією композиції. Нейтральним елементом є тотожне відображення id_X, а оберненим елементом до $f \in \mathrm{Sym}\, X$ є відображення f', обернене до f. Бієкцію множини на себе називають ще *перестановкою* цієї множини. Відповідно, $\mathrm{Sym}\, X$ називається *групою перестановок* множини X. Якщо множина X налічує n елементів, то очевидним чином група $\mathrm{Sym}\, X$ ізоморфна групі $\mathrm{Sym}\{1, 2, \ldots, n\}$. Остання називається *симетричною групою степеня* n і позначається через S_n.

Перестановку σ із S_n звично записують у вигляді таблички

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Цикл $(i_1 i_2 \ldots i_l)$, де $i_1, i_2, \ldots, i_l$ різні числа від 1 до n, — це перестановка, яка елемент i_j, $j < l$, відображає в i_{j+1}, i_l в i_1, а всі інші елементи самі в себе. l називається *довжиною* циклу. Цикли $(i_1 i_2 \ldots i_l)$ та $(i'_1 i'_2 \ldots i'_{l'})$ *незалежні*, якщо множини елементів $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ та $\{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{l'}\}$ не перетинаються. Кожна перестановка є композицією (або добутком) попарно незалежних циклів. Наприклад, перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

дорівнює добутку (15)(364). Якщо перестановка σ розкладається в добуток m незалежних циклів з довжинами $l_1, l_2, \ldots, l_m$, то її *знак* $\varepsilon(\sigma)$ обчислюється за формулою

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{j=1}^{m} (l_j - 1)}$$

Знак тотожної перестановки приймається рівним 1.

Дешифрування ітераціями

Твердження 1.1. *Для шифруючого відображення* $E \quad K \times \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^l$ *метод ітерацій через деяку кількість кроків приводить до успіху. Точніше, якщо алфавіт складається з* n *букв, то для будь-якого ключа* K *існує число* $m \leq (n^l)!$ *таке, що* $E_K^m(C) = C$ *для всіх* $C \in \mathcal{A}^l$

Доведення. В якості m можна взяти порядок відображення E_K як елемента групи $\mathrm{Sym}\,\mathcal{A}^l$, який за теоремою Лагранжа не перевищує $(n^l)!$, порядку цієї групи (див. додаток Б). Тоді для будь-якого $C \in \mathcal{A}^l$ матимемо $E_K^m(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}^l}(C) = C$. ∎

Вправа для самостійгого виконання:

Довести, що для розкриття шифру Віженера над n-символьним алфавітом достатньо *n* ітерацій.

Алгоритм Евкліда

Для будь-якого цілого a та натурального b однозначно визначені цілі числа q та r такі, що:

$$a=bq+r \text{ та } 0 \le r < b;$$

$$r = a \bmod b.$$

Якщо r=0, то кажуть, що a ділиться на b націло або без остачі: $b \mid a$.

Алгоритм Евкліда:

НСД(a, b) = НСД(a, $a \bmod b$) для $a \ge b$, а НСД(a, 0) = a, і складається з кроків:

1) $r_0 = a$, $r_1 = b$, $i = 1$;

2) і–й крок: $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$ (ділення з остачею);

3) якщо $r_{i+1} > 0$, то i++ та перехід на крок 2; якщо $r_{i+1} = 0$ то НСД(a, b) = r_i.

$$211 = 79 \cdot 2 + 53$$
$$79 = 53 \cdot 1 + 26$$
$$53 = 26 \cdot 2 + 1$$
$$26 = 1 \ \ 26 + 0$$

Маємо $\text{НСД}(211, 79) = \text{НСД}(79, 53) = \text{НСД}(53, 26) = \text{НСД}(26, 1) = \text{НСД}(1, 0) = 1.$

Ефективність алгоритму Евкліда

Під ефективністю алгоритму Евкліда розуміють кількість кроків m.
Із співвідношення $0 < r_{i+1} \leq r_i$ випливає $m \leq b$. Але ця оцінка є незадовільною.
Покажемо що:

$m \leq 2\log_2 b + 1$. Для цього використаємо нерівність $r_{i+1} < r_{i-1}/2$. Вона доводиться розглядом двох випадків: якщо $r_i < r_{i-1}/2$, то використовуємо нерівність $r_{i+1} < r_i$; якщо ж $r_i \geq r_{i-1}/2$, то використовуємо рівність $r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$. Таким чином, кожні два кроки зменшують r_{i+1} принаймні вдвічі, і не пізніше, ніж за $2\log_2 b + 1$ кроків ми прийдемо до $r_{i+1} = 0$.

Наслідок з алгоритму Евкліда.

Твердження 2.2. *Для кожної пари взаємно простих чисел a і b можна знайти такі цілі u і v, що $ua + vb = 1$.*

Доведення. За умовою НСД $(a, b) = 1$. Тому на передостанньому кроці алгоритму Евкліда матимемо $r_{m-2} = r_{m-1}q_{m-1} + 1$. Звідси $1 = 1 \cdot r_{m-2} + (-q_{m-1})r_{m-1}$. Використавши це як базу для зворотньої індукції за i від $m-1$ до 1, доведемо, що $1 = u_i r_{i-1} + v_i r_i$ для деяких цілих u_i та v_i. Справді, якщо $1 = u_{i+1}r_i + v_{i+1}r_{i+1}$, то після підстановки замість r_{i+1} його значення, визначеного з (3), маємо $1 = v_{i+1}r_{i-1} + (u_{i+1} - q_i v_{i+1})r_i$.

При $i = 1$ отримуємо потрібне твердження. ∎

Зазначимо, що алгоритм Евкліда дає ефективний спосіб знаходження коефіцієнтів u і v для заданої пари a, b.

Приклад 2.3. Нехай $a = 211$, $b = 79$. Протокол роботи алгоритму Евкліда виписаний у прикладі 2.1. Рухаючись знизу вверх, отримуємо

$$1 = 1 \cdot 53 + (-2) \quad 26 = 1 \cdot 53 + (-2) \quad (79 - 1 \cdot 53) = (-2) \quad 79$$
$$+3 \quad 53 = (-2) \quad 79 + 3 \quad (211 - 2 \quad 79) = 3 \quad 211 + (-8) \quad 79.$$

Розширений алгоритм Евкліда.

Вправа 1. Довести рівність:

$$r_i = u_i a + v_i b, 0 \le i \le m\ ;$$

$u_0 = v_1 = 1;$
$u_1 = v_0 = 0;$
$u_{i+1} = u_{i-1} - q_i\ u_i;$
$v_{i+1} = v_{i-1} - q_i\ v_i;$
де q_i отримується на відповідному кроці алгоритму Евкліда:

$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$$

$r_m = \text{НСД}(a, b), u = u_m, v = v_m.$

Вправа 2. Знайти цілі u та v такі, що $137u + 113v = 1$.

Розклад на прості співмножники

Твердження 2.4. *Якщо просте число p ділить добуток ab двох натуральних чисел, то воно мусить ділити хоча б одне із чисел a і b.*

Доведення. Якщо a не ділиться на p, то a і p взаємно прості. Тоді за твердженням 2.2 для деяких цілих чисел u і v виконується рівність $ua + vp = 1$. Домноживши її на b, отримаємо $uab + vbp = b$. Оскільки $p \mid ab$, то ліва частина ділиться на p, а відтак $p \mid b$. ∎

Зрозуміло, що кожне складене число можна записати як добуток простих. Такий добуток називається *розкладом числа на прості співмножники.* Вважаємо, що розклад простого числа складається з єдиного елемента — самого числа. Має місце

Теорема про однозначність розкладу на прості співмножники. *Кожне більше від 1 ціле число однозначно розкладається на прості співмножники (якщо не враховувати їхнього порядку).*

Доведення. Припустимо, що $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ — два різні розклади одного й того ж числа на прості співмножники. Тоді мусить бути $\alpha_j \neq \beta_j$ для деякого j. Якщо $\alpha_j > \beta_j$, то маємо $p_j \mid \prod_{i \neq j} p_i^{\beta_i}$, що суперечить твердженню 2.4. Випадок $\alpha_j < \beta_j$ розглядається симетрично. ∎

Розклад, в якому прості співмножники йдуть у неспадному порядку, називається *канонічним.*