МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
АКАДЕМІЯ НАУК ВИЩОЇ ШКОЛИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН україни
SOFTSERVE

XXVI Міжнародна
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

APAMCS – 2021

присвячена
100-річчю проф. Н.П. Флейшмана,
360-річчю Львівського національного університету
імені Івана Франка

27–28 вересня 2021 року

Збірник наукових праць

Львів – 2021

Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук. Збірник наукових праць. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2021. – 203 с.

Редакційна колегія:

І.І. Дияк	декан факультету прикладної математики та інформатики, д-р фіз.-мат. наук, професор
М.М. Притула	завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем, д-р фіз.-мат. наук, професор
П.С. Венгерський	професор кафедри інформаційних систем, д-р. фіз.-мат. наук
В.М. Горлач	заступник декана, доцент кафедри інформаційних систем, канд. фіз.-мат. наук
Я.В. Коковська	доцент кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем, канд. фіз.-мат. наук

Оргкомітет виражає щиру вдячність спонсорам конференції:

ТзОВ"ABTO SoftWare"

ТзОВ "BotsCrew"

ТзОВ "DevCom"

ТзОВ "INCORA

ТзОВ "N-iX"

ТзОВ "Sigma"

ТзОВ "SoftServe"

© Львівський національний університет ім. І.Франка

ДО СТОРІЧЧЯ ПРОФЕСОРА НАУМА ПЕТРОВИЧА ФЛЕЙШМАНА

28 листопада 2021 року виповнюється 100 років професору Науму Петровичу (Нухиму Пінкасовичу) Флейшману – видатному вченому, вдумливому педагогу, одному з фундаторів факультету прикладної математики та інформатики нашого Університету.

Наум Петрович народився в єврейській сільськогосподарській та торговій колонії Маркулешти (на той час Румунія), яка була знищена під час Голокосту в 1941 році (тепер - містечко Молдови з населенням близько 2000 осіб). В довоєнному 1939 р. він закінчив гімназію в місті Сороки і склав іспити на бакалавра. У 1940-45 рр. навчається у Чернівецькому університеті, де, зокрема, слухає (французькою мовою) лекції з математичного аналізу академіка М. Боголюбова, пізніше – у Ростовському університеті і Бухарському педінституті, і нарешті - Кишинівському університеті, який закінчив з відзнакою у 1945 році. Після вступу на четвертий курс фізико-математичного факультету Львівського університету закінчив його з відзнакою у 1948 р. Його дипломна робота “Вплив пружних кілець, впаяних у круговий отвір неоднорідного напруженого плоского поля” була опублікована (у співавторстві з науковим керівником Г.М. Савіним) у двох статтях Доповідей АН УРСР.

Науківець. Працюючи протягом наступних трьох років молодшим науковим співробітником Відділення теорії пружності Інституту математики АН УРСР Наум Петрович бере участь у добре відомому міському науковому семінарі з теорії пружності, в якому під керівництвом академіка Г.М. Савіна закладаються основи сучасної львівської школи механіки. Значний вплив на його творчий розвиток і бачення наукових проблем молодою спільнотою

того часу формували такі визначні вчені як М.П. Шереметьєв, Б.В. Гнєденко, І.Г. Соколов, Л.І. Волковиський, Я.Б. Лопатинський, О.С. Парасюк, М.Я. Леонов та інші.

У цей час складається проблематика його наукових досліджень, присвячена побудові моделей та методів розв'язування задач про вплив криволінійних ребр жорсткості на міцність, статичну і динамічну стійкість та коливання тонких пластин і оболонок, основні результати яких складають його кандидатська дисертація "До питання про підкріплення кругових отворів пружними кільцями", науковий керівник академік Г.М. Савін, 1950 р. та докторська дисертація "Деякі задачі згину пластин та оболонок з ребрами жорсткості", 1962 р. Наслідком цієї багаторічної праці у 1964 р. стала у співавторстві з Г.М. Савіним монографія "Пластинки и оболочки с ребрами жесткости", Киев: Наукова думка, 1964, яка була перевидана англійською як Rib-Reinforced Plates and Shells, Jerusalem:Israel Program for Scientific Translations, 1967.

Науківець, педагог і організатор науки. У 1951 р. Наума Петровича обрано на посаду доцента кафедри теорії пружності, у 1962 р. – на посаду професора цієї кафедри, а в 1963 р. – на посаду завідувача кафедри загальної механіки та гідроаеродинаміки. Він впроваджує і читає основні і спеціальні курси з механіки пружного тіла, математичних моделей пластин і оболонок, оптимізації їхньої форми. Вони кладуться в основу численних студентських та аспірантських наукових робіт, частина результатів яких захищена в кандидатських дисертаціях О.В. Блажієвської , Л.Й. Ощипко, які стали доцентами цієї кафедри.

У ці ж роки в стінах Університету бурхливо розвиваються теоретичні та прикладні дослідження з сучасних проблем математики і механіки: структура Університету поповнюється механіко-математичним факультетом, проф. О.М. Костовським закладаються основи обчислювальної математики, утворюється Обчислювальний центр (один з перших серед університетів України), науково-дослідна тематика якого об'єднує провідних вчених факультету над розв'язанням проблем електронної оптики та міцності оболонок електронно-вакуумних приладів. На цій основі, зокрема, укладається багаторічна творча співпраця Наума Петровича з Й. В. Людкевичем, спочатку як завідувачем Обчислювального центру, а пізніше – завідувачем кафедри обчислювальної математики. В наступні роки ці плідні стосунки в рамках госпдоговірних НДР з ВО Кінескоп сприяли створенню Й.В. Людкевичем знаної в Україні школи з числових методів розв'язання інтегральних рівнянь і спонукали Наума Петровича у 1970 р. до реорганізації очолюваної ним кафедри у кафедру прикладної математики (КПМ).

У зв'язку з покладеною на КПМ новою спеціалізацією професор Н.П. Флейшман з великим ентузіазмом докладає багато творчих зусиль для створення нового напрямку досліджень, пов'язаного з розвитком числових методів розв'язання прикладних задач механіки з використанням електронних обчислювальних машин. Для запровадження нових завдань в

практику наукових досліджень кафедри ним організовується щотижневий науковий семінар за участю співробітників конструкторського бюро ВО Кінескоп (А.М. Марголін, Ю.І. Койфман, С.С. Григорян, Ю.Я. Фолькенфлік), кафедри механіки, математичного аналізу (доц. Д.Г. Хлєбніков, доц. В. Я. Янчак) та ін.(з часом конструкторське бюро цього об'єднання стає носієм всесоюзних стандартів у своїй галузі, воно укомплектовується найпотужнішою на той час ЕОМ БЭСМ-6, наповнюється випускниками КПМ та факультету, а продукція об'єднання експортується у понад сорок країн світу).

Особливі сподівання професора Н.П. Флейшмана пов'язані зі своїм талановитим учнем Я.Г. Савулою, якому після захисту кандидатської дисертації (1972 р.) пропонує продовжити дослідження задач теорії пружних оболонок з монжевими серединними поверхнями з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). Одночасно доц. Й.В. Людкевич ставить перед співробітником ОЦ Г.А. Шинкаренком завдання про розв'язування задач теорії потенціалу цим же методом, а після аналізу перших успішних результатів рекомендує йому навчання в аспірантурі під керівництвом професора Н.П. Флейшмана. Тематика спеціальних курсів кафедри доповнюється варіаційними методами, теорією і застосуваннями МСЕ та семінаром з цих проблем. Незабаром до них приєднується В.М. Вовк і велика група талановитих студентів, заангажованих у нову тематику та дослідження кафедри. Частина з них згодом стає аспірантами та з ініціативи Наума Петровича науковими співробітниками кафедри (серед них В. Карпов, М. Копитко, І. Дияк, І. Муха, М. Щербатий, В.Д. Вовк та інші). Завдяки власним успішним розробкам та реалізації схем МСЕ кафедра здобуває авторитет та у 1979 р. організовує і проводить III Всесоюзну школу-семінар з МСЕ, з цієї тематики захищають кандидатські дисертації чергові учні Наума Петровича: Г.А. Шинкаренко, В.В.Карпов, В.М. Вовк.

Зусиллями Н.П. Флейшмана та Я.Г. Притули у 1982р. утворюється міжфакультетська НДЛ №62, яку очолює В.В. Карпов, а більшу частину її колективу формують випускники КПМ (серед них М. Копитко, О. Косак, В. Горлач, В. Зубов, О. Левченко, А. Токар). Згодом всі згадані випускники КПМ захистять кандидатські дисертації, присвячені теорії і застосуванням МСЕ і виконані вже під керівництвом учнів Наума Петровича доцентів Я.Г. Савули та Г.А. Шинкаренко, а у нього самого захищають кандидатські дисертації К.С. Іванків, С.С. Григорян, Ю.Я. Фолькенфлік, В. Ткачишин, О.В. Ліхачов, а в 1986 р. докторську дисертацію захищає Я.Г. Савула.

У 1988 р. Наум Петрович залишає посаду завідувача кафедри професору Я.Г. Савулі, лишаючись професором КПМ та членом спеціалізованої ради з обчислювальної математики і математичного моделювання. У 1989 р. виходить з друку монографія Я.Г. Савула, Н.П. Флейшман."Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями". Львов: Вища школа, 1989. 172 с., в якій підсумовуються важливі досягнення багаторічних досліджень авторів з математичного моделювання у проблемах теорії і засто-

сувань класичних та узагальнених моделей оболонок і методів їх числового розв'язування.

У важкі часи дев'яностих років Наум Петрович залишає роботу у нашому Університеті та емігрує до родини в Ізраїлю.

У підсумку своєї плідної наукової, педагогічної та організаторської діяльності професор Н. П. Флейшман опублікував понад 200 наукових праць, підготував 3 докторів та 27 кандидатів наук, заклав міцні підвалини дослідженням проблем механіки суцільного середовища з сучасних позицій математичного моделювання та обчислювальної математики.

Тепер, коли шановний професор Наум Петрович Флейшман в доброму здоров'ї наближається до своєї ювілейної дати, ми бережемо його безцінний вклад в становлення і розвиток нашого факультету та університету, і з глибокою вдячністю бажаємо Науму Петровичу доброго самопочуття і щасливих років у колі родини і друзів.

Оргкомітет

ІЗ СПОГАДІВ ПРО ПРОФЕСОРА НАУМА ПЕТРОВИЧА ФЛЕЙШМАНА

У цих нотатках відсутні точні дати, але не місця подій – це, майже завжди, кафедра прикладної математики Львівського університету. І її засновник, дивовижна людина і видатний вчений, Наум Петрович Флейшман. Людина, яка делікатно і дбайливо, по-батьківськи, назавжди сформувала моє післяуніверситетське життя. Точніше кажучи, університетське життя, оскільки мені не вдалося з нього до цього часу вийти.

1. Перша зустріч: За тиждень можу прийняти у Вас екзамен

На початку мого п'ятого курсу Н.П. почав читати курс Задачі на власні значення. На першій лекції Н.П. анонсував, що він в основному буде дотримуватися щойно виданої монографії Коллатца (яку він вивчав, за його словами, протягом літа). І додав, що бажаючі здати екзамен в межах цієї тематики, можуть зробити це вже за два тижні. Перспектива вільного часу від занять! Я і мій колега, нині покійний, Валентин Здрок після тижня штудіювання ціїє монографії зголосилися на екзамен.

Н.П.:-Що ж, приходьте завтра на дев'яту ранку до мого кабінету. Вам години на підготовку вистачить? Тоді там і почнемо.

Перед виїздом з нашої кімнати гуртожитка я порадив Валентину, який мав завжди відмінні оцінки і на кожному екзамені примудрявся списати, не брати наших нотаток і книжки, бо списати щось при столі професора неможливо.

Н.П.: Ось Вам по два питання, папір, сідайте за мій стіл, готуйтеся, я за годину повернуся і тоді розпочнемо.

Важко передати словами той стан підготовки до екзамену, коли в наявності є лише голова і обурливі на мою адресу слова товариша. Зате екзамен став незабутнім: Н.П. формулював питання так, що не можна було викрутитися, вони вимагали однозначної і нестандартної відповіді, обгрунтування якої ще треба було придумати.

Н.П. оцінив наші старання на відмінно, похвалив нас (повторивши, як нам передали, ці слова на черговій лекції), але основним результатом цієї екзаменаційної дискусії було моє набагато повніше бачення цієї тематики і зовсім нове відчуття, що я спілкувався спочатку з досвідченим колегою, а потім екзаменатором.

2. Перша консультація: Яке у Вас максимальне значення дотичного напруження?

Після двох років роботи в Обчислювальному центрі Університету, де я робив перші кроки в опануванні методу скінченних елементів (МСЕ), за порадою свого керівника Йосипа Васильовича Людкевича я звернувся за консультацією до Н.П. стосовно розвязування задачі про скручування

шліцевого валу. В той час я закінчив писати програму, яка дозволяла обчислювати апроксимації МСЕ на послідовно згущуваних сітках і гордився,що першим реалізував алгоритм цього, ще незнаного у Львові методу. Питання Н.П.: Які Ви одержали максимальні значення дотичних напружень і в яких точках поперечного перерізу цього валу вони досягаються? Чому дорівнює значення крутного моменту? приземлило мене і я сказав, що вибрав цю задачу за тест для своєї програми і взагалі не знаю такої термінології. Тоді Н.П. написав формули для обчислення цих механічних характеристик кручення стрижнів і додав, що зможе дати сенсовні поради лише після того, як вони будуть обчислені мною. Так в цей раз і в усі наступні мені було продемонстровано, що повноцінне тестування числових результатів передбачає дещо більше ніж збіжність апроксимацій, а саме їх відповідність фізичній точці зору на досліджуваний обєкт.

3. Друга консультація: Скажіть дружині, що Ви кандидат наук

На здивування Н.П. за тиждень я повернувся до нього з результатами своїх обчислень жорсткості стрижня на скручування і розподілів напружень в його перерізі. Коли виявилося, що вони добре узгоджуються з фізичними уявленнями як якісно, так і кількісно, Н.П. несподівано запитав: Ви одружені? Одержавши стверджувальну відповідь він продовжив: Скажіть своїй дружині, що Ви кандидат наук. На моє зауваження, що так не можна жартувати, Н.П. відповів: Визнання наукових досягнень приходить значно пізніше, ніж Ви їх здобули. Передайте дружині, щоб вона запаслася терпінням.

Дружину я не тривожив (цього визнання вона б чекала близько пяти років), а з цього епізоду виніс певне уявлення про можливості в дії математичне моделювання. Цей потужний інструмент я опановую й досі.

За тиждень, зустрівши мене в коридорі Н.П. запропонував мені вступити до нього на навчання в аспірантурі. На мою репліку, що він мене зовсім не знає, я одержав відповідь: Зате я знаю, що Ви можете робити.

4. Перший рік аспірантури: Якщо Ви знайдете годину часу працювати на мене

Під час першої зустрічі після мого зарахування до аспірантури Н.П. сказав: Молоді люди завжди потребують грошей. Ви маєте якийсь підробіток? На той час я дістав пропозицію проводити уроки інформатики у фізико-математичній школі 11 з погодинною оплатою. Дізнавшися від мене про це Н.П. сказав: Якщо Ви знаходитиме годину часу на тижні, щоб попрацювати на мене, я буду Вам платити в пять раз більше, ніж школа. Подумайте над цим, молодий чоловіче. І на майбутнє: Поводьтеся так, щоб гроші бігали за Вами, а не Ви за ними.

На жодну з пропозицій пристати не вдалося, бо незабаром я став проводити заняття на посаді асистента кафедри за сумісництвом і працювати за госпдоговірною тематикою кафедри інженером НДЧ теж за сумісництвом

(тепер в заявах на таке зарахування дописуються дивні слова: у вільний від роботи час). Дослідження виконувалися на замовлення КБ ВО Кінескоп, і, в основному, стосувалися розрахунку та оцінки напружено-деформованого стану балонів кінескопів. Вимоги до точності моделей та методів зростали (незабаром об'єднання стало Всесоюзним носієм стандартів у цій галузі) і числові методи почали посідати більш значне місце у розв'язуванні таких задач. Цьому сприяли сумісні семінари за участю провідних фахівців КБ, притік здібних випускників факультету до КБ і з часом комплектація цього підрозділу найпотужнішою на той час обчислювальною машиною БЕСМ-6. Мені відкривався новий світ, у якому без механіки твердого деформівного тіла не було місця. Здавалося, що я заблудився серед тих, які все знають і вміють, і, головне, розуміють одне одного.

У наших дискусіях Н.П.,наприклад, говорив: Це питання, на мою думку, можна вирішити одним із трьох шляхів. Дивіться сюди, ... Скільки Вам на це потрібно часу, два тижні вистачить? Через два тижні моєї щоденної праці в бібліотеці, обчисленнях тощо я із задоволенням починав розказувати про те, що найкращі результати дає другий шлях. Після мого десятихвилинного, ще далеко неповного, висвітлення слідувало питання: Чи врешті Ви одержали те то й те то? Я беріг це те то й те то на кінець своєї доповіді, я над ним трудився два тижні і так тішився, що його викопав одному мені відомим способом, а він це тето й тето відгадав за пару хвилин мого вступу. Ну палець в рот не клади, і як досягти такого рівня розуміння проблем? Подібні відчуття значно пізніше я переживав в спілкуванні з іншими видатними вченими, такими як Литвинов Вільям Григорович, Макаров Володимир Леонідович.

5. Як Ви спали, молодий чоловіче?

Мій стіл аспіранта стояв у кабінеті Н.П. і після нашого ранкового привітання відразу слідувало традиційне питання: Молодий чоловіче, наскільки Ви просунулися в цьому питанні, що ми обговорювали вчора? З часом я звик до цієї звички Н.П. робити розминку перед входженням в робочий режим і готувався дати хоч як небудь обгрунтовану відповідь. Але одного разу з його уст прозвучало несподівано: Як Ви спали цієї ночі, молодий чоловіче? Відповіддю на моє невиразне мукання було грізне: А я не не спав! І знаєте чому? Ви думаєте чим займається професор, коли він не спить вночі? І після паузи: Шукає відповіді на те питання, яке йому задав аспірант перед тим, як пішов додому! І зовсім мяко: Підсідайте поближче, ось що я Вам відповім.

Після цього я намагався не задавати питання своєму професорові перед тим, як попрощатися до завтра.

6. Важливість знання мов: Ріта Юхимівна

Н.П. називав математику шляхетною. Ейлер говорив, що вона є мовою бога. Розповідаючи про це своїм студентам, я часто наводжу такий приклад з

часів, коли ми почали виїздили разом з Н.П. на різні конференції. Якось під час прогулянки після засідань зайшла мова про щоденні двогодинні прогулянки у студентські часи Гільберта, Мінковського і Гурвіца до відомої їм яблуні і назад, під час яких можна було говорити лише на теми математики.

Н.П. пожвавішав: Це сильний метод! Я зі своїм другом на таких же умовах вивчав французьку - по дорозі до школи. Успіхи були такі, що я осмілився писати цією мовою вірші одній дівчинці. І згодом вона стала моєю дружиною.

7. Інтерполяційний поліном Лагранжа: Я так і думав!

Якось взимку Н.П. опонував дисертацію у Новосибірську. Там його застав такий лютий мороз, що відмінили польоти літаків і він довго повертався поїздом. Зайшовши до кабінету він збуджено сказав: Молодий чоловіче, подивіться, що я придумав у цій довгій подорожі! І став натхненно розповідати, і на закінчення своїх думок: Що Ви з цього приводу скажете? Ніяковіючи від необхідності дати відповідь я промовив: Я в захопленні від побудови цієї конструкції вже декілька років. Вона має назву: Інтерполяційний Поліном Лагранжа. Н.П. радісно стукнувши по столу: Я так і думав! Хтось мусив це побачити раніше! Це ж море застосувань!

Кожен з нас переживав хвилини щастя свого відкриття, але не завжди я так щиро радів чиємусь відкриттю, вбачаючи в щасливчику конкурента, а не колегу. Думаю, що Н.П. знав, що в будь-якому лісі можна відшукати лише свої гриби.

8. Семінар кафедри: Краще бути здоровим і багатим ...

Виступаючи на одному із своїх перших семінарів кафедри, я довго розповідав про те, що досягнути якісних наближених розв’язків крайових задач можна як згущенням сітки скінченних елементів, так і підвищенням порядків апроксимації на них. Я був задоволенийі, що мої програми нарешті успішно реалізовують або першу, або другу процедуру і демонстрував багато числових результатів. Я бачив, що Н.П. цей мій поступ теж тішить, і частково тому мене застало зненацька питання Одарки Володимирівни: Так все таки, що на Вашу думку краще: згустити сітку чи підвищити порядок апроксимації?

Я щось мимрив у відповідь непереконливо навіть для себе, аж не витримав Н.П.: Одарко Володимирівно, Ви ж бачите, що Г.А. намагається донести нам висновок, що краще бути здоровим і багатим, ніж бідним і хворим.

Відповідь на питання О.В. я шукатиму до цих пір, шукаючи надійно обчислювані оцінки похибок апроксимацій МСЕ і проектуючи h- та hp-адаптивні схеми цього методу. За цією тематикою захистили дисертації семеро з підготовлених мною п’ятнадцяти кандидатів наук. Це далеко не

рівень чемпіонського досягнення Н.П. (за моїми неповними розрахунками) у 27 кандидатів і 3 доктори наук.

9. Всесоюзний семінар з МСЕ: Маю запрошення від Угодчикова, їдьте ...

У травні першого року моєї аспірантури повідомив, що одержав запрошення від А.Г. Угодчикова, тодішнього ректора Горьківського університету, запрошення на участь у II Всесоюзному семінарі з МСЕ.

Ви поїдьте замість мене, передайте мої вітання А.Г., послухайте інших і, при можливості, виступіть самі. Вам це буде корисно! – запропонував він.

Не те слово, ніколи я до Волги не добирався! Крім свого оточення не бачив живих людей, які б займалися МСЕ (вже на той час членів МСЕ-команди нашої кафедри моя дружина жартівливо нарекла кончеными элементами) і знав про нього лише те, що вдалося прочитати у Реферативном Журнале, в доступній лише Москві англомовній періодиці та двох безцінних і невиданих за якістю поліграфії книгах О. Зєнкєвіча та Дж. Фікса, Г. Стренга, які придбала і переслала нам з Канади родина Яреми Григоровича Савули та які стали темою занять семінару нашої команди та наших студентів.

Від знайомств з учасниками і засідань цього тижневого семінару я був у захваті. Цілі команди з Києва, Ленінграду, Горького і , в меншій мірі, Москви дискутували і конкурували в розв'язуванні різноманітних складних інженерних задач . І знову відкривався новий світ, світ, який тепер називається комп'ютерною механікою (computational engineering). Мені вдалося виступити в останній день роботи семінару і, всупереч моїм страхам і застереженням, я дістав високу оцінку нашої роботи. Стаття, яка вийшла за матеріалами цієї доповіді в співавторстві з Я.Г. Савулою і В.М. Вовком, присвячена побудові апостеріорних оцінок похибок кусково лінійних, квадратичних і кубічних апроксимацій МСЕ до цього часу мені здається актуальною.

10. Всесоюзні конференції: Знайомтеся, Ви незабаром почуєте ...

Н.П. нас балував. Памятаю, якось на одній з Всесоюзних конференцій при зустрічі з І.Н. Векуа та його дружиною він сказав: Знайомтеся, це мій аспірант Г.А.Ш., Ви незабаром про нього почуєте.

Подібні рекомендації я чув щоразу, коли він представляв членів нашої команди, видатним і, як здавалося, недосяжним для нас людям науки.

Це підносило дух, але й заставляло відпрацьовувати видані нам аванси. Бос (так часом поза очі ми йменували Н.П.) сам працював (за його словами як віл!) і в такий специфічний спосіб заставляв нас так само працювати!

11. Засідання кафедри: Шкіряний диван

На засіданнях кафедри я не пригадую,щоб Н.П. комусь чимось докоряв. Зате завджи знаходив, кого з нас вирізнити, похвалити або підбадьорити у

вирішенні кафедральних і особистих справ. І я чекав, і намагався одержати таку відзнаку.

Це було важко, бо скрупульозний Н.П. навіть сам писав протоколи засідань (Краще я сам це зроблю, ніж буду комусь голову морочити – його слова!).

Але були й інші оцінки. Наприклад, на одному із передноворічних засідань Н.П. сказав, що бюджету кафедри в останній момент додали коштів, які до кінця року потрібно використати, інакше їх спишуть. Які будуть побажання і пропозиції ?

В.М. Вовк сказав: Погляньте, на кафедри оптимальних процесів чи механіки. У них є дивани, а у механіків навіть шкіряний! Нам би диван теж знадобився. Ми регулярно ходимо цілими командами, разом зі студентами, на цілі ночі (до шостої ранку з Університету охорона нікого не випускала) виконувати свої програми на машині Обчислювального центру. Часом потрібно й відпочити!

На якийсь час запала гробова тиша, яку, зітхнувши, порушив Н.П.: Всі чоловіки кафедри мріяли про диван, але тільки наймолодший з нас осмілився озвучити цю мрію вслух!

P.S.: І до цього часу кафедра прикладної математики дивану не має!

12. Всесоюзний семінар з МСЕ: Ми його проведемо у себе!

Під час Всесоюзного семінару з МСЕ у Ваделуй-Ваде поблизу Кишинева його ініціатор і керівник професор Розін Леонід Олександрович (тоді він очолював кафедру Ленінградської Політехніки, де в свій час працювали В.Л. Кирпичов, І.Г. Бубнов, і Б.Г. Гальоркін) запропонував нам, Я.Г.Савулі, В.М. Вовку і мені, провести черговий семінар у Львові. Для нас це була велика несподіванка і одночасно визнання наших результатів, ми не уявляли собі і страшилися незнаної нами роботи по організації таких міроприємств. По поверненні додому ми передали цю пропозицію Н.П., який тут же з ентузіазмом сказав: Ми його проведемо!

З таким капітаном всі страхи щезають – семінар пройшов успішно (понад 70 гостей-учасників, Університет і Будинок вчених тощо), а кафедра дістала нове зовнішнє визнання.

13. Захист дисертаці: Я поклав її на стіл академіку!

На час закінчення мого навчання в аспірантурі розпочалася всесоюзна реорганізація спеціалізованих Рад із захисту дисертацій. Тривала ця кампанія довго і така Рада у Львові була відкрита лише при тодішній філії Інституту математики АН УРСР під керівництвом академіка Я.С. Підстригача за профілем механіка твердого деформівного тіла. Я неодноразово виступав з матеріалами своєї дисертації у відділах, на загальному семінарі філії і, мені здавалося, що справив непогане враження на Я.С. Після того, як якийсь час її рукопис пролежав без руху на полиці кабінету академіка, Н.П. вибрав час і

поїхав на зустріч з Ярославом Степановичем. Я не чув від нього деталей розмови, крім однієї: Я поклав Вашу дисертацію йому на стіл!

При характері Н.П., що це коштувало йому, важко уявити, але в скорому часі захист відбувся. І стала відомою причина сумнівів і відтягування цієї акції – це був перший розгляд Радою дисертації, в якій задачі механіки розвязувалися виключно числовими методами. На той час МСЕ вважався математично складним і ще рідко використовувася в середовищі наших механіків.

14. Теплопровідна вязка рідина: Вам робити нічого ...

У січні 1980 року Н.П. сказав мені: КБ ВО Кінескопу настирливо настоює, щоб в технічне завдання НДР з ними була включена цілком нова для нас тема про моделювання руху розплавів скла та процесу штампування екранів. Г.А., Вам після захисту дисертації робити нічого, отож я пропоную Вам взятися за ці задачі. Я всіляко віднікувався, що не знаю механіки рідин (в яких взагалі можна завязнути, а тут ще й зваритися!), що тут нелінійності і великі деформації вільних поверхонь при витіканні з печі і формуванні порцій розплаву (як це описати і ще й рахувати!) і т.д. і т.п. (я до такого й близько не підходив, мені не можна цього доручати!) . Н.П. був невблаганний: Ніхто з нас такого не робив, прийшов час починати. Що Вам для цього потрібно?

Це було так серйозно і безальтернативно, що прийшлося погодитися на цю роботу за таких умов: (і) я, коли це потрібно, і стільки разів, скільки мені потрібно, буду доповідати на кафедральному семінарі про цю проблему (!) і моє розуміння як її розв'язувати; (іі) мені будуть потрібні В.В. Карпов (основна жертва, яка ще не захистила своєї дисертації!) і ще троє студентів, яких я виберу собі пізніше(ними стали А.Ю. Токар, В.М. Зубов і О.М. Левченко).

Протягом семестру я разів п'ять доповідав про формулювання початково-крайової задачі про рух теплопровідної вязкої нестисливої рідини з вільною поверхнею.

Задача справді була суттєво нелінійною! Оскільки моє розуміння часом наштовхувалося на нещадну (та справедливу!) критику моїх помилок, в основному, Одаркою Володимирівною, то кожна доповідь нагадувала черговий крок ітераційного наближення: вносилися корективи до попередніх формулювань і з певним обгрунтуванням додавалася чергова порція нових. Нарешті, коли я зумів сформулювати крайові умови витоку з каналу, і питань та зауважень від О.В. (як критерію зупинки ітерацій) не виникло, Н.П. заключив: Геніально! Я давно знав, що професор вважає задачу вже розв'язаною, як тільки вдалося сформулювати відповідні крайові умови.

Проте О.В. зауважила: Мені здається, що таку задачу числовими не можна розв'язати! От тут-то вона припустилася помилки: сумнівів у МСЕ в мене жодного разу не було, сумніви були в мені! Я став розробляти

ітераційний алгоритм МСЕ, школити (у відпускний період!) і розробляти програми цілий серпень з приданою мені командою.

У середині вересня я поїхав на семестр стажуватися до МДУ, слухав, зокрема, лекції проф. М.О. Сльозкіна з механіки в'язких рідин, проф. Ю.П. Попова з різницевих методів газової динаміки і набирався впевненості в правильності нашого підходу до цих проблем. А за цей час наша команда (вже без моєї участі в програмуванні!) одержала перші числові результати, за рік А.Ю. Токар, В.М. Зубов стали лауреатами Всесоюзного конкурсу студентських наукових робіт, а згодом В.М. Зубов захистив кандидатську дисертацію на цю тему у Київському державному університеті. Але це окрема тема.

Думаю, що Н.П. іноді дозволяв собі використовувати в дії життєвий лозунг Наполеона: Головне – вв'язатися в бій, а там буде видно! Якщо маєш добру команду чи граєш в ній ....

15. НДЛ-62: Чим я ще можу допомогти?

Колектив кафедри прикладної математики розростався за рахунок її випускників, які, за рідким виключенням, були повязані з числовим моделюванням засобами МСЕ. Поповнювалася тематика нових досліджень і часто в цій господі від Н.П. можна було почути такі пропозиції: Чим я можу допомогти Вам?

Можливо після одного з таких запитань і почалося створення науково-дослідної лабораторії НДЛ-62, у яку ввійшли В.В. Карпов, І.І. Дияк, І.С. Муха, М.В. Щербатий, М.Ф.Копитко, Р. М. Бурда, І.А. Прокопишин, О.С. Коссак, І. Сипа, А.Ю. Токар, В.М. Зубов , О.М. Левченко, В.М. Горлач, В.Д. Вовк та інші. Лабораторія утримувалася на кошти госпдоговірних і держбюджетних робіт і проіснувала до недавніх пір, коли у влади України пропав інтерес до інтелектуальної еліти нації. Лабораторія зникла, але більшість її членів, після захисту дисертацій, перейшла на викладацьку роботу на різні кафедри факультету.

Описувати свої суб'єктивні і далеко не повні апостеріорні оцінки становлення кафедри прикладної математики на шлях комп'ютерного моделювання. В одному не сумніваюся – кожен учасник цього процесу згодиться стосовно вирішальної ролі в цій подорожі нашого завідувача, Професора Наума Петровича Флейшмана, який підтримував нас, підштовхував і підбадьорював на цьому шляху. І сьогодні показує нам приклад повноцінного довголіття.

Я вибрав дещо легкий тон цієї розповіді, щоб в ці дні підбадьорити Вас, шановний Науме Петровичу. Будьте здорові!

Безмірно вдячний долі і Вам, Георгій Шинкаренко.

РОЗДУМИ ПРО ВЧЕНОГО-ПЕДАГОГА ІВАНА ДМИТРОВИЧА КВІТА
ДО 100-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ

На життєвому шляху кожного з нас зустрічаються люди, які, навіть після нетривалого знайомства з ними, змушують нас подумки раз по раз повертатися до спогадів та роздумів про ті сенси і смисли, які вони несли у світ, про ту шляхетність у поведінці і ненав'язливу галантність, яких так бракує сьогодні, про скромну мудрість і дар спілкування. Впродовж майже сорока років студенти і співробітники Франкового університету мали нагоду вчитися у такої людини, - Івана Дмитровича Квіта. Колеги - вчитися суворій правді життя, студенти – вивчати найскладніші математичні теорії, а, поряд з цим, культуру поведінки, лаконічність і виважену гідність. Тільки з плином часу приходить усвідомлення того, якою потужною особистістю був твій колега, вчитель, наставник.

Мабуть ніхто з його ровесників, що народились у Західній Україні, не входив в науку так стрімко і так впевнено.

Іван Квіт, нащадок древнього козацького роду, народився 16 листопада 1921 року в с. Поморяни Золочівського району. Після закінчення 7 класів школи в Поморянах та 3-ї середньої школи м.Львова влітку 1940 р. Іван став студентом фізико-математичного факультету Львівського державного університету ім. Івана Франка. Війна перервала навчання, але не змінила твердих намірів юнака, і з 1945 по 1949 рік Іван Дмитрович продовжив навчання на фізико-математичному факультеті. Одразу ж після закінчення університету він вступив до аспірантури на кафедрі теорії ймовірностей. Трирічний термін навчання в аспірантурі завершився в 1952 р. успішним захистом кандидатської дисертації і здобуттям вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук.

З вересня 1952 р. Іван Дмитрович Квіт — старший викладач кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей, а з 1953 р. і до останніх років життя — доцент Львівського державного університету імені Івана Франка (кафедр терії функцій і теорії ймовірностей, вищої математики, теорії оптимальних процесів).

Учень академіка Б.В.Гнеденка, Іван Дмитрович Квіт розвивав нові напрямки в теорії ймовірностей, математичній статистиці та теорії надійності. Він опублікував понад 60 наукових праць, із них 13 навчальних посібників, які ще довго будуть зразками методичних розробок.

Про цю щиру і чесну людину, талановитого педагога, великого патріота України, можна розповідати багато. Математик за фахом, він водночас мав грунтовні знання з філософії, літератури, історії. Глибока ерудиція, багаті знання і досвід робили його лекції цікавими, колоритними, незабутніми. Вільно володіючи 8 мовами (українською, російською, польською, англійською, німецькою, французькою, грецькою та латинню), Іван Дмитрович мав прямий доступ до всіх наукових надбань людства. У науковій бібліотеці університету жоден новий випуск журналу ‘Technometrics” не залишився поза увагою вченого. На сьогодні огляд іноземної літератури, - це буденність, а у сімдесятих - вісімдесятих роках це була розкіш. І для тогочасних студентів був чудовий приклад для наслідування, коли в читальному залі наукової бібліотеки вони повсякчас бачили поважного викладача зі стосом іноземних видань.

Упродовж 40 років студенти фізико-математичного, механіко-математичного факультету і факультету прикладної математики слухали лекції доцента Квіта І.Д. з курсів “Рівняння математичної фізики”, “Теорія ймовірностей і математична статистика”, “Дослідження операцій”, “Теорія надійності”, “Інтегральні перетворення в математичній статистиці”, які вирізнялися унікальністю, глибиною та доступністю викладу.

Багато років Іван Дмитрович був Ученим секретарем Ради механіко-математичного факультету, заступником декана, членом методичної ради. Він керував важливими науково-дослідними темами, брав участь у розробці Держстандарту з питань надійності будівельних машин.

Іван Дмитрович був не тільки визначним вченим і педагогом, але і ніжним, люблячим батьком. Разом з дружиною Лідією Йосипівною вони виховали трьох синів, які нині є відомими і шанованими людьми Львова.

14 грудня 1990 року перестало битися серце Івана Дмитровича Квіта.

Світла пам’ять про цю чудову Людину назавжди збережеться в наших серцях.

МИХАЙЛУ ЯРОСЛАВОВИЧУ БАРТІШУ – 80

Михайло Ярославович Бартіш народився 1 березня 1941 в селі Соколівка Буського району Львівської області. Зацікавленість математикою у нього виявилася ще у шкільні роки. Тому у 1957 році вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. Вже в студентські роки він почав активно займатися науковою роботою і після закінчення університету залишився працювати асистентом кафедри обчислювальної математики. У 1964 році М.Я. Бартіш вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, де у 1968 р. захистив кандидатську дисертацію під керівництвом В.Є.Шаманського. Його дисертація присвячена чисельним методам розв’язування нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Після захисту Михайло Ярославович повернувся на роботу в Львівський університет, в якому і працює до цього часу. Він 38 років працював завідувачем кафедри теорії оптимальних процесів. Один з ініціаторів створення у 1975 р. факультету прикладної математики та механіки, деканом якого був у 1987-1988 рр. а у 1988-1996 рр. – декан факультету прикладної математики та інформатики.

У 2003 захистив докторську дисертацію на тему “Методи типу Ньютона для розв'язування нелінійних операторних рівнянь і задач на екстремум”. У 2005 році Михайлу Ярославовичу присуджено вчене звання професора. За активну науково-педагогічну діяльність у 2015 року йому присуджено звання Заслуженого професора ЛНУ імені Івана Франка.

Під керівництвом М.Я. Бартіша на кафедрі теорії оптимальних процесів сформувалася наукова школа з розв'язування нелінійних функціональних рівнянь і задач на екстремум. Його дослідження присвячені розробці нових методів для розв'язання таких задач. У його наукових працях запропоновано нові підходи до побудови і дослідження методів із надлінійною збіжністю для розв’язування конкретних класів задач. Понад 30 років він керував

виконанням держбюджетних та госпдоговірних тем. Під керівництвом М.Бартіша захищено 8 кандидатських дисертацій та 2 докторські дисертації.

М.Я. Бартіш – авторитетний вчений. Він протягом багатьох років є членом спеціалізованих рад, членом редколегії збірників і журналів, членом оргкомітетів наукових конференцій, зокрема, PDMU. Так, з 2007 р. і до тепер працює членом експертної ради ВАК, пізніше ДАК МОН України з експертизи дисертаційних робіт. У 1986 році нагороджений знаком «Відмінник освіти України», з 2009 р. – академік Академії вищої школи України. Він – лауреат нагороди Ярослава Мудрого АН ВШ України з 2011 року, Заслужений працівник освіти України з 2016 року.

Викладацька діяльність Михайла Ярославовича тісно пов'язана з науковою діяльністю. Його навчальні курси визначені науковими інтересами – це курси методів оптимізації, дослідження операцій, математичної економіки.

М.Я. Бартіш є автором понад 200 наукових та навчально-методичних праць, у тому числі - підручників і посібників із грифом МОН України, зокрема, серії підручників “Дослідження операцій” у 5 частинах (у співавторстві з І.М. Дудзяним).

Професор Бартіш М.Я. користується заслуженою повагою серед студентів, викладачів та наукової спільноти.

Оргкомітет і учасники Міжнародної конференції APAMCS-2021 щиро вітають професора Бартіша М.Я. з ювілеєм, зичать міцного здоров’я, довголіття і підкорення нових наукових вершин.

МИКОЛІ МИКОЛАЙОВИЧУ ПРИТУЛІ – 75

Микола Миколайович Притула народився 25 травня 1946 р. у с. Незнанів Кам'янко-Бузького району Львівської області. У 1964 р. закінчив школу зі срібною медаллю і вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. Спеціалізувався на кафедрі обчислювальної математики, захистив дипломну роботу з застосування методу малого параметра до розв'язування деяких задач математичної фізики. Трудову діяльність М.М. Притула розпочав у вересні 1969 р. інженеромпрограмістом обчислювального центру статуправління Львівської області. У 1970– 1971 рр. працював інженером (математиком) у Західно-Українській геофізичній розвідувальній експедиції (ЗУГРЕ). Після п'ятирічної роботи його перевели на посаду начальника відділу обчислювальної техніки Львівського територіального управління матеріально-технічного постачання. У 1971–1973 рр. служив в армії на посаді командира взводу. Завжди прагнув займатися науковою роботою й у 1978 р. вступив до аспірантури без відриву від виробництва Інституту математики АН УРСР у відділ теорії нелінійних коливань, яким тоді завідував академік Ю.О. Митропольський. У 1982 р. успішно захистив кандидатську дисертацію "Застосування асимптотичних методів нелінійної механіки до деяких рівнянь математичної фізики" (науковим керівником був старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук В.Г. Коломієць). Та на цьому він не зупинився, адже прагнув повернутися до рідної Alma mater. У 1980 р. його за конкурсом зарахували на посаду асистента кафедри обчислювальної математики факультету прикладної математики та інформатики Львівського

державного університету імені Івана Франка. У 1998 р. в Інституті математики НАН України захистив докторську дисертацію “Градієнтно-голономний метод дослідження нелінійних еволюційних рівнянь на функціональних многовидах” (науковим консультантом був академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук, професор А.М. Самойленко). З 1984 до 1999 р. М.М. Притула – доцент кафедри теорії оптимальних процесів, а з 1999 до 2003 р. – професор цієї ж кафедри. Влітку 2003 р. за участю Миколи Миколайовича була сформована нова кафедра, яка забезпечила читання основних курсів і курсів за вибором: “Дискретна математика” на всіх потоках факультету, “Теорія ймовірності і математична статистика”, “Дослідження операцій”, “Математична логіка і теорія алгоритмів”, “Системи штучного інтелекту”, “Дискретна оптимізація” та ін. За активну та плідну науково-педагогічну діяльність у 1998 р. М. Притулі присудили грант Міжнародної науково-освітньої програми “Вчені і викладачі”, а в 2007 р. нагородили знаком “Відмінник освіти України”. Цим відзначено його багаторічну наполегливу працю, результати якої разом з іншими формують авторитет і славу нашого університету.

М.М. Притула успішно поєднує наукову і педагогічну роботу з громадською. Він є членом Науково-технічної ради університету, членом спеціалізованої Вченої ради з захисту дисертацій, членом американського математичного товариства, дійсний член Наукового товариства імені Шевченка. Багаторічний член Вченої ради факультету та університету, заступник голови редактора математичного вісника НТШ, член редколегії Вісника Львівського університету (Серія прикладна математика та інформатика), член державної акредитаційної та ліцензійної комісії Міністерства освіти і науки України (2003–2007), голова математичної комісії наукового товариства імені Шевченка (2003–2013). Микола Миколайович – науковий керівник чотирьох захищених кандидатських дисертацій. Він є автором понад 200 наукових праць з асимптотичних методів нелінійної механіки та інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних та операторних многовидах, виданих в Україні та за кордоном, а також методичних вказівок і навчальних посібників для студентів, у тім числі однієї монографії у співавторстві.

Оргкомітет APAMCS-2021 щиро вітає професора Притулу М.М. і бажає йому міцного здоров’я і сил, багато років плідної, творчої роботи на теренах науки й освіти.

ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА ЯРЕМИ ГРИГОРОВИЧА САВУЛИ

21 липня 2021 року помер Ярема Григорович Савула, Заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка, Заслужений працівник освіти України, академік-засновник Академії Вищої школи, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри прикладної математики, багаторічний декан факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Ярема Григорович Савула народився 14 травня 1946 р. у місті Стрию Львівської області у родині українських інтелігентів. Все його свідоме життя було тісно пов'язане з одним із найстаріших університетів Східної Європи – Львівським національним університетом імені Івана Франка. У 1969 р. закінчив з відзнакою механіко-математичний факультет, а в 1972 р. аспірантуру на кафедрі прикладної математики під керівництвом професора Н.П. Флейшмана. У 1973 році захистив кандидатську дисертацію "Статика оболонок з різаною серединною поверхнею", а в 1986 р. – дисертацію "Задачі механіки деформування оболонок з різаними серединними поверхнями" на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук. У 1989 р. Я.Г. Савулі присвоєно звання професора кафедри прикладної математики, у 1991 р. – Заслуженого професора Львівського національного університету імені Івана Франка. У 1996 - 2015 рр. на посаді декана очолював факультет прикладної математики та інформатики. Указом Президента України від 10 жовтня 2011 року присвоєно Я.Г. Савулі почесне звання Заслуженого працівника освіти України.

Особливе ставлення до науки, постійне прагнення нового і працелюбність Я. Г. Савули принесли вагомі результати у галузі комп'ютерного моделювання. Ярема Григорович, започаткувавши разом з професором Г.А. Шинкаренком у 1974 році науковий семінар "Метод скінченних елементів", став піонером, на теренах колишнього Радянського Союзу, розвитку ідей та прикладних застосувань найпоширенішого методу числового моделювання. Перші дослідження були в області математичного моделювання задач статики, динаміки та оптимізації теорії оболонок Кірхгофа-Лява і типу Тимошенка. Ефективною відмінністю, запропонованого ним підходу є використання поверхонь Монжа та поверхонь, пологих відносно поверхонь Монжа, як серединних. Таке аналітичне подання геометрії серединної поверхні оболонки в поєднанні з методом скінченних елементів дозволяє значно зменшити похибки апроксимації. Науковий напрям з розв'язування задач деформування оболонок, започаткований проф. Я.Г. Савулою став широко відомим в Україні та за кордоном. Розуміючи складність отримання достовірних результатів чисельними методами для тонкостінних елементів конструкцій, особливо в поєднанні з масивними тілами, Я.Г. Савула у 1988 році започатковує науковий напрям гетерогенних математичних моделей, який успішно продовжує розвивати його учень, професор І.І. Дияк

Ярема Григорович завжди співпрацював з науковими школами як Західного наукового центру так й інших міст України та зарубіжжя. У 1997 році така співпраця привела до започаткування нового наукового напряму з дослідження тепло- та масоперенесення у середовищах з тонкими покриттями та включеннями. У рамках наукової школи "Чисельне моделювання та оптимізація фізико-механічних полів" і під керівництвом Я.Г.Савули захистили кандидатські дисертації Г. Шинкаренко, І. Дияк, І. Муха, М. Щербатий, М. Копитко, П. Вагін, А. Дубовик, О. Коссак, І. Будз, Н. Паук, В. Кухарський, Л. Дяконюк, Т. Мандзак, Л. Винницька, А. Стягар, Ю. Турчин, Н. Сподар. Ярема Григорович завжди переймався долею своїх учнів і допомагав кожному завершити наукові дослідження успішним захистом дисертації та майбутнім працевлаштуванням. Усі учні з вдячністю пам'ятають допомогу та турботу Яреми Григоровича.Протягом багатьох років професор Я.Г. Савула активно займався міжнародною науковою діяльністю: був керівником групи у темі, яку виконували за програмою INTAS, керував спільними українсько-угорським і українсько-шведським проектами. У 1998 р. Ярема Григорович отримав індивідуальний міжнародний науковий грант "Вчені та викладачі". Важливими були контакти про-

фесора Я.Г. Савули з ученими Віденського технічного університету, Технічного університету м. Брно, Веспремського університету, університету м. Кобленц. Результатами цієї співпраці є спільні наукові праці та великий обсяг виконаних наукових досліджень.

Наукова діяльність Я.Г. Савули упродовж довголітньої роботи у Львівському національному університеті імені Івана Франка тісно пов'язана з викладацькою роботою. Навчальні курси, які читав Ярема Григорович, диктувались майже завжди його науковими інтересами. Це курси з мов програмування, задач на власні значення, варіаційно-проекційні методи, чисельні методи, метод скінченних елементів, чисельні методи математичної фізики, комп'ютерне моделювання та ін. Ярема Григорович постійно працював над збереженням на факультеті висококваліфікованих кадрів та залученням до роботи молодих талановитих спеціалістів. Під його керівництвом відкрито нові кафедри та переведено на якісно вищий рівень навчальні комп'ютерні лабораторії.

Професор Я.Г. Савула завжди виявляв суспільну активність. Він багато років був членом Спеціалізованих вчених рад, членом редколегій наукових збірників і журналів. У 1991 - 1997 рр. очолював Спеціалізовану раду при Львівському університеті імені Івана Франка зі захисту кандидатських дисертацій з обчислювальної математики та математичного моделювання. У 1994 р. був обраний членом Національного комітету України з теоретичної та прикладної механіки. Неодноразово був членом експертної ради з прикладної математики та кібернетики ВАК України.

Ярема Григорович був батьком чудової родини. Всі завжди знали і бачили його любов і повагу до дружини. Своїх дітей вони виховали у строгості і працелюбності. Його життя було відкрите та гідне наслідування. Особливо хочеться відзначити життєрадісний характер Яреми Григоровича. Він завжди приносив посмішку та оптимізм. Ніколи не любив сидіти на місці. Він цікавився всім: історією свого краю, літературою, театром, мистецтвом. Його елегантний вигляд викликав захоплення у багатьох.

Його життєвий шлях – взірець вірного та сумлінного служіння рідній землі та обраній справі. Великий жаль, що все це у минулому часі. Але все те добре, що Ярема Григорович залишив у нас, як своїх учнях, житиме вічною пам'яттю.

М. Копитко, І.Дияк

UDK 519.6

MULTISTEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

Ioannis K. Argyros[1], Stepan Shakhno[2], Halyna Yarmola[3]

[1]Cameron University

[2,3]Ivan Franko National University of Lviv

iargyros@cameron.edu, stepan.shakhno@lnu.edu.ua, halyna.yarmola@lnu.edu.ua

Unified local convergence analysis of generalized multistep methods is provided under the same set of convergence criteria. Some well-known multistep methods are also studied using the approach of restricted convergence regions.

There is a plethora of problems that using mathematical modeling can be written in the form of an equation

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

where $F : D \subseteq X \to Y$ is a nonlinear operator, defined on a convex domain D, X and Y are Banach spaces. The exact solution of this equation can be found only in special cases. To obtain an approximate solution to x^* of equation (1) different iterative methods are used, for example, multistep methods. In general, multistep methods can be written in the form

$$\begin{aligned}
&x_{-2} = x_{-2}^{(0)},\ x_{-1} = x_{-1}^{(0)},\ x_i = x_i^{(0)},\ i = -2,-1,...,\\
&x_n^{(0)} = \varphi^{(0)}(x_{n-1}^{(0)}, x_{n-2}^{(0)}) = x_n,\\
&x_n^{(1)} = \varphi^{(1)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)}) = x_n^{(0)} - \tilde{\varphi}^{(1)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)})F(x_n^{(0)}),\\
&x_n^{(2)} = \varphi^{(2)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)}) = x_n^{(1)} - \tilde{\varphi}^{(2)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)})F(x_n^{(1)}),\\
&...\\
&x_n^{(m-1)} = \varphi^{(m-1)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)}) = x_n^{(m-2)} - \tilde{\varphi}^{(m)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)})F(x_n^{(m-2)}),\\
&x_{n+1} = x_n^{(m)} = \varphi^{(m)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)}) = x_n^{(m-1)} - \tilde{\varphi}^{(m)}(x_n^{(0)}, x_{n-1}^{(0)})F(x_n^{(m-1)}),\ n = 0,1,2,...,
\end{aligned} \tag{2}$$

m is a given natural number and $\varphi^{(j)} : D \times D \to X$, $\tilde{\varphi}^{(j)} : D \times D \to L(Y, X)$, $j = 0,1,2,...,m$ are continuous operators related to F such that $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Depending on the type of operators $\varphi^{(j)}$ or $\tilde{\varphi}^{(j)}$, we can get well-studied multistep

Newton-type methods, methods with divided differences and other type methods [1-4].

It is known that multistep methods have a higher convergence order than the corresponding one-step methods. But the convergence order of these algorithms is found using the Taylor series with higher than one derivatives not appearing on the algorithm. We provide a local convergence analysis of the multistep methods (2) under weak conditions:

$$\left\|\varphi^{(j)}(y,x)-x^*\right\| \le \psi^{(j)}\left(\left\|y-x^*\right\|,\left\|x-x^*\right\|\right)\left\|y-x^*\right\|,\ x,y\in D_0\subseteq D,$$

where $\psi^{(j)}:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ are continuous and nondecreasing functions. Under this type of conditions in general only linear convergence order is shown. But the computational order of convergence (COC) or the approximate computational order of convergence (ACOC) can be used [1]. The computation of these parameters does not require high order derivatives. The scheme of calculation of radii of convergence domain of methods is also described.

In this work we also studied the multistep Newton's method and the Schmidt-Schwetlick method under classical Lipschitz conditions using the approach of restricted convergence regions, and improved convergence analysis of the Kurchatov-Schmidt-Schwetlick method. As a result we get tighter error estimates and larger radii of convergence domain for these methods because new Lipschitz constants are smaller then the corresponding ones obtained in earlier works.

Multistep methods were used to numerically solve test problems. Numerical experiments were also performed which confirm the obtained theoretical results and advantages of the new approach of studying iterative methods for solving nonlinear equations.

REFERENCES

1. Argyros I.K. Local convergence and the dynamics of a two-step Newton-like method / I.K. Argyros, Á.A. Magreñán // Interat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.– 2016.– Vol. 26.– No. 5.– 18 pp.
2. Grau-Sánchez M. Frozen iterative methods using divided differences "ála Schmidt-Schwetlick" / M. Grau-Sánchez, M. Noguera, J.M. Gutiérrez // J. Optim. Theory Appl.– 2014.– Vol. 160. – pp. 931-948.
3. Shakhno S.M. On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations / S.M. Shakhno // J. Comput. Appl. Math. – 2009.– Vol. 231. – P. 222-235.
4. Traub J.F.Iterative methods for the solution of equations / J.F. Traub.– New Jersey: Prentice Hall, 1964

УДК 519

THE GENERATOR TO CONTROL PROBLEM FOR THE TRANSFER PROCESS WITH SEMI-MARKOV SWITCHINGS

Yaroslav Chabanyuk [1,2] , Anatoli Nikitin[3], Uliana Khimka[1]

[1]Ivan Franko National University of Lviv

[2]Lublin University of Technology, Poland

3Faculty of Natural Sciences Jan Kochanowski University of Kielce, Poland

yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua.com, y.chabanyuk@pollub.pl

The generators for limit transfer process and control problem are constructed for a system of stochastic differential equations with Semi-Markov switching and diffusion perturbation. In particular, an algorithm for solving the control problem is determined, namely: for each value of the transfer pro- cess and the state of a semi-Markov process, we obtain control using the stochastic optimization procedure.

Analyzing the state of the art concerning asymptotic properties of control problem for stochastic evolution models reveals that a complete theory is still to be worked out. Well understood are the models which are given by stochastic differential equations with Markov switchings and impulse or continuous-type perturbations in the classical schemes of averaging or diffusion approximation. Thus, it seems natural to develop a theory of evolution equations with Semi-Markov switchings and random perturbations.

Establishing convergence of the stochastic optimization procedure is an important pup rose of system analysis in the uncertainties, which can be modeled using an ergodic Semi-Markov environment. The relevance of determining new properties and generalizations of optimization algorithms that use randomness in the process of finding the optimum is evidenced by numerous applications in control theory, information transfer theory, and also in solving nonparametric problems of mathematical statistics. In present article we consider some prelim-it control evolution model with a small normalization parameter. The establishment of sufficient conditions for the convergence of the initial problem to the limit problem is carried out using Korolyuk's model theorems [4], [3]. We assume diffusion transfer process $y(t) \in R^{d}$ has given by stochastic evolutionary equation [2], [3]

$$dy(t) = a(y(t), x(t))dt + \sigma(y(t), x(t), u(t))dW(t), \qquad (1)$$

where $x(t)$, $t \geq 0$, is a semi-Markov process on a standard phase space (X, X) [1] and it is defined by semi-Markov kernel [3], [4] $Q(t,x,B) = P(x,B)G_x(t)$ where stochastic kernel has a form $P(x,B) := P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}, B \in X$ and it describes embedded Markov chain $x_n := x(\tau_n)$ between renewal moments $\tau = \sum_{k=1}^{n} \theta_k,\ n \geq 0,\ \tau_0 =$0, and at intervals $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ between renewal moments τ_n. Values θ_n of intervals are determines by distribution function $G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\} =: P\{\theta_x \leq t\}$. In the future, we use the following properties for the distribution function $G_x(t)$: $\bar{G}_x(t) = 1 - G_x(t)$, $\bar{G}_x^{(2)}(s) = \int_s^\infty \bar{G}_x(t)dt,\ g(x) = \int_0^\infty \bar{G}_x(t)dt.$

Therefore semi-Markov process $x(t)$, $t \geq 0$, can be defined by relation $x(t) = x_{\nu(t)},\ t \geq 0,$ where counting process $\nu(t)$ has a form $\nu(t) := \max\{n \geq 1 : \tau_n \leq t\},\ t \geq 0.$

In (1) $W(t)$ is a Wiener process [2]. Further we assume that semi-Markov process $x(t)$, $t \geq 0$ is regular, that is $P\{\nu(t) < \infty\} = 1$ [2] and it is also uniformly ergodic with stationary distribution $\pi(B) := \lim_{t\to\infty} P\{x(t) \in B\} = \int_B \rho(dx)g(x)/q,\ B \in X,$ where $\rho(\mathrm{B})$, $B \in X$ is a stationary distribution of embedded Markov chain x_n, $n \geq 0$ [4],and for the average residence time of the process in state x, there is a restriction $g(x) \leq C < +\infty.$

Generator of associated Markov process $x_0(t)$ to Markov process $x(t)$ has a form [4] $\mathbf{Q} := q(x)[\mathbf{P} - I]$ where $q(x) = 1/g(x), \mathbf{P}\varphi(x) = \int_X P(x,dz)\varphi(z),\ g = \int_X \pi(dx)g(x),\ q = 1/g.$

We define $\mathbf{R}_0$ as a potential operator for generator $\mathbf{Q}$ by the relation [4] $\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, where Π is a projector on zero subspace of generator $\mathbf{Q}$ [4]. We also assume satisfying conditions on functions $a(y,x)$, $\sigma(y,x,u)$, $x \in X$ $a(y,\cdot) \in C^1(R),\ \sigma(y,\cdot,u) \in C^{1,1}(R \times R).$ This condition ensures the existence of a global solution for evolutionary equations

$$dy_x(t) = a(y_x(t), x)dt + \sigma\big(y_x(t), x, u_x(t)\big)dW(t), \qquad (2)$$

for each fixed value of semi-Markov process $x(t)$, $t \geq 0$, that is, at $x = x(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Let the control function $u(t)$ for process (1) be evaluated by the quality criterion described by the function $G(y, x, u)$ with a single equilibrium point at each interval $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

We have control for solution of equation $\frac{\partial G^*(y,x,u)}{\partial u} = 0.$ when condition $G(\cdot,\cdot,u) \in C^1(R)$ is satisfied.

Control problem (1), in averaged scheme with small parameter ε has a form [1], [5]

$$dy^\varepsilon(t) = a\left(y^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dt + \sigma\left(y^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), u^\varepsilon(t)\right)dW(t) \qquad (3)$$

and control function $u^\varepsilon(t)$ can be determinated by stochastic optimization procedure [1]

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G\left(y^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), u^\varepsilon(t)\right), \qquad (4)$$

where $\nabla_{\beta(t)}G(\cdot,\cdot,u) = (G(\cdot,\cdot,u+\beta(t)) - G(\cdot,\cdot,u-\beta(t)))/2\beta(t).$

Initial conditions for problem (3), (4) have a form $y(0) = y_0,\ x(0) = x_0,\ u(0) = u_0.$ We assume that functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t \geq 0$ satisfy condition $\alpha(t) \to 0,\ \beta(t) \to 0$ at $t \to \infty$.

Definition 1. Compensating operator for EMRP (3), (4) is defined by relation

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y, x, u, t) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\{E\{\varphi(y_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, u_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon)|y_n^\varepsilon = y,\ x_n^\varepsilon = x,\ u_n^\varepsilon = u,\ \tau_n^\varepsilon = t\} -$$

$$-\varphi(y, x, u, t)\}/g(x), \qquad (5)$$

where $\varphi(y, x, u, t) \in C^{(2,0,2,0)}(R, X, R, R_+)$.

Further we consider set of inhomogeneous semigroups $\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ of problem (3), (4), which on test functions $\varphi(y, u) \in C^{(2,2)}(R \times R)$ has representation

$$\mathbf{C}_{t+s}^t(x)\varphi(y, u) = \varphi\big(y_x(t+s), u_x(t+s)\big), \qquad (6)$$

where $y_x(t) = y$, $u_x(t) = u$. Then by (6) we have $y_x(0) = y_0$, $u_x(0) = u_0$. So for representation $y_x(t,y) := y_x(t)$, $u_x(t,y) := u_x(t)$ we have:

$$y_x(t+s,y) = y_x\big(s, y_x(t,y)\big); \;\; u_x(t+s,y) = u_x\big(s, u_x(t,u)\big).$$

Lemma 1. Compensating operator $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ on test functions $\varphi(y,x,u)$ has representation

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,u) = \varepsilon^{-1}q(x)\{\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+\varepsilon s}^t(x)\int_0^\infty P(x,dz)\varphi(y,x,u) - \varphi(y,x,u)\},$$

where $q(x) = 1/g(x)$.

Lemma 2. Compensating operator $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)$ has representation

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,u) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,x,u) + \varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,y}(x) - I]\mathbf{Q}_0\varphi(y,x,u) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_0^\infty G_x(ds)\big[\mathbf{D}_{t+\varepsilon s}^{t,u}(x) - I\big]\mathbf{Q}_0\varphi(y,x,u), \mathbf{Q}_0\varphi(x) = q(x)\mathbf{P}\varphi(x),$$

where set of semigroups $\mathbf{D}_{t+s}^{t,y}(x)$ has generator $\mathbf{D}_y(x)$ such that equation $d\mathbf{D}_{t+s}^{t,y}(x) = \mathbf{D}_y(x)\mathbf{D}_{t+s}^{t,y}(x)ds$ is fullfiled and set of semigroups $\mathbf{D}_{t+s}^{t,u}(x)$ has generator $\mathbf{D}_{u,t+s}(x)$ such that equation $d\mathbf{D}_{t+s}^{t,u}(x) = \mathbf{D}_{u,t+s}(x)\mathbf{D}_{t+s}^{t,u}(x)ds$ is fulfilled.

Under conditions above for $\varphi(y) \in C^2(R)$ we have representation $\mathbf{D}_y(x)\varphi(y) = a(y,x)\varphi'(y) + \frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''(y)$, and for $\varphi(u) \in C^1(R)$ $\mathbf{D}_{u,t}(x)\varphi(u) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\varphi'(u)$.

REFERENCES

[1] Chabanyuk,Y.M, Nikitin A.V. and Khimka U.T. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes Wiley-ISTE, London, 2020.

[2] Jacod, J. and Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] Korolyuk, V.S. and Korolyuk, V.V.: Stochastic Models of Systems, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[4] Korolyuk, V.S. and Limnios, N.: Stochastic Systems in Merging Phase Space , World Scientific, 2005.
[5] Chabanyuk, Y.M., Nikitin, A.V. and Khimka, U.T.: Asymptotic properties of the impulse perturbation process under Levy approximation conditions with the point of equilibrium of the quality criterion, Mathematychni Studii, 52, 2019, no. 1, 96–104.

UDK 518.61

APPROXIMATION OF A SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DELAY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. Cherevko, A. Dorosh, I. Haiuk, L. Piddubna

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

i.cherevko@chnu.edu.ua

In the present note we study an approximate method of solving boundary value problems for delay integro-differential equations based on approximation of the solution by cubic splines with defect two.

Introduction. Existence and uniqueness of a solution of delay boundary value problems in various function spaces were considered by Grim and Schmitt [1], Kamensky and Myshkis [2], Athanasiadou [3]. Applying spline functions for solving differential-difference equations was investigated by Nikolova and Bainov [4], Nastasyeva and Cherevko [5], Cherevko and Dorosh [6,7].

Problem statement. Existence of a solution.

Let us consider the following boundary value problem

$$y''(x) = f\left(x, y(x), y\left(x-\tau_0(x)\right), y'(x), y'\left(x-\tau_1(x)\right)\right) +$$

$$+\int_a^b g\left(x, s, y(s), y\left(s-\tau_0(s)\right), y'(s), y'\left(s-\tau_1(s)\right)\right) ds,$$

$$y^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x),\ i = 0,1,\ x \in \left[a^*; a\right],\ y(b) = \gamma,$$

$$a^* = \min\left\{\inf_{x\in[a;b]}\left(x-\tau_0(x)\right), \inf_{x\in[a;b]}\left(x-\tau_1(x)\right)\right\},\ \gamma \in R, \tau_0(x) \ge 0,$$

$$\tau_1(x) \ge 0.$$

Let $f\left(x,u_0,u_1,v_0,v_1\right)$, $g\left(x,s,u_0,u_1,v_0,v_1\right)$ be continuous functions in $G=\left[a,b\right]\times G_1^2\times G_2^2$ and $Q=\left[a,b\right]\times G$, where $G_1=\left\{u\in R:\left|u\right|<P_1\right\}$, $G_2=\left\{v\in R:\left|v\right|\le P_2\right\}$, P_1, P_2 are positive constants, $\varphi\left(t\right)\in C^1\left[a^*;a\right]$, delays $\tau_0\left(x\right)$ and $\tau_1\left(x\right)$ are continuous functions on $\left[a,b\right]$, and additionally, $\tau_1\left(x\right)$ is such that the set $E=\{x_i\in\left[a,b\right]:x_i-\tau_1\left(x_i\right)=a,\, i=\overline{1,k}\}$ is finite.

We introduce the notations:

$$P=\sup\{\left|f\left(x,u,u_1,v,v_1\right)\right|+\left|\int_a^b g(x,s,u,u_1,v,v_1)ds\right|:\left|u_i\right|<P_1,\left|v_i\right|<P_2,\, i=0,1,\, x,s\in\left[a,b\right]\},$$

$$J=\left[a^*;a\right],\quad I=\left[a,b\right],\, I_1=\left[a,x_1\right],\, I_2=\left[x_1,x_2\right],\ldots,I_k=\left[x_{k-1},x_k\right],\, I_{k+1}=\left[x_k,b\right],$$

$$B\left(J\cup I\right)=\{y\left(x\right):y\left(x\right)\in(C(J\cup I)\cap(C^1(J)\cup C^1(I))\cap(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right))),\left|y\left(x\right)\right|\le P_1,\left|y'(x)\right|\le P_2\}.$$

A function $y=y\left(x\right)$ from the space $B\left(J\cup I\right)$ is called a solution of the problem (1)-(2) if it satisfies the equation (1) on $\left[a;b\right]$ (with the possible exception of the set E) and boundary conditions (2).

Theorem 1 Let the following conditions hold:

- $$\max\left\{\max_{x\in J}\left|\varphi\left(x\right)\right|,\frac{\left(b-a\right)^2}{8}P+\max\left(\left|\varphi\left(a\right)\right|,\left|\gamma\right|\right)\right\}\le P_1,$$
- $$\max\left\{\max_{x\in J}\left|\varphi'\left(x\right)\right|,\frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi\left(a\right)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$$
- the functions $f\left(x,u_0,u_1,v_0,v_1\right),\, g\left(x,s,u_0,u_1,v_0,v_1\right)$ satisfy the Lipschitz condition for variables $u_i,v_i,i=\overline{0,1}$ with constants $L_j^1,L_j^2,\, j=\overline{1,4}$,

- $$\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{j=1}^{2}\left(L_j^1+(b-a)L_j^2\right)+\frac{b-a}{2}\sum_{j=3}^{4}\left(L_j^1+(b-a)L_j^2\right)<1.$$

Then there exists a unique solution of the problem (1)-(2) in $B(J\cup I)$.

Computational scheme. Example.

Let us consider an irregular grid $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ on the segment $[a;b]$, $E\subset\Delta$. We denote by $S(y,x)$ an interpolating cubic spline with defect two on Δ which belongs to the space $B(J\cup I)$.

An iterative scheme of finding an approximate solution using cubic splines with defect two is suggested in [4-7].

Let us consider the usage of this calculation scheme for finding an approximate solution of the following boundary value problem

$$y''(x)=-\alpha y'\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t-\frac{\pi}{2})dt+\cos x, 0\le x\le\frac{\pi}{2},$$

$$y(x)=\sin(x)+1, -\frac{\pi}{2}\le x<0,\ y(0)=1, y(\frac{\pi}{2})=2+\alpha.$$

In this example $L_1^1=L_2^1=L_3^1=0, L_4^1=\alpha,\quad L_1^2=L_3^2=L_4^2=0, L_2^2=1,$ so

$$\lambda_1=\frac{\pi}{2},\lambda_2=\alpha,\qquad h=H=\frac{\pi}{40},K=1,\qquad u=\frac{\pi^2}{32}+\frac{H^2}{8},v=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}H,$$

$$\theta=\left(\frac{\pi^2}{32}+\frac{H^2}{8}\right)\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}H\right)\alpha.$$

If we put $\alpha=\frac{1}{4}$, then the conditions of the theorem 1 are satisfied. The precise solution $y_p(x)$ of this boundary value problem, which was found using the step method, is

$$y_p(x)=\alpha\sin x-\cos x+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)x+2.$$

Table 1: Precise and approximate solutions

x	$y_a(x)$	$y_p(x)$	Δ	δ
0	1	1	0	0%
$\frac{\pi}{8}$	1.03971	1.03976	0.00005	0.01%
$\frac{\pi}{4}$	1.2935	1.2936	0.00010	0.01%
$\frac{3\pi}{8}$	1.7162	1.7163	0.00010	0.01%
$\frac{\pi}{2}$	2.25	2.25	0	0%

The results of the calculation are given in Table 1, where $y_p(x)$ is the precise solution, $y_a(x)$ is the approximate solution obtained with $h = \frac{\pi}{40}$ after 2 iterations, Δ is the absolute error and δ is the relative error.

REFERENCES

1. Grim L.J. Boundary value problems for delay differential equations / L.J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc.– 1968.– 74.– №5.– P. 997-1000.
2. Kamensky G. Boundary value problems for nonlinear differential equations with deviating argument of neutral type / G. Kamensky, A. Myshkis // Differential equations.– 1972.– 8.– №12.– P. 2171-2179.
3. Athanasiadou E.S.. On the existence and uniqueness of solutions of boundary problems for second order functional differential equations / E.S. Athanasiadou // Mathematica Moravica.– 2013.– 17.– №1.– P. 51-57.
4. Nikolova T.S. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T.S. Nikolova, D.D. Bainov // Yokohama Math. J.– 1981.– 29.– №1.– P. 108-122.
5. Nastasyeva N.. Cubic splines with defect two and their applications to boundary value problems / N. Nastasyeva, I. Cherevko // Bulletin of Kyiv University. Physics and mathematics.– 1999.– №1.– P. 69-73.

6. Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations. / A. Dorosh, I. Cherevko // J. Numer. Anal. Approx. Theory.– 2015.– 44.– №2.– P. 154-165.
7. Cherevko I. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays / I. Cherevko, A. Dorosh // Carpathian Math. Publ.– 2018.–10.– №. 1.– P. 65-70.

UDK 004.8

MODELLING OF DIAGNOSTICS AND FORECASTS OF SPREAD COVID-19

Ivan Dyyak[1], Vitaliy Horlatch[1], Vitalii Nastosiak[1], Mazen Shahin[2]

[1] Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

[2] Delaware State University, USA

vitalii.nastosiak@gmail.com

We proposed an approach to diagnosing coronavirus disease based on the classification of chest X-rays of patients with suspected COVID-19 and predicting the spread of coronavirus infection under quarantine and without vaccination. The COVID-19 pandemic, which originated in late 2019 in China, has become a problem for the whole world. As of the end of March 2021, more than 100 million people in the world were infected with COVID-19, and more than 2.5 million people died as a result of the disease [4].

The development of reliable mathematical models, supported by the availability and analysis of complete and accurate data, is a fundamental tool for the interpretation and understanding of the epidemic, as well as for providing support to digital health [1,2,4]

The rapid detection of the disease with accurate diagnosis for cases without obvious symptoms can considerable reduce the mortality rate of patients. By using models of residual convolutional neural networks (ResCNN), which are trained to solve the problem of classifying X-rays of patients with suspected COVID-19, the diagnostic task is facilitated. Models distinguish images of healthy lungs from those affected by viral pneumonia or coronavirus. CNN can identify a particular class of respiratory organs that for various reasons have turbidity in the images also.

The problem of image classification is formulated in the form: let X – the set of images or descriptions of objects, Y - the set of names or class numbers.

There is an unknown dependence – reflection $y^*: X \to Y$, whose values are known only on the elements of the training sample $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$. We build an algorithm $a: X \to Y$, which can classify any object $x \in X$. It is the convolutional neural network that is used to solve this problem. The network architecture is based on the convolution operation, which can be described by the following formula: $(f \times g)[m, n] = \sum_{ij} f[m-k, n-l] \cdot g[k, l]$, where f – the original image matrix; g – the core of convolution.

When a deep neural network begins to curl up as the depth of the network increases the accuracy of learning first increases and then decreases rapidly. Therefore, we use the residual network.

The essence of such a network is that intermediate connections appear between the layers, and thus learning is easier. Such connections are called "shortcut connections". Residual neural network models were taught to solve the classification problem ResNet with 18, 34 and 50 layers. Periodically the number of filters doubles and their dimension decreases in increments 2. Only one layer with source classes is used. The activation function in the neurons of this network architecture is the truncated linear node function, which have the form $f(x) = \max(0, x)$, where x – input value of the neuron.

A set of X-rays of patients' chests, which was publicly available in the competition organization system, was used to train the neural network. Kaggle. A total of 20,965 images are divided into four classes The ResNet architecture model was previously trained to classify about 1,000 classes of images, which greatly accelerated the learning of the sample with images. Using packages reduces ResNet learning time. Packet normalization was used to solve the problem of network retraining. As a function of the neural network costs, we use the cross-entropy function: $L = \sum_j d_j \log(p_j)$, where dj represents the target probability for the output node j and p_j is the probability output for j after applying the excitation function, where d_j represents the target probability for the output node j and p_j is the probability output for j after applying the excitation function. We will use an algorithm to optimize the residual convolutional neural network Adam (adaptive moment estimation), which combines the idea of accumulation of movement and the idea of a weaker update of the scales for typical features. We will choose the speed of learning $\eta = 3^{-5}$.

The residual neural network was previously trained to distinguish more than 1000 objects in images, the ResNet model achieved good accuracy in solving the

problem of classification for 2 epochs. In each epoch, data packets from the training sample passed through the neural network for 4193 iterations. Every 20 iterations, the accuracy and loss were measured on a test sample, where the network images were classified by 1048 iterations, taking into account the packet size 4.

Table 1. Learning results of the model ResNet

Number of layers of the model ResNet	Accuracy on the test sample	The average value of the loss function
18	95%	0,1534
34	96%	0,1298
50	95%	0,1478

The program which trains ResNet models with different numbers of layers is written in Python, and uses the PyTorch machine learning library.

A Telegram bot has been developed that uses trained models to diagnose COVID-19 also. The bot is written entirely in Python using the aiogram library. Below is the screen shots of the process of the bot.

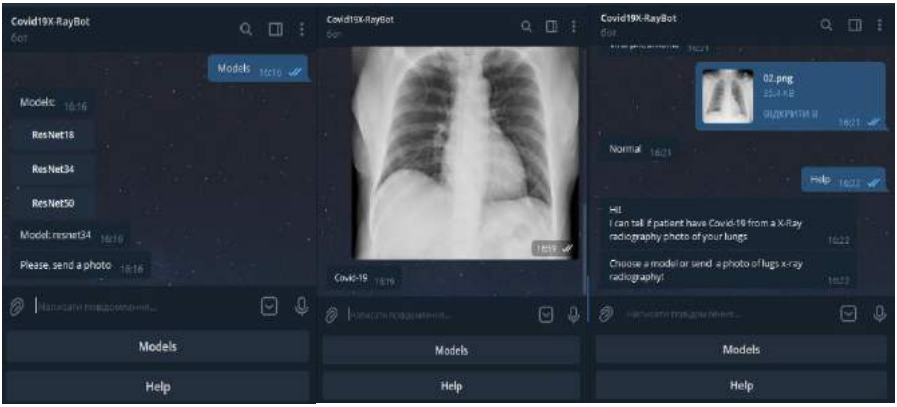


Image 1. Process of the bot.

A model based on Bayesian inference was used to predict the spread of COVID-19. These predictions are only a theoretical attempt to predict as only diagnosed cases are taken into account not actual ones and new strains of the virus appear periodically.

The most machine learning methods are ineffective in predicting the spread of coronavirus disease because the growth of COVID-19 cases is a significantly non-stationary process. To identify complex patterns it is necessary to have large enough training samples with a sufficient number of informative features, also.

One effective approach is to use Bayesian inference, which is based on Bayesian theorem. The least squares methods make it possible to find constant coefficients for the models. In addition, it is possible to take into account the opinion of the expert through the assignment of expert informative a priori distributions for the model parameters. Thus, the results of Bayesian inference forecasting can be seen as a compromise between historical data and expert opinion, which is important for cases with small data.

This approach makes it possible to take into account the opinion of experts who have determined a priori distributions for the model parameters. Thus, the results of Bayesian inference forecasting can be seen as a compromise between real data and expert opinion, which is important for cases with insufficient data.

Given the exponential increase in the incidence of COVID-19, we write a Bayesian regression model in the form:

$$\begin{cases} y \sim N(\mu, \sigma) \\ \mu = \frac{\alpha}{1+e^{-\beta(t-t_0)}} \cdot 10^5 \end{cases} \quad (1)$$

where t is the period for which the number of infected is determined; t_0 is the time shift in the spread of morbidity; α is the maximum value of the detected cases; β is an empirical factor that describes the rate of spread of COVID-19; σ is the standard deviation. The number of infected μ is the solution of the logistic equation of the spread of infectious diseases

$$\frac{d\mu}{dt} = \beta \cdot \mu \cdot (1 - \frac{\mu}{\alpha}). \quad (2)$$

The Monte Carlo method of Markov chains, in particular the Metropolis-Hasting algorithm is used to find the solution with the PyStan package.

The Bovid19 Predictor bot was developed for the cross-platform messenger Telegram to predict the spread of the disease. The Python 3.6 programming language was used to create the bot. The following software environments and components were used during the creation of the bot: Anaconda, PyStan, Scikit-learn, Pandas, Matplotlib, PyFPDF, aiogram, pickle. The Anaconda distribution is used for conflict-free interoperability of various software packages.

REFERENCES

1. Hethcote H. W. The Mathematics of Infectious Diseases. SIAM REVIEW, 2000, Vol. 42, No. 4, pp. 599–653.
2. Quarteroni A., Dede'L., Parolini N. Data Epidemic Analysis and Predictive Mathematical Modeling for COVID-19 Epidemic Studies, Springer International Publishing, Cham, 2020, p.1-7.
3. COVID-19 Radiography Database. https://www.kaggle.com/tawsifurrahman/covid19-radiography-database/code

4. COVID-19 Dashboard by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University. [Online] Available at: [Accesesed Mar. 3, 2021] https://www.arcgis.com/apps/opsdashboard/index.html#/bda7594-740fd40299423467b48e9ecf6

UDK 519.6

NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND IN POTENTIAL THEORY

Ya. Garasym

Ivan Franko National University of Lviv

iaroslav.harasym@lnu.edu.ua

The purpose of investigations is the construction of approximate schemes for solving some two dimensional integral equations of the first kind with weak singularities in kernel.

The object of analysis is different aspects of approximate schemes construction of solving such integral equation of the first kind

$$(A\sigma)(M) \equiv \iint_S \frac{1}{|M-P|}\sigma(P)dS_p = U(M), \quad M \in S, \tag{1}$$

where in general case S is an open Lipschitz surface, M and P are the points of Euclidean space $\boldsymbol{R}^3$.

Ordinary generalization of (1) is a permission that surface S is formed by the aggregate m of surfaces, so that $S := \bigcup_{i=1}^{m} S_i$. It is possible to research operator equation (1) solvability in different functional spaces. However, it should be taken into account the specificity of the investigated physical phenomenon. For example, the modeling of electrostatic field in the substantially spatial setting foresees the account of conduct of the sought charge distribution density $\sigma(P)$ near the contour of unclosed surface S and lines of its fracture. In addition $U(M)$, $M \in S$ is the given boundary value of potential on an electrode which is actually modeled by a surface S ($U(M) \equiv const$).

In the most general case $A\colon H_{00}^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S)$ is an isomorphism, and the solvability of (1) is expressed by such inequalities [1]

$$m_1\|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le \|A\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \le m_2\|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \quad (0 < m_1 \le m_2).$$

Using parametrization S

$$P = \{x(\alpha,\beta),\ y(\alpha,\beta),\ z(\alpha,\beta);\ (\alpha,\beta) \in \overline{D} := [-1,1]^2\},$$

$$M = \{x(\alpha_0,\beta_0),\ y(\alpha_0,\beta_0),\ z(\alpha_0,\beta_0);\ (\alpha_0,\beta_0) \in D := (-1,1)^2\}$$

integral equation (1) will be shown as

$$\iint_{\overline{D}} K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\sigma(\alpha,\beta)d\alpha d\beta = U(\alpha_0,\beta_0),\ (\alpha_0,\beta_0) \in D, \qquad (2)$$

$$K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) := \{[x(\alpha,\beta) - x(\alpha_0,\beta_0)]^2 + [y(\alpha,\beta) - y(\alpha_0,\beta_0)]^2 +$$

$$+[z(\alpha,\beta) - z(\alpha_0,\beta_0)]^2\}^{-1/2} \times J(\alpha,\beta),$$

$J(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$ is an element of surface S in local coordinates (α,β), which are connected with S. Parametric equations for presentation of arbitrary quadrangular plate provides as

$$x(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_j\phi_j(\alpha,\beta),\ \phi_j(\alpha,\beta) := (1 + (-1)^p\alpha)(1 + (-1)^q\beta),$$

$$y(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} y_j\phi_j(\alpha,\beta),\ p := \left[\frac{j}{2}\right] + 1,\ q := \left[\frac{j-1}{2}\right] + 1,$$

$$z(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} z_j\phi_j(\alpha,\beta),\ (\alpha,\beta) \in \overline{D}.$$

Addressing to such type of boundary surfaces is explained by possibility of the use for the approximate solving (2) in this case of numerically-analytical methodology [2, 3].

Two-dimensional integral equation (2) was solved by the methods of collocation with the use of piecewise-constant, bilinear, biquadratic and bicubic approximations of the sought charge distribution density. As (2) belongs to integral equations with weak singularity in the kernel, then when constructing a numerical scheme of its solving there is a necessity in an approximate calculation of certain class of two-dimensional improper integrals. The algorithms of calculation of such integrals become substantially complicated through the presence of certain weight function which takes into account singular behavior of the sought solution near the contour of an open surface S and in the lines of its fracture.

The method of calculation of a typical improper integral on an element Δ_0, which contains the point of collocation (α_0,β_0) reviewed

$$\Delta_0 := \left\{(\alpha,\beta)\ \middle|\ |\alpha - \alpha_0| \le \frac{h_\alpha}{2},\ |\beta - \beta_0| \le \frac{h_\beta}{2}\right\},$$

h_α, h_β – steps of the net for α and β during discretisation $\overline{D}$. Consider the number of improper integral necessary transformations under the condition of

approximation of unknown density by the piecewise-constant base functions and the weight of $\Omega^{-1}(\alpha,\beta)$

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Delta_0} K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\sigma(\alpha,\beta)d\alpha d\beta = \\
&= \iint_{\Delta_0} \Omega(\alpha,\beta)\Omega^{-1}(\alpha,\beta)K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\sigma(\alpha,\beta)d\alpha d\beta \approx \\
&\approx \sigma(\alpha_0,\beta_0)\Omega(\alpha_0,\beta_0)\iint_{\Delta_0}\Omega^{-1}(\alpha,\beta)K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)d\alpha d\beta = \\
&= \sigma(\alpha_0,\beta_0)[\Omega(\alpha_0,\beta_0)\iint_{\Delta_0} Q(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)d\alpha d\beta + \\
&+J(\alpha_0,\beta_0)\iint_{\Delta_0} R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)d\alpha d\beta],
\end{aligned} \tag{3}$$

$Q(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) := \Omega^{-1}(\alpha,\beta)K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) - \Omega^{-1}(\alpha_0,\beta_0)K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$,

$R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) := [A(\alpha_0,\beta_0)(\alpha-\alpha_0)^2 + 2B(\alpha_0,\beta_0)(\alpha-\alpha_0)(\beta-\beta_0) + C(\alpha_0,\beta_0)(\beta-\beta_0)^2]^{-1/2}$

, and coefficients $A(\alpha_0,\beta_0)$, $B(\alpha_0,\beta_0)$, $C(\alpha_0,\beta_0)$ depend on the concrete type of parametric equations which describe a surface S.

Integrand function $Q(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ has singularities due to $\Omega(\alpha,\beta)$ which can acquire zero values in the separate points of surface S. For elimination these singularities in the first integral of (3) preliminary it is necessary to perform special changes of variables. Besides, at further formal application of cubature formula for its approximate calculation it is necessary to find out the behavior of continuous function $Q(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ as a point (α,β) tends to (α_0,β_0) in order to determine $Q(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ in the point (α_0,β_0) of obtained limiting value.

Consider another approach to the approximate analysis of integral equations of type (1)-(2). Taking into account the type of the surface S, in most cases, topical for practice, it is possible to show (2) as

$$\iint_{\bar{D}}[L(\alpha,\beta)R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) + N(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)]\sigma(\alpha,\beta)d\alpha d\beta = U(\alpha_0,\beta_0), \tag{4}$$

where $(\alpha_0,\beta_0) \in D$, $L(\alpha,\beta)$ and $N(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ are known functions, and, if $L(\alpha,\beta)$ -smooth enough, then $N(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ is continuous, at least. It is said that in (4) the singularity of the kernel of the integral equation (2) is obviously isolated. The method we use to the approximate solving (4) consists in the substantial use of a priori information about the way of behavior of the sought function. This approach, in our opinion, can be considered as an approximate analogue the construction of left regularizer for (4). It is called the method of self-regularization, which is universal enough and it allows to get the solutions of the tasks with

complicated geometry of boundary surfaces and such that represents the investigated phenomenon in the best way. According to the basic idea of the method, we will show the function $R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$ as

$$R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) = G(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) + H(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0), \tag{5}$$

where

$$G(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) = \begin{cases} \frac{(\Delta_1-|\alpha-\alpha_0|)(\Delta_2-|\beta-\beta_0|)}{\Delta_1\Delta_2} R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0), & (\alpha_0,\beta_0) \in S_0, \\ 0, \quad (\alpha_0,\beta_0) \notin S_0, \end{cases}$$

$$H(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) = \begin{cases} \frac{\Delta_1|\beta-\beta_0|+\Delta_2|\alpha-\alpha_0|-|\alpha-\alpha_0|\,|\beta-\beta_0|}{\Delta_1\Delta_2} R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0), & \text{on } S_0, \\ R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0), \quad (\alpha_0,\beta_0) \notin S_0. \end{cases}$$

Here Δ_1, Δ_2 are some parameters, and

$$S_0 := \{(\alpha,\beta) \in \overline{D} \;\; |\alpha-\alpha_0| \le \Delta_1, \; |\beta-\beta_0| \le \Delta_2\}.$$

We will suppose that in S_0 the function $\sigma(\alpha,\beta)\Omega(\alpha,\beta)$ changes a little choosing sufficiently small Δ_1 and Δ_2. Then, taking into account (5), it is possible to pass from (4) to its approximate analogue

$$\sigma(\alpha_0,\beta_0)\Omega(\alpha_0,\beta_0)I(\alpha_0,\beta_0) + \\ + \iint_{\overline{D}} [L(\alpha,\beta)H(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) + N(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)]\sigma(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta = U(\alpha_0,\beta_0), \tag{6}$$

where $(\alpha_0,\beta_0) \in D$,

$$I(\alpha_0,\beta_0) := \iint_{S_0} \frac{L(\alpha,\beta)G(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)}{\Omega(\alpha,\beta)}\,d\alpha\,d\beta.$$

The equation (6) is a second-kind. By the help of this methodology we have got the solutions of test and practically important complicated problems of the theory of potential. It was also noticed that on condition of approximation of integral operator in (6) on a two-dimensional net with the fixed steps of discretisation of area D it is possible to improve the estimations of accuracy of the received results only due to the optimal choice of values of parameters Δ_1 and Δ_2. It was shown that for this method the quantities Δ_1 and Δ_2, to some extent, serve as regularization parameters.

REFERENCES

1. Sybil' Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu.M. Sybil' // Mathematichni Studii. 1997. –Vol. 8. – pp. 79-96.
2. Garasym Ya.S. On numerical appoach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method / Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // J. Numer. Appl. Math. – 2003. – Vol. 88. – pp. 17-27.

3. Garasym Ya.S. A posteriori error estimate for some two-dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potentional theory / Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – Vol. 97. – pp. 57-69.

UDK 519.6

USING MACHINE LEARNING (ML) TO DETECT THREAT ANOMALIES FOR REDUCING FALSE-POSITIVES ON THE DAILY CYBERSECURITY OPERATION CENTRE ROUTINE

Roman Karpiuk[1,2], Petro Venherskyi[2]

[1]SoftServe Inc. Lviv, Ukraine

[2]Ivan Franko National University of Lviv

simmppllee@gmail.com, petro.venherskyy@lnu.edu.ua

Building correlation rules to detect anomalies are shown on the basis of the machine learning library for the system of security information and event management Splunk. One of the most effective algorithms for detecting anomalies is density function. The implementation of this algorithm allows you to set different parameters on which training may depend and, consequently, the end result.

Every day, cybersecurity operation centers face the need to find a balance between the number of professionals who can analyze a cybersecurity events to the number of those events.

We will focus on how to reduce the burden on analysts, namely, how to reduce the number of false positives.

What is the main source of input for the analyst? That's right, correlation rules. What does the Threat Detection engineer first face when it wants to improve the response time of a CSOC - by reducing the number of false positives generated by correlation rules. What can be done for this? Give up static thresholds and use statistics instead. The idea is good, but not very effective, because the ecosystem in which cybersecurity operates is extremely dynamic and there is a high probability of "loss from the radar" is something extremely important due to changes in the behavior of one of the controlled objects (end devices, servers, network equipment or other). And when the statistics no longer meet your requirements in that case

comes machine learning. Therefore, all improvements and construction of interaction with ML will be carried out based on the SIEM "Splunk".

SIEM (security information and event management) is a combination of two terms that indicate the scope of application software: SIM (Security information management) - information security management and SEM (Security event management) - management of security events. SIEM technology provides real-time analysis of security events (alarms) coming from network devices and applications. SIEM is represented by applications, devices or services, and is also used to log data and generate reports for compatibility with other business data. The term itself was invented by Gartner in 2005, but since then the very concept and all that belongs to it, has undergone many changes.

Machine learning (ML) is the study of computer algorithms that can improve automatically through experience and by the use of data.] It is seen as a part of artificial intelligence. Machine learning algorithms build a model based on sample data, known as "training data", in order to make predictions or decisions without being explicitly programmed to do so. Machine learning algorithms are used in a wide variety of applications, such as in medicine, email filtering, speech recognition, and computer vision, where it is difficult or unfeasible to develop conventional algorithms to perform the needed tasks.

A subset of machine learning is closely related to computational statistics, which focuses on making predictions using computers; but not all machine learning is statistical learning. The study of mathematical optimization delivers methods, theory and application domains to the field of machine learning

What exactly can you use ML in cybersecurity

Pic.1 Splunk ML capabilities

We will consider the first option - Anomaly Detection, because it will help us in building correlation rules to detect various anomalies. Splunk, out of the box, provides the ability to operate various machine learning algorithms,

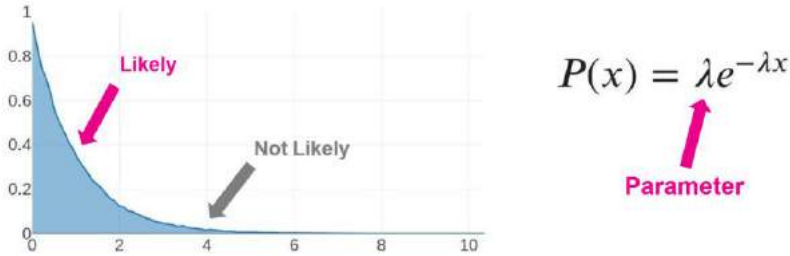
namely:

ACF	ElasticNet	KernelPCA	OneClassSVM	SpectralClustering
ARIMA	ExampleAlgo	KernelRidge	OrthogonalMatchingPursuit	StandardScaler
AgglomerativeClustering	ExtraTreesClassifier	Lasso	PACF	StateSpaceForecast
AutoPrediction	FieldSelector	LatentDirichletAllocation	PCA	SystemIdentification
BernoulliNB	GMeans	LinearRegression	RandomForestClassifier	TFBinary
Birch	GaussianNB	LinearSVC	RandomForestRegressor	TFIDF
CollaborativeFilter	GradientBoostingClassifier	LocalOutlierFactor	Ridge	TSNE
CorrelationMatrix	GradientBoostingRegressor	LogisticRegression	RobustScaler	TruncatedSVD
CustomDecisionTreeClassifier	HashingVectorizer	MDS	SGDClassifier	XMeans
DBSCAN	ICA	MLPClassifier	SGDRegressor	
DecisionTreeClassifier	Imputer	MinMaxScaler	SVM	
DecisionTreeRegressor	IsolationForest	NMF	SVR	
DensityFunction	KMeans	NPR	SavgolFilter	

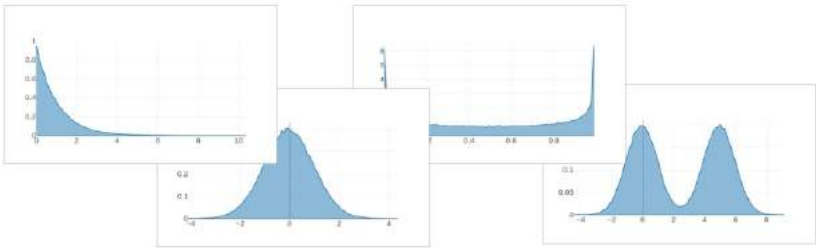
Pic.2 Splunk ML algorithms

All these algorithms will be useful and functional under different scenarios for creating correlation rules.

One of the most effective algorithms for detecting anomalies is DensityFunction. The implementation of this algorithm allows you to set different parameters on which training may depend and, consequently, the end result. The algorithm also involves estimating the different distribution of events within the sample for training.



Pic.3 The parameter that is responsible for the input data on which the training will depend



Pic.4 Types of distribution: Exponential, Normal, Beta, Gaussian Kernel Density Estimation (Gaussian KDE) distribution.

So, let's write a correlation rule that will detect an abnormal number of end-user infections with one type of malware. To implement we need input data, in our case, it will be data from the EDR system. To train DensityFunction, we will create a sample 180 days ago, not counting today. We will use the trained algorithm every hour to analyze events for the previous hour and thus we will detect anomalies.

Title: Threat - ML Calculate & Fit Substantial increase in Malware Infections - Model Gen

Description: optional

Search:

```
| tstats summariesonly=true `ela` values(Malware_Attacks.command_line) as
    command_line values(Malware_Attacks.file_path) as file_path count
    allow_old_summaries=true from datamodel=Malware.Malware_Attacks where
    Malware_Attacks.action=blocked  by "Malware_Attacks.signature",
    "Malware_Attacks.dest", "Malware_Attacks.action", "Malware_Attacks.file_name"
    , "Malware_Attacks.process" _time span=1h
| rename "Malware_Attacks.*" as "*"
| search NOT `exclude_malware_signatures`
| eval DayOfWeek=strftime(_time, "%A")
| eval HourOfDay=strftime(_time, "%H")
| eval IsWeekend=if(DayOfWeek="Sunday" OR DayOfWeek="Saturday","Yes","No")
| eval PartOfDay=if(HourOfDay>20 OR HourOfDay<7,"Night","Day")
| eval process=if(process="","-",process)
| stats sum(count) as malware_infections values(dest) as system_list values
    (command_line) as command_line by signature action process DayOfWeek
    HourOfDay PartOfDay IsWeekend _time
| `ele`
| fit Densityfunction malware_infections by signature into
    count_malware_infections_by_signature_1h_with_features
```

Earliest time: -180d

Time specifiers: y, mon, d, h, m, s Learn More

Latest time: -1d

Time specifiers: y, mon, d, h, m, s Learn More

Pic. 5 DensityFunction training and recording of results in the algorithm "count_malware_infections_by_signature_1h_with_features"

Alert: Threat - ML Anomaly Detection of Malware Infection by Signature - Rule

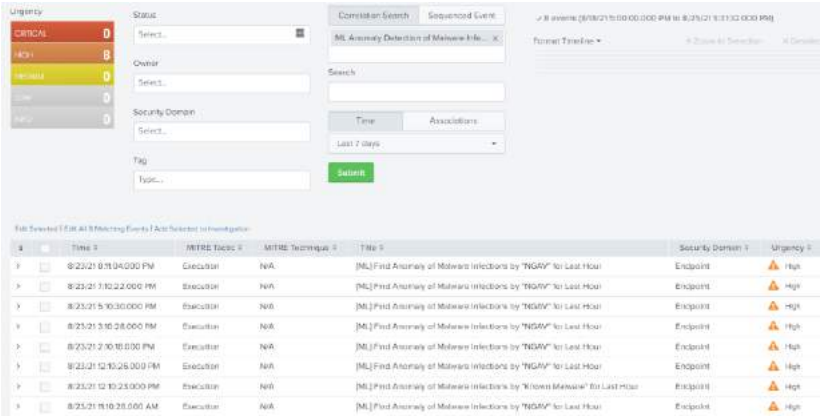
Description: Optional

Search:

```
| tstats summariesonly=true `ela` values(Malware_Attacks.command_line) as
    command_line values(Malware_Attacks.file_path) as file_path count
    allow_old_summaries=true from datamodel=Malware.Malware_Attacks  where
    Malware_Attacks.action=blocked by "Malware_Attacks.signature",
    "Malware_Attacks.dest", "Malware_Attacks.action", "Malware_Attacks.process"
    , "Malware_Attacks.file_name" _time span=1h
| rename "Malware_Attacks.*" as "*"
| search NOT `exclude_malware_signatures`
| eval DayOfWeek=strftime(_time, "%A")
| eval HourOfDay=strftime(_time, "%H")
| eval IsWeekend=if(DayOfWeek="Sunday" OR DayOfWeek="Saturday","Yes","No")
| eval PartOfDay=if(HourOfDay>20 OR HourOfDay<7,"Night","Day")
| eval process=if(process="","-",process)
| stats sum(count) as malware_infections values(dest) as system_list values
    (command_line) as command_line by signature action process DayOfWeek
    HourOfDay PartOfDay IsWeekend _time
| `ele`
| eval LH=if(now()-_time<3600,"1","0")
| apply count_malware_infections_by_signature_1h_with_features threshold=0.01
| search "IsOutlier(malware_infections)"=1
| rex field=dest (?<dest>(\w+)(?=\.softservecom\.com))
| `notable_event_severity_malware_signatures`
| eval urgency=mvdedup(urgency)
| lookup asset_lookup_by_str asset as dest OUTPUT service_importance priority
    as host_priority
| fillnull value="-"
| `risk_score_calculation(dest,system)`
```

Pic.6 Use the "count_malware_infections_by_signature_1h_with_features" algorithm to detect anomalies.

The rule is implemented and works in real conditions. The result of work are 8 alerts in the last 7 days, which is an excellent result in terms of load, as the company has more than 15,000 different types of end-users (servers, laptops, PCs) where EDR is installed.



Pic.7 Results

On this example is shown using of the DensityFunction algorithm, but the application of machine learning to detect other anomalies of different types of malware is possible. We also can use other algorithms for Anomaly Detection, in each case you need to conduct a lot of training on data sets to find the optimal choice.

REFERENCES:

1. Soma Haider, Sinan Ozdemir, Hands-On Machine Learning for Cybersecurity // Packt Publishing Ltd, 2018

2. https://www.splunk.com

3. https://towardsdatascience.com/machine-learning-for-cybersecurity-101-7822b802790b

4. https://www.recordedfuture.com/machine-learning-cybersecurity-applications/

UDK 519.6

EXTENSION OF THE CLASSIC METHOD OF LIE-ALGEBRAIC DISCRETE APPROXIMATIONS FOR THE WAVE EQUATION

Arkadii Kindybaliuk[1], Mykola Prytula[2]

[1]Private entrepreneur, Software Developer

[2]Ivan Franko National University of Lviv

kindybaliuk.arkadii@outlook.com, mykola.prytula@gmail.com

The classic method of Lie-algebraic discrete approximation is applied for solving the Cauchy problem for a partial differential equation with second derivative by time variable, in particular, for the wave equation. A new numerical scheme is proposed for the wave equation.

For a long time the main focus of numerical investigations via the methods of Lie algebraic discrete approximations remained either evolution equations with the first derivative: e.g. advection, heat transfer equations or stationary equations, e.g. elliptic equations [1–8]. Various modifications and generalizations were made for boosting performance, accuracy of numerical computations for solving evolution problems via the method of Lie-Algebraic discrete approximations [4, 6–8]. The key aim of current paper is to extend the method of Lie-Algebraic discrete approximations for such evolution equations that have second derivate by time variable, e.g. wave equation.

The method of Lie-algebraic discrete approximations was firstly developed by Calogero [5] for solving the eigen value problems and later was extended by Samoilenko V.Hr. for solving Cauchy problems for partial differential equations. We would suggest call this method as “classic” method of Lie algebraic discrete approximations since there have been introduced various modifications of the method e.g. the Generalized method of Lie-algebraic discrete approximations [6] and Direct method of Lie-algebraic discrete approximations [7, 8].

The wave equation has its application in the different fields such as acoustics, electromagnetics, and fluid dynamics. Hence efficient numerical solving of this problem is an important problem besides the variety of different approaches.

Considering a bounded domain $\Omega = (a,b) \in R$, time limit $T < +\infty$, cylinder $Q_T = \Omega \times (0, T]$ we take a Banach space $V = W^{\infty,\infty}(\overline{Q_T})$ and formulate the Cauchy problem for the wave equation

$$\begin{cases} find \;\; function\, u(x,t) \; such, \; that \\ u_{tt} = c^2 u_{xx}, \; \forall (x,\, t) \in Q_T \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \; u_t\big|_{t=0} = \psi; \; \varphi, \psi \in W^{\infty,\infty}(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

where $c > 0$ denotes a real non-negative number, $\varphi = \varphi(x), \; \psi = \psi(x)$ denotes initial conditions and functional space $W^{\infty,\infty}(\overline{Q_T})$ denotes the functional space in which all functions and its derivative up to arbitrary order are bounded in the domain $W^{\infty,\infty}(\overline{Q_T}) = \left\{ u : Q_T \to R : D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \; \forall \alpha \in N \right\}$.

The main prerequisite of the method of Lie-algebraic discrete approximations is that the differential operator of the equation should belong to an universal enveloping Heisenberg-Weyl's algebra with the basic elements form the Lie algebra $G = \{1, \; x, \; d/dx\}$, i.e. differential operator within the given problem should be a linear combination or/and superposition of these base elements of Lie algebra [1].

The next important step is generation the finite dimensional discrete quasi representations of the Lie algebra $G = \{1, \; x, \; d/dx\}$ via matrixes $\{I, \; X, \; Z\}$. These matrices act as differential operators within finite dimensional space. These can be obtained via different approaches e.g. Lagrange interpolation [1, 3, 5–8], trigonometric interpolation [2, 4]. We use Lagrange interpolation for our case. It is important to note that these Lagrange polynomials can be treated as the basis elements of finite dimensional space V_h that is a subspace of the original functional space V. Since we use Lagrange basis we denote Ω_h the set of nodes that are nodes for these Lagrange polynomials. We use uniform grid in this paper.

Having evaluated finite dimensional quasi representations $\{I, \; X, \; Z\}$ and computed matrix Z^2 denoting a finite dimensional quasi representation of the differential operator $\partial^2 / \partial x^2$ and it is constructed as a multiplication of matrix Z by itself, we are able to perform the main step: we reduce a problem (1) to the system of ordinary differential equations.

Let n denotes the count of nodes for the spacial variable and $\varphi_{(n)}$, $\psi_{(n)}$ are the values of functions φ and ψ within the nodes of the grid Ω_h. Then we formulate the Cauchy problem for a set of functions $u_{(n)}$

$$\begin{cases} find \;\; functions \;\; u_{(n)} = u_{(n)}(t) \; such, \; that \\ \dfrac{d^2 u_{(n)}}{dt} = c^2 Z^2 u_{(n)}, \; \forall t \in (0, T] \\ u_{(n)}\Big|_{t=0} = \varphi_{(n)}, \; du_{(n)} \big/ dt\Big|_{t=0} = \psi_{(n)} . \end{cases} \tag{2}$$

System (2) can be solved via various approaches and numerical methods, e.g. Runge-Kutta that provides fourth order of convergence with respect to the time variable. Since we have used Lagrange interpolation during construction of finite dimensional quasi representations it is possible to achieve factorial rate of convergence by special variable because generated matrix allows include information regarding all the nodes within the grid.

REFERENCES

1. Бігун О. Метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій у теорії динамічних систем / О. Бігун, М. Притула // Математичний вісник НТШ. – 2004. – Т 1. – С. 24-31.
2. Самойленко В. Гр. Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности / В.Гр. Самойленко // Асимптотические методы в задачах мат. физики. К.: Ин-т математики АН УССР. – 1988. – С. 144–151.
3. Bihun O. The rank of projection-algebraic representations of some differential operators/ O. Bihun, M. Prutula // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 35. Is 1. – pp. 9–21.
4. Bihun O. Discrete approximations of differential equations via trigonometric interpolation / O. Bihun, A. Bren, M. Dyrud, K. Heysse // The European Physical Journal Plus. – 2011. – Vol. 126, 97.
5. Calogero F. Interpolation, differentiation and solution of eigen value problems in more than one dimension / F. Calogero // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, N 13. – pp. 453–459.
6. Kindybaliuk A. Application of the generalized method of Lie-algebraic discrete approximations to the solution of the Cauchy problem with the advection equation / A.Kindybaliuk, M. Prytula // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 204, Is. 3. – P. 280–297.
7. Kindybaliuk A. Direct method of Lie-algebraic discrete approximations for advection equation / A. Kindybaliuk, M. Prytula // Visnyk of Lviv University. – 2018. – Vol. 26. – pp. 70–89.
8. Kindybaliuk A. Direct method of Lie-algebraic discrete approximations for solving heat equations / A. Kindybaliuk, M. Prytula // Visnyk of University. – 2019. – No. 27. – pp. 56–74.

UDK 519.6

APPLICATION OF FEM FOR MODELING OF COMPATIBLE MOVEMENT OF SURFACE AND RIVER FLOWS

Petro Venherskyi, Yaryna Kokovska

Ivan Franko National University of Lviv

petro.venherskyy@lnu.edu.ua, yaryna.kokovska@lnu.edu.ua

A mathematical model of fluid flow in the channels and on the surface depends on many factors that can change fast enough, so this model should be resistant to external and internal influences that significantly modify the solution of the problem. Such changes depend on the relief of the surface on which the river flows, in order to collect data on the area of the river flow, it is good to use geoinformation technologies for the operational and real collection of input data.

To find the dynamics of fluid flow changes on the surface and in the prismatic channel [1], the finite element method is used, which approximates the change of the channel square and the velocity of water over time.

For this, the boundary value problem was formulated that describes the flow of a fluid, the transition from the boundary value problem to the variational one, an approximate numerical solution of the problem with the use of Gaussian quadrature formulas and the method of tridiagonal matrix algorithm for solving the system of linear equations [2] was found.

The initial-boundary problem of fluid motion in the prismatic channel is formulated as follows:

$$\frac{\partial(uf)}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u^2}{C^2R}=i \qquad (2)$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad f\big|_{t=0}=f_0(x),\quad x\in[0,L] \qquad (3)$$

$$u(t,0)=0,\ f(t,0)=0 \qquad (4)$$

where u,f – unknown variable speeds and cross-sectional areas; g = 9,8 m/s2 - acceleration of gravity; c=const - coefficient of Shezi; i = $\sin\delta = const$ -

inclination of the middle bottom line; $B = b_{-} + b_{+} = const$ - width of free surface; R=const - hydraulic radius of the channel.

For this initial-boundary the variational problem was formulated. The scheme of regularization of equations is constructed, which allows it to be used both for flat surfaces of the bottom of the channel, and for those in which the gradient of the slope changes rapidly. The variation problem was solved by the finite element method. Discretization by spatial variables was carried out by dividing the region into triangular finite elements using bilinear basis functions; time discretization was carried out using a one-time recurrent circuit. The model is tested in various test cases. In order to implement the constructed models an application software that allows using algorithms of constructed projection schemes for real territories was developed.

Consider the result of the program work for a test case.

Input results: length x: 1; number of breaks per x: 20; length by t: 1; number of breakdowns by t: 50; acceleration of free fall: 9,8; width of free surface: 20: hydraulic radius of the channel: 1; coefficient of Shezi: 60.

Initial conditions: u0(x) = x, f0(x) = x. Sine of the angle of the inclination of the middle bottom is 0.02.

As a result of the calculations the following results were obtained:

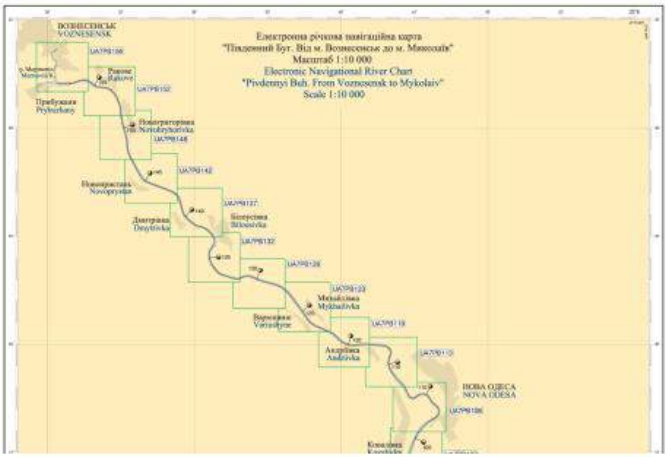


Fig. 1. Electronic map of the Pivdennyi Bug river.

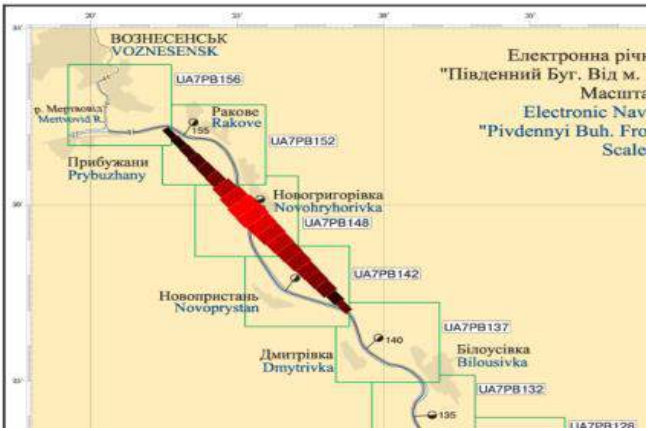


Fig. 2. Change of the cross-sectional area of the river flow by changing the angle of slope of the middle bottom line.

As a result of the calculations the following results were obtained:

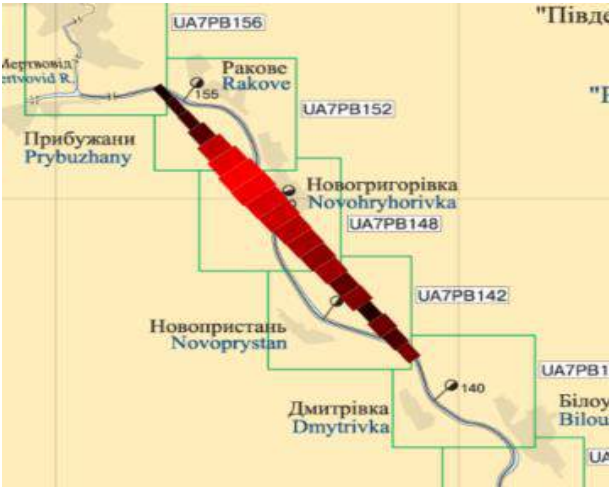


Fig. 3. Change of the speed of the river flow by changing the angle of slope of the middle bottom line.

Consider another example in which the sine of the inclination angle of the middle bottom on the entire length of the segment is 0.05.

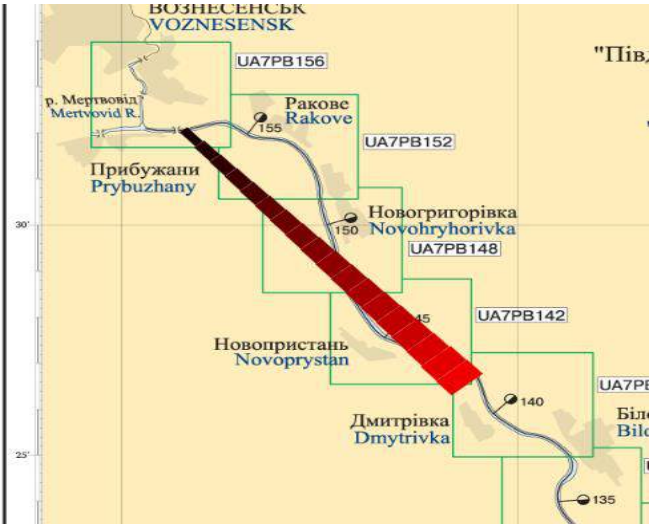


Fig. 4. Change of the cross-sectional area of the river flow with the angle of slope sin δ = 0.5.

In this way, we observe how the water accelerates and increases the area with a stable value of the inclination angle of the middle bottom.

The conditions for connection of streams in the channels are derived and on the test examples the fluid flow in the river network is investigated. The numerical simulation results of channel flows in the hydrodynamic approximation are analyzed on the test examples.

REFERENCES

1. Y. Kokovska, P. Venherskyi Investigation of the stability for established flows in open pseudoprismatic channels, Eureka: physics and engineering. Computer sciences and mathematics, 2016, Vol. 5, pp. 9–15.
2. L.S. Kuchment, Models of processes for the formation of river flow L .: Gidrometeoizdat, 1980. 142 p.

УДК 519.6

ВИЗНАЧЕННЯ ЦІЛЕЙ ТРЕНУВАННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ БЕЗ ЗМІН ЦІЛЬОВОЇ ФУКНЦІЇ ВТРАТ

Микола Баранов , Юрій Щербина

Львівський національний університет імені Івана Франка

Глибокі нейронні мережі являють собою потужний механізм автоматичного втсановлення статистичних зв'язків між данними завдяки оптимізації цільвої функції втрат. В цій роботі розкрито причинно-наслідкові зв'язки між цліьовою функцією втрат та результатом тренування моделі, а власне показано на пркатиці, як зміна архітектури моделі призводить до вирішення іншої задачі при однаковій цільвоій функції.

Механізм узагальнення глибоких нейронних мереж

Глибокі нейронні мережі отримали широкого розповсюдження завдяки властивості генералізації (узагальнення) статистичних зв'язків між даними. Зазвичай, нейронні мережі використовуються для таких задач, в яких встановити статистичний зв'язок між даними без використання алгоритмів машинного навчання практично неможливо (наприклад, задача класифікації зображень). Підготовка тренування нейронної мережі з вчителем складається з трьох основних складових[2]:

- Підготовка моделі
- Підготовка вхідних та очікуваних вихідних даних
- Визначення цільової функції взаємозв'язку між отриманими та очікуваними результатми.

Важливим аспектом є диференційовність цільової функції втрат та моделі. Завдяки цим властивості ми маємо право застосовувати числельні методи оптимізації на основі градієнтних спусків для оптимізації цільвої функції втрат. Параметрами оптимізації виступають власне внутрішні параметри моделі. Таким чином модель навчається згенерувати такі результати, що задовільнять цільову функцію втрат.

Обмеженість використання властивостей узагальнення даних

Моделі на основі глибоких нейронних мереж успішно здатні встановлювати статистичні зв'язки для таких складних задач комп'ютерного бачення як класифікація, сегментація, локалізація об'єктів тощо. Основним обмеженням використання таких моделей на практиці - є умова відповідності розподілу вхідних даних. Модель, що була натренована на розподілі даних P1

працюватиме значно гірше на розподілі P2, при чому точність моделі знижуватиметься відповідно до збільшення відстані Ω(P1, P2)[3].

Відповідно до цього спотсережння, модель не здатна працювати з вхідними даними, природа яких вірізняється від тих даних, які модель бачила раніше. Це відбувається через спосіб, яким навчається модель[4]. Поставлена задача моделі - оптимізувати цільову функцію. Ця задча вирішується шляхом виокремлення певних особливостей вхідних даних, на основі яких можна успішно згенерувати правильну відповідь. Іншими словами, модель вивчає об’єкти з певною долею узагальнення. Рівень цього узагальнення доволі обмежений - модель здатна працювати з небаченими вхідними даними, проте немає змоги працювати з вхідними даними, що мають небачений розподіл.

Адаптація моделей до нового розподілу даних

Розглянемо задачу сегментації зображень. Сегментація зображень - це процес поділу цифрового зображення на множину сегментів (множини пікселів, які також називають об’єктами на зображені). Класичні архітектури типу U-Net мають обмеження, описані вище. Чи можна змінити шлях досягнення оптимізації цліьової фукнції втрат, таким чином, щоб модель не вивчала вхідні дані, а вчилась у більш узагальнений спосіб, наприклад лише порівнюючи вхідні дані з заготовленими прикладами?

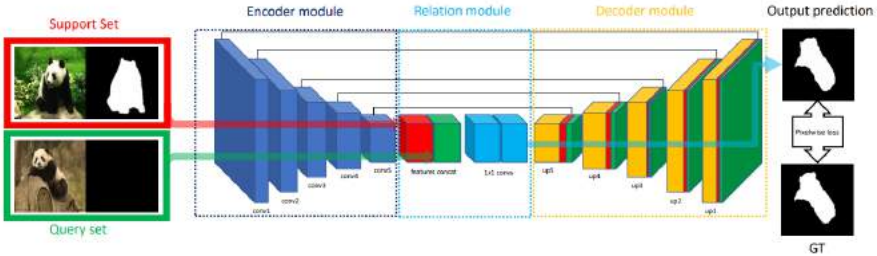


Рис. 1. Архітектура моделі сегментації зображення з множиною підтримки[1]

На Рис. 1 зображено схему архітектури моделі сгенмтації зображень, що приймає на вхід зображення для сегментації та множину підтримки - зображення та приклади правильної сегментації. Обрахована множинв ознак усіх вхідних даних об’єднується в оидн об’єкт, на основі якого формується маска сегментації.

Маючи у тренувальному наборі даних велику кількість різноманітних об’єктів з відповідними масками сегментацій, дана модель без зміни цліьової функції втрат під час тренування не вивчає зображення, а вивчає лише відповідності між множиною запиту та підтримки.

Рис. 2. Приклад сегментації об’єкта, який не був присутній у тренувалньій вибірці

Потенціал зміни цілей тренування нейронних мереж

На прикладі сегментацій зображень, ми бачемо, що даний підхід можна застосовувати до адаптації натренованих моделей до інших даних. Цей підхід може бути застосований також і до інших задач машинного навчання - класифікація зображень розпізнавання тексту, розпізнавання мови тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баранов М. Техніки навчання на малому наборі даних для задачі сегментації / Щербина Ю. // Вісник львівського університету, серія прикладна математика та інформатика, випуск 29, Львів - 2020. с. 110 - 115
2. Нікольський Ю.Системи штучного інтелекту / Нікольський Ю., Пасічник В.,Щербина Ю. // Навчальний посібник. Серія ¾Комп’ютинґ. – ¾Магнолія–2006, Львів – 2013. – 278 с.
3. Xavier G.Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks/ Xavier G., Yoshua B. // Proceedings of the thirteenth international conference onartificial intelligence and statistics, 2010 - с. 249-256
4. Rumelhart D. ELearning representations by back-propagating errors / RumelhartD. E., Hinton G. E., Williams R. J. // Journal Nature, 1983, с. 533-536
5. Bingyi K.Few-shot object detection via feature reweighting / Bingyi K., Zhuang L.,Xin W., Fisher Y., Jiashi F., Trevor D., // Proceedings of the IEEE InternationalConference on Computer Vision - 2019 - с. 8420-8429

УДК 519.6

ДЕЯКІ МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ З НАДКВАДРАТИЧНОЮ ЗБІЖНІСТЮ

Михайло Бартіш, Ольга Ковальчук, Наталя Огородник

Львівський національний університет імені Івана Франка

Olha.kovalchuk@lnu.edu.ua

У тезах буде розглянутий загальний варіант двокрокового методу для мінімізації функції багатьох змінних. Наведена теореми про оцінку збіжності даного методу, якщо виконуються певні умови. Також будемо розглядати конкретні варіанти двокрокових методів. Також наведені оцінки збіжності запропонованих методів

На сьогоднішній день існує низка алгоритмів, що дає можливість вибрати ефективний алгоритм для розв'язування задач мінімізації функції. Це як правило, ітераційні алгоритми. Наявність значної кількості методів розв'язування таких задач вказує на те що не існує універсального методу і його побудувати є не можливо. Нами розглянуто новий підхід до побудови комбінованих методів.

Розглянемо задачу безумовної мінімізації

$$f(x) \to \min, \qquad x \in R^n \tag{1}$$

Розглянемо для розв'язування поставленої задачі наступний метод

$$\begin{aligned} &u_k = \Phi(x_k) \\ &x_{k+1} = x_k - f'(x_k, u_k)^{-1} f'(x_k) \\ &k = 0,1,\ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

де оператор $\Phi(x)$ задовольняє умову

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x) - x^*\| \le K \|x - x^*\|^{\tau} \\ &\tau \in [1,2]. \end{aligned}$$

$f'(x,u)$ - поділена різниця вектор функції $f'(x)$ визначена по Ульму.

Для даного алгоритму має місце теорема про оцінку збіжності

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови

1. $f(x) \in C^1(D)$ де $D = \{x \in R^n, f(x) \le f(x_0)\}$;
2. $\forall x, y, z \in D \quad \|f'(x,y) - f'(x,z)\| \le M \|y - z\|$;

3. $\forall x, y \in D \ \left\| f'(x,y)^{-1} \right\| \le B$;

4. початкове наближення x_0 задовольняє умову

$$q^{\tau} = BMK \left\| x_0 - x^* \right\|^{\tau} < 1$$

тоді послідовність $\{x_k\}$ визначена за (2), коректно визначена та має місце оцінка

$$\left\| x_k - x^* \right\| \le q^{(\tau+1)^k - 1} \left\| x_0 - x^* \right\|$$

Нами також розглянуті алгоритми з конкретними варіантами оператора $\Phi(x)$.

Наприклад, розглянемо наступний вибір коли замість оператора $\Phi(x)$ - використаємо градієнтний метод

$$\begin{aligned} & u_k = x_k - \alpha_k f'(x_k) \\ & f(u_k) - f(x_k) \le -\varepsilon \alpha_k \left\| f'(x_k) \right\|^2 \\ & \varepsilon \in (0;1) \\ & x_{k+1} = x_k - f'(x_k, u_k)^{-1} f'(x_k) \\ & k = 0,1,.... \end{aligned} \tag{3}$$

Для методу (3) доведена відповідна теорема про оцінку збіжності, яка при виконанні відповідних умов має місце

$$\left\| x_k - x^* \right\| \le q^{2^k - 1} \left\| x_0 - x^* \right\|$$

де q – деяка константа яка строго менша 1.

Ще одна цікава модифікація методу (1) може бути представлена у наступному вигляді

$$\begin{aligned} & u_k = x_k - f'(x_k, x_k - \alpha_k f'(x_k))^{-1} f'(x_k) \\ & x_{k+1} = x_k - f'(x_k, u_k)^{-1} f'(x_k) \\ & k = 0,1,.... \end{aligned} \tag{4}$$

Для даного алгоритму, при виконанні певних умов теореми буде справедлива наступна оцінка:

$$\left\| x_k - x^* \right\| \le q^{3^k - 1} \left\| x_0 - x^* \right\|$$

де $q < 1$

УДК 519.6

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРІОРИТЕТІВ ВДОСКОНАЛЕННЯ РОБОТИ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

О. Ю. Бенько, О. П. Гнатишин

orysia.benko@gmail.com oleksandra.hnatyshyn@lnu.edu.ua

Львівський національний університет імені Івана Франка

У роботі наведено результати застосування методу аналізу ієрархій Т. Сааті [1] для визначення пріоритетів вдосконалення роботи та оцінки напрямів розвитку закладів вищої освіти з метою забезпечення конкурентоспроможності серед інших університетів.

Постановка проблеми. В умовах сьогоднішнього розвитку суспільства дуже важливим є питання розвитку закладів вищої освіти (ЗВО). Керівники ключових університетів приділяють спеціальну увагу стратегічному розвитку вишів. Відсутність у точних пріоритетів або некоректно обраних пріоритетів призводить до зниження ефективності діяльності університету і приглушення розвитку. З огляду на це постає проблема вибору пріоритетів розвитку університету, яка дозволить підвищити конкурентоспроможність університету.

Мета. Демонстрація доцільності і ефективності застосування методу аналізу ієрархій (МАІ) для допомоги керівникам вищих навчальних закладів вибрати найкращі шляхи покращення позиції університету на освітньому ринку, задовольнити потреби студентів та викладачів.

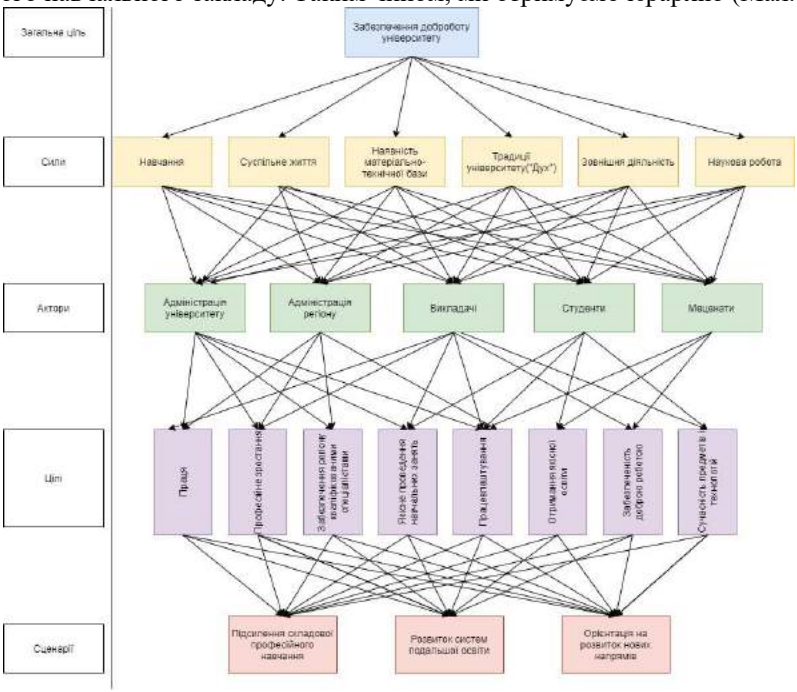
Виклад основного матеріалу. Суть МАІ [1,2] полягає в створенні ієрархічної моделі, визначенні власних векторів та власних чисел квадратних обернено симетричних матриць, перевірці узгодженості результатів. Послідовність проведення аналізу моделі ієрархій: дослідження впливу критеріїв на спільну мету, дослідження впливу альтернатив на критерії, оцінка впливу альтернатив на спільну ціль.

Побудова ієрархічної моделі. Питання, яке нас цікавить, пов'язане з університетом; ми прагнемо визначити сценарій, за яким з найбільшою ймовірністю буде забезпечено покращення роботи університету. Це і буде нашою метою.

На неї впливають такі сили: навчання, суспільне життя, наявність матеріально технічної бази, традиції університету(дух та атмосфера), зовнішня діяльність та наукова робота.

Ці сили визначаються такими акторами (дійовими особами): адміністрацією університету, адміністрацією регіону, професорсько-викладацьким складом, студентами та меценатами.

Різні актори мають певні цілі: професорсько-викладацький склад хоче зберегти свою роботу, професійно зростати, якісно проводити навчальні заняття, допомагати з працевлаштуванням студентів, надати якісну освіту, бути забезпеченим якісною роботою та зацікавлений у викладанні сучасних технологій; студенти можуть бути зацікавлені в отриманні якісної освіти та якісно проведених навчальних занять, працевлаштуванню та сучасністю предметів і технологій; адміністрація вищого навчального закладу та регіональна адміністрація зацікавлені у безпосередній праці, професійному зростанню, забезпеченню регіону кваліфікованими спеціалістами та працевлаштуванні студентів; меценати є зацікавлені в наданні якісної освіти, забезпеченні доброю роботою та працевлаштуванні студентів. Нарешті, є кілька можливих сценаріїв, таких як: підсилення складової професійного навчання, розвиток систем подальшої освіти та орієнтація на розвиток нових напрямів. Сценарії визначають ймовірність досягнення цілей, цілі впливають на акторів, актори направляють сили, які, нарешті, впливають на розвиток вищого навчального закладу. Таким чином, ми отримуємо ієрархію (Мал. 1).



Мал.1. Ієрархія для обрання сценарію розвитку закладу вищої освіти.

Визначення вектора пріоритетів та оцінювання узгодженості результатів. Визначають пріоритети, які представляють відносну важливість або перевагу елементів на кожному рівні ієрархічної моделі. Що більша величина пріоритету, то більш значущим є відповідний елемент. Оцінка відбувається за допомогою дев'ятибальної шкали відносної властивості МАІ. Результати

порівнянь формують матрицю, де попарно порівнюють відносну важливість лівих елементів таблиці (критеріїв) з елементами (критеріями) вгорі. В оцінюванні були присутні 5 експертів. Всі оцінки проводилися з значення індексу узгодженості ієрархії 20%.

Для оцінок експерта були обраховані матриці та результати парних порівнянь для всіх таблиць усіх рівнів кожного з експертів і обраховано власні вектори які забезпечують впорядкування пріоритетів. Сума всіх елементів вектора локальних пріоритетів для кожного з експертів була рівна ~ 1.

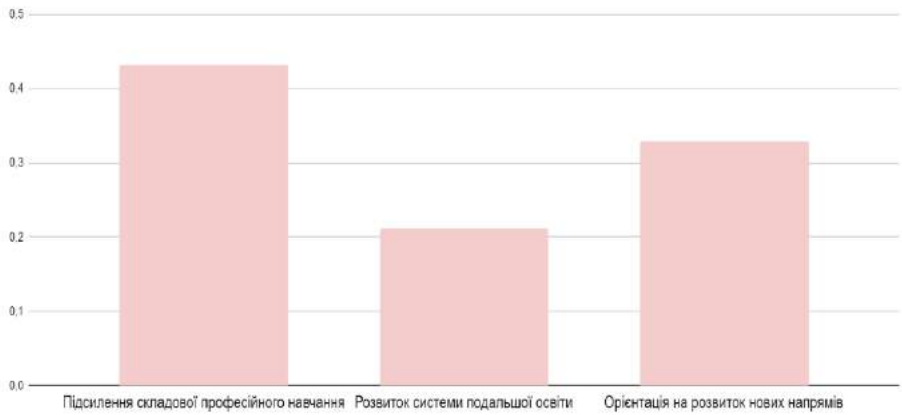
Розрахунок узгодженості для ієрархії загалом. Агрегування тверджень експертів здійснюють за допомогою середнього геометричного.

$$a_{ij}^{A} = \sqrt[n]{\left(\prod_{k=1}^{n} a_{ij}^{k}\right)}$$

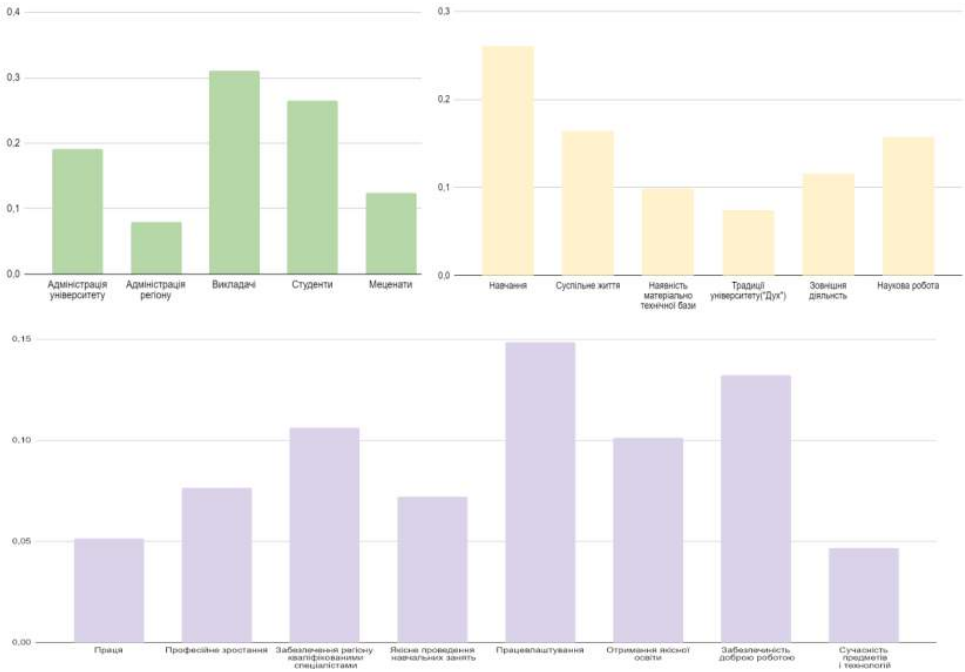
Отримали результат для кожного з рівнів де A - це Сили, B - це актори, C - цілі, D - сценарії.

A:[0.26105, 0.16490, 0.09876, 0.07435, 0.11559, 0.15758]
B:[0.19111, 0.07972, 0.31072, 0.26502, 0.12383]
C:[0.05143, 0.07670, 0.10617, 0.07226 0.14867 0.10122, 0.13213, 0.04672]
D:[0.43091, 0.21178, 0.32933]

Можемо побачити на діаграмах нижче результати



Мал 2. Діаграма для рівня сценаріїв



Мал 3. Діаграма для рівня акторів, сил, цілей.

Висновки. Підсумовуючи вищенаведене, можна стверджувати таке:

- **подальші дослідження варто спрямувати у напрямі на розвиток нових напрямів на рівні сценаріїв;**
- **серед цілей варто відзначити працевлаштування, забезпеченість регіону кваліфікованими спеціалістами та отримання якісної освіти;**
- **серед акторів варто розвивати викладачів і студентів;**
- **серед сил звернути увагу на навчання та наукову роботу.**

Перспективи подальшого розвитку. Щодо подальших досліджень у цьому напрямі можна стверджувати одне: метод аналізу ієрархій доцільно використовувати для вдосконалення роботи закладів вищої освіти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий Москва «Радиоисвязь» 1993

2. А.В. Катренко Системний аналіз Видавництво «Новий світ - 2000» Львів 2009

УДК 519.6:517.958

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

Ірина Бернакевич, Ірина Козій

Львівський національний університет імені Івана Франка

iryna.bernakevych@lnu.edu.ua, iryna.koziy@lnu.edu.ua

Сформульовано задачу про вільні коливання тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення. Для знаходження власних частот та форм вільних коливань оболонок застосовано числовий підхід на основі методу скінченних елементів та методу ітерацій у підпросторі. Наведено низку числових прикладів. Порівняно отримані числові розв'язки із наведеними в літературі.

Тонкостінні оболонки є одними з найпоширеніших елементів конструкцій сучасного машинобудування та будівельної галузі. Дослідження динамічної поведінки, зокрема, визначення власних частот таких конструкційних елементів, є необхідне при проектуванні оболонкових конструкцій, щоб запобігти резонансним явищам, які можуть призвести до їх руйнування. Методика розв'язування задач про вільні коливання оболонок досить складна та, зазвичай, потребує числових методів, заснованих, зокрема, на варіаційній побудові розглядуваних задач.

З використанням співвідношень теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення (шестимодальний варіант), сформульовано задачу про вільні коливання податливих до зсуву та стиснення тонких оболонок. Особливість моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка–Міндліна вектора переміщень пружного тіла за змінною товщиною зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні.

Результуючі співвідношення моделі містять невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень точок серединної поверхні оболонки $u = \left(u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right)$.

Дослідження частот і форм вільних коливань приводить до так званої узагальненої задачі на власні значення

$$K\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}, \qquad (1)$$

де ω – колова частота вільних коливань, $\tilde{q}$ – вектори, що характеризують амплітуду шуканого вектора узагальнених переміщень, K – матриця січної жорсткості, M – матриця мас. Для знаходження власних чисел та власних векторів такої задачі в числових методах лінійної алгебри добре відомий метод ітерацій у підпросторі. За його допомогою в межах єдиного ітераційного алгоритму можна визначити декілька найменших власних значень та відповідних їх власних векторів, що відповідають формам вільних коливань.

Отримано розв'язки низки модельних задач, на яких продемонстровано ефективність запропонованої числової методики. З аналізу наведених результатів видно, що значення частот вільних коливань, знайдені за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув і стиснення, є більші порівняно з обчисленими згідно з іншими теоріями оболонок. За врахування стиснення оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже, й руйнуванню. Отримані результати добре узгоджуються з наведеними в літературі та підтверджують ефективність запропонованої методики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вагін П.П. Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П.П. Вагін, І.Я. Шот // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Григоренко А.Я. Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины / А.Я. Григоренко, С.А. Мальцев // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 63–69.
4. Зубаль Б.А. Числовий аналіз вільних коливань оболонок, податливих до трансверсальних зсуву та стиснення / Б.А. Зубаль, І.Я. Козій, О.В. Костельна, Г.А. Шинкаренко // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18 – С. 67–73.
5. Савула Я.Г. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями / Я.Г. Савула, Н.П Флейшман. – Львов: Вища школа, 1989. – 172 с.
6. Awrejcewicz J. Elastic and Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Structural Members / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko. – Springer, 2020. – 602 p.
7. Marchuk M. Natural frequencies of layered elongated cylindrical panels for geometrically nonlinear deformation at discrete consideration of components / M. Marchuk, T. Goriachko, V. Pakosh // Vibrations in Physical Systems. – 2016. – 27. – P. 255–264.

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЗАЛЕЖНІСТЮ ЧАСТОТ ВІД ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ

Я.Й. Бігун, М.О. Пастула

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

y.bihun@chnu.edu.ua

Методом усереднення багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) досліджувалися у багатьох працях, зокрема в монографії [1, 2]. Обґрунтуванню методу усереднення для багаточастотних систем із запізненням і початковими та багатоточковими і інтегральними умовами присвячені дисертації [3-5]. У даній роботі знайдено умови ісування і єдиності розв'язку багаточастотної системиіз лінійно перетвореними аргументами у повільних і швидких змінних та обґруновано метод усереднення за швидкими змінними.

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

де $\tau \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $a \in D \subset R^m$, $\varphi \in T^m$ – тор в R^m, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, ..., a_{\lambda_p})$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, ..., \varphi_{\theta_q})$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_i}(\tau) = \varphi(\theta_i \tau)$, $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_p \le 1$, $0 < \theta_1 < ... < \theta_q \le 1$.

Усереднення за швидкими змінними $\varphi_{\theta_1}, ..., \varphi_{\theta_q}$ система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X(\tau, \bar{a}_\Lambda),$$
$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \bar{a})}{\varepsilon} + Y(\tau, \bar{a}_\Lambda). \tag{2}$$

Для систем (1) і й аналогічно для (2) задаються багатоточкові умови вигляду

$$\sum_{v=1}^{r}\alpha_v a(\tau_v)=d_1, \quad \sum_{v=1}^{r}\beta_v \varphi(\tau_v)=d_2, \tag{3}$$

де $0\le\tau_1<\tau_2<...<\tau_r\le L$, $d_1\in R^m$, $d_2\in R^m$, числа α_i і β_i такі, що $\sum_{i=1}^{r}|\alpha_i|\ne 0,\ \sum_{i=1}^{m}|\beta_i|\ne 0$.

Для обґрунтування методу усереднення принциповою є умова незастрягання системи у малому околі резонансів. Для звичайних диференціальних рівнянь умовою резонансу в точці τ є рівності

$$\sum_{i=1}^{m}k_v\omega_v(\tau,a(\tau_{vi}\varepsilon))\ \square\ 0, \quad k_i\in Z, \quad \sum_{i=1}^{m}|k_i|\ne 0.$$

Для системи із лінійно перетвореними аргументами (1) в [3] запропоновано умову резонанс частот

$$\sum(k^{(v)},\omega(\theta_v\tau,a(\theta_v\tau,\varepsilon))\theta_v\ \square\ 0, \tag{4}$$

де $k^{(v)}\in Z^m, \sum_{v=1}^{m}\left\|k^{(v)}\right\|\ne 0, (\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток.

Умовою виходу із резонансів служить виконання умови

$$V(\tau,a,b_1,...,b_{m+1})\ne 0, \tag{5}$$

де $\tau\in[0,L]$, $a\in D_\sigma$, $b_v\in D_\sigma, v=\overline{1,m+1}$, D_σ – σ-окіл розв’язку усередненої задачі в D_σ, V – визначник Вронського порядку mq, побудований за системою функцій $\{\omega_{\theta_1},...,\omega_{\theta_q}\}$.

При виконанні загальних умов гладкості щодо правих частин системи (1) й умови виходу з резонансу (5) для досить малого $\varepsilon_0>0$ доведено існування єдиного розв’язку задачі (1), (3) й одержано оцінку

$$\left\|a(\tau,\varepsilon)-\bar{a}(\tau)\right\|\le c_1\varepsilon^{\alpha}, \alpha=(2m)^{-1}, \tag{6}$$

яка виконується для всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Для швидких змінних асимптотика $O(\varepsilon^{\alpha})$ не досягається, оскільки

$$\left\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\right\|\le c_2\varepsilon^{1-\alpha}.$$

Окремо досліджено випадок одночастотної системи диференціальних рівнянь ($m=1$) вигляду (1). Умова виходу із резонансів у цьому випадку така:

$$\omega(\tau,a)\frac{d}{d\tau}\omega(\theta\tau,a_\theta)-\omega(\theta\tau,a_\theta)\frac{d}{d\tau}\omega(\tau,a)\neq 0,$$

коли $\tau\in[0,L]$, $a,a_\theta,a_{\theta^2}\in D_\sigma$.

Зауважимо, що для одночастотної системи ЗДР ефект резонансу не досягається, якщо $\omega(\tau,a)\geq c_2>0$. При цьому в оцінці (6) $\alpha=1$, тоді як для системи рівнянь з лінійно перетвореним аргументом ($0<\theta_1<\theta_2=1$) асимптотика $O(\sqrt{\varepsilon})$.

На мові Python створено програму числового моделювання системи (1) з умовами (3) і відповідної усередненої задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Kluwer, Dordrecht–Boston–London, Netherlands, 2004. 317 p.
2. Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system Russian Mathematical Surveys 2104, 69 (5), 771-843.
3. Бігун Я. Й. Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02 – диференціальні рівняння. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2009. 298 с.
4. Краснокутська І. В. Усереднення багаточастотних систем з нетеровими крайовими умовами: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 – диференціальні рівняння. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Чернівці, 2014. 133 с.
5. Скутар І.Д. Асимптотичне інтегрування систем диференціальних рівнянь із малим параметром при частині похідних: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 – диференціальні рівняння. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Чернівці, 2021. 128 с.

УДК 519.8

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ ДИНАМІКИ ІНФЕКЦІЙНОГО ЗАХВОРЮВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВИХ ЗБУРЕНЬ ТА ІМПУЛЬСНИХ ВПЛИВІВ

Андрій Бомба[1], Сергій Барановський[1], Сергій Ляшко[2]

[1]Національний університет водного господарства та природокористування

[2]Київський національний університет імені Тараса. Шевченка

abomba@ukr.net

Узагальнено математичну модель Марчука інфекційного захворювання для урахування дифузійних збурень та різного роду імпульсних впливів. Відповідну сингулярно збурену модельну задачу із запізненням зведено до послідовності задач без запізнення, для яких отримані відповідні асимптотичні розвинення розв'язків. Продемонстровано модельне зниження максимального рівня кількості антигенів в епіцентрі зараження унаслідок їх дифузійного «розмивання»

Незважаючи на досягнення медичної науки інфекційні захворювання, особливо сьогодні в умовах пандемії Covid-19, залишаються відчутною проблемою та становлять очевидну загрозу суспільству. Вже усталеним підходом до дослідження інфекційних захворювань різної природи є їх розгляд з єдиної позиції як процесів взаємодії імунної системи зі збудниками хвороби. Такий підхід сприяє також і широкому застосуванню методів математичного моделювання, які дають можливість виявляти характерні особливості функціонування імунної системи організму в умовах вірусного захворювання, аналізувати різні модельні програми лікування, які ґрунтуються на управлінні функціонуванням імунної системи. У наведеній в [1] так званій найпростішій (базовій) моделі інфекційного захворювання базові механізми гуморальної імунної відповіді на виявлені в організмі віруси описуються системою нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням, які визначають швидкості зміни кількості антигенів, плазматичних клітин, антитіл та міри ураження органу-мішені. Завдяки невеликій кількості змінних найпростішої моделі інфекційного захворювання можливо встановити та обґрунтувати властивості її розв'язків. Зокрема, в [1] показано, що стан здорового організму описується стаціонарним розв'язком, яких за певних умов є асимптотично стійким та зберігає таку стійкість при зараженні здорового організму дозою антигену, що не перевищує деякого рівня імунологічного бар'єру.

Закладені в базовій моделі інфекційного захворювання підходи розвинені та розширені в моделях противірусної і протибактеріальної імунної

відповіді [1]. В цих моделях поряд з механізмом гуморальної імунної відповіді, який визначається продукуванням антитіл, враховано механізм імунного захисту клітинного типу, що пов'язаний з накопиченням цитотоксичних Т-лімфоцитів-ефекторів. В [1] зазначається, що антитіла нейтралізують антигени в крові чи лімфі, але не здатні нейтралізувати віруси всередині вже заражених клітин. За виявлення і знищення заражених вірусом клітин в імунній системі організму відповідають цитотоксичні Т-лімфоцити-кілери.

При побудові як базової, так і моделей противірусної і протибактеріальної імунної відповіді та ряду інших моделей припускалося, що середовище «організму» є однорідним, в якому усі діючі фактори процесу завдяки «миттєвому» перемішуванні у будь-який момент часу мають рівномірний розподіл. В дійсності ж виявлення вірусів, заражених ними клітин та запуск відповідних механізмів імунного захисту не відбувається миттєво після вторгнення антигенів в середовище організму. Тобто якась частина антигенів не буде відразу знешкоджена імунною системою та матиме можливість проникнути всередину клітин органу-мішені, розмножитись в них та після руйнування клітин утворити осередки зараження з більш високою концентрацією антигенів. З часом породжені антигени поширюватимуться від таких осередків зараження до навколишніх ділянок, збільшуючи зону ураження та відповідно зменшуючи кількість антигенів у вихідних епіцентрах зараження. В роботах [2-5] запропоновано підхід для урахування малих просторово розподілених дифузійних впливів на динаміку вірусного захворювання. Зокрема, в [4,5] при модифікації базової моделі інфекційного захворювання для урахування впливу на функціонування імунної системи введених лікарських речовин додані ще й члени, які описують дифузійні збурення основних компонент динамічного процесу.

Найпростіша модель інфекційного захворювання, моделі імунної відповіді та їх модифікації після оцінки параметрів за клінічними даними дають можливість прогнозувати характер протікання та результат захворювання, виявляти та досліджувати найбільш загальні закономірності зовнішнього впливу на динаміку процесу, моделювати управління імунною відповіддю організму, будувати, аналізувати та оцінювати різноманітні програми лікування.

Але як і в традиційних моделях інфекційного захворювання та противірусної (протибактеріальної) імунної відповіді, так і в їх модифікаціях [2-5], що враховують просторово розподілені дифузійні збурення, не розглядаються цілеспрямовані лікувальні імунологічні чи фармакологічні впливи імпульсного типу. З метою «заповнення» цієї прогалини запропоновану в [5] модифікацію базової математичної моделі впливу імунотерапії на динаміку інфекційного захворювання з урахуванням малих дифузійних збурень узагальнено шляхом введення додаткових членів, що описують різного роду близьких до імпульсних впливів. Відповідна модельна задача із запізненням зведена до послідовності задач без запізнення, для яких

побудовані представлення шуканих функцій у вигляді асимптотичних рядів як збурення розв'язків відповідних вироджених задач.

За результатами числових експериментів для різних ситуаційних станів проілюстровано зниження максимальних значень концентрації антигенів в епіцентрах зараження унаслідок їх дифузійного «перерозподілу». Зокрема, проілюстровано, що навіть у випадку, коли початкова концентрація чи інтенсивність імпульсного джерела вірусних частинок в певній частині осередку зараження перевищуватиме деяке критичне значення за рахунок дифузійного «перерозподілу» за певний невеликий проміжок часу надкритична концентрація вірусних частинок може зменшитись до значення вже нижчого за критичний рівень і подальше знешкодження антигенів може забезпечуватись наявним рівнем антитіл та більш ощадливою процедурою введення ін'єкційного розчину з донорськими антитілами. Тобто, у межах даної моделі «гостроту» протікання вірусного захворювання в таких випадках можливо знизити більш раціонально, з меншими затратами.

Розроблена обчислювальна процедура може бути елементом конструювання спеціалізованих експертних систем для прийняття широкого комплексу рішень типу: чи можемо в даному випадку згідно значень відповідних вхідних даних, зокрема, щодо інтенсивності дифузійного «перерозподілу», величини території зараження, розподілу та інтенсивності імпульсних джерел вірусних антигенів тощо покластися на наявний в організмі рівень імунного захисту, або, в іншому випадку, здійснювати зовнішній лікувальний вплив. А в ситуації, коли прийнято рішення про необхідність здійснення такого впливу, зокрема, за допомогою ін'єкцій донорських антитіл, встановлювати найбільш раціональний час, періодичність, величину зони та спосіб їх введення, прийнятну концентрацію антитіл в кожному ін'єкційному розчині.

Перспективним є урахування такого роду просторово розподілених дифузійних збурень в умовах імпульсних впливів при дослідженні процесів захворювань на основі більш загальних моделей, зокрема, моделей противірусної і протибактеріальної імунної відповіді Марчука-Петрова [2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
2. Bomba A. Ya. Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process / A.Ya. Bomba, S.V. Baranovsky, M.S. Pasichnyk, O.V. Pryshchepa // Mathematical modeling and computing. – 2020. – Vol. 7, No. 2, pp. 310–321.
3. Барановський С.В. Узагальнення математичної моделі противірусної імунної відповіді Марчука-Петрова з урахуванням впливу малих просторово розподілених дифузійних збурень / С.В. Барановський, А.Я.

Бомба // Математичне та компютерне моделювання. Серія: Технічні науки – Вип. 21. – Кам'янець-Подільський: КПНУ. – 2020. – С. 5–24.
4. Бомба А.Я. Моделювання малих просторово розподілених впливів на динаміку інфекційного захворювання в умовах типу фармакотерапії / А.Я. Бомба, С.В. Барановський // Журнал обчислювальної та прикладної математики –№ 1 (133) – 2020. – С. 5-17.
5. Bomba A.Ya. Modeling influence of small-scale diffusion perturbations on the development of infectious diseases under immunotherapy / A.Ya. Bomba, S.V. Baranovskii, O.V. Pryshchepa // Proceedings of the International scientific and practical conference " Modeling, Control and Information Technologies", 5-7 November 2020, Rivne, Ukraine. – Rivne: National University of Water and Environmental Engineering, 2020. – pp.15-18.
6. Bomba A. Modeling of Infectious Disease Dynamics under the Conditions of Spatial Perturbations and Taking into account Impulse Effects/ A. Bomba, S. Baranovskii, M. Pasichnyk, O.V. K. Malash // Proceedings of the 3rd International Conference on Informatics & Data-Driven Medicine (IDDM 2020), Växjö, Sweden, November 19-21, 2020. – pp. 119-128
7. Барановский С.В. Принятие решений при моделировании динамики инфекционного заболевания с учетом диффузионных возмущений и сосредоточенных воздействий / С.В. Барановский, А.Я. Бомба, С.И. Ляшко // Проблемы управления и информатики. – 2021. – № 3. – С. 115-129

УДК 517.9: 621.382.233

ПРИМЕЖОВІ ПОПРАВКИ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ХАРАКТЕРИСТИК P-I-N-СТРУКТУР

Бомба А.Я., Мороз І.П.

Національний університет водного господарства та природокористування

abomba@ukr.net, igor_moroz@yahoo.com

Розглядається нелінійна крайова задача моделювання характерис-тик пристроїв напівпровідникової електроніки. Аналіз задачі про-водиться методом примежових функцій. Розкрито роль при-межових поправок у математичній моделі формування електрон-но-діркової плазми p-i-n-структур.

Математичне моделювання процесів у напівпровідниковій електроніці в межах застосування гідродинамічного наближення пов’язано із вирішенням крайових задач для нелінійної системи рівнянь неперервності струму носіїв

заряду, Пуассона та теплопровідності [1].

Аналогічна задача ставиться і для пошуку розподілу концентрації електронно-діркової плазми та теплового поля в активній області p-i-n-діодів [2]. Рівняння математичної моделі при цьому описують дифузійно-дрейфові, рекомбінаційно-генераційні процеси в і-області p-i-n-діодів, процеси розігріву плазми внаслідок виділення в об'ємі і-області Джоулевого тепла та вивільнення енергії рекомбінації. Відповідні початкові та граничні умови визначають початковий стан плазми, процеси інжекції та рекомбінації носіїв заряду на межі активної області.

Постановка модельної нелінійної крайової задачі містить природним чином сформований малий параметр так, що рівняння Пуассона є сингулярно збуреним, а рівняння теплопровідності – регулярно. Цим забезпечується можливість залучення асимптотичних методів для її аналітико-числового розв'язання, зокрема методу примежових функцій [3,4]. Згідно із зазначеним методом розв'язки задачі знаходимо у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра задачі. Асимптотичні ряди містять регулярні частини та примежові поправки, що корегують шукані функції поблизу ділянок межі активної області, через які відбувається інжекція електронів і дірок. Підстановка асимптотичних рядів у рівняння початкової нелінійної крайової задачі та проведення стандартної процедури прирівнювання відповідних множників дозволила привести початкову задачу до послідовності лінійних крайових задач, які, зокрема, включають традиційні постановки задачі амбіполярної дифузії.

Відмітимо, що у випадку, коли фізична область задачі канонічна, розв'язки лінійних крайових задач відносно нульових членів асимптотик можна знайти у аналітичному вигляді. Якщо межа активної області містить криволінійні ділянки, то шляхом залучення методу конформних відображень здійснюється перетворення фізичної області задачі до канонічного виду [5].

Встановлено, що саме примежові поправки у функціях концентрації електронів і дірок описують накопичення зарядів в зонах інжектуючих контактів активної області p-i-n-структури, а зв'язана із розподілом зарядів примежова частина функції градієнта потенціалу визначає напруженість електростатичного поля в межах усієї активної області. Наявність інформації про розподіл електростатичного поля дозволяє здійснювати постановку та розв'язання низки нових задач. Таких, наприклад, як задача розрахунку температурного поля p-i-n-структур, моделювання вольт-амперних характеристик, задача оптимізації параметрів p-i-n-структур тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Sze S. Physics of Semiconductor Devices / S. Sze, K. Kwok. – New York: Wiley-Interscience, 2006. – 815 p. doi: https://doi.org/10.1002/0470068329
2. Бомба А.Я. Математичне моделювання дифузійно-дрейфового процесу в активній області p-i-n діодів з врахуванням розігріву та рекомбінації методами теорії збурень / А. Я. Бомба, І.П. Мороз // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. – № 1 (135). – С. 29-35.
3. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // УМН. – 1957. – № 12(5). – С. 3-122.
4. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
5. Fuchs, B.A. Functions of a complex variable and some of their applications / B.A. Fuchs, B.V. Shabat. – Pergamon Press, 1964. – 458 p. doi: https://doi.org/10.1016/C2013-0-01663-5

УДК 519.6

ПРО МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ

Ігор Борачок , Роман Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка

ihor.borachok@lnu.edu, roman.chapko@lnu.edu.ua

Розглядається наближене розв'язування нестаціонарних задач Діріхле у двозв'язних областях. За допомогою перетворення Лагерра вихідну задачу редуковано до послідовності стаціонарних задач, які в свою чергу дискретизовано, використовуючи метод фундаментальних розв'язків (МФР).

Вступ

МФР, запропонований вперше грузинськими вченими В. Купрадзе і М. Алєксідзе [1], широко застосовується в обчислювальній математиці та

прикладних застосуваннях для наближеного розв'язування стаціонарних крайових задач. Суть методу полягає у поданні наближеного розв'язку крайової задачі у вигляді лінійної комбінації звужень фундаментального розв'язку диференціального рівняння. Невідомі коефіцієнти визначаються методом колокації з крайових умов.

Поширення МФР на випадок нестаціонарних задач розглянуто в [2]. Використовуючи перетворення Лапласа або метод Роте по часовій змінній, вихідну задачу редукують до стаціонарних крайових задач для неоднорідного рівняння Клейна-Гордона. За допомогою методу радіальних базисних функцій будується частинний розв'язок неоднорідного рівняння і за МФР – загальний наближений розв'язок однорідного рівняння.

Необхідність наближеного обчислення часткового розв'язку вносить додаткову похибку і ускладнює розв'язування задачі. В [3, 4] запропоновано підхід, позбавлений цього недоліку.

Опишемо суть методу на прикладі першої початково-крайової задачі у двозв'язній області.

Постановка задачі та дискретизація за часовою змінною

Нехай задана $D \subset \mathbb{R}^d, d = \{2, 3\}$ – обмежена двозв'язна область з межами Γ_1, Γ_2. Необхідно знайти розв'язок задачі:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в} \quad D \times (0; \infty), \\ \qquad a \geq 0, b \geq 0, a + b \neq 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u(x, 0) = 0, \qquad x \in D \\ \quad u = f_l \quad \text{на} \quad \Gamma_l \times (0; \infty), l = 1,2, \end{cases} \tag{1}$$

де a, b – задані постійні, f_1, f_2 – задані функції. Будемо вважати, що задача (1) має єдиний класичний розв'язок.

Для часткової дискретизації задачі (1) за часовою змінною, використаємо перетворення Лагерра [4]. Тоді функцію u можна подати в такому вигляді

$$u(x, t) = \kappa \sum_{p=0}^{\infty} u_p(x)\, L_p(\kappa t), \tag{2}$$

де $\kappa > 0$ – фіксований параметр, L_p – поліноми Лагерра, і u_p – розв'язки стаціонарних задач

$$\begin{cases} \Delta u_p - \gamma^2 u_p = \sum_{m=0}^{p-1} \beta_{p-m} u_m & \text{в } D, \\ u_p = f_{p,l} & \text{на } \Gamma_l, \quad l = 1,2, \end{cases} \qquad (3)$$

де $\gamma^2 = \beta_0, \beta_p = (p+1)\kappa^2 a + b\kappa,$ $f_{p,l}$ – коефіцієнти Фур'є-Лагерра для функцій f_l, $p = 0, 1, \ldots, l = 1,2.$

Метод фундаментальних розв'язків

Для послідовності рівнянь в (3) можна знайти послідовність фундаментальних розв'язків (див. [3,4]) $\{\Phi_p(x,y), p = 0, 1, \ldots, x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y\}$. Тоді наближення до u_p за МФР мають вигляд

$$u_p(x) \approx u_{p,n} = \sum_{m=0}^{p} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \Phi_{p-m}(x, y_k), x \in D, \qquad (4)$$

для $n > 0, \alpha_{mk} \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, \ldots, p$. Так звані точкові джерела y_k є відомі і розміщені поза областю D. Невідомі коефіцієнти α_{mk} в поданні (4) визначаються за методом колокації на межах Γ_1, Γ_2, тобто з системи лінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \Phi_0(x_{jl}, y_k) = f_{p,l}(x_{jl}) - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \Phi_{p-m}(x_{jl}, y_k),$$

де $n > 0, j = 1, \ldots, n/2, l = 1,2, x_{jl} \in \Gamma_l$ – вибрані точки колокації.

Відповідно до (2) і (4) наближений розв'язок задачі (1) має вигляд

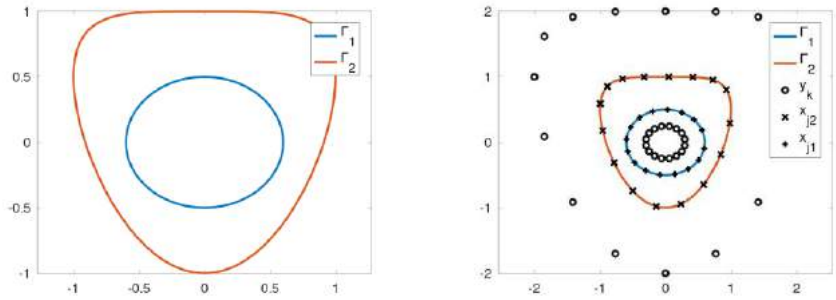
$$u(x,t) \approx u_{N,n}(x,t) = \kappa \sum_{p=0}^{N} \sum_{m=0}^{p} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \Phi_{p-m}(x, y_k) L_p(\kappa t), (x,t) \in D \times (0; \infty).$$

Чисельні експерименти

Продемонструємо результати чисельних експериментів для теплового рівняння $(a = 0, b = 1)$ у випадку двовимірної області. Нехай межі Γ_1, Γ_2 задані таким чином

$$\Gamma_1 = \{x_1(s) = (0.6\cos s, 0.5\sin s), s \in [0, 2\pi]\},$$
$$\Gamma_2 = \{x_2(s) = (\cos s, \sin s - 0.5 \sin^2 s + 0.5), s \in [0, 2\pi]\}.$$

Вигляд області наведено на Рис. 1а, а розподіл точок джерела і точок колокації на Рис. 1б.



а) Вигляд області D б) Розподіл точок y_k, x_{jl}

Рис. 1. Вигляд області D і розподіл точок джерела та колокації для випадку $n = 32$.

В ролі точного розв'язку виберемо фундаментальний розв'язок теплового рівняння

$$u_{ex}(x,t) = \frac{100}{4\pi t} e^{-\frac{|x-x^*|^2}{4t}}, \qquad x^* = (0,4)^T, \qquad (x,t) \in D \times (0;\infty),$$

тоді

$$f_l(x,t) = u_{ex}(x,t), (x,t) \in \Gamma_l \times (0;\infty), l = 1,2.$$

Абсолютні похибки розв'язку $|u_{ex}(x,t) - u_{N,n}(x,t)|$ в заданих точках наведені в таблиці 1. Чисельні експерименти показують ефективність цього підходу для нестаціонарної задачі для рівняння теплопровідності.

	$x = (0,0.7)^T, t = 1$						$x = (0.6,0)^T, t = 2$					
	N/n	8		16		32		8		16		32
	0	1.3e	− 01	1.3e	− 01	1.3e	− 01	3.5e	− 01	3.5e	− 01	3.5e − 01
	10	2.8e	− 02	2.4e	− 02	2.3e	− 02	3.4e	− 02	1.0e	− 02	9.9e − 03
	20	2.0e	− 02	1.6e	− 02	1.5e	− 02	9.0e	− 03	2.4e	− 03	2.3e − 03
	30	8.7e	− 03	3.8e	− 03	3.1e	− 03	8.0e	− 03	1.6e	− 03	1.5e − 03
	40	7.7e	− 03	2.8e	− 03	2.2e	− 03	5.9e	− 03	5.4e	− 04	2.8e − 04
	50	5.2e	− 03	5.3e	− 04	4.0e	− 04	6.0e	− 03	5.0e	− 04	2.4e − 04

Табл. 1. Абсолютні похибки

Для часткової дискретизації за часовою змінною можна вибрати й інші способи, наприклад, в [4] застосовано поєднання методу Роте й МФР для задачі Коші для хвильового рівняння.

Як бачимо, розроблений варіант МФР позбавлений недоліку, пов'язаному з необхідністю пошуку часткового розв'язку для стаціонарних

рівнянь з (3). Проведені чисельні експерименти показують, що такий підхід дає добру точність при економних обчислювальних затратах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Купрадзе В. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач / В. Купрадзе, М. Алексидзе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.–1964.– Вып. 4, №4.–С. 683–715.
2. Golberg M. The method of fundamental solutions for time-dependent problems / M. Golberg, C. Chen, A. Muleshkov // Transactions on Modelling and Simulation.–1999.– Vol. 22.–P. 376–386.
3. Borachok I. A method of fundamental solution for heat and wave propagation from lateral Cauchy data / I. Borachok, R. Chapko, B.T. Johansson // Numerical Algorithms.–2021.– https://doi.org/10.1007/s11075-021-01120-x.
4. Borachok I. A method of fundamental solutions with time-discretisation for wave motion from lateral Cauchy data / I. Borachok, R. Chapko, B.T. Johansson // Journal of Scientific Computing.–2021. (Submitted).

УДК 519.6

НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ ПІДХОДИ У ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Петро Венгерський , Валерій Трушевський

ЛНУ ім. І. Франка

valeriy.trushevsky@lnu.edu

У даній роботі розглянуто різні підходи застосування штучних нейронних мереж (ШНМ) у поєднанні з методом скінченних елементів (МСЕ) до розвя'язування складних в обчислювальному плані задач математичної фізики. Показано ефективність застосування нейромережевих підходів до граничних задач еліптичного типу, нестаціонарної задачі стоку мілкої води, початково-крайової задачі теплопровідності, задачі міграції домішки, задачі адвекції-дифузії.

Точні розв'язки крайових задач для рівнянь з частинними похідними, до яких зводиться дослідження багатьох важливих проблем практики, вдається знайти лише для часткових випадків. Тому зазвичай такі задачі розв'язують наближено. Незважаючи на розвиток сучасної обчислювальної техніки, досягнення в програмному забезпеченні, конструюванню нових алгоритмів, є

багато задач, які або не піддаються розв'язуванню наявними числовими методами, або не досягається задовільна точність. Цією обставиною спричинено пошук нових в ідейному плані методів, зокрема нейромережевих.

Окрім того, процес розв'язування диференціальних рівнянь являє собою складну обчислювальну задачу, що вимагає значних обчислювальних ресурсів навіть у разі пошуку наближеного розв'язку. У більшості випадків завдання зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь великої розмірності, розв'язок якої дає наближене значення шуканої функції на деякому наборі точок – вузлах дискретизації. Слід відмітити, що для розв'язування таких систем найчастіше застосовують ітераційні методи, які припускають послідовну, а не паралельну обробку даних. Таким чином, для прискорення процесу розв'язування системи потрібно збільшувати продуктивність процесора. З іншого боку, екстенсивний шлях розвитку обчислювальної техніки, пов'язаний лише зі збільшенням тактової частоти процесора вже давно вичерпав себе. На даний час активно використовуються багатоядерні процесори, які дають змогу реалізувати паралельні обчислення у повному обсязі. Таким чином, оптимальне використання наявних ресурсів можливо лише за максимального розпаралелювання процесів обчислень, що в багатьох випадках легко досягається за рахунок використання нейронних мереж.

На цей час можна виділити три основні напрямки застосування нейронних мереж до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: мережа на основі радіальних базисних функцій (Radial-Basis Function (RBF) мережа)[1, 2, 3, 4], багатошаровий пересептрон (Multilayer Perceptron (MLP)) [3], кліткові мережі (Cellar Neural Networks (CNN))[3, 4, 6, 7].

Отримані результати числових експериментів [3, 4, 6, 7] свідчать, що побудовані обчислювальні нейроструктури на основі CNN у поєднанні з МСЕ дають змогу успішно розв'язувати складні для обчислення крайові задачі з локально-градієнтними розв'язками, зокрема задачі адвекції-дифузії з великим числом Пекле, причому швидкість збіжності мультисіткового методу не залежить від кроку дискретизації. Розв'язок нейронної мережі покращується внаслідок збільшення кількості нейронів. Було побудовано варіаційні формулювання досліджуваних задач, для дискретизації яких застосовано проекційно-сіткову схему [3]. Унаслідок дискретизації задач в часі кусково-лінійними наближеннями отримано однокрокові рекурентні схеми інтегрування за часом. Для дискретизації задач за просторовою змінними вибирали кусково-лінійні апроксимації у вигляді функцій Куранта.

Повністю дискретизовані задачі у вигляді систем лінійних алгебричних рівнянь розв'язували на двошаровій рекурентній нейронній мережі

Досліджено ефективність застосування ШНМ на підставі РБФ [1, 3, 4] до розв'язування граничних задач еліптичного типу та задач стоку мілкої води. Побудовано ШНМ на підставі РБФ типу Гауса. Зауважимо, що задача нейронної мережі полягає у розв'язанні варіаційного формулювання задачі зі штрафом (4). Такий підхід дає змогу точніше врахувати структуру розв'язку та отримати результати високої точності, де затрачається менше обчислювальних ресурсів. Проведено порівняння отриманих чисельних результатів з аналітичним розв'язком та результатами методу скінченних елементів. Нейрона мережа дає змогу досягнути високої точності, причому кількість нейронів, яка необхідна для цього, є значно меншою, ніж кількість скінченних елементів в МСЕ для досягнення такої ж точності. Отримані результати свідчать про ефективність застосування РБФ-мереж до розв'язування нелінійних задач стоку мілкої води. Важливо зазначити, що за великих значень чисел Рейнольдса потоки та їх градієнти різко змінюються, внаслідок цього розв'язок задачі, отриманий з використанням МСЕ, втрачає свою стійкість та з'являються „паразитичні" осциляції. Для їх усунення багатьма авторами запропоновані різні протипотокові схеми МСЕ. На противагу цьому нейронна мережа здатна врахувати тонкі прошарки області, де розв'язки різко змінюються, та результати не потребують згладжування.

Наведені результати числових експериментів свідчать, що побудовані обчислювальні нейроструктури дають змогу успішно розв'язувати складні в обчислювальному плані задачі математичної фізики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Венгерський П. Застосування нейронної мережі до розв'язування задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні / П. Венгерський, В. Трушевський // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (APAMCS-2019) 24 - 27 вересня 2019 року, Львів.– С. 206-208.
2. Венгерський П. Застосування різних підходів для розв'язування задачі руслового стоку у кінематичному наближенні / П. Венгерський, В. Трушевський, Я. Коковська // Вісник Університету. – 2018. – Вип. 26.– С. 40-56.
3. Трушевський В. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування: монографія / В. Трушевський, Г. Шинкаренко, Н. Щербина. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка.–2014. – 396 с.
4. Трушевський В. Розпаралелена апроксимація еліптичних крайових задач штучною нейромережею з радіально-базисними функціями / В. Трушевський, Г. Шинкарнко // Вісник Університету.– 2014. – Вип. 22.– С. 108-117

5. Трушевський В. Штучні нейронні мережі та метод скінченних елементів у задачах математичної фізики / Н. Щербина, Г. Шинкаренко // XXII відкрита науково-технічна конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України м. Львів 26-28 жовтня 2011 р, С. 288-291.
6. Трушевський В. Застосування штучних нейронних мереж для розв'язування лінійних крайових задач з примежовим шаром / В. Трушевський, Н. Щербина // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2009. – Вип. 15. – С. 267-280.
7. Trushevsky V. Application of neural networks to the non-stationary heat conductivity problems / Trushevsky V., Shynkarenko G., Shcherbyna N. // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць наук. техн. конф., Львів, 7-8 жовтня 2010 р., Львів: ФМІ НАНУ, 2010. – С. 20-23.

УДК 519.6

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

А.Р. Глова, С.В. Літинський, Ю.А. Музичук, А.О. Музичук
Факультет прикладної математики та інформатики,
Львівський національний університет ім. Івана Франка, Україна
andrii.hlova@lnu.edu.ua

Нехай Ω^- — обмежена область з ліпшицевою межею Γ, $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ і $\boldsymbol{\nu}(x)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні Γ в точці $x \in \Gamma$, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$ і $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}_+$.

Розглянемо початково-крайову задачу: знайти функцію $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, що задовільняє хвильове рівняння

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{в } Q, \tag{1}$$

початкові умови

$$u(\cdot,0) = 0, \quad \partial_t u(\cdot,t)|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

і крайову умову динамічного типу

$$a\partial_\nu u - b\partial_t u + c\,u = g \quad \text{на } \Sigma; \tag{3}$$

де g, a, b і c – задані функції, ∂_t і ∂_ν позначають похідну за часовою змінною і нормальну похідну відповідно, Δ – оператор Лапласа.

Далі задачу (1)-(3) називатимемо задачею (НР).

Розглядаємо так звані прямий та непрямий підходи. Перший полягає у поданні розв'язку задачі у вигляді формули Кірхгофа

$$u = -\mathcal{S}\mu + \mathcal{D}\lambda \quad \text{в } Q, \tag{4}$$

де

$$(\mathcal{S}\mu)(t) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(y,t-|\cdot-y|)}{|\cdot-y|}\, d\Gamma_y, \tag{5}$$

$$(\mathcal{D}\lambda)(t) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \partial_{\nu(y)}\left(\frac{\lambda(z,t-|\cdot-y|)}{|\cdot-y|}\right)\Big|_{z=y}\, d\Gamma_y, \tag{6}$$

є потенціалами простого та подвійного шару відповідно і

$$\lambda(\cdot,t) := u(\cdot,t)|_\Gamma, \quad \mu(\cdot,t) := \partial_\nu u(\cdot,t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

є даними Коші розв'язку u на межі Γ для довільного $t \in \mathbb{R}_+$.

Дані Коші будемо шукати із залежної від часу системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР)

$$\begin{cases} \mathcal{V}\mu + \frac{1}{2}\lambda - \mathcal{K}\lambda = 0, \\ \frac{1}{2}a\mu - a\mathcal{K}'\mu - a\mathcal{W}\lambda + b\,\partial_t\lambda + c\lambda = g, \end{cases} \quad \text{на } \Sigma, \tag{8}$$

де $(\mathcal{V}\mu)(t) := (\mathcal{S}\mu)(t)$ на межі Γ у довільний момент часу $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(\mathcal{K}\lambda)(t) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \partial_{\nu(y)}\left(\frac{\lambda(z, t-|\cdot - y|)}{|\cdot - y|}\right)\Big|_{z=y} d\Gamma_y, \tag{9}$$

$$(\mathcal{K}'\mu)(t) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \partial_{\nu(\cdot)}\left(\frac{\mu(y, t-|\cdot - y|)}{|\cdot - y|}\right) d\Gamma_y, \tag{10}$$

$$(\mathcal{W}\lambda)(t) = -\frac{1}{4\pi}\partial_{\nu(\cdot)}\int_\Gamma \partial_{\nu(y)}\left(\frac{\lambda(z, t-|\cdot - y|)}{|\cdot - y|}\right)\Big|_{z=y} d\Gamma_y. \tag{11}$$

При непрямому підході розв'язок задачі (HD) подають лише одним з потенціалів. Для задачі Діріхле (HD) (при $a = 0, b = 0, c = 1$) використовуємо потенціал $\mathcal{S}\mu$, а невідому густину μ шукаємо з ГІР

$$\mathcal{V}\mu = g \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{12}$$

У випадку задачі Неймана (HN) (при $a = 1, b = 0, c = 0$) використовуємо потенціал $\mathcal{D}\lambda$, а невідому густину λ шукаємо з ГІР

$$\mathcal{W}\lambda = g \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{13}$$

Розглядаємо векторні функції дійсного аргументу (часова змінна $t \in \mathbb{R}_+$), які набувають значення у відповідних гільбертових просторах X. Використовуємо вагові простори Лебега $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ і Соболєва $H^k_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ з вагою $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Опис такого функційного фреймворку див., наприклад, [5].

Означення. Для заданих $\alpha > 0$, $g \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ і $a, b, c \in L^\infty(\Gamma)$, $a, b, c \geqslant 0$ на Γ, сильним розв'язком кожної з задач (HP), (HP) чи (HP) називаємо функцію

$$u \in H^2_\alpha(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap H^1_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \cap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega, \Delta)), \tag{14}$$

яка задовольняє рівняння

$$u''(t) - \Delta u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

і рівність

$$a\gamma_1 u(t) - b(\gamma_0 u(t))' + c\gamma_0 u = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

при відповідній комбінації параметрів a, b, c.

Тут γ_0 і γ_1 оператори сліду і нормальної похідної відповідно.

Твердження 1. Нехай функція $g \in H_\alpha^4(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ для $\alpha > 0$ і $a, b, c \in L^\infty(\Gamma)$, $a, b, c \geqslant 0$ на Γ. Тоді сильний розв'язок задачі (HP) можна подати у вигляді формули Кірхгофа (4), де функції $\lambda \in H_\alpha^3(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ і $\mu \in H_\alpha^2(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ є компонентами єдиного розв'язку $(\mu, \lambda)^\top$ системи залежних від часу ГІР (8).

Твердження 2. Нехай $g \in H_\alpha^4(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ для $\alpha > 0$. Тоді:

a) сильний розв'язок задачі (HD) можна подати у вигляді (5), де $\mu \in H_\alpha^2(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ є розв'язком (єдиним) ГІР (12);

b) сильний розв'язок задачі (HN) можна подати у вигляді (6), де $\lambda \in H_\alpha^3(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ є розв'язком (єдиним) ГІР (13).

Вибір вагових просторів Лебега дає змогу застосовувати до залежних від часу ГІР (8), (12) і (13) перетворення Лаґерра [5] і звести їх до рекурентних послідовностей ГІР [6, 3, 4]. Для кожної із послідовностей інтегральний оператор є еліптичним у відповідному просторі і одним і тим самим для усіх ГІР. Ці обставини зумовлюють ефективну чисельну реалізацію поєднання перетворення Лаґерра з методом граничних елементів.

Запропонований підхід до розв'язування початково-крайових задач легко поширити на інші типи задач, зокрема для моделювання хвильових процесів в однорідних середовищах з включеннями. Так, в [1] розглянуто випадок, коли на внутрішній поверхні, яка відповідає включенню, усі дані Коші є невідомими. У [2] шляхом побудови спеціальних ядер потенціалів продемонстровано модернізацію підходу, коли включення розміщені у середовищі, яке характеризується спеціальною геометрією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chapko R., Johansson T., Muzychuk Yu., Hlova A. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method //Wave Motion.– Vol.91, November 2019, Article 102385.–
2. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385.
3. Hlova A.,Litynskyy S., Muzychuk Yu., Muzychuk A. Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation //J. of Computational and Appl. Math. - 2018. - N 2 (128).

- P. 42-60.
4. Litynskyy S., Muzychuk Yu., Muzychuk A. Solving of the initial-boundary value problems for the wave equation by the use of retarded potential and the Laguerre transform //Matematychni Studii. – 2015. – №2(44). – P. 185–203.
5. Litynskyy S., Muzychuk A. On the generalized solution of the initial-boundary value problems with Neumann condition for the wave equation by the use of retarded double layer potential and the Laguerre transform //J. of Computational and Appl. Math. – 2016. – N 2 (122). – P. 21-39.
6. Muzychuk A. The Laguerre transform of a convolution product of vector-valued functions // Matematychni Studii. – 2021. – Vol. 55, № 2. – P. 146–161.– https://doi.org/10.30970/ms.55.2.146-161.
7. Глова А. Р., Літинський С.В., Музичук Ю. А., Музичук А. О. Чисельне розв'язування початково-крайових задач для хвильового рівняння із застосуванням формули Кірхгофа та перетворення Лаґерра // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2019. – Вип. 27. – С. 18-33.

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИСКРЕТНОЇ ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ПОШИРЕННЯ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРАХ

Олександр Григоренко[1] , Ігор Лоза[2],Світлана Сперкач[3],

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

[2]Національний транспортний університет

[3]Технічний центр НАН України

ayagrigorenko1991@gmail.com

lozaigor1956@gmail.com

svetlana@nasu.kiev.ua

Запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач про поширення акустоелектричних хвиль у неоднорідних п'єзокерамічних циліндрах. Використовуючи метод відокремлення змінних, компоненти розв'язуючого вектору представляємо у вигляді хвиль, що поширюються вздовж повздовжньої координати та стоячих

хвиль у напрямі колової координати. Такий вибір розв'язуючого вектора дозволяє перейти від вихідної задачі електропружності у частинних похідних до крайової задачі звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. Достовірність отриманих результатів розрахунків демонструє добра збіжність як з результатами, отриманими із застосуванням спеціальних функцій так і з результатами, отриманими із застосуванням степеневих рядів для деяких простих випадків неоднорідною структури п'єзокерамічних циліндрах.

Кругові циліндричні п'єзокерамічні хвилеводи широко використовуються в акустоелектроніці, що вказує на важливість досліджень хвильових процесів у п'єзокерамічних тілах. Для підвищення довговічності експлуатаційних характеристик хвилеводів вони часто мають неоднорідну структуру. Для математичного моделювання таких структур і без того досить складна задача електропружності ще більш ускладняється. Якщо хвилеводи мають шарувату структуру, то виникає необхідність задовольняти не тільки граничні умови на поверхнях, які обмежують тіло, але й на поверхнях розділу фізико-механічних властивостей шарів, що складають конструкцію. Це призводить до збільшення кількості рівнянь. Останнім часом для конструювання таких хвилеводів все більше використовуються функціонально градієнтні матеріали. У цьому випадку фізико-механічні характеристики матеріалу є вже не константами, а функціями (як правило товщинної координати). Це становить значну проблему для багатьох чисельних та аналітичних методів. Як відомо, аналітичний розв'язок для таких задач можу бути отриманий лише за певних видів симетрії задачі. Так це випадок осьової поляризації п'єзокераміки для повздовжніх хвиль (осесиметрична [12] та неосеметрична задачі [12,9,11] та колової поляризації для крутильних хвиль [10]. Крім того навіть для таких особливих випадків симетрії задачі, ми використовуємо для отримання розв'язку функції Бесселя. Як відомо рівняння Бесселя це рівняння з постійними коефіцієнтами. Якщо розглядати функціонально градієнтний матеріал, то коефіцієнти у рівнянні будуть функціями товщинної координати, а отже, це вже не буде рівнянням Бесселя. Тому й застосування методу представлення розв'язку у вигляді комбінації функцій Бесселя, на наш погляд, не є припустимим. Більш загальний метод запропонований у роботах [1 – 4]. В основі цього методу лежить розвинення компонентів розв'язуючого вектора у степеневі ряди. У цьому розв'язок може бути отриманий для усіх випадків поляризації

п’єзокераміки, але складнощі у реалізації цього методу у випадку неоднорідної структури хвилеводу роблять його мало ефективним.

Для розв’язання такого класу задач був запропонований ефективний чисельно-аналітичний підхід. Система рівнянь, яка описує дану задачу складається: рівнянь руху (1), рівнянь вимушеної електростатики діелектриків (2), співвідношень Коші для випадку малих деформацій (3) та матеріальних співвідношень (4)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \ \mathbf{E} = -\nabla \Phi; \tag{2}$$

$$2\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla. \tag{3}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}\mathbf{E}; \ \mathbf{D} = \mathbf{e}\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \tag{4}$$

тут введені позначення: $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{c}^E$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ – тензори напружень, деформацій, пружних модулів при постійному електричному полі, п’єзомодулів та діелектричних проникностей при постійній деформації відповідно; $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$ та $\mathbf{D}$ – вектори переміщень, напруженості електричного поля та електричної відповідно; ρ та Φ – густина матеріалу та електростатичний потенціал.

Використовуючи замкненість циліндра по коловій координаті та його нескінченність у напрямі повздовжньої координати, компоненти розв’язуючого вектора представляються у вигляді хвиль, що поширюються вздовж повздовжньої координати та стоячих хвиль у напрямі колової координати. Математично це означає, що компоненти розв’язуючого вектора представлені у вигляді подвійного ряду Фур’є. Вигляд розв’язуючого вектора залежить від напряму попередньої поляризації п’єзокераміки і для випадку осьової поляризації має вигляд

$$\begin{Bmatrix} T_{rr}, T_{r\theta}, T_{rz}, \Phi, \\ u_r, u_\theta, u_z, D_r \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_r^n(r), T_{rz}^n(r), \Phi^n(r), u_r^n(r), u_z^n(r), D_r^n(r) \\ T_{r\theta}^n(r), u_\theta^n(r), \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \tag{5}$$

Вибір розв’язуючого вектора у вигляді (5) дозволяє перейти від вихідної задачі електропружності (1) – (4) у частинних похідних до крайової задачі у звичайних похідних:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{A}(x,\Omega)\mathbf{R} \tag{6}$$

$$\mathbf{B_1R}(R_0 - h) = \mathbf{V}_1;\ \mathbf{B_2R}(R_0 + h) = \mathbf{V}_2 \tag{7}$$

де $\mathbf{R} = \left\{T_r^n(r), T_{r\theta}^n(r), T_{rz}^n(r), \Phi^n(r), u_r^n(r), u_\theta^n(r), u_z^n(r), D_r^n(r)\right\}$

Основна матриця $\mathbf{A}$ та матриці граничних умов $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ залежать від напряму попередньої поляризації п'єзокераміки. Для розв'язання крайової задачі (6) – (7) використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Даний метод добре себе зарекомендував при розв'язанні задач теорії пружності [2 – 4]. Застосування запропонованої методики до донного класу задач демонструє добру збіжність як з результатами, отриманими із застосуванням спеціальних функцій так і з результатами, отриманими із застосуванням степеневих рядів, але є незрівнянно більш простим у використанні. Більш детально даний підхід, описаний у монографії [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Grigorenko AY, Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder. / Loza I.A., Shul'ga N.A. // Soviet Appl Mech. – 1984. – 20(6):517–521
2. Grigorenko A.Ya., (2016) Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. General theory and applications of classical theory. / Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. // – 2016. – Vol. I, Springer.
3. Grigorenko A.Ya., Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory. / Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. // – Volume IIA. – Berlin: Springer, 2016. – 42 p.
4. Grigorenko A.Ya., Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Applications of Refined and Three-dimensional Theory / Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. // – Volume IIB. – Springer, 2016. – 108 p.
5. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Loza I.A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies // – Springer, 2021. – 227 p
6. Loza I.A. Axisymmetric acoustoelectrical wave propagation in a hollow circularly polarized cylindrical waveguide // Soviet Appl Mech. – 1984. – 20(12):1103–1106
7. Loza I.A. Propagation of nonaxisymmetric waves in hollow piezoceramic cylinder with radial polarization // Soviet Appl Mech. – 1985.– 21(1):22–27
8. Loza I.A. Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in layered cylinders. / Medvedev K.V., Shul'ga N.A. // Soviet Appl Mech – 1987.– 23(8):703–706
9. Paul H.S. Vibrations of Circular Cylindrical Shells of Piezoelectric Silver Iodide Crystals // J. Acoust. Soc. Am. – 1966. – V. 40, 1077–1080

10. Paul H.S. Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric β-quartz // Arch. Mech. Stosow. – 2010. – V. 14. – P. 127.
11. Puzyrev V. Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. // Int. J. Solids Struct. – 2010. – V. 47. – P. 2115–2122.
12. Shatalov, M. Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material. / Every, A., Yenwong-Fai, A. // Int. J. Solids Struct. – 2020.– V. 21 – 19–26

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОСТІННИХ ОБОЛОНОК

Олександр Григоренко[1], Максим Борисенко[1],
Олена Бойчук[2],Тетяна Пінчук[3]
[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
[2] Миколаївський національний аграрний університет
[3] Технічний центр НАН України
ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com, boychuklena27@gmail.com, tcnanu@online.ua

Чисельно визнаються частоти і форми вільних коливань товстостінних циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіусу серединної поверхні з різними варіаціями жорсткого закріплення на торцях методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою ліцензійного програмного комплексу FEMAP. Проводиться порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами отриманими експериментально.

Товстостінні циліндричні оболонки широко застосовуються в різних інженерних конструкціях та в будівництві. Такі конструкції часто знаходяться під дією динамічним навантаженням різної природи, що може спричинити руйнування в результаті резонансу. Для уникнення руйнувань необхідно володіти інформацією про їхні динамічні характеристики, а саме про частоти і форми вільних коливань. Розв’язок даної задачі в теорії тонких оболонок можливий за допомогою різних теорій [2, 3, 7, 9-11], однак в разі товстостінних оболонок стає неможливим застосування більшості теорій, оскільки для проведення обчислень необхідно використовувати просторову теорію, що пов’язано з великими обсягами обчислювального характеру.

Одним з варіантів розв’язування цієї проблеми є використання системи автоматизованого конструювання (computer-aided engineering - CAE), яка дає можливість проводити розрахунок конструкцій будь-якої форми на основі використання методу скінченних елементів (МСЕ) [4, 6]. Також цю проблему можна розв’язати, використовуючи безконтактний експериментальний метод стробоголографічної інтерферометрії [1, 5, 8].

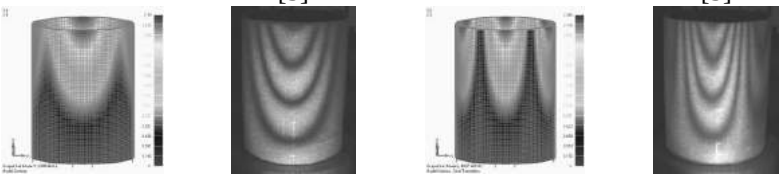
Метою даного повідомлення є визначення частот і форм вільних коливань товстостінних циліндричних оболонок з різним співвідношенням товщини оболонки до радіусу серединної поверхні з різними варіаціями жорсткого закріплення на торцях методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою ліцензійного програмного комплексу FEMAP. Геометрія циліндричних оболонок, фізико-механічні характеристики матеріалу та розбивка скінченними елементами обрані у відповідності до оболонок розглянутих в [5, 6]. В результаті дослідження отримані результати які мають малу розбіжність з результатами отриманими раніше експериментально методом стробоголографічної інтерферометрії. В таблиці 1 представлені частоти вільних коливань розраховані МСЕ та отримані експериментально в [5], де ε – відхилення між результатами.

Табл. 1. Частоти вільних коливань

m	n	f, Гц		ε, %
		МСЕ	[5]	
1	4	2396	2238	6,6
1	6	4598	4544	1,2
1	8	8424	8346	0,9
1	10	13303	13193	0,8
2	4	7082	6722	5,1
2	6	7127	7047	1,1
2	8	10169	10090	0,8
2	10	14812	14700	0,8

На рис. 1-2 зображені деякі форми вільних коливань отримані в FEMAP та експериментально в [5].

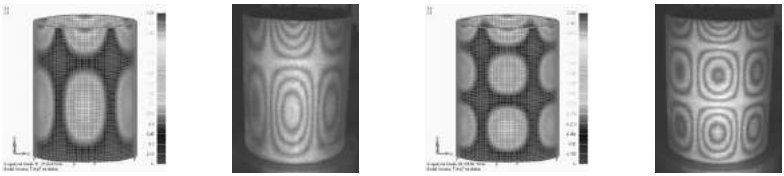
FEMAP [5] FEMAP [5]



m=1; n=4 m=1; n=6

Рис. 1. Форми вільних коливань

FEMAP [5] FEMAP [5]



m=2; n=6 m=3; n=6

Рис. 2. Форми вільних коливань

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Пригода О.П., Бойчук О.В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – 2015. – № 24. – С. 18 – 25.
2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 74 – 85.
3. Arnold R.N., Warburton. G.B. The flexural vibration of thin cylinders // Proc. Inst.Mech.Engrs. – 1953. – 167 A, N 1. – P. 62 – 80.
4. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // J. of Mathematical Sci. – 2016. – 212, N 2. – P. 182 – 192.
5. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 68 –74.
6. Grigorenko A.Y., Borisenko M.Y., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical determination of natural frequencies and modes of the vibrations of a thick-walled cylindrical shell //International Applied Mechanics. – 2018. – Т. 1. – №. 54. – С. 75-84.
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 2. – P. 169 – 175.
8. Grigorenko A., Zolotoi Yu., Prigoda A., Zhuk I., Khorishko V., Ovcharenko A. Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry // J. of Mathematical Sci. – 2013. – 194, N 3. – P. 239 – 244.
9. Leissa A.W. Vibration of Shells // NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC, 1973. – 438 p.
10. Mazch T. [et al.] Natural modes and frequencies of a thin clamped–free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // J. Sound Vib. – 1996. – 193, N 3. – P. 669 – 690.

11. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells // Proc. 2nd Int. Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems, Samos, June 19 – 23, 2006. – P. 1 – 12.

УДК 519.8

УЗАГАЛЬНЕНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ: ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Леонід Гуляницький

Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України

leonhul.icyb@gmail.com

Вводяться поняття узагальнених комбінаторних конфігурацій, що є розвитком поняття конфігурацій, запропонованого К. Бержем. Розглядаються питання формального означення важливого як в теоретичному, так і в прикладному аспектах терміну "задача комбінаторної оптимізації"

Відштовхуючись від поняття дискретного простору, пропонуються строгі означення ряду важливих понять, таких як задача комбінаторної оптимізації (ЗКО), комбінаторний простір, узагальнена комбінаторна конфігурація. Пропонована формалізація узагальнених комбінаторних конфігурацій здійснена на основі розвитку запропонованого К.Бержем поняття конфігурації [1] та підходу, запропонованого в [2] (де вживався термін комбінаторний об'єкт). Нехай U={1, …, m}, а V – деяка скінченна лінійно впорядкована множина (ланцюг); позначимо $n = \|V\|$.

Означення 1. Під конфігурацією у сенсі Бержа розуміється відображення φ:U→ V, яке задовольняє певній системі обмежень Λ.

На основі цього підходу побудовані конфігурації, які відповідають найпростішим комбінаторним об’єктам: розміщенням, перестановкам, комбінаціям, розбиттям та іншим об’єктам, утвореним на основі урнової схеми.

Проте, поза рамками цієї схеми залишилися інші комбінаторні об’єкти, наприклад, графи, гіперграфи, булеві простори, перестановочні матриці та ін. Пропонується узагальнення схеми К. Бержа, що дозволяє породжувати та класифікувати більш широке коло комбінаторних структур.

Нехай задані множина Y={1,…,m}, Z – дискретний, зокрема, скінченний простір (назвемо його твірним), φ – гомоморфізм, що задовольняє деякій системі обмежень Ω.

Означення 2. Під узагальненою комбінаторною конфігурацією κ розумітимемо тріаду $\kappa = (\varphi,\ \tilde{X}, \Omega)$, де $\varphi : Y \to \tilde{X}$, а $\tilde{X}$ – базовий простір.

Конкретизацією виду базового простору можна породжувати узагальнені комбінаторні конфігурації різного типу, які класифікуємо наступним чином.

Означення 3. Назвемо узагальненими комбінаторним конфігураціями 1-го порядку такі комбінаторні конфігурації, у яких базовий простір співпадає з твірним, тобто $\kappa = (\varphi, X_{(1)}, \Omega)$, де $X_{(1)} \equiv Z$, $\varphi : Y \to Z$.

Неважко переконатися, що якщо Z – це скінченний ланцюг, то такі комбінаторні конфігурації співпадають із конфігураціями у сенсі Бержа.

Означення 4. Узагальненими комбінаторним конфігураціями k-го порядку (k>1) назвемо комбінаторні конфігурації $\kappa = (\varphi, X_{(k)}, \Omega)$, де $X_{(k)} = X_{(k-1)} \cup Z^k$, $\varphi : Y \to X_{(k)}$.

Як приклад, при k=1, окрім конфігурацій у сенсі Бержа, узагальненими комбінаторними конфігураціями можна описати множину цілочислових або булевих векторів заданої скінченної розмірності, якщо покласти Z = C, де C – множина цілих чисел, або Z={0,1} відповідно. Отже, можлива побудова чи опис і нескінченних просторів, утворених узагальненими комбінаторними конфігураціями. На основі введених понять можна розвинути і теорію нечітких узагальнених комбінаторних конфігурацій [3].

Нехай в просторі X тим чи іншим чином введена система околів O, тобто для довільного $x \in X$ визначене сімейство множин $o^{\sigma}(x) \subseteq 2^{X}, \sigma \in I$, де I – множина індексів околів, причому $x \in o^{\sigma}(x)$ для всіх значень σ, а $O = \{o^{\sigma}(x) : x \in X, \sigma \in I\}$. Кажуть, що X є простір з околами і позначають X=(X,O). Поняття околу у такому розумінні є слабшим за поняття метричного або топологічного околу і включає їх як частинні випадки. До прикладу, елемент $o^{\sigma}(x)$ може бути метричним околом радіусу $\sigma, \sigma \in I = \{1, 2, ...\}$ у просторі векторів з цілочисловими координатами.

Означення 5. Базисними околами довільної точки x∈X назвемо множину $B_X = \{o^{\tau}(x) \in O\colon \|o^{\tau}(x)\| > 1\ \&\ \nexists\gamma\colon 1 < \|o^{\gamma}(x)\| < \|o^{\tau}(x)\|\}$.

Означення 6. Простір X називається локально скінченним (у комбінаторному розумінні), якщо всі базисні околи його точок скінченні:

$$\forall\ x \in X,\ o\tau(x) \in Bx \Rightarrow ||o\tau(x)|| < \infty.$$

Введене поняття локальної скінченності є слабкішим за аналогічне поняття, яке визначено для метричних просторів [4], та еквівалентним поняттю, що використовується для топологічних просторів [5,6].

Можна показати, що справедливі наступні теореми.

Теорема 1. Довільна скінченна множина буде локально скінченним простором за будь-якої метрики..

Теорема 2. Довільний локально скінченний простір є дискретним.

В то же час, не всякий дискретний простір є локально скінченим – контрприкладом є спеціальна дискретна топологія [4].

Означення 7. Комбінаторним простором назвемо локально-скінченний в комбінаторному розумінні простір, який має не більше ніж злічену кількість елементів.

Розглянемо застосування пропонованих понять для формалізації задач оптимізації. У науковій літературі широко вживається термін "задача комбінаторної оптимізації", хоча вичерпного строгого означення не дається або ж воно не охоплює всіх відомих задач. У [7] під ЗКО розуміється проблема пошуку екстремумів заданої цільової функції, коли простір розв'язків X – комбінаторний простір. Під комбінаторним простором тут розуміється сукупність комбінаторних об’єктів певного типу, утворених із елементів заданої скінченної множини (твірна множина). Водночас, поняття "комбінаторний об’єкт" не формалізується, а як приклад названо комбінації, перестановки та розміщення. В зарубіжній літературі переважно вживається означення ЗКО, введене в книзі [8], де простір розв'язків задачі визначається як "скінченна (рідше – нескінченна зліченна) множина". Таке тлумачення не дозволяє строго формально окреслювати окремі класи ЗКО, такі, наприклад, як дискретне, цілочислове чи булеве програмування. Більше того, воно часто призводить до фактичного ототожнення понять дискретної та комбінаторної оптимізації, яке часто спостерігається в ряді робіт.

Розглядатимемо задачі оптимізації: знайти $x_* \in D \subseteq X$ такий, що $x_* = \arg\min_{x \in D \subseteq X} f(x)$, де f: X→ R1 – задана цільова функція задачі, R1 – числова пряма, X – простір розв’язків задачі, $D \subseteq X$ – підмножина припустимих розв’язків згідно обмежуючих умов.

В залежності від виду простору X розрізняють задачі неперервної, комбінаторної та змішаної оптимізації [9]. Перший клас утворюють задачі, в

яких простір X є неперервним (континуальним). Щодо другого класу, то тут існують різні підходи до означення як самого поняття ЗКО, так і його підкласів – власне комбінаторних задач, а також задач цілочислового програмування.

Означення 8. Оптимізаційна задача називається задачею комбінаторної оптимізації, якщо простір її розв'язків X – це комбінаторний простір.

Іншими словами, ЗКО – це задачі на локально скінченних просторах.

Зазначимо, що поняття узагальненої комбінаторної конфігурації пов'язане в загальному випадку із абстрактними базовими просторами, що дозволяє використовувати наведені вище результати при формалізації широких класів практичних задач, включивши до цього класу і деякі оптимізаційні задачі, які визначені на нескінченних просторах. Наприклад, в [10] виділено комбінаторну структуру задачі розміщення геометричних об'єктів. Якщо в якості абстрактних базових множин розглядати базові геометричні об'єкти, то можна будувати об'єкти складної просторової форми як узагальнені комбінаторні конфігурації вищих порядків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Berge C. Principes de combinatoire. –Paris: Dunod, 1968. –146 p.
2. Гуляницький Л.Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. – 2008. –7. – С. 45–49.
3. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. In: Optimization Methods and Applications (eds. Butenko S., Pardalos P. M., Shylo V.). – Cham: Springer International Publishing AG, 2017. – P. 239–250.
4. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973. – 575 с.
5. Baudier F., Lancien G. Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2008. – N 136. – P. 1029–1033.
6. Nakaoka F., Oda N. Some applications of minimal open sets // Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2001. – N 27(8). – P. 471–476.
7. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 288 с.
8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
9. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 142 с
10. Yakovlev S.V. The method of artificial expansion of space in the problem of optimal placement of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. –53, №5. – P. 825–832.

УДК 512.535

ПРО НАПІВГРУПУ, ПОРОДЖЕНУ РОЗШИРЕНОЮ БІЦИКЛІЧНОЮ НАПІВГРУПОЮ ТА $^{\omega}$-ЗАМКНЕНОЮ СІМ'ЄЮ

Олег Гутік[1], Інна Позднякова[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка*

ogutik@gmail.com, pozdnyakova.inna@gmail.com

Розглянуто алгебраїчне розширення $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ розширеної біциклічної напівгрупи для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathcal{F}$ підмножин в ω. Доведено, що $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Гріна, частковий природний порядок на напівгрупі $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ та її множину ідемпотентів. Знайдено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$, а також коли напівгрупа $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі або зліченній напівгрупі матричних одиниць. Доведено, що у випадках, коли сім'я $\mathcal{F}$ складається з усіх одноточкових підмножин в ω та порожньої множини, то напівгрупа $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ ізоморфна λ- розширенню Брандта напівгратки (ω, min).

Конструкція напівгрупи $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$

Нехай $P(\omega)$ – сім'я усіх підмножин ординала ω. Для довільних $F \in P(\omega)$ і $n, m \in \mathbb{Z}$ покладемо $n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}$. Будемо говорити, що підсім'я $\mathcal{F} \subseteq P(\omega)$ є ω-замкненою, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathcal{F}$ для довільних $n \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

Нехай $B(\mathbb{Z})$ – розширена біциклічна напівгрупа та $\mathcal{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $P(\omega)$. На множині $B_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}$ означимо бінарну операцію «·» за формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases}$$

Твердження. Якщо сім'я $\mathcal{F} \subseteq P(\omega)$ є ω-замкненою, то $(B_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)$ є напівгрупою.

Означення. Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\omega)$ означимо

$$B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (B_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot)/I, & \text{якщо } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (B_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{якщо } \emptyset \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Алгебраїчні властивості напівгрупи $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$

Теорема. Якщо $\mathcal{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $P(\omega)$, то $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ – інверсна напівгрупа.

Напівгрупа S називається біпростою, якщо S складається з одного $\mathfrak{D}$-класу.

Теорема. Нехай $\mathcal{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathrm{P}(\omega)$. Тоді такі умови еквівалентні:

$\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ – біпроста напівгрупа;

$\mathcal{F}$ – одноелементна сім'я;

Напівгрупа $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ або тривіальна, або ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі.

Інверсна напівгрупа S з нулем 0 називається 0-біпростою, якщо S має лише два $\mathcal{D}$-класи: $S \backslash \{0\}$ і $\{0\}$.

Наступна теорема описує структуру 0-біпростих інверсних напівгруп $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ з точністю до ізоморфізму.

Теорема. Нехай $\mathcal{F}$ – ω-замкнена підсім'я в $\mathrm{P}(\omega)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ і $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ – 0-біпроста напівгрупа. Тоді виконується лише одна з умов:

1) напівгрупа $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_{\omega}$;
2) напівгрупа $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{(0,\mathrm{j}_0)}$ для деякого натурального числа j_0.

Нехай S – напівгрупа та X – непорожня множина потужності λ. На множині $B_X(S) = (X \times S \times X) \sqcup \{\mathcal{O}\}$ означимо напівгрупову операцію так:

$$(\alpha, s, \beta) \cdot (\gamma, t, \delta) = \begin{cases} (\alpha, st, \delta), & \text{якщо } \beta = \gamma; \\ \mathcal{O}, & \text{якщо } \beta \neq \gamma \end{cases}$$

і $(\alpha, s, \beta) \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \cdot (\alpha, s, \beta) = \mathcal{O} \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$ для всіх $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ і $s, t \in S$. Якщо S – моноїд, то напівгрупа $B_X(S)$ називається λ-розширенням Брандта напівгрупи S.

Через ω_{min} позначимо множину ω з бінарною операцією $xy = \min\{x, y\}$, для $x, y \in \mathbb{Z}$. Очевидно, що ω_{min} – напівгратка.

Означимо відображення $f: \mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}_1} \to B_{\mathbb{Z}}(\omega_{min})$ так:

$$f(i,j,\{k\}) = (i+k, k, j+k) \text{ і } f(0) = \mathcal{O},$$

для $i, j \in \mathbb{Z}$ і $k \in \omega$.

Нехай $\mathcal{F}_1 = \{A \subseteq \omega : |A| \leq 1\}$.

Теорема. Напівгрупа $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}_1}$ ізоморфна напівгрупі $\mathrm{B}_{\mathbb{Z}}(\omega_{\min})$ стосовно відображення f.

Список літератури

1. *Гутік О.В., Михаленич М.* Про одне узагальнення біциклічного моноїда / О.В. Гутік, М. Михаленич // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2020 – Вип. 90. – С. 5-19.
2. *Gutik O., Lysetska O.* On the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ which is generated by the family $\mathcal{F}$ of singletons of ω / O. Gutik, O. Lysetska // Preprint – 2021.

УДК 519.6

МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ МАНІПУЛЯЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ

Мирослав Демидюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

m_demydyuk@ukr.net

Запропоновано чисельний метод побудови субоптимального розв'язку задач оптимального керування нелінійними маніпуляційними системами з нестаціонарними двосторонніми обмеженнями на узагальнені координати й керування. Метод ґрунтується на представленні узагальнених координат у вигляді суми кубічного полінома (за часом) та скінченого ряду за системою заданих ортогональних функцій із невідомими параметрами, що зводить вихідну задачу до задачі нелінійного програмування.

1. Загальна постановка задачі оптимального керування

Розглянемо маніпуляційну систему, механічна модель якої являє собою систему твердих тіл з n ступенями вільності. Керування системою (для кожної ступені вільності) відбувається з допомогою активних приводів зі зовнішніми джерелами живлення (наприклад, електромеханічних приводів). Блок керування формує (згідно закладеної програми) відповідні сигнали, які поступають на вхід приводів. Останні генерують зусилля, які й приводять у рух маніпуляційну систему.

За досить загальних припущень рівняння руху маніпуляційної системи можна записати у вигляді

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{B}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{C}\mathbf{u}(t), \qquad (1)$$

де $\mathbf{q}=(q_1,...,q_n)$ – вектор узагальнених координат маніпуляційної системи, $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)$ – вектор керувань, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ – матриці розмірностей $n\times n$, $\mathbf{B}$ – вектор розмірності n. Тут і нижче крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t. Вважаємо, що матриця $\mathbf{C}$ є невиродженою ($\det\mathbf{C}\neq 0$), а її компоненти є сталими величинами. Зауважимо, що співвідношення (1) можна побудувати за допомогою відомих методик аналітичної механіки, зокрема, методики рівнянь Лагранжа другого роду.

Нехай маніпуляційна система виконує транспортну операцію: протягом часу $t\in[0,T]$ переносить вантаж із заданого початкового положення робочої зони маніпулятора в задане кінцеве положення. Тут граничні (початкове та кінцеве) положення вантажу є досяжними для захоплювача маніпулятора, тривалість руху системи T вважаємо заданим параметром. Траєкторія руху вантажу та закон його руху не задаються, а визначаються під час розв’язання відповідної задачі.

Задамо положення маніпуляційної системи в початковий $t=0$ та кінцевий $t=T$ моменти часу

$$\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0,\ \mathbf{q}(T)=\mathbf{q}_T,\ \dot{\mathbf{q}}(0)=\dot{\mathbf{q}}(T)=0, \qquad (2)$$

де $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$ – задані параметри транспортної операції маніпулятора. Тут вважаємо, що маніпуляційна система в моменти часу $t=0,T$ перебуває в стані спокою. Така вимога часто зумовлена технологічною особливістю виробництва, наприклад, коли маніпулятор переносить вантаж (деталь) з одного робочого столу на інший, і ці столи є нерухомими.

За реальних умов на рух маніпуляційної системи $\mathbf{q}(t)$ та активні керування $\mathbf{u}(t)$ накладаються певні обмеження. Задамо ці обмеження в такому вигляді

$$q_i^{(0)}(t) \le q_i(t) \le q_i^{(1)}(t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$u_i^{(0)}(t) \le u_i(t) \le u_i^{(1)}(t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

де $q_i^{(0)}$, $q_i^{(1)}(t)$, $u_i^{(0)}(t)$, $u_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,n}$ – задані на проміжку $[0,T]$ неперервні функції, які визначаються робочою зоною маніпулятора та характеристиками приводів керування.

Надалі вважаємо, що існує множина вектор-функцій $\{\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)\}$, які на проміжку $t \in [0,T]$ задовольняють рівняння руху (1), умови транспортної операції (2) та обмеження (3), (4). Можлива постановка такої задачі.

Задача 1. Визначити такий рух маніпуляційної системи $\mathbf{q}^*(t)$ та відповідні керування $\mathbf{u}^*(t)$, $t \in [0,T]$, які з огляду на рівняння руху (1) й обмеження (2)–(4) мінімізують заданий функціонал

$$\Phi = \int_0^T \Phi[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{u}(t)]dt \qquad (5)$$

2. Алгоритм параметричної оптимізації

Як свідчать результати числового моделювання [1, 2], ефективним у дослідженні задачі 1 є метод параметричної оптимізації (в просторі узагальнених координат). Метод ґрунтується на параметричному представленні узагальнених координати маніпуляційної системи у вигляді суми кубічного полінома (за часом) та скінченого ряду за системою заданих базових (ортогональних) функцій із невідомими коефіцієнтами

$$q_i = \sum_{k=0}^{3} p_{ik} t^k + G_i(t), \quad G_i(t) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} g_{ik}(t), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

де $\{p_{ik}\}_{k=0}^{3}$ – коефіцієнти кубічного полінома, які визначаємо з умов транспортної операції (2), $\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – коефіцієнти параметризації за системою базових функцій $\{g_{ik}(t)\}_{k=1}^{n_i}$, $g_{ik} \in C^2[0,T]$, n_i – кількість базових функцій для координати q_i. Неперервність другої похідної базових функцій пояснюється

прагненням уникнути ударних ефектів під час руху маніпуляційної системи. Зауважимо, що за базові функції в (6) можна взяти, наприклад, тригонометричні функції, класичні ортогональні поліноми тощо.

Коефіцієнти $\{p_{ik}\}_{k=0}^{3}$ знаходимо у вигляді розв'язку системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо підставленням виразу (6) в умови транспортної операції (2). Остаточно одержуємо

$$p_{i0} = q_{0i} - G_{i0}, \quad p_{i1} = -\dot{G}_{i0}, \quad p_{i2} = [3\Delta_i - 3(G_{i1} - G_{i0}) + T(2\dot{G}_{i0} + \dot{G}_{i1})]/T^2,$$

$$p_{i3} = [-2\Delta_i + 2(G_{i1} - G_{i0}) - T(\dot{G}_{i1} + \dot{G}_{i0})]/T^3, \qquad (7)$$

де $\Delta_i = q_{1i} - q_{0i}$, $G_{i0} = G_i(0)$, $\dot{G}_{i0} = \dot{G}_i(0)$, $G_{i1} = G_i(T)$, $\dot{G}_{i1} = \dot{G}_i(T)$.

Узагальнені швидкості $\dot{\mathbf{q}}$ та прискорення $\ddot{\mathbf{q}}$ обчислюємо диференціюванням виразів (6) за часом t. Обмеження (3), (4) задовольняємо методом зовнішніх штрафних функцій, для чого запишемо ці обмеження у формі

$$Q_{qi} = \int_0^T \{[q_i^{(0)}(t) - q_i(t)]_+^2 + [q_i(t) - q_i^{(1)}(t)]_+^2\} dt, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (8)$$

$$Q_{ui} = \int_0^T \{[u_i^{(0)} - u_i(t)]_+^2 + [u_i(t) - u_i^{(1)}]_+^2\} dt, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (9)$$

де позначено операцію: $[\nu]_+ = \nu$ при $\nu > 0$, $[\nu]_+ = 0$ при $\nu \le 0$.

Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, після підставлення параметризованих $\mathbf{q}(t, \mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, $\ddot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_{ik};\ k = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, n})$, у рівняння руху (1) знаходимо параметричне сімейство керувань $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$$

Підстановка отриманих $\mathbf{q}(t, \mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{z}, \mathbf{c})$ у вирази для функціонала (5) та інтеграли (8), (9) зводить задачу 1 до задачі нелінійного програмування

$$E(\mathbf{z}) + \langle \lambda, \mathbf{Q}(\mathbf{z}) \rangle \xrightarrow[\mathbf{z}]{} \min,$$

де $E(\mathbf{z})$ – функція багатьох змінних, до якої зводиться функціонал (5), λ – вектор заданих величин (штрафних коефіцієнтів), $\mathbf{Q}(\mathbf{z})$ – вектор, компонентами якого є значення інтегральних виразів (8), (9).

Для розв'язання отриманої задачі нелінійного програмування використовуємо стандартні числові процедури мінімізації функції багатьох змінних. За початкове (стартове) значення вектора оптимізації $\mathbf{z}$ вибираємо

$$a_{ik}^{(0)} = \frac{1}{d_{ik}} \int_0^T [\overline{q}_i(t) - P_i(t)] g_{ik}(t) dt \quad , \quad d_{ik} = \int_0^T g_{ik}^2(t) dt \quad , \quad k = \overline{1, n_i} \; , \; i = \overline{1, n} \; ,$$

де $\overline{q}_i(t) \equiv [q_i^{(0)}(t) + q_i^{(1)}(t)]/2$ – серединна крива в обмеженнях (3).

Фактично, метод параметричної оптимізації замінює вихідну задачу оптимального керування на іншу задачу (нелінійного програмування), й оцінити близькість розв'язків цих задач можна тільки в окремих випадках для простих маніпуляційних систем. Однак, для багатьох маніпуляційних систем, рівняння руху яких є суттєво нелінійними, такий метод дає можливість побудувати субоптимальні режими керування та оцінити ефективність використання таких систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. 1Демидюк М.В., Гошовська Н.В. Параметрична оптимізація транспортних операцій дволанкового маніпулятора // Мат. методи та фізико-механічні поля. – 2016. – Том 59. – №4. – С. 142-152.
2. Демидюк М.В., Демидюк В.М. Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора // Вісник Харків. національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2020. – Вип. 48. – С. 36-48.

УДК 330.46; 330.34

ДЕНДРОГРАМИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ РЕГІОНІВ УКРАЇНИ ЗА РІВНЕМ РОЗВИТКУ МАЛОГО БІЗНЕСУ

Леся Добуляк, Світлана Костенко

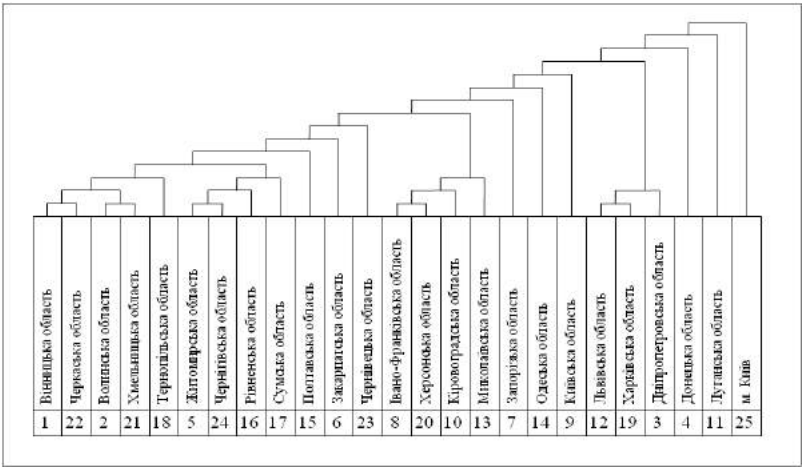
Львівський національний університет імені Івана Франка
lucanlesia@gmail.com

Розвиток малого підприємництва є необхідною умовою функціонування економіки будь-якої країни. Регіони України є

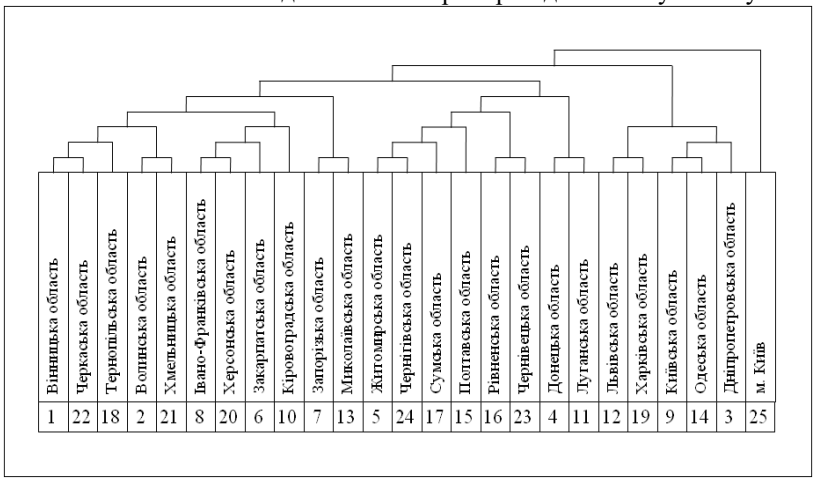
неоднорідними як за рівнем економічного розвитку, так і за умовами функціонування малих бізнесових структур. Метою даної роботи є висвітлити ці регіональні особливості і об'єднати регіони України у групи зі подібними характеристиками розвитку малого бізнесу. Для диференціації регіонів України було застосовано кластерний аналіз, а саме агломеративну процедуру, суть якої полягає в тому, що кожна область на першому кроці являє собою окремий кластер, а на кожному наступному кроці два найближчі (за евклідовою відстанню) один до одного кластери об'єднуються в один.

Показники (характеристики кожного регіону) поділені на дві групи – ті, які описують поточний стан малого підприємництва в області (кількість малих підприємств, одиниць; кількість малих підприємств на 10000 осіб наявного населення, одиниць; частка кількості малих підприємств у загальній кількості підприємств, %; кількість зайнятих працівників, тис. осіб; кількість найманих працівників, тис. осіб; обсяг реалізованої продукції (товарів, послуг) малими підприємствами, млн. грн.; підприємства, які отримали прибуток, у % до загальної кількості; кількість зайнятих економічною діяльністю, тис. осіб) та ті, які характеризують економічний потенціал регіону (кількість студентів вищих навчальних закладів у розрахунку на 10000 населення; валовий регіональний продукт, млн. грн.; наявний дохід населення у розрахунку на одну особу, грн.; середньомісячна заробітна плата, грн.; витрати населення у розрахунку на одну особу, грн.; капітальні інвестиції, млрд. грн.). Розрахунки було проведено на основі статистичних даних [1].

Відстань між кластерами була розрахована за принципами одиничного зв'язку (відстань між двома класами визначається як відстань між найближчими їх представниками) та повного зв'язку (максимальна відстань між об'єктами, що входять в різні кластери) [2]. Результати такого об'єднання найкраще представити у вигляді відповідних дендрограм (мал. 1, мал. 2). Дендрограма представляє процес кластеризації у формі деревовидної структури. Наведені відповідні дендрограми покрокового об'єднання кластерів.



Мал. 1. Об’єднання кластерів при одиничному зв’язку



Мал. 2. Об’єднання кластерів при повному зв’язку

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Регіони України. 2017 : статистичний збірник / державна служба статистики України. Київ, 2018. Частина І. 315 с.
2. Добуляк Л. П. Використання агломеративної кластер-процедури для групування регіонів України за рівнем розвитку малого підприємництва / Л. П. Добуляк, С. Б. Костенко, С. П. Шевчук // Приазовський економічний вісник. – 2019. – Випуск 4 (15).

УДК 519.6

ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕСУРСНИХ ВИТРАТ В БАГАТОЕТАПНОМУ ПРОКАТНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Тимур Желдак, Лариса Коряшкіна, Дмитро Сердюк

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

zheldak.t.a@nmu.one, koriashkina.l.s@nmu.one, Serdiuk.D.O@nmu.one

Розглядається задача оптимального використання металу в двоетапному процесі його розподілу при виробництві прокатної продукції, а саме: на етапі розливки сталі з ковша при конвертерному виробництві, і під час формування заготівок в машинах з неперервним литтям. При цьому враховується вид продукції, що виробляється, і можливі варіанти розкроювання в двох переділах прокатки.

В роботі [1] запропонована математична модель задачі мінімізації витрат металу в прокатному виробництві, яка вирішується на етапах розкроювання готової продукції і розкроювання зливків на заготовки. Схема технологічного процесу включає послідовність наступних операцій: 1) виплавка сталі, 2) розливка зливків у виливниці, 3) нагрівання зливків, 4) прокатка блюмів, 5) обріз блюмів парогідравлічним ножом, 6) прокатка передільної заготовки, 7) розкроювання передільної заготовки, 8) нагрівання штанг-заготовок, 9) прокатка профілів готової продукції, 10) розкроювання профілів готової продукції, 11) завершальна обробка готової продукції. Вочевидь, кожна з операцій суттєво впливає на виконання наступних.

Отже, розкрій злитка здійснюється в два етапи. На першому – весь злиток поділяється на передільні заготовки, довжина яких може лежати в межах від 2,4м до 3,2м з кроком 0,05м. На другому – кожна передільна заготовка розкочується в готовий виріб (швелер, куточок, балка, обід ...) і ділиться на мірні штанги довжиною 12, 11,7, 9 або 6 м згідно замовленню (визначається логістичними вимогами клієнта).

Математично задача сформульована за наступних припущень: а) відома кількість блюмів певного перерізу, яку необхідно використати для виготовлення продукції за планом; б) між виливницями і блюмами встановлена однозначна відповідність, тобто відомо, з якої виливниці метал

розкатується у блюм заданого перерізу; в) кожна передільна заготівка розкроюється на штанги тільки одного розміру, при. цьому поділ здійснюється з урахуванням наперед розрахованої методом повного перебору оптимальної довжини передільної заготовки для кожного виду продукції, тобто для кожної довжини передільної штанги. Оскільки деякі перерізи блюмів передбачають виготовлення не одного виду готового виробу, а відразу кілька, комбінуючи довжини передільних заготовок в різній кількості, можна максимально використовувати всю довжину отриманого блюма (всю масу налитого злитка).

Зазначена вище математична модель передбачає пошук такої маси металу в ковші і такого її розподілу на зливки на етапі 2), які б дозволяли на наступних операціях розкроювати передільні заготовки і готову продукцію з останніх, мінімізуючи можливі обрізки і враховуючи поточний розмір замовлення на сортовий прокат:

$$Z(q,x) \to \min, \quad Z(q,x) = \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{q_n}{a_n c_n \rho_n} - \sum_{m=1,M;\sigma_{nm}=1} \sum_{p=1}^{4} length_m^p \cdot x_m^{p,n}\right); \tag{1}$$

за умов

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n \le Q; \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_m^{p,n} = NumberZag_m^p, m = 1,2,\ldots,M;\ p = 1,2,3,4; \tag{3}$$

$$NumberZag_m^p = \frac{b_m^p}{amount_m^p}, m = 1,2,\ldots,M;\ p = 1,2,3,4; \tag{4}$$

$$\sum_{m=1,M;\sigma_{nm}=1} \sum_{p=1}^{4} length_m^p \cdot x_m^{p,n} - \frac{q_n}{a_n c_n \rho_n} \le 0, n = 1,2,\ldots N; \tag{5}$$

$$q_{\min} \le q_n \le q_{\max}, n = 1,2,\ldots N; \tag{6}$$

$$x_m^{p,n} \ge 0, x_m^{p,n} - цілі,\ p = 1,2,3,4; m = \overline{1,M}; n = \overline{1,N}; \sigma_{nm} = 1. \tag{7}$$

Тут Q – максимальна кількість металу в ковші (кг); ρ – густина металу (кг/м3); N - кількість виливниць для розливки зливків $q_n, n = 1,2,\ldots,N$ – маса зливку в n-й виливниці; $q_{\min}, q_{\max}$ – мінімально і максимально можлива маса зливку; M – кількість видів продукції, що виготовляється; $b_m^p = \overline{1,M}, p = \overline{1,4};$ – план виготовлення продукції (штанг) $l_p, p = 1,2,3,4;$ – можливі довжини штанг відповідно замовленню (12; 11,7; 9 і 6 м відповідно); $NumberZag_m^p$ – кількість

заготовок довжини $length_m^p$, яку необхідно отримати в результаті розкрою злитків для виконання замовлення; $length_m^p$ – оптимальна довжина передільної заготівки для виробництва відповідної продукції; $amount_m^p$ – кількість штанг відповідної продукції, отримана після розкрою однієї заготівки довжини $length_m^p \cdot x_m^{p,n}$ – кількість заготівок довжини $length_m^p$, яку отримаємо після розкрою n-го блюму.

Якщо I – кількість варіантів блюмів, що відрізняються площею поперечного перерізу, то зв'язок між блюмами та продукцією встановлюється за допомогою матриці $H = \{h_{im}\}, i = \overline{1,I}, m = \overline{1,M};$ з елементами:

$$h_{im} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з i-го блюму можна отримати m-ту продукцію} \\ 0, & \text{у противному випадку;} \end{cases}$$

А отже, кожному індексу n поставлений у відповідність номер перерізу блюму, що зазначимо в матриці $D = \{d_{in}\}, i = \overline{1,I}, n = \overline{1,N};$ елементи якої визначаються за правилом:

$$d_{in} = \begin{cases} 1, & \text{якщо n-й блюм має переріз i-го типу} \\ 0, & \text{у противному випадку.} \end{cases}$$

Якщо величина $\sigma_{nm} = \sum_{i=1}^{I} h_{im} d_{in}$ дорівнює 1, їй відповідають чотири цілі невід'ємні змінні $x_m^{p,n}$. Коли σ_{nm} змінної $x_m^{p,n}$ не існує.

Довжина n-го блюму після прокатки $l_n = \frac{q_n}{a_n c_n \rho_n}$, де $a_n = \sum_{i=1}^{I} d_{in} \overline{a_i}$, $c_n = \sum_{i=1}^{I} d_{in} \overline{c_i}$ – розміри перерізу блюму.

Далі розглянемо особливості реалізації наведеної моделі. По-перше, зазначимо, що задача (1) – (7) є задачею частково-цілочисельного лінійного програмування, для розв'язання якої застосовується метод гілок та меж. По-друге, оскільки модель (1) – (7) сформульовано в межах однієї плавки, а розмір замовлення (загалом) на прокатну продукцію з однієї марки сталі може значно перевищувати розмір одного ковша, то потрібно здійснити розбиття всього замовлення на частини, кожна з яких може бути виконана за одну плавку. По-третє, саме замовлення на практиці вимірюється не в штангах певної довжини, а в тонах готової продукції. Все це означає, що реалізація побудованої моделі передбачає етап попередньої обробки вихідних даних, на якому: 1) з усіх поточних замовлень формується єдине замовлення;

2) отримане замовлення, що вимірюється тонами, конвертується в таке, що вимірюється в штангах готової продукції; 3) останнє в свою чергу поділяється на декілька частин так, щоб для кожної частини виконувалася умова розв'язності задачі (1) – (7): $\sum_{p=1}^{4}\sum_{m=1}^{M} mass_m^p b_m^p \le Q$, де $mass_m^p$ – маса 1 штанги відповідної продукції (маса 1 $п.м. \cdot l_p$). Крім того, оцінюється, скільки блюмів і якого перерізу потрібно використовувати для виконання замовлення:

$$\frac{1}{M_{\max}} mass_m^p b_m^p h_{im} \le w_i \le \frac{1}{M_{\min}} mass_m^p b_m^p h_{im}, i = \overline{1,I},$$

де $M_{\max}$ і $M_{\min}$ – максимальна і мінімальна кількість металу, що вміщується в блюм. Величини w_i визначимо таким чином, щоб $\sum_{i=1}^{I} w_i = N$.

В табл. 1 наведений приклад розбитого на 7 плавок замовлення, а в табл. 2 наведені втрати металу на кожній плавці.

Табл. 1. Приклад замовлення

№ плавки	Типи швелерів	Довжини, м	Маси, тон
1	8; 8	9; 12	44; 10
2	10; 10	11.7; 12	27; 27
3, 4	12	6	52.5
5	10; 14	6; 11.7	14; 40
6	14; 16	6; 11.7	10; 44
7	12; 12	9; 12	25; 29

Табл. 2. Втрати металу на кожній плавці

№ плавки	Загальна маса частини замовлення, кг	Фактична маса металу, що подається в шихту , кг	Втрати, %
1	54000	57244	5.67
2	54000	56764	4.87
3, 4	52500	55794	5.9
5	54000	57000	5.26
6	54000	56378	4.22
7	54000	57014	5.29

Оскільки на практиці допускається значення втрат металу до 10%, то можна зробити висновок, що розроблена математична модель дозволяє

вирішувати проблему надвитрат металу під час виробництва прокатної продукції і кількісно обґрунтовувати прийняття відповідних рішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hnatushenko V.V. Mathematical model of steel consumption minimization considering the two-stage billets cutting / V.V.Hnatushenko, T.A.Zheldak, L.S.Koriashkina // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2021. – № 2.– P. 118-124.

УДК 004.8

ГЕНЕРУВАННЯ МУЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Юрій Калічун , Надія Колос

1,2Львівський національний університет імені Івана Франка

Yurii.Kalichun@lnu.edu.ua

nadiya.kolos@lnu.edu.ua

Метою дослідження було створення і тренування нейронної мережі для генерування музики, а саме, нот для фортепіано в форматі MIDI.

1 Вступ

Однією із важливих задач штучного інтелекту є задача генерування (творчості, мови, рішень та ін.). Наприклад, у сфері комп'ютерного зору є багато розробників, які досліджують передові методи створення зображень за допомогою Генеративних Змагальних Мереж (GAN). Наприклад, NVIDIA створює реалістичний генератор облич за допомогою GAN.

Є також деякі дослідження щодо створення музики за допомогою GAN.

Якщо говорити про цінність музичного генератора, то він може бути використаний для допомоги музиканту у створенні власної музики. Такий продукт може підвищити креативність та продуктивність людей.

2 Використані технології, методики та дані

Для реалізації використовувались наступні технології:

- Tensorflow v2.0 – фреймворк для створення і тренування моделей нейронних мереж

- Python 3.7

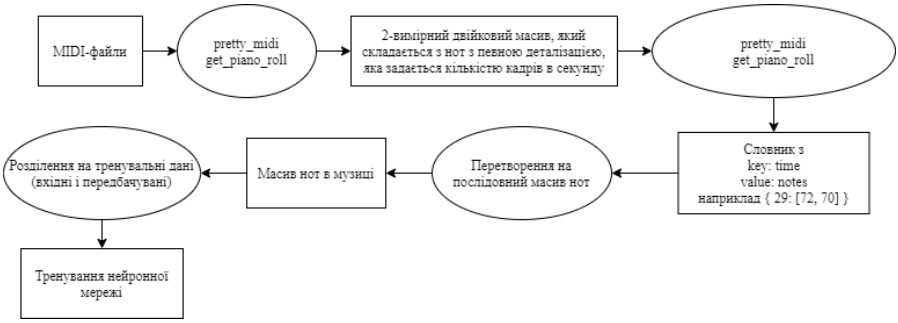
- Colaboratory – безкоштовне хмарне середовище з Jupyter notebook і відеокартами Nvidia Tesla.

- pretty_midi.py – бібліотека для створення і редагування MIDI-файлів

Для тренувальних даних використано датасет MAESTRO (MIDI and Audio Edited for Synchronous TRacks and Organization) від Magenta. Цей датасет містить записи для фортепіано.

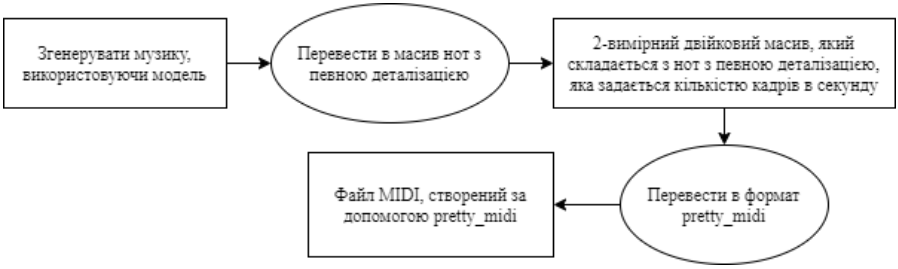
3. ПРОЕКТУВАННЯ

Візуалізація процесу тренування нейронної мережі зображена на Малюнку 1.



Мал1. Візуалізація процесу тренування нейронної мережі

Після тренування, використовуючи доволі схожий план, але в зворотньому порядку можна отримати файли MIDI зі згенерованою музикою, як показано на Малюнку 2.



Мал 1. Візуалізація процесу отримання файлу MIDI зі згенерованою музикою

Для кращого розуміння процес проектування був розділений на три основні підпроцеси:

- Перетворення файлів MIDI в формат, необхідний для тренування нейронної мережі
- Тренування моделі
- Генерування файлів MIDI з виводу нейронної мережі.

4 РЕАЛІЗАЦІЯ

4.1 Попередня обробка файлів MIDI

Для попередньої обробки файлів MIDI існує декілька Python-бібліотек, які можна використовувати для цього. Одна з них це pretty_midi. Вона може створювати і маніпулювати файлами MIDI, тому обрано було саме її.

У нашому датасеті файли MIDI містять лише один інструмент - це фортепіано. Після того, як ми отримаємо масив нот фортепіано, ми перетворюємо їх у словник. Ключем словника буде момент початку відтворення ноти. Отримавши словник, ми перетворюємо його на послідовність нот, які будуть використовуватися для тренування нейронної мережі. Даючи нейронній мережі початкову послідовність, вона буде повертати нам наступну ноту.

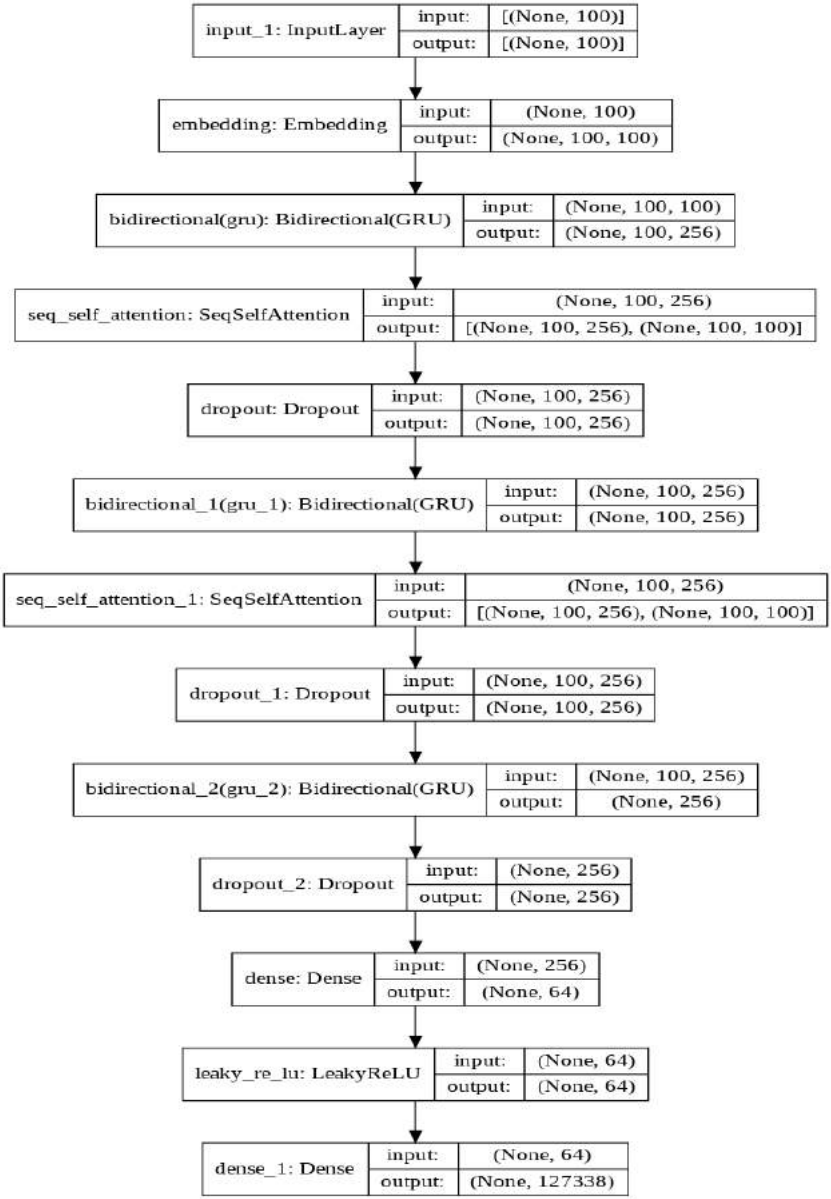
Щоб довести дані до формату, який зможе отримувати нейронна мережа, нам потрібно дати кожному набору нот свій індекс. Для цього було створено NoteTokenizer. Він перевів всі послідовності нот в послідовності чисел, які є більш релевантними для нейронної мережі.

4.2 Архітектура моделі

Отже, архітектура нейронної мережі використовує 3 шари Gated Recurrent Unit (GRU, вид рекурентної нейронної мережі) та декілька рівнів уваги. Шар відсіку(Dropout) використовується для того, щоб не перетренувати нейронну мережу. Детальніша архітектура моделі зображена на Малюнку 3.

4.3 Тренування моделі

Протягом тренування ваги моделі оновлялися шляхом ітерації через попередньо оброблені музичні файли. Для оновлення ваг нейронної мережі використано GradientTape. Спочатку ми обчислюємо помилку (loss) та застосовуємо метод зворотнього поширення помилки, використовуючи для цього apply_gradients.



Мал. 3. Архітектура нейронної мережі

УДК 519.6

ПОРІВНЯННЯ Н-АДАПТИВНИХ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ

Галина Квасниця, Павло Малашняк, Георгій Шинкаренко

Львівський національний університет імені Івана Франка

halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua

У даній роботі метод скінченних елементів (МСЕ) застосовується для розв'язання крайових задач зі звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Для обчислення їхніх наближених розв'язків побудовано адаптивні схеми МСЕ з використанням кусково-лінійних, кусково-квадратичних та кусково-кубічних ермітових апроксимацій. Для кожного виду апроксимацій запропоновано апостеріорні оцінювачі похибки МСЕ, та розроблено алгоритм ітераційної перебудови сіток з використанням нерівномірних поділів області визначення розв'язків на скінченні елементи, що дозволяє обчислювати апроксимації МСЕ з наперед заданою точністю.

Розглянемо крайову задачу:

знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$-\left[\mu(x)u'(x)\right]' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b) \tag{1}$$

і задовольняє крайові умови

$$u(a) = 0, \qquad -\mu u'(b) = \alpha[u(b) - \bar{u}] \tag{2}$$

Тут $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ □ задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \ge \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma(x) \ge 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

$\alpha \ge 0$, $\bar{u}$ - задані сталі.

Крайова задача (1), (2) може бути сингулярно збуреною, у цьому випадку її розв'язок містить примежові або/та внутрішні шари, в околах яких його похідні набувають величезних значень. Ця обставина спонукає до застосування адаптивних схем методу скінченних елементів, див. [4]

Крайова задача (1),(2) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u \in V := \{v \in H^1(a,b) : v(a) = 0\} \quad \textit{таку, що} \\ \qquad c(u,v) =< l, v > \qquad\qquad \forall v \in V \end{cases}$$

з білінійною формою та лінійним функціоналом, визначеними в такий спосіб

$$\begin{cases} c(u,v) := \int_a^b (\mu\, u'v' + \beta\, u'v + \sigma\, uv)dx + \alpha u(b)v(b), \\ < l, v > := \int_a^b fvdx + \alpha\bar{u}v(b) \qquad\qquad \forall u, v \in V. \end{cases} \tag{3}$$

Зафіксуємо натуральне $N > 1$ і за допомогою сітки вузлів $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_N = b$ поділимо відрізок $[a,b]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} := [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,N-1,$ на кожному із яких обчислимо апроксимацію u_h розв'язку задачі (3). Для знаходження скінченноелементної апроксимації $e_h(x)$ похибки $e(x) = u(x) - u_h(x)$ отримаємо таку задачу про лишок:

$$\begin{cases} \textit{знайти оцінювач похибки } e_h \in E_h \textit{ такий, що} \\ c(e_h, v) =< \rho(u_h), v >:=< l, v > - c(u_h, v) \qquad \forall v \in E_h, \end{cases} \tag{4}$$

де $E_h \subset E := V \setminus V_h,\ \dim E_h < +\infty.$

Оцінювач апостеріорної похибки $e_h = e_h(x)$ будемо шукати у вигляді

$$e_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}\phi_{i+1/2}(x) \quad \forall x \in (a,b), \tag{5}$$

де $\phi_{i+1/2}(x)$ – відповідні базисні функції із простору E_h, коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ знаходимо за формулою $\lambda_{i+1/2} = \dfrac{< \rho(u_h), \phi_{i+1/2} >}{c(\phi_{i+1/2}, \phi_{i+1/2})} \quad i = 0,...N-1$.

Норму апостеріорного оцінювача похибки знаходимо у вигляді

$$\| e_h \|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \| e_h \|_{i+1/2}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \| \phi_{i+1/2} \|^2. \tag{6}$$

Згущення сітки відбувається відповідно до стратегії, описаної в [3], а саме: обчислюємо на кожному скінченному елементі індикатор апостеріорної похибки у вигляді $\eta_{i+1/2} := \dfrac{\sqrt{N}\, \| e_h \|_{i+1/2}}{\sqrt{\| u_h \|^2 + \| e_h \|^2}} 100\%$; якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то скінченний елемент поділяється на два нових, які в покращеній сітці замінюють його на черговому кроці адаптування. Решта елементів залишається без змін і разом з усіма

новоутвореними скінченними елементами формують уточнену сітку. Якщо жоден з елементів не задовольняє даної умови, то процес адаптування вважають завершеним.

Щоб уніфікувати процеси визначення базисних функцій МСЕ та необхідних обчислень на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ вводимо локальну координату ξ згідно правила:

$$x = x(\xi) := \tfrac{1}{2}\left(1-\xi\right)x_i + \tfrac{1}{2}\left(1+\xi\right)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} = x_{i+1/2} + \tfrac{1}{2}h_{i+1/2}\xi$$
$$x_{i+1/2} := \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1}),\ \ h_{i+1/2} := \tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \qquad \forall \xi \in [-1,1]. \tag{7}$$

Тут $\theta(\xi) := \tfrac{1}{2}(1-\xi), \qquad \omega(\xi) := \tfrac{1}{2}(1+\xi).$

1. Частинами лінійні апроксимації МСЕ.

На кожному скінченному елементі вибиралась апроксимація шуканого розв’язку варіаційної задачі (3) у вигляді:

$$u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta(\xi)u_i + \omega(\xi)u_{i+1}$$

з невідомими коефіцієнтами $u_i,\ i = 1,...N,$ значення яких обчислюємо класичною процедурою Гальоркіна.

Базисна функція оцінювача похибки є функцією з локальним носієм $\operatorname{sup}\mathrm{p}\ \phi_{i+1/2} = K_{i+1/2}$ та в локальних координатах описується виразом $\phi_{i+1/2}(\xi) = 4\theta(\xi)\omega(\xi)$.

2. Частинами квадратичні апроксимації МСЕ.

На кожному скінченному елементі вибираємо квадратичну апроксимацію шуканого розв’язку варіаційної задачі (3) у вигляді:

$$u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \{2\theta(\xi)[\theta(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_i + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}u_{i+1/2} + \{2\omega(\xi)[\omega(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_{i+1}$$

а її похибку на кожному скінченному елементі будемо апроксимувати кубічним поліномом вигляду:

$$e_{i+1/2}(\xi) := \theta(\xi)\omega(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]\lambda_{i+1/2}$$

3. Частинами кубічні апроксимації МСЕ.

На кожному скінченному елементі вибираємо кубічну апроксимацію шуканого розв’язку варіаційної задачі (3) у вигляді:

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta^2(\xi)\left[2\omega(\xi)+1\right]u_i + h\theta^2(\xi)\omega(\xi)\}u_i' + \omega^2(\xi)\left[2\theta(\xi)+1\right]u_{i+1} - \\ \qquad\qquad -h\omega^2(\xi)\theta(\xi)u_{i+1}' \end{cases}$$

а її похибку на кожному скінченному елементі будемо апроксимувати поліномом четвертого порядку:

$$e_{i+1/2}(\xi) := 16\theta^2(\xi)\omega^2(\xi)\lambda_{i+1/2}.$$

Розв'язувалась крайова задача (1), (2) з наступними коефіцієнтами: $\mu(x)=1$, $\beta(x)=7700(x-0.5)^2$, $\sigma(x)=1000(x+0.5)^3$, $f(x)=5600x^4$. В крайовій умові (2) візьмемо $\alpha=10^{28}$, $\bar{u}=0.$ Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N=10$ скінченних елементів, допустимий рівень похибки $\varepsilon=5\%$. Наближені розв'язки цієї задачі будувалися описаною вище процедурою $h-$адаптування із використанням лінійних, квадратичних та кубічних ермітових апроксимацій МСЕ. Окремі числові результати, отримані для апроксимацій відповідного порядку, наведені в табл.1. Тут вжито таких позначень: m – кількість кроків адаптування; N – кількість скінченних елементів на остаточній сітці; $\delta_{\max}$ – максимальна відносна похибка, p – порядок збіжності схеми МСЕ в енергетичній нормі, T - сумарний час, затрачений на процес адаптування.

Табл. 1. Характеристики збіжності для побудованих схем

Апроксимація	m	N	$\|u_h\|$	$\|e_h\|$	$\delta_{\max}$	p	T, ms
Лінійна	14	116	28,579	0,5761	4,9	1,5	51,52
Квадратична	11	55	28,613	0,3682	4,8	2,9	12,48
Кубічна	7	34	28,356	0,1905	3	4,9	12,34

Одержані результати демонструють супер збіжність усіх h-адаптивних схем МСЕ і перевагу кубічних апроксимацій над апроксимаціями нижчих порядків, а саме меншу кількість кроків адаптування, менший сумарний час, необхідний для обчислення розв'язку із заданою точністю, а також меншу відносну похибку знайденого наближення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов Є. Кусково лінійні апроксимації h-адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач. / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3–18.

2. Абрамов Є. Частинами квадратичні та кубічні апроксимації h-адаптивного МСЕ для одновимірних крайових задач. / Є. Абрамов, Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2011.-Вип. 17. – С. 47–61.

3. Квасниця Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики. / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2002. -Вип. 5. – С. 95-106.
4. Repin S.I. A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations / S.I. Repin. – Berlin ·New York: Walter de Gruyter, 2008. – pp. 328.

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ЦИКЛІВ У ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

І.І. Клевчук, М.В. Гритчук
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
i.klevchuk@chnu.edu.ua

Дослідимо існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією (феномен буферності). Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [1, 2]. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією. Дослідимо біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + \\ +(d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + \\ +(d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2) \qquad (1)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x),\ u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \qquad (2)$$

де ε – малий додатний параметр, $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$.

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\bar{u}. \quad (3)$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\frac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,$$

$$\sigma\theta_1 = i\omega_0\theta + \varepsilon[(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta] + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}. \quad (4)$$

Інтегральний многовид системи (4) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha+i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \cdots.$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha+i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \cdots. \quad (5)$$

Перейшовши у рівнянні (5) до полярних координат, $\theta = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \quad (6)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (6) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (5) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon} R_0 \exp\left(\frac{i\omega_0}{\sigma} y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \frac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \qquad (7)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon} r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx),$$
$$u_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (8)$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 1. Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки (8).

2. Стійкість періодичних розв'язків.

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7) рівняння (3) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)v\right] +$$
$$+\varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2 \bar{v}), \qquad (9)$$

де $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Зробивши в рівнянні (9) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w +$$
$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))]. \qquad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx).$$

(11)

Підставляючи (11) в (10) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k + \\ +n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (12)$$

Аналогічно підставляючи (11) у спряжене до (10) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k - \\ -n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (13)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2) визначається стійкістю системи (12), (13) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (12), (13) зробимо заміну

$$y_{k+n} = z_{k+n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn),$$
$$v_{k-n} = w_{k-n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn).$$

Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + +a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - \\ -2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \quad (14)$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 2. Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (1), (2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (14) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Як приклад розглянемо систему (1), в якій $\delta = 0$, $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $\gamma n^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // Journal of Mathematical Sciences – 2016. 215, No. 3. – P. 341 – 349.
2. Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // Journal of Mathematical Sciences – 2017. 226, No. 3. – P. 285 – 295.

УДК 004.4:519.684

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НАЙБІЛЬШОЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ МНОЖИНИ ВЕРШИН ГРАФУ НА КВАНТОВО-КЛАСИЧНИХ ХМАРНИХ СЕРВІСАХ

Вячеслав Корольов , Олександр Ходзінський

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

korolev.academ@gmail.com, okhodz@gmail.com

Квантові комп'ютери дозволяють отримати в кілька разів швидше рішення ряду NP-складних проблем комбінаторної оптимізації в порівнянні з обчислювальними кластерами. Створення алгоритмів для розв'язування задач комбінаторної оптимізації для гібридних квантово-напівпровідникових обчислювальних комплексів дозволяє прискорити отримання результатів та отримати наближені розв'язки. Наведено приклад розв'язування задачі пошуку найбільшої незалежної множини на квантових комп'ютерах IBM і D-wave, які доступні через хмарні сервіси.

Ключові слова: квантовий комп'ютер, квантова комп'ютерна математика, кубіт, максимальна незалежна множина для графа.

Вступ

Сучасні квантові комп'ютери перейшли зі стадії лабораторних зразків до обчислювальних сервісів, що надаються через хмарні сервіси у мережі Інтернет. Сьогодні квантові комп'ютери дозволяють розв'язувати задачі комбінаторної оптимізації для графів, що налічують до 40 вершин.

Виконання декомпозиції задачі оптимізації на електронних комп’ютерах з передачею підзадач на квантовий комп’ютер дозволяє збільшити кількість вершин графу до декількох сотень.

Квантові комп'ютери на декілька порядків продуктивніше виконують низку широко використовуваних алгоритмів у порівнянні з сучасними електронними комп’ютерними системами, що побудовані на напівпровідникових логічних вентилях. Тому розробка алгоритмічно-програмного забезпечення для квантових комп’ютерів є актуальною науковою і прикладною проблемою.

Загальна схема операцій для квантових обчислень

Квантова суперпозиція - це одночасне існування станів кубіта, які не можуть бути реалізовані одночасно з класичної точки зору. Виконання квантових обчислень базується на послідовності з чотирьох трьох операцій [1-4]:

-формулювання задачі оптимізації згідно до квантову модель обчислень;

-створення квантової суперпозиції;

-виконання обчислень у суперпозиції та перетворень кубітів;

-зменшення шуму вимірювання і зчитування даних.

Розв’язування задачі про найбільшу незалежну множину.

Постановка задачі. Задано простий неорієнтований граф $G(V,E)$, де V – множина вершин, E – множина ребер, n – кількість вершин, m – кількість ребер, $V=\{1,2,...,n\}$, $E=\{(u_1,v_1),(u_2,v_2),...,(u_m,v_m)\}$; $u_i,v_i \in V;\ \ i=1,...,m$. Кожній вершині i поставлено у відповідність змінну x_i, яка може приймати значення 0 або 1: $x=(x_1,...,x_n)$, $x_i \in \{0,1\}$. Задано також функцію $f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$ і обмеження на значення вектора $x=(x_1,...,x_n)$: $(i,j)\in E \Rightarrow x_i + x_j \le 1$. Таким чином, задача про найбільшу незалежну множину графа (ННМГ) формулюється так:

знайти $\max f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$

за обмежень $(i,j)\in E \Rightarrow x_i + x_j \le 1 \quad x_i \in \{0,1\}, i=1,...,n.$

Ця задача, як і більшість інших в комбінаторній оптимізації, є NP-складною [1,3-7]. У таких випадках проблеми оптимізації швидко стають невирішуваними методами прямого перебору, навіть із великими

обчислювальними ресурсами. Тому до проблем обчислювально складних задач оптимізації зазвичай застосовують евристичні підходи та емпіричні методики.

Багато задач комбінаторної оптимізації на графах використовують модель квадратичної необмеженої бінарної оптимізації (Quadratic Unconstrained Binary Optimization - QUBO). Задача QUBO визначається за допомогою верхньодіагональної матриці Q розмірності NxN, верхньодіагональної матриці дійсних ваг, x – вектора, двійкових змінних, як мінімізує функцію:

$$f(x) = \sum_{i} Q_{i,i} x_i + \sum_{i<j} Q_{i,j} x_i x_j$$

де діагональними є лінійні коефіцієнти Qi,i, а елементи Qi,j є квадратичними коефіцієнтами.

Оскільки задача пошуку незалежної множини є задачею з обмеженнями, то виконується зведення задачі до загальної форми виду:

$$\min\left(\textit{цільова функція}\right) + \gamma\left[\textit{обмеження}\right].$$

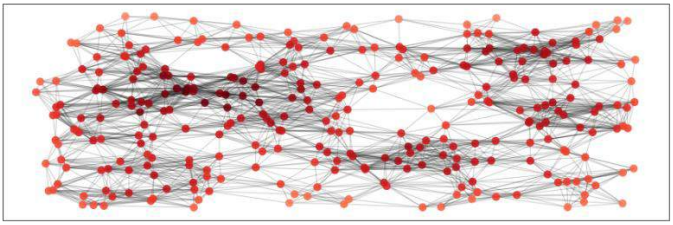
Значення γ виконується налаштуванням параметрів квантових обчислювачів та перевіряється за допомогою повторювання обчислень.

Щоб сформулювати задачу для квантового обчислювача, треба побудувати цільову функцію, яка є відображенням фізичного стану системи як функції бінарних змінних, що представляють кубіти. У квантових обчислювачах вузли графу відображають кубітами, а ребра - з’єднаннями між кубітами. Для більшості випадків чим нижчий енергетичний стан квантової системи, що відображає цільову функцію, тим розв’язок задачі ближче до оптимального.

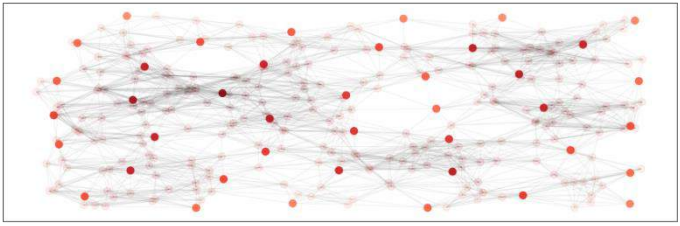
Для декомпозиції задач комбінаторної оптимізації на графах з кількістю вершин понад 40, які зводяться до QUBO, фірма виробник квантових комп’ютерів D-Wave пропонує:

- алгоритми декомпозиції задач;
- способи об'єднання квантових і класичних комп’ютерів;
- процедури керування параметрами робочого процесу для отримання результатів обчислень.

Наведемо візуальні приклади розв’язування задачі пошуку кліки для графу з 300 вершин (малюнки 1-2). Видно, що візуально складно оцінювати якість як розв’язування задачі, так і підзадач утворених сервісами декомпозиції.



Мал. 1. Приклад тестового випадкового графу з 300 вершин



Мал. 2. Розв’язок задачі пошуку ННМГ для тестового графу з 300 вершин

Висновки

Кількість і сила зв'язків між кубітами впливає на розмірність задач, розв'язуваних алгоритмами квантової комп'ютерної математики. Відомо два підходи до обчислення задач комбінаторної оптимізації на квантових комп'ютерах: універсальний, за допомогою квантових вентилів, і спеціалізований, на базі параметризації фізичних процесів. Наведено приклад вирішення задачі пошуку максимальної незалежної множини графа квантово-класичному хмарному сервері фірми D-wave.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Корольов В.Ю., Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на квантових комп’ютерах. / О.М. Ходзінський // Cybernetics and Computer Technologies.– 2020.– № 2.– С. 5-13. https://doi.org/10.34229/2707-451X.20.2.1
2. Корольов В.Ю. Багаторівневе державне впізнавання об’єктів та аналіз застосовності пост-квантових криптографічних алгоритмів для захисту інформації. / М.І. Огурцов, О.М. Ходзінський // Cybernetics and Computer Technologies.– 2020.– №3.– С. 74-84. https://doi.org/10.34229/2707-451X.20.3.7
3. Nielsen M.A. Quantum Computation and Quantum Information. / Chuang I.L. Cambridge: University Press, 2012. https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667

4. Asfaw A. Learn Quantum Computation using Qiskit. URL: https://qiskit.org/textbook/ch-applications/qaoa.html (accessed 06/21/2021).
5. Gary M., Computing machines and difficult-to-solve problems. /Johnson D. Mir: Moscow.– 1982. (in Russian)
6. Talbi E.-G. Metaheuristics: from design to implementation.– Wiley: Hoboken.– 2009.
7. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації/ – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 142 с.

КОНЦЕПЦІЯ ЕКОЛОГІЧНО БЕЗПЕЧНОЇ ДОРОГИ “SMARTWAY”

Андрій Мельничин, Андрій Веліховський, Іванків Олег
andriy.melnychyn@lnu.edu.ua, andriygh2326@gmail.com,
oleguk0509@gmail.com

Вступ. Робота націлена на розробку прототипу розумної екологічно безпечної дороги, що дасть змогу вирішити чимало екологічних і технічних проблем, зокрема таких як, забруднення атмосфери внаслідок викидів CO2, нагромадження пластикових відходів, тривалий час будівництва та висока ціна бітумних доріг, залежність від екологічно шкідливих видів палива для автомобілів, проблеми ефективного контролю трафіку.

Інноваційність даного проєкту полягає в можливості динамічної зарядки електромобілів під час руху на екологічно чистому покриті дороги з переробного пластику із досягненням високого ККД у системі автомобіль – дорога.

Дана розробка може знайти широке практичне використання. Будівництво доріг даного типу дозволить скоротити витрати на обслуговування дорожньої інфраструктури. Також даний тип пластикових доріг можна легко монтувати за рахунок модульної будови та налаштувати для подальшої експлуатації. Варто зазначити, що час будівництва таких доріг на 70% менший в порівнянні зі звичайними бітумними дорогами. Ще до переваг полімерних доріг можна віднести їхню міцність, зносостійкість та можливість повторної переробки після закінчення терміну експлуатації.

Процес розробки системи. Для перевірки працездатності запропонованої системи спершу проведено ряд експериментів для визначення ККД в системах контурів приймач–передавач та передавач–передавач. Ці дослідження дозволили приблизно оцінити зміни ККД в повномасштабній

системі, а також обрати оптимальну схему розміщення та перемикання контурів. Виготовлено макож макет треку та електромобіля у відношенні 1:33 до повномасштабного (див. рис. 1).

Рис. 1. Зображення розробленого макету треку зверху та знизу

Процес проектування, тестування та налагодження електронних схем, відбувався на симуляторі Easy EDA (рис. 2).

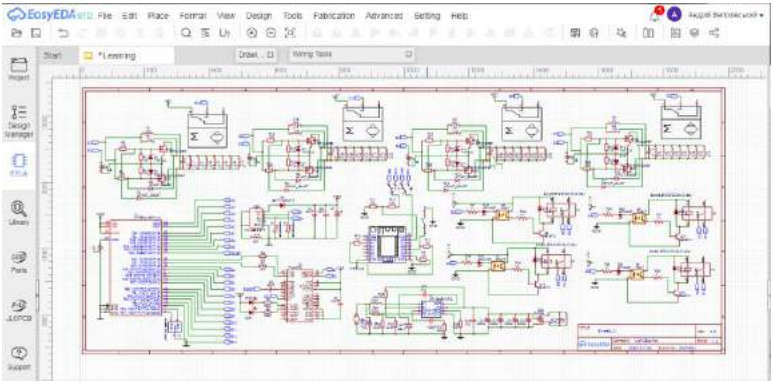


Рис.2 Принципова схема треку в симуляторі EasyEDA

Дослідження, що проводилися на даному макеті, допомогли зрозуміти низку важливих моментів, що необхідно враховувати при проектуванні повномасштабної системи. Для почергового перемикання контурів в макеті використовувались геконові давачі, які в повномасштабній системі будуть замінені на тензодавачі, які розташовуватимуться безпосередньо в дорозі.

Оскільки енергія до електромобіля передається імпульсно, то для збільшення ефективності запропоновано використання кількох контурів приймачів, які почергово прийматимуть енергію від дороги.

Для забезпечення безпеки водія було проаналізовано низку стандартів передачі електроенергії [1,2], серед яких обрано найбезпечніший для людини

– IEEE C95.1-91, який працює на частоті від 300 kHz до 1 GHz. Також для додаткового захисту водія запропоновано використання магнітоекрануючих матеріалів.

Базуючись на проведених дослідженнях та експериментах на треку, встановлено, що ККД повномасштабної системи може становити близько 92%.

Ще однією важливою складовою даного проєкту є система відстеження трафіку. За допомогою неї можна збирати детальний звіт про завантаженість окремих сегментів, доріг та міст. Також ці дані будуть використані у навчанні та функціонуванні штучного інтелекту, який покликаний оптимізовувати трафік та логістику міста. Всі ці компоненти будуть зібрані у одне програмне середовище під назвою “Sharpi”, який буде комунікатором між усіма системами “SharpWay”.

Висновок. У ході роботи над проектом проведено ряд фізичних, хімічних, економічних, та інженерних розрахунків і отримано такі результати:

- досліджено зміни ККД у системах безпровідної передачі енергії індуктивним методом, що допомогло здійснити оцінку ефективності повномасштабної системи та подальшому проектуванні.
- виготовлено ряд зразків пластикового дорожнього покриття та досліджено їх фізико-хімічні властивості.
- розроблено креслення та електронні схеми на основі яких створено працюючий макет, що дозволив оцінити можливості реалізації та технічні нюанси при будівництві повномасштабної системи.
- зозроблено концепцію системи контролю трафіку.
- вперше запропоновано поєднання технологій пластикового дорожнього покриття з технологією динамічної зарядки електромобілів, які доповнює система контролю трафіку.
- вирішено ряд технічних проблем, які можуть виникнути при проектуванні повномасштабної системи зокрема: безпека водія, ефективність передачі енергії, ввімкнення контурів в потрібний момент часу, ефективне розвантаження трафіку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. MIL-STD. // Інтернет-сервіс «everyspec» URL: http://everyspec.com/MIL-STD/
2. Commercial EMI/EMC Standarts // Інтернет-сервіс «radioing» URL: http://www.radioing.com/eengineer/commercial.html.
3. J. Larminie, J. Lowry. Electric vehicle technology explained / John Wiley & Sons, 2004.
4. Y. Saber, G. K. Venayagamoorthy. One million plug-in electric vehicles on the road by 2015," in Intelligent Transportation Systems, 2009. ITSC'09. 12th

International IEEE Conference on, 2009, pp. 1-7: IEEE.
5. Christian Hafner, Mustafa Boyvat. Molding the flow of magnetic field with metamaterials: Magnetic field shielding. 2012
6. Lysyannikov. Polymer materials from recycled plastic in road construction 2019 J. Phys.: Conf. Se
7. The myth of cheap Bulgarian roads. URL: http://www.fnf-southeasteurope.org/our-work/black-book/black-book-of-government-waste-in-bulgaria-eu-edition/the-myth-of-cheap-bulgarian-roads/ Road Standards and Paving Standards // Інтернет-сервіс "ASTM International" URL: https://www.astm.org/Standards/road-and-paving-standards.html
8. Standard specifications for construction of road and bridges on federal highway projects. URL: https://flh.fhwa.dot.gov/resources/specs/fp-14/fp14.pdf
9. Brecher, D. Arthur. Review and Evaluation of Wireless Power Transfer (WPT) for Electric Transit Applications. Federal Transit Administration 2014.

УДК 519.711

СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ МАТРИЦЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З НЕВИЗНАЧЕНОСТЯМИ

Наконечний О.Г., Зінько П.М., Зінько Т.П., Кудін Г.І.

a.nakonechniy@gmail.com, gkudin@ukr.net.ua, petro.zinko@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Задача лінійного оцінювання з метою отримання гарантованих незміщених оцінок при різних схемах спостережень є предметом дослідження наукових публікацій [1-7, 9-11]. Розв'язок задачі отримання таких оцінок в умовах невизначеності здійснюється в рамках відомого методу мінімаксного оцінювання. Задачі, які виникають при використанні цього методу, розв'язуються з врахуванням того, що невідомі параметри спостережень і їх випадкові похибки належать деяким обмеженим множинам. Це дозволяє визначати лінійні незміщені оцінки в процесі оптимізації гарантованої середньо квадратичної похибки шуканої оцінки.

У даній доповіді будуть приведені гарантовані середньо квадратичні похибки оцінок лінійних операторів за умови, що невідома матриця моделі спостереження – це реалізація випадкової матриці з кореляційним оператором, який визначається спеціальним операційним співвідношенням і належить обмеженій множині. Передбачається, що похибки спостережень

мають нульове середнє значення, їх кореляційна матриця невідома і може належати одній з двох визначених обмежених множин. Отримана гарантована середньо квадратична похибка векторної оцінки.

Для тестового прикладу отримані гарантовані середньо квадратичні похибки векторної оцінки двох наборів параметрів невідомого вектора для одного з варіантів похибки спостережень з урахуванням малих збурень відомих матриць моделі спостереження.

Постановка задачі лінійного оцінювання спостережень

Нехай спостерігаються скалярні величини:

$$y_k = sp(XA_k^T) + \eta_k, \quad k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $X \in H_{m\times n}$ – невідома матриця; $A_k \in H_{m\times n}$, $k = \overline{1, N}$ – відомі матриці;

$H_{m\times n}$ – простір матриць розмірності $m \times n$; $sp(Q)-$ слід квадратної матриці Q; $sp(XA_k^T) = \langle X, A_k \rangle$ – скалярний добуток матриць;

$T-$ символ транспонування матриці; η_k, $k = \overline{1, N}$ – послідовність випадкових величин.

Вводиться лінійний оператор $\wp$, який діє з векторного простору R^N в простір матриць $H_{m\times n}$, а також лінійний оператор $\wp^*$, спряжений до оператора $\wp$:

$$\wp x \square \sum_{k=1}^{N} A_k x_k = X, \quad x_k \in R^1, \quad X \in H_{m\times n}, \quad k = \overline{1, N}; \tag{2}$$

$$\wp^* X \equiv (sp(X^T A_1), ..., sp(X^T A_N))^T;$$

вектори $x = (x_1, ..., x_N)^T$, $y = (y_1, ..., y_N)^T$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_N)^T$.

Вважається, що для вектора $\eta \in R^N$ виконується: $E\eta = 0$ ($E-$ символ математичного сподівання), кореляційна матриця $R = E\eta\eta^T$ невідома і належить обмеженим множинам G_2 або G_3:

$$G_2 = \{R : sp(R - R_0)^2 \le q^2\}, \tag{3}$$

$$G_3 = \{R : sp(Q_2 R) \le q^2\}, \tag{4}$$

де $R_0 = (r_{kj}^{(0)})_{k,j=\overline{1,N}}$ – відома симетрична невід'ємно визначена матриця, q^2 – відоме додатне дійсне число, $Q_2 \in H_{N\times N}$ – відома симетрична додатно визначена матриця.

Вводиться лінійний оператор L, який діє з простору $H_{m\times n}$ в простір R^s:

$$L\,X = (\langle V_1, X\rangle, ..., \langle V_s, X\rangle)^T, \tag{5}$$

де $V_i, \quad i = \overline{1,s}$ – задані матриці.

Припускається, що невідома матриця X – реалізація випадкової матриці з середнім значенням X_0 і кореляційним оператором R_1, який визначається з співвідношення:

$$\langle R_1 Z_1, Z_2\rangle_1 = E(sp(XZ_1^T)sp(XZ_2^T)),$$

де $Z_1, Z_2 \in H_{m\times n}$ – довільні матриці.

Якщо $R_1,\ R_2$ – кореляційні оператори, то їх скалярний добуток задається виразом:

$$\langle R_1, R_2\rangle_2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} r_{i,j,k,l}^{(1)} r_{i,j,k,l}^{(2)}, \quad r_{i,j,k,l}^{(p)} = \langle R_p E_{i,j}, E_{k,l}\rangle_1,\ i,j,k,l = \overline{1,N},\ \ p = 1,2,$$

де $E_{i,j}$ – ортонормований базис в $H_{m\times n}$, $\langle R_1, R_2\rangle_2$ – скалярний добуток операторів.

Припускається також, що кореляційний оператор R_1 невідомий і належить множині $G(R_1)$:

$$G(R_1) = \{R_1 : \langle (R_1 - R_1^{(0)}), (R_1 - R_1^{(0)})\rangle_1 \le q_1^2\},$$

$R_1^{(0)}$ – відомий кореляційний оператор, q_1^2 – відоме додатне число.

Розв'язування задачі лінійного оцінювання спостережень

Означення 1. Лінійною оцінкою елементу $L\,X$ називається елемент $\hat{LX}$ вигляду:

$$\hat{LX} = u\,y + c = \sum_{k=1}^{N} u_k y_k + c,$$

де $u_k \in R^s, \quad k = \overline{1,N}$, u – лінійний оператор, який відображає векторний простір R^N в простір R^s, вектор $c \in R^s$.

Означення 2. Гарантованою середньо квадратичною похибкою оцінки $\hat{LX}$ називається величина:

$$\sigma_i\,(u,c) = \{\max_{G(R_1),G_i} \mathrm{E}\left\|\hat{LX} - L\,X\right\|^2\}^{\frac{1}{2}},\quad i = 2,3,$$

де $\left\|\hat{LX} - L\,X\right\|^2 = ((\hat{LX} - L\,X)^T(\hat{LX} - L\,X))$.

Означення 3. Оцінка $LX = \bar{u}^{(i)}y + \bar{c}^{(i)}$, де значення $\bar{u}^{(i)}, \bar{c}^{(i)}, \quad i = 2,3$ визначаються з умов

$$\bar{u}^{(i)}, \bar{c}^{(i)} \in Arg\min_{u,\,c}\sigma_i(u,c),\quad i = 2,3,$$

називається гарантованою середньо квадратичною оцінкою.

При різних обмеженнях одержано явний вигляд таких оцінок. При малих збуреннях відомих матриць знайдено розклад по малому параметру гарантованих оцінок матриць та гарантованих похибок оцінок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. М. : Наука, 1977. 305 с.
2. Arnold B.F., Stanlecker P. Linear estimation in regression analysis using fuzzy prior information. Random Oper. and Stoch. Equ. 1997. 5, N 2. P. 105–116.
3. Nakonechnyi O., Michalek J. Minimax estimates of linear parameters function in regression model under restrictions on parameters and variance-covariance matrix. Вычислительная и прикладная математика. 1997. № 1(81). P. 22–32.
4. Christopeit N., Helmes K. Linear minimax estimation with ellipsoidal constraints. Acta Applicandae Mathematicae. 1996. 43, N 1. P. 3–15.
5. Girko V., Spektral theory of minimax estimation. Acta applicandae mathematicae, Dordrecht (Kluver Akademic Publichers). 1996. 43, N1. P. 59–69.
6. Trenkler G., Stahlekecr P. Quasi minimax estimation in the Linear regression model, Statistics. 1987. 18. P. 219–226.
7. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М. : Вильямс, 2007. 912 с.
8. Блохинцев Д.І. Основы квантовой механики. М. : Наука, 1976. 864 с.
9. Nakonechnyi O.G., Kudin G.I., Zinko T.P. Formulas of perturbation for one class of inverse operators. Matematychni Studii. 2019. 52, N 2. P. 124–132.
10. Наконечный А.Г., Кудин Г.И., Зинько П.Н., Зинько Т.П. Метод возмущений в задачах линейной матричной регрессии. Международный

научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». 2020. № 1. С. 38–47.
11. Наконечный А.Г., Кудин Г.И., Зинько П.Н., Зинько Т.П. Гарантированные среднеквадратические оценки линейных преобразований матриц в условиях статистической неопределённости // Проблемы управления и информатики. - 2021. - №2.- С. 24-37.

УДК 519.6

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТРИЧНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

А.М. Недашковська, А.С. Чернікова

(Львівський національний університет імені Івана Франка)
anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua, anastasiia.chernikova@lnu.edu.ua

У даній доповіді будуть розглянуті системи нелінійних рівнянь. Для їх розв'язування використана відносно проста схема, запропонована раніше у роботі [1]. Розв'язок системи нелінійних рівнянь подано у вигляді матричного ланцюгового дробу та сформульовано достатню умову його збіжності.

Розглянемо систему із n нелінійних рівнянь із n невідомими

$$f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1}$$

де функції n змінних $f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ визначені і неперервні разом із усіма своїми частинними похідними до другого порядку включно в деякому δ-околі точки $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}\right)$.

Припустимо тепер, що $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ \left(k = 0,1,\ldots\right)$ є наближеними коренями системи (1). Нехай для k-го кроку, тобто наближень $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$, рівняння системи (1) не виконується. Тоді будемо шукати поправки $h_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$, при яких у результаті підстановки $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + h_j$ мають виконуватися рівняння:

$$f_i\left(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2, \ldots, x_n^{(k)} + h_n\right) = 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{2}$$

Запишемо формулу Тейлора для функції n змінних таким чином:

$$f_i\left(x_1^{(k)}+h_1,x_2^{(k)}+h_2,\ldots,x_n^{(k)}+h_n\right)=f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)}{\partial x_j^{(k)}}h_j+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)}{\partial x_j^{(k)}\partial x_q^{(k)}}h_jh_q+o(h^3),\ h=\sqrt{h_1+h_2+\ldots h_n},\ \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Тоді на основі системи (2) та формули Тейлора (3) для визначення поправок $h_1,h_2,\ldots,h_n$ із точністю $o(h^3)$ можемо записати наступну систему рівнянь:

$$f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)}{\partial x_j^{(k)}}h_j+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)}{\partial x_j^{(k)}\partial x_q^{(k)}}h_jh_q+o(h^3)=0\ \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{4}$$

Таким чином, ми отримуємо метод розв'язування систем алгебраїчних рівнянь другого порядку з багатьма невідомими.

Систему (4) можна подати у вигляді:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial\left(x_1^{(k)}\right)^2}h_1+\ldots+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial x_1^{(k)}\partial x_n^{(k)}}h_n+\right.$$

$$\left.\frac{\partial f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial x_1^{(k)}}\right)h_1+\ldots+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial\left(x_n^{(k)}\right)^2}h_n+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial x_n^{(k)}\partial x_1^{(k)}}h_1+\frac{\partial f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)}{\partial x_n^{(k)}}\right)h_n==-f_i\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots x_n^{(k)}\right)\ \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Після певних перепозначень та елементарних перетворень дану систему можна подати у вигляді:

$$\left(A_1h_1+A_2h_2+\ldots+A_nh_n+A_{n+1}\right)\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T=b. \tag{5}$$

Нехай запис $\left(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n\right)\circ\left(h_1\ h_2\ \ldots\ h_n\right)$ позначає функціонал $\sum_{i=1}^{n}A_ih_i,$ тоді (5) можна записати так:

$$\left(\left(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1}\right)\circ\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T+A_{n+1}\right)\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T=b. \tag{6}$$

Припустимо, що матриця $\left(\left(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1}\right)\circ\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T+A_{n+1}\right)$ є невиродженою, тоді зі співвідношення (6) отримаємо:

$$\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T=\left(\left(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1}\right)\circ\left(h_1\ h_2\ \ldots h_n\right)^T+A_{n+1}\right)^{-1}b.$$

Таким чином, для обчислення поправок $h_1, h_2, \ldots, h_n$ отримаємо рекурентну формулу вигляду:

$$\left(h_1^{(k+1)} \ldots h_n^{(k+1)}\right)^T = \left(\left(A_1 + \ldots + A_n + A_{n+1}\right) \cap \left(h_1^{(k)} \ \ldots h_n^{(k)}\right)^T + A_{n+1}\right)^{-1} b, \ k = 1, 2, \ldots$$

яку й буде використано в обчислювальному алгоритмі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Недашковська А.М. Ітераційний метод розв'язування системи поліноміальних рівнянь другого степеня // Журнал "Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології". − 2015 р. С.150-161.

УДК 004.056.55: 003.26

РОЗРОБКА КРИПТОГРАФІЧНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЗАХИСТУ БЕЗПРОВІДНИХ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ РОЇВ БПЛА

Максим Огурцов

Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України

ogurtsov.maksym@incyb.kiev.ua

Розроблено триключовий криптографічний алгоритм керування ключами для захисту безпровідних каналів зв'язку в роях безпілотних літальних апаратів, що враховує особливості ройового керування.

Питання захисту інформації в мережах БПЛА на сьогоднішній день набуло особливої актуальності. В більшості випадків керування БПЛА здійснюється за схемою «точка-точка», алгоритми криптографічного захисту команд керування у випадку забезпечення зв'язку в мережах БПЛА та з урахуванням особливостей, притаманних таким мережам, пророблені недостатньо [1]-[3]. Відомі також випадки успішного перехоплення керування БПЛА у випадку недостатнього захисту команд керування [4]-[5].

Таким чином, розробка та дослідження нових засобів захисту каналів передачі даних в мережах БПЛА є актуальною науковою задачею.

Метою даної роботи є розробка триключового криптографічного алгоритму керування ключами, що враховуватиме особливості безпровідних каналів зв'язку в мережах БПЛА.

Роботу пропонованого алгоритму розглянемо при застосуванні в якості алгоритму нижчого рівня затвердженого ДСТУ 7624:2014 криптографічного алгоритму «Калина» з розміром ключа 512 біт [6]. Його було обрано як єдиний державний криптографічний стандарт у світі, що підтримує довжину

ключа 512 біт. Але будемо зважати на можливість застосування також інших криптографічних алгоритмів, в тому числі – асиметричних.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. На сьогоднішній день існує велика кількість робіт, присвячених забезпеченню захищеної комунікації між БПЛА та операторами [1]-[3], [4]-[5], але вони недостатньо враховують особливості групового керування БПЛА.

Основна частина. Розглянемо особливості керування роями БПЛА:

1. Основною відмінністю керування роями БПЛА (порівняно з керуванням окремим БПЛА, чи декількома БПЛА, коли кожен з них керується окремим оператором) є те, що практично в усіх випадках рой БПЛА виконує одну задачу і елементи рою мають постійно взаємодіяти між собою.

2. Оператор не керує кожним елементом рою окремо, він віддає команди рою в цілому, що не є можливим у випадку порушень зв'язку між елементами рою.

Алгоритм керування ключами. Розглянемо роботу алгоритму, що пропонується в даній роботі. В мережі БПЛА (одноранговій або ієрархічній) у кожного вузла є свій унікальний довготривалий індивідуальний ключ Ki, i=1…n, де n – кількість вузлів у мережі БПЛА, розміром 256 біт (їх роздає центр керування ключами). Інші вузли мережі не мають цього довготривалого ключа. Також в мережі є загальний ключ Z розміром 512 біт, відомий всім вузлам. Алгоритм передбачає два режими передачі даних – широкомовний (повідомлення призначене для всіх вузлів мережі) і адресне повідомлення (повідомлення призначене для одного вузла мережі).

Широкомовне повідомлення. Широкомовне повідомлення Ms складається з двох частин. Перша частина – сеансовий ключ S (генерується випадковим чином), розміром 512 біт, зашифрований загальним ключем Z. Друга частина – власне, повідомлення (корисна інформація) U, зашифроване сеансовим ключем S. Цей режим є подібним до звичайного використання сеансових ключів і не вимагає більш детального розгляду.

Адресне повідомлення. Адресне повідомлення Ma також складається з двох частин. Як і для широкомовного повідомлення, перший блок тут – випадково згенерований сеансовий ключ S розміром 256 біт, зашифрований загальним ключем Z. Друга половина – повідомлення(корисна інформація) U, зашифроване ключем Q, що наполовину складається з сеансового ключа S, а на другу половину є унікальним довготривалим закритим ключем Ki цього вузла i. Таким чином, для того, щоб розшифрувати повідомлення Ma, треба знати і загальний ключ мережі Z (щоб розшифрувати сеансовий ключ S) і унікальний закритий ключ даного вузла Ki.

Алгоритм передачі адресного повідомлення:

1. Вузол-передавач генерує сеансовий ключ S розміром 256 біт.

2. Вузол-передавач шифрує сеансовий ключ S загальним довготривалим ключем Z.

3. Вузол-передавач шифрує корисні дані U для передачі вузлу-отримувачу і ключем Q розміром 512 біт, що містить сеансовий ключ S та індивідуальний ключ вузла-отримувача Ki розміром 256 біт.

4. Вузол-отримувач і розшифровує сеансовий ключ S загальним довготривалим ключем Z.

5. Вузол-отримувач і розшифровує корисні дані U, використовуючи отриманий на кроці 4 сеансовий ключ S та свій індивідуальний ключ Ki.

6. Для подальшої передачі повторюються кроки 3 та 5.

7. Для зворотної передачі алгоритм повторюється в зворотному напряму, починаючи з кроку 1.

Можливі два варіанти застосування розробленого алгоритму – із використанням симетричного чи асиметричного криптографічного алгоритмів. Використання асиметричного алгоритму рекомендується, коли необхідно забезпечити обмін повідомленнями між усіма вузлами великої мережі. Якщо при цьому застосовувати симетричний алгоритм, то для відправки повідомлень кожен вузол мусить мати збереженими довготривалі закриті ключі усіх вузлів – або буде постійно використовувати відправку широкомовних повідомлень. Тому в цьому випадку краще, щоб кожен вузол зберігав лише свій закритий ключ. Тоді, якщо відбудеться компрометація цього вузла, закриті ключі інших вузлів не будуть скомпрометовані.

Якщо ж мережа передбачає лише обмін інформацією кожного з вузлів лише з центральним вузлом (наприклад, у випадку керування оператором групою БПЛА, не зв’язаних між собою), то можливе застосування симетричного алгоритму – усі довготривалі закриті ключі в цьому випадку знатиме лише оператор. Також симетричний алгоритм є застосовним у випадку малої кількості вузлів у мережі, що є поширеним випадком при виконанні завдання малим роєм БПЛА.

Переваги розробленого алгоритму:

1. Інформація в мережі ніколи не передається у відкритому вигляді.

2. У порівнянні з іншими алгоритмами, що використовують сеансові ключі, пропонований алгоритм вимагає передачі удвічі меншого за розміром сеансового ключа (при забезпеченні такого ж рівня захищеності до засобів криптоаналізу), що зменшує часові втрати до початку сеансу зв’язку. Це дуже важливо саме для роїв БПЛА, оскільки ситуація при русі рою БПЛА може змінюватись дуже швидко і вимагати відповідної швидкої реакції, тому швидкість початку передачі має критичне значення.

3. Оскільки довготривалим ключем Z шифрується тільки ключі, що відповідають вимогам до випадкової послідовності, відсутні уразливості, засновані на використанні частотних й інших властивостей відкритого тексту. Їх можна застосовувати лише для спроб підібрати сеансовий ключ, що не принесе особливої користі.

4. Оскільки вимоги до криптографічних алгоритмів передбачають, що при зміні навіть одного біту ключа результат шифрування повинен бути повністю іншим, то використання при кожному сеансі зв’язку іншої 1/2

частини ключа Q (сеансового ключа S) забезпечить надійний захист від спроб підібрати як довготривалу половину ключа Ki, так і ключ Q в цілому.

5. Така схема захищає від атак типу «людина посередині», оскільки для отримання будь-яких даних слід знати довготривалий ключ Z.

Єдиним недоліком запропонованої схеми при використанні симетричного алгоритму є випадок компрометації одного з вузлів мережі. В цьому випадку зловмисник дізнається довготривалий індивідуальний ключ кожного іншого вузла Ki та загальний ключ Z, і зможе розшифровувати усі повідомлення в мережі. Але це є класичною проблемою симетричних криптоалгоритмів.

Висновки. На основі затвердженого ДСТУ 7624:2014 криптографічного алгоритму «Калина» з розміром ключа 512 біт розроблено триключовий криптографічний алгоритм керування ключами для захисту безпровідних каналів зв'язку в роях БПЛА, що враховує особливості ройового керування, проаналізовано його переваги та недоліки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wang, H. M., Zhang, X., & Jiang, J. C. UAV-involved wireless physical-layer secure communications: Overview and research directions / H. Wang, X. Zhang, J. Jiang // IEEE Wireless Communications.– 2019.–T.26(5).– pp. 26-39.
2. Ogurtsov M. High-Reliability Data Transfer Algorithm with Reduced Transmitters' Power for Use in Special Networks / M. Ogurtsov // International Journal "Information Content and Processing".– 2019.– Volume 6. – Number 1. – pp. 79-90.
3. Xu C at al. Communication Aware UAV Swarm Surveillance Based on Hierarchical Architecture / C. Xu at al. // Drones.– 2021.– T. 5. – №. 2. – P. 33.
4. Abughalwa M., Samara L., Hasna M. O., Hamila, R. Full-Duplex Jamming and Interception Analysis of UAV-Based Intrusion Links / M. Abughalwa, L. Samara, M. Hasna , R. Hamila // IEEE Communications Letters.– 2020.– 24(5). – pp. 1105-1109.
5. Ritchie M., Fioranelli F., Borrion H. Micro UAV crime prevention: Can we help Princess Leia? / M.Ritchie, F. Fioranelli, H. Borrion // Crime prevention in the 21st century. Springer, Cham. – 2017. – pp. 359-376.
6. Інформаційні технології. Криптографічний захист інфомації. Алгоритм симетричного блокового перетворення // ДСТУ 7624:2014. К.: Держспоживстандарт України.– 2015.– 238 с.

УДК 519.6:519.21

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Анатолій Пашко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

aap2011@ukr.net

В роботі досліджуються оцінки точності і надійності гауссових ізотропних випадкових полів. Отримані оцінки в просторі $L_2(S_d)$.

В роботі продовжуються дослідження точності і надійності статистичних моделей гауссових ізотропних випадкових полів, що розпочаті в роботі [1] та продовжувались в роботах [2-4].

Нехай (Ω, B, P) - стандартний імовірнісний простір.

Означення. Випадкове поле $\xi(x) = \xi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-2}, \varphi)$ на сфері S_d називається ізотропним в широкому розумінні, якщо $E\xi(x) = 0$ та $E\xi(x)\xi(y) = B(\cos(\theta))$. Тобто, кореляційна функція залежить лише від кутової відстані $\cos(\theta)$ між векторами x та y.

Кореляційну функцію можна зобразити у вигляді [1]

$$B(\cos(\theta)) = \frac{1}{\varpi_d} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{C_m^{\frac{d-2}{2}}(\cos(\theta))}{C_m^{\frac{d-2}{2}}(1)} h(m,d),$$

де $C_m^k(x)$ - многочлени Гегенбауера, $\varpi_d = 2\pi^{\frac{d}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right)^{-1}$.

В роботі [1] вперше досліджувались спектральні розклади таких полів. Випадкове поле допускає зображення $\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,d)} S_m^l(x) \zeta_m^l$,

де $S_m^l(x)$ - сферичні гармоніки, ζ_m^l - послідовність випадкових величин таких, що $E\zeta_m^l = 0$ та $E\zeta_m^l \zeta_n^k = b_m \delta_m^n \delta_l^k$, $m = 0,1,...$ $l = 1,2,...,h(m,d)$,

$h(m,d)$ - кількість сферичних гармонік.

Модель випадкового поля має вигляд $\xi_M(x)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{h(m,d)}S_m^l(x)\zeta_m^l$.

Будемо розглядати варіант, коли ζ_m^l - незалежні випадкові величини.

Модель $\xi_M(x)$ наближає поле $\xi(x)$ з точністю $\varepsilon>0$ та надійністю $0<\alpha<1$ в просторі $L_2(S_d)$ якщо

$$P\left\{\left(\int_{S_d}\left|\xi(x)-\xi_M(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq\varepsilon\right\}\leq 1-\alpha.$$

Теорема. Якщо збігається ряд

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}h(m,d)b_m m^{d-1}<\infty$$

то для будь-якого $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$P\left\{\left(\int_{S_d}\left|\xi(x)-\xi_M(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{\left[C\left(3^{d-1}\right)^2\left(\sum_{m=M+1}^{\infty}h(m,d)b_m m^{d-1}\right)\right]^2}{\varepsilon^4},$$

де $C=2\sqrt{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Наприклад, для $d=2$ кількість гармонік $h(m,2)=2$ і сферичні гармоніки мають вигляд $S_0^1(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $S_m^1(\varphi)=\frac{\cos(m\varphi)}{\sqrt{\pi}}$, $S_m^2(\varphi)=\frac{\sin(m\varphi)}{\sqrt{\pi}}$.

Отримані результати покращують оцінки, що отримані в роботах [2-4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ядренко М. Спектральная теория случайных полей / М. Ядренко. – К.: «Наукова думка», 1980. – 196 с.
2. Козаченко Ю. Оцінка точності моделювання в Lp, p>=2 субгауссових випадкових полів на сфері / Ю. Козаченко, А. Пашко // Вісник Київського університету. Механіка. Математика. №7-8, 2002. - С. 26-32.
3. Дзямко В.Й. Точність в $Lp(Sd)$ та надійність моделювання лінійних ізотропних полів на сфері / В.Й. Дзямко, А.І. Моца, А.О. Пашко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2011. - № 4. - С. 16–19.
4. Pashko A.A. A simulation of sub-Gaussian random fields on a sphere of Orlicz spaces / A.A. Pashko // Taurida Journal of Computer science theory and Mathematics. - 2013. - №2. - P.114–123.

УДК 519.681.5

ПРО ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

Олександр Поліщук, Михайло Яджак

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка
yadzhak_ms@ukr.net

Запропоновані підходи до організації обчислень під час розв'язання задач моделювання в механіці зв'язаних полів на сучасних обчислювальних засобах суперкомп'ютерного класу. Ці підходи можна застосовувати окремо, виходячи з особливостей розв'язуваної задачі, а також у поєднанні для прискорення обчислень під час моделювання у режимі реального часу процесів, які протікають в складних системах.

В теплоенергетиці, машино- та приладобудуванні, геофізиці і медицині та інших важливих галузях часто виникають проблеми дослідження взаємодії полів різної природи (температурних, електромагнітних, гравітаційних, механічних) в багатокомпонентних структурно-неоднорідних системах під час комплексних зовнішніх впливів. У прикладному аспекті вирішення цих проблем дозволяє оцінювати та прогнозувати надійність, оптимізувати технології виготовлення нових конструктивних матеріалів, визначати робочий ресурс конструкцій в екстремальних умовах експлуатації за наявності комплексних навантажень різної природи з урахуванням факторів, які інтенсифікують протікання процесів та їх взаємозв'язок [1]. Задачі моделювання різноманітних процесів у механіці зв'язаних полів є алгоритмічно складними задачами (АСЗ) [4, 8], оскільки зазвичай є нелінійними, тривимірними, нестаціонарними та залучають до розгляду об'єкти зі складною геометрією. Ці обставини суттєво утруднюють використання аналітичних підходів під час розв'язання таких задач, тому потрібно застосовувати універсальні чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ) або метод граничних елементів (МГЕ), реалізація яких потребує значних обчислювальних ресурсів, особливо якщо розв'язок потрібно одержувати в режимі реального часу [7].

Вибір ефективного чисельного методу розв'язання задач моделювання зв'язаних полів можна здійснювати, використовуючи понятійний апарат теорії складних мереж. Нехай область пошуку чисельного розв'язку – одиничний куб. Побудуємо у ньому та на граничній поверхні регулярну

прямокутну сітку з кроком $h = 10^{-2}$. Тоді у випадку застосування МГЕ необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) зі щільною матрицею G, яку можна інтерпретувати як матрицю суміжності зваженої мережевої структури, вузлами якої при кусково-лінійній апроксимації шуканого розв'язку є вузли сітки на поверхні куба. Розмірність N_G та кількість ненульових елементів L_G матриці G у цьому випадку визначаються рівностями $N_G \approx 6 \times 10^4$ та $L_G \approx 36 \times 10^8$. Застосування МСЕ при такому ж типі апроксимації шуканого розв'язку призводить до необхідності розв'язання СЛАР із семидіагональною матрицею F розмірності $N_F \approx 10^6$, яку можна інтерпретувати як матрицю суміжності зваженої мережевої структури, вузлами якої є вузли сітки в кубі. Кількість ненульових елементів цієї матриці $L_F \approx 7 \times 10^6$. Коннекційна складність моделей цих структур відповідно дорівнює $\varpi_G = L_G / N_G \approx 6 \times 10^4$ та $\varpi_F = L_F / N_F \approx \ \approx 7$. Порівняльний аналіз розмірнісної та коннекційної складності цих моделей дає значення $N_G / N_F \approx 6 \times 10^{-2}$ та $\varpi_G / \varpi_F \approx 10^4$. Це означає, що складність структури сіткової області, отриманої за допомогою МГЕ приблизно в 600 раз перевищує складність структури, отриманої за допомогою МСЕ. Розв'язання методом Гауса СЛАР із матрицею G потребує виконання приблизно у 20 разів більше арифметичних операцій порівняно з розв'язанням його аналогом СЛАР із матрицею F. Це пояснює значно більшу популярність для моделювання багатьох фізичних процесів саме МСЕ, оскільки серед інших причин складність мережевих структур, які вибудовуються під час його застосування, є суттєво меншою, ніж для МГЕ.

Загалом під час вирішення задач моделювання зв'язаних полів МСЕ породжує багатовимірну в сенсі наявності зв'язків різної фізичної природи, темпоральну в силу нестаціонарності процесів, які перебігають в системі, складну багатошарову мережеву структуру. Такі структури виникають та досліджуються під час моделювання впливу промислового та аграрного виробництва на екологію, біосферу та клімат окремих регіонів Землі, впливу мас-медіа та соціальних мереж на свідомість громадян і т. ін.

Під час розв'язання АСЗ поряд із розробкою ефективних послідовних обчислювальних схем потрібно використовувати і можливості розпаралелювання та реалізації обчислень на сучасних суперкомп'ютерах. Розглянемо декілька підходів до розпаралелювання, які грунтуються на використанні паралелізму за даними, а також геометричного та функціонального паралелізму.

Підхід до розпаралелювання на підставі паралелізму даних називається декомпозицією за даними. Він може бути використаний у разі, коли нам потрібно розв'язати одну і ту ж задачу при різних наборах вхідних даних. Такий підхід дозволяє за час розв'язання одного варіанту задачі одержати

розв'язок для декількох її варіантів. Алгоритм обчислень, побудований на основі паралелізму даних, зазвичай є крупноблочним і при цьому не виникає особливих проблем із його відображенням на архітектуру суперкомп'ютерів.

Геометричним паралелізмом володіють, наприклад, задачі, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних [2] та розв'язуються з допомогою МСЕ. Для дискретних аналогів цих задач характерними є локально-обмежені взаємодії між вузлами сітки, що покриває область розв'язання та дозволяє розбити цю область на підобласті і обчислення в кожній з них "доручити" окремому процесору (ядру, обчислювальному вузлу). Відмінність геометричного паралелізму від паралелізму за даними полягає в тому, що підзадачі опрацювання кожної із підобластей взаємозв'язані між собою (потрібен обмін даними між цими підзадачами). Підхід до розпаралелювання на основі геометричного паралелізму називається декомпозицією області розв'язання і є ефективним за умови, що обчислювальна складність кожної із підзадач є приблизно однаковою. Крім цього, для ефективності такого підходу фрагмент обчислень, що виконується на деякому процесорі, повинен використовувати лише невеликий обсяг даних, розташованих на інших процесорах. Також бажано, щоб ці не локальні дані були розташовані на невеликій кількості сусідніх процесорів.

Згідно з висновками, зробленими у праці [3], ефективність розпаралелювання під час розв'язання багатовимірних дискретних задач визначається перш за все способом декомпозиції області і її відображенням на архітектуру обчислювальної системи.

Функціональний паралелізм – це паралелізм груп операцій, об'єднаних за функціональною ознакою. Підхід до розпаралелювання на підставі функціонального паралелізму називається функціональною декомпозицією. Тривіальним прикладом функціональної декомпозиції є декомпозиція задачі на наступні підзадачі: введення початкових даних, опрацювання цих даних, виведення результатів та візуалізація результатів. Паралелізм при цьому досягається унаслідок одночасного виконання чотирьох вказаних підзадач і створення "конвеєра" між ними. Зазначимо, що кожна із підзадач може володіти паралелізмом за даними. У разі функціональної декомпозиції задачі кількість використовуваних процесорів визначається кількістю підзадач. Збільшити кількість процесорів з метою збільшення швидкості розв'язання задачі за такого підходу є проблематичним.

Більшість задач моделювання зводяться до розв'язання СЛАР великої розмірності з розрідженими матрицями. У [5] для розв'язування СЛАР на високопродуктивних гетерогенних комп'ютерах розроблено цілу низку методів та алгоритмів, які використовують багаторівневу модель паралельних обчислень.

Для ефективної реалізації запропонованих підходів можна використовувати загальнодоступні програмні (мови програмування високого рівня C++, Java, Python, Go, Ada, Ruby, Eiffel тощо; сервіси паралельного

програмування MPI, OpenMP, TBB, CSP, CUDA; бібліотеки виконання паралельних завдань) та апаратні (комп'ютери з багатоядерним процесором, кластерні системи [6], гібридні архітектури з використанням прискорювачів NVIDIA GPUs, співпроцесорів Intel Xeon Phi; розподілені обчислювальні середовища [9]) засоби.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гачкевич О. Р. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів / О. Р. Гачкевич, Р. М. Кушнір // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2016.– Том 59.– № 1. – С. 7-24.
2. Горбаль С. И. Численное решение уравнений переноса зарядов в полупроводниковых приборах / С. И. Горбаль, М. С. Яджак // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – № 34. – С. 89-94.
3. Ильин В. П. О стратегиях распараллеливания в математическом моделировании / В. П. Ильин // Программирование. – 1999. – № 1. – С. 41-46.
4. Поліщук О. Д. Мережеві структури та системи: IV. Паралельне опрацювання результатів неперервного моніторингу / О. Д. Поліщук, М. С. Яджак // Системні дослід. та інформаційні технології. – 2019. – № 2. – С. 105-114.
5. Попов О. В. Комп'ютерні методи дослідження математичних моделей з розрідженими структурами даних / О. В. Попов // Автореф. дис … д. ф.-м. н., спец. 01.05.02. – К.: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, 2021. – 32 с.
6. Список найпотужніших обчислювальних систем світу. [Електр. ресурс]. – Режим доступу: http://www.top500.org.
7. Яджак М. С. Високопаралельні алгоритми та засоби для розв'язання задач масових арифметичних і логічних обчислень / М. С. Яджак // Автореф. дис. … д. ф.-м. н., спец. 01.05.03. – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2009. – 33 с.
8. Яджак М. С. Оптимізація методики комплексного оцінювання складних систем на підставі паралельних обчислень / М. С. Яджак, О. Д. Поліщук, М. І. Тютюнник // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2016. – Том 6. – № 4. – С. 347-356.
9. Polishchuk O. Big Data Processing in Complex Hierarchical Network Systems II: Computer Environments and Parallelization / O. Polishchuk, D. Polishchuk, M. Tyutyunnyk, M. Yadzhak // AASCIT Communications. – 2016. – Vol. 3. – No. 3. – P. 119-124.

УДК 388.26

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ КРЕДИТНИХ КОШТІВ БАНКУ НА ФІНАНСУВАННЯ ПРОЕКТІВ

Прядко О.Я., Цегелик Г.Г.

e-mail: pryadko_olya@ukr.net

З розвитком ринкових відносин, удосконалення управління в усіх сферах цілеспрямованої людської діяльності в найрізноманітніших областях практики (промисловість, сільське господарство, торгівля, побутове обслуговування, транспорт, охорона здоров'я, охорона природи і т. д.) виникають задачі, для розв'язання яких треба приймати рішення, які є порівняно досить складними. Зрозуміло, без наукового обґрунтування рішень в таких ситуаціях обійтись не можна. Чим більш складною і дорогоцінною є організація заходу, тим менш допустимим є прийняття «вольового» рішення і тим більшого значення набувають наукові методи, які дають змогу наперед оцінити наслідки кожного рішення, відкинути недопустимі варіанти і рекомендувати оптимальні або, принаймні, найбільш раціональні.

Банківська система в кожній країні виступає як механізм балансування, який регулює проведення грошово-кредитної політики, зміни в економічній політиці, запобігає кризам. У сучасних умовах розвитку ринкових відносин в Україні одним з основних макроекономічних завдань кредитування банками є отримання максимального прибутку при мінімальному ризику. Погіршення в останні роки фінансового стану окремих банків, невиконання ними економічних нормативів – усе це перш за все спричинено збитками у кредитній діяльності. Ці збитки виникають внаслідок несплати відсотків за користування кредитами та повернення самих кредитів. Головною причиною такої ситуації є недосконала система оцінки кредитних проектів і недостатня обґрунтованість наявних методик розрахунку реальної величини ризику, притаманного кредитним операціям.

Побудуємо математичну модель двокритеріальної задачі банківського кредитування проектів, в якій треба одночасно максимізувати прибуток від фінансування проектів і сумарну експертну оцінку.

За умови задачі візьмемо обмеження на ризик від виконання проектів і обмеження на кошти, виділені на фінансування проектів.

Нехай

n – кількість проектів, які в змозі фінансувати банк;

x_i – i - й проект,

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } i - \text{й проект фінансується,} \\ 0, \quad \text{в противному випадку;} \end{cases}$$

e_i – експертна оцінка i - го проекту;

r_i – ризик від фінансування i - го проекту;

p_i – прибуток від фінансування i - го проекту;

R – максимальна величина ризику від фінансування проектів;

s_i – обсяг коштів, необхідних для фінансування i - го проекту;

S – обсяг коштів, виділених банком для фінансування проектів.

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \to max, \qquad (1)$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to max \qquad (2)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \le R, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le S, \qquad (4)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n. \qquad (5)$$

Для розв’язання задачі можна використати метод послідовних поступок [1, 2], а для розв’язання задач типу (1), (3-5) або (2), (3-5) метод гілок і меж [3] або алгоритм Балаша [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. – К., 2010.
2. Цегелик Г. Г. Моделі та методи підтримки прийняття рішень в умовах визначеності: текст лекцій. – Львів: ЛНУ імені І. Франка , 2015.
3. Цегелик Г. Г. Математичне програмування: навч. посіб. – Львів: ЛНУ імені І. Франка , 2011.
4. Катренко А. В. Дослідження операцій: підручник. – Львів: «Магнолія плюс», 2004.

УДК 519.6

ПОБУДОВА РЕКОМЕНДАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Богдан Романюк[1] , Ольга Пелюшкевич[2]

[1]ТзОВ «Українські інформаційні технології»

[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

olga.peliushkevych@lnu.edu.ua

Розглянуто застосування машинного навчання з підкріпленням для побудови рекомендації на основі позитивної кооперації користувачів із системою. Продемонстровано приклад використання такого підходу для рекомендації фільмів на основі оцінок користувачів.

В епоху суттєвого зростання кількості інформації у мережі Інтернет гостро постає потреба її рекомендації з метою покращення її доступності, швидкості аналізу та сприйняття. Побудова рекомендаційних вибірок має важливе значення у багатьох сферах людської діяльності, починаючи від наукових, індустріальних потреб та закінчуючи потребами в бізнесі, тому дана тематика є актуальною. Проте більшість сучасних ресурсів та сервісів використовує для цього статичні підходи та методи засновані на фільтрації змісту [1], матричній факторизації [2], наївному класифікаторі Баєса [3]-[4], логістичній регресії [4] та методах з використанням багаторукого бандита [5]. Одним з недоліків статичного підходу є не орієнтованість на довготривалій винагороді від побудованої результуючої пропозиції. Тому перспективним на сьогодні є використання нейронних мереж та машинного навчання з підкріпленням [6], які дають змогу уникнути недоліків статичних підходів у розв’язанні такого роду задач. Перевага машинного навчання з підкріпленням полягає в тому, що воно легко може працювати в середовищі, де є послідовна взаємодія користувачів із системою і направлене на вирішення проблеми що і як виконувати в цьому середовищі для максимізації такого узагальненого поняття як винагорода, окрім цього цей підхід зосереджений на довготривалій взаємодії користувачів із системою.

В даній роботі продемонстровано рекомендацію фільмів на основі оцінок користувачів, хоча такий підхід може бути використаний для будь якого іншого набору даних таких, як: новини, техніка, товари, послуги і т.д.

Задача полягає в розробці системи для рекомендації фільмів з використанням машинного навчання з підкріпленням та моделі навчання «Актор-Критик» [7], яка дає змогу генерувати рекомендаційну вибірку динамічно та зосереджується на довготривалій взаємодії користувачів із

системою. Система повинна містити механізми для збору та заповнення даними, механізми для відстеження активності користувачів та подання даних та активностей у певному вигляді, який може бути використаний інтерфейсом нейронної мережі. На основі цих даних та активностей повинен бути розроблений механізм навчання та тестування побудованої нейронної мережі.

За методи навчання взято два методи: Policy-навчання та Q-навчання. Policy-навчання зосереджене на побудові подібних елементів, які б зацікавили користувача якомога краще. Q-навчання в свою чергу тренує мережу з метою отримання якомога більшої винагороди, тобто збільшення зацікавленості користувачів у запропонованій рекомендації і покращені наступних так побудованих вибірок. В роботі представлено одночасне застосування цих двох підходів машинного навчання з метою побудови якомога кращої вибірки елементів. Варто зауважити, що кожен з цих підходів має як свої переваги так і недоліки, наприклад Q-навчання на великій кількості даних стає дуже неефективним і потребує великої кількість часу для навчання. Натомість Policy-навчання збігається швидше на великих об'ємах даних, але воно не розуміє послідовності дій користувачів на відміну від Q-навчання. З цих двох причин було вирішено застосувати поєднання двох типів навчання одночасно аби зекономити час на навчання та дати змогу мережі розуміти послідовність дій користувачів в довготривалій перспективі.

Система складається з двох мереж: мережі «Актора» та мережі «Критика». За кожне з типів навчання відповідає своя мережа, відповідно для Policy-навчання – це мережа «Актор», а для Q-навчання – мережа «Критик». Мережа «Актор» генерує вибірку на основі останньої позитивної активності користувача та векторного представлення фільмів. Мережа «Критик» в свою чергу вибирає і оцінює наскільки успішною буде дана вибірка і чи зацікавить вона користувача. Тобто мережа «Актор» генеруватиме вектор, який буде максимально схожим із рекомендованими фільмами у нашій вибірці на основі певної характеристики (наприклад скалярному добутку чи евклідової відстані між цими векторами), які і будуть пропонуватися для рекомендації, а мережа «Критик» буде оцінювати наскільки така рекомендація є доцільною в даний момент часу і обчислюватиме так зване Q-значення для поточного стану s та рекомендації a.

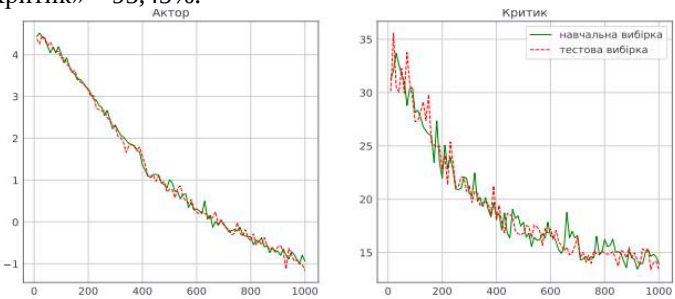
Мережа «Актор» використовує Policy-навчання для побудови ймовірності вибору наступних дій (рекомендацій) та складається з кількох лінійних шарів з активаційною функцією ReLu та двох шарів Dropout, які випадковим чином занулюють 5% вхідних сигналів, що дозволяє запобігти перенавчання мережі. В результаті роботи цієї мережі отримується вектор із 128 ознак. Дана мережа для заданого користувача генерує список дій на основі його стану s. Цей стан користувача записаний у виглядів вектору з його n останніх позитивних взаємодій із фільмами використовується як вхід для цієї мережі. Вони в свою чергу попадають в модуль представлення стану аби згенерувати підсумоване представлення стану цього користувача. Далі

після проходження декількох лінійних шарів та шарів Dropout представлення s перетворюється в дію a, яка є вектором елементів розмірності 128 ознак, значення яких знаходяться в межах (-1, 1).

Для побудови рекомендації згенерований таким чином вектор порівнюється зі всіма векторами фільмів та заходяться k найближчих до нього, де k-кількість елементів, які необхідно порекомендувати.

Мережа «Критик» використовує Q-навчання і оцінює наскільки хорошою буде винагорода з даного стану та дії (рекомендації) і визначається функцією Q(s, a). Вхід на мережу «Критика» - це стан користувача s згенерований модулем представлення стану користувача та дія a (наближена рекомендація) згенерована мережею «Актора». Виходом даної мережі є так зване Q-значення представлене у вигляді числа. Відповідно до обчисленого Q-значення ваги мережі «Актора» оновлюються з метою покращення винагороди від даної дії (оцінок користувача) a. Дана мережа складається з декількох лінійних шарів, з активаційною функцією ReLu та двох шарів Dropout, які схожим чином як і для мережі «Актор» занулюють 5% вхідних сигналів для запобігання перенавчанню мережі. Метою цієї мережі є підібрати якомога кращий результат для рекомендації користувачеві, такий який би давав якомога більшу винагороду, тобто аби користувач проявив зацікавленість в цій пропозиції, звернув на неї, вподобав чи поставив якусь оцінку в майбутньому.

Для навчання було обрано різну кількість циклів. Для порівняння та оцінки точності моделі було відібрано випадковим чином 5% усіх відгуків. Оптимальним значенням для навчання у цьому випадку було 1000 циклів. Різницю між навчальною та тестовою вибіркою для 1000 епох можна побачити на мал. 1. Точність мережі «Актор» при цьому склала 95,62%, а мережі «Критик» – 95,45%.



Мал. 1. Результат навчання для 1000 епох

В даній роботі було запропоновано підхід з використання машинного навчання з підкріпленням та моделі навчання «Актор-Критик» для побудови рекомендацій. Продемонстрований приклад навчання та тестування на основі фільмів продемонстрував велику точність та показав, що застосування такого підходу є вдалим та перспективним на відміну від інших статичних методів,

адже на відміну від них пропонує рекомендацію як послідовний процес прийняття рішень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mooney R.J. Content-based book recommending using learning for text categorization/ R. J. Mooney and L. Roy// in ACM DL. – 2000. – P. 195–204.
2. Koren Y. Matrix factorization techniques for recommender systems/ Y. Koren, R. M. Bell, C. Volinsky// IEEE Computer. – 2009. – Vol. 42, No. 8.– P. 30–37.
3. Mustansar A.G. An Improved Switching Hybrid Recommender System Using Naive Bayes Classifier and Collaborative Filtering/ Mustansar Ali Ghazanfar, Adam Prugel-Bennett // ResearchGate. – 2010.
4. Chi Wai Lau. News Recommendation System Using Logistic Regression and Naive Bayes Classifiers/ Chi Wai Lau // Citeseer. – 2011.
5. Zeng C. Online context-aware recommendation with time varying multi-armed bandit/ C. Zeng, Q. Wang, S. Mokhtari, and T. Li // SIGKDD , San Francisco, CA, USA. – August 13-17, 2016. – 2016. – PP. 2025–2034.
6. Richard S. Reinforcement Learning: An Introduction/ Richard Sutton, Andrew G. Barto// Cambridge, Massachusetts. London, England: A Bradford Book, Second edition. – 2014-2015. – 338 p.
7. Xiangyu Zhao Deep Reinforcement Learning for List-wise Recommendations / Xiangyu Zhao, Zhuoye Ding, Liang Zhang, Dawei Yin, Long Xia, Jiliang Tang// arXiv. – 2019.

УДК 519.85

НЕЧІТКА ШКАЛА СХОЖОСТІ ТА УМОВИ ЇЇ ІСНУВАННЯ

Ірина Рясна

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

riasnaia@gmail.com

Нечітка шкала схожості визначається як гомоморфне відображення емпіричної системи з відношеннями у математичну систему з відношеннями на множині нечітких підмножин. За багатовимірних

вимірювань схожості емпіричних об'єктів розглядаються два способи визначення нечіткої шкали схожості за допомогою нечітких логічних операторів, досліджено умови існування такої шкали.

Розглянемо два способи визначення нечіткої шкали схожості. Використаємо нечіткі логічні оператори норми і конорми, введені Л. Заде, $T(a,b)=\min(a,b)$, $S(a,b)=\max(a,b)$, $a,b\in[0,1]$, та нечіткі логічні оператори норми та конорми Я. Лукасевича $T(a,b)=\max(0,a+b-1)$, $S(a,b)=\min(1,a+b)$, $a,b\in[0,1]$.

Нехай X – скінченна множина елементів емпіричної системи, W – скінченна множина нечітких властивостей елементів множини X, визначених вербально. Результат вимірювань значень функцій належності для сукупності властивостей $W=\{w_1,\ ...,\ w_n\}$, де n – кількість властивостей, може бути визначеним як гомогенна або гетерогенна нечітка множина, функція належності якої задається так: $\mu_W : X\to L_1\times...\times L_n$, де L_i – певна ґратка, $\mu_i : X\to L_i$, $\mu_W(x)=(\mu_1(x),...,\mu_n(x))$. Нехай кожна властивість $w\in W$ має скінченну множину $T_w=\{t_1,...,t_{m(w)}\}$ вербальних значень, $m(w)-$ кількість цих значень. Вважаємо, що значення $\{t_1,...,t_{m(w)}\}$ певної властивості $w\in W$ вимірюються за однією заданою шкалою, тобто результат вимірювання властивості w є гомогенною нечіткою підмножиною множини T_w. Результат вимірювань значень функцій належності для сукупності властивостей W – гетерогенна або гомогенна нечітка множина.

Для дослідження проблеми існування нечіткої шкали схожості визначимо парціальну нечітку міру схожості за однією нечіткою якісною властивістю $w\in W$. Нехай для $w\in W$ визначено $\tilde{R}: X\times T_w\to[0,1]$ – нечітке бінарне відношення на $X\times T_w$, $\mu_{\tilde{R}}(x,t)$ – функція належності, яка визначає це нечітке відношення, $\mu_{\tilde{R}}(x,t_j)\in[0,1]$, $x\in X$, $t_j\in T_w$, $j=1,...,m(w)$. Нехай F_{T_w} – множина усіх нечітких підмножин множини T_w, $\eta: X\to F_{T_w}$ – відображення, таке, що $\forall t_j\in T_w\ \ \forall x\in X\ \ \eta_x(t_j)=\mu_{\tilde{R}}(x,t_j),\ \ j=1,...,m(w)$. Нехай $\tilde{D}_x=\{(t_j,\ \eta_x(t_j))\mid t_j\in T_w,\ j=1,...,m(w)\}$ – нечітка підмножина множини T_w, яка називається описом вимірювання властивості $w\in W$

об'єкта $x \in X$, $\tilde{D}_x \in F_{T_w}$. Вважаємо значення $\eta_x(t_j)$ ступенем істинності висловлювання «x має значення t_j нечіткої властивості w».

Множину нечітких описів вимірювань позначимо $\Omega_{\tilde{D}} = \left\{ \tilde{D}_x \mid x \in X \right\}$. Множина $\Omega_{\tilde{D}}$ – векторнозначна нечітка множина. Вважаємо її гомогенною:

$$\Omega_{\tilde{D}} = \left\{ \left(x, \vec{\eta}(x) \right) | x \in X \right\} = \left\{ \left(x, \left(\eta_x\left(t_1\right), ..., \eta_x\left(t_{m(w)}\right) \right) \right) | x \in X \right\}, \quad \Omega_{\tilde{D}} \subset F_{T_w},$$

де $\eta_x\left(t_j\right) \in [0,1], \quad j = 1,...,m(w), \quad m(w) -$ кількість значень властивості w.

Нечіткою мірою схожості на $X \times X$ називається функція $\tilde{\tau}(x, y)$, яка задовольняє умовам: 1) $\forall (x, y) \in X \times X \quad \tilde{\tau}(x, y) \in [0,1]$; 2) $\forall x \in X \quad \tilde{\tau}(x, x) = 1$; 3) $\forall (x, y) \in X \times X \quad \tilde{\tau}(x, y) = \tilde{\tau}(y, x)$. Функція $\tilde{\tau}(x, y)$ визначає нечітку множину в сенсі Л. Заде. Нечітка міра схожості задає нечітке відношення схожості $R_{\tilde{\tau}} : X \times X \to [0,1]$. Нечітку міру схожості $\tilde{\tau}^*(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y)$ на множині $\Omega_{\tilde{D}}$ визначаємо шляхом агрегування з використанням нечітких логічних операторів. Нечітким аналогом семантичної зв'язки І є оператор норми T, а зв'язки АБО – оператор конорми S.

Необхідною умовою схожості двох емпіричних об'єктів $x, y \in X$ є наявність хоча б однієї загальної властивості, тобто можемо записати: $\tilde{\tau}\left(x, y\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\exists t_j \in T_w\right) : \left(\eta_x\left(t_j\right) > 0\right) \wedge \left(\eta_y\left(t_j\right) > 0\right)$.

Враховуючи, що $T_w = \left\{ t_1, ..., t_{m(w)} \right\}$, та замінюючи нерівності на відповідні значення належностей, а логічні оператори – трикутними нормами T і конормами S, отримаємо вираз для визначення нечіткої міри схожості:

$$\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right) = \underset{t_j \in T_w}{S}\left(T\left(\eta_x\left(t_j\right), \eta_y\left(t_j\right)\right)\right), \quad \tilde{D}_x, \tilde{D}_y \in \Omega_{\tilde{D}}. \qquad (1)$$

Такий спосіб обчислення нечіткої міри схожості є аналогом способу обчислення міри схожості для чітких властивостей та ґрунтується на безпосередній заміні логічних операторів їхніми нечіткими аналогами. Зауважимо, що нечітка міра схожості (1) у іншій формі запису використовується, наприклад, у [1].

Симетричність $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$ випливає з симетричності трикутних норм і конорм. Якщо виконується умова рефлексивності $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_x\right)$=1, то формула (1) визначає нечітку міру схожості. Покладемо $\tilde{\tau}\left(x, y\right) = \tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$.

Відображення $\eta : X \to \Omega_{\tilde{D}}$ породжує на $X \times X$ відношення еквівалентності θ: $x\theta y \Leftrightarrow \tilde{D}_x = \tilde{D}_y$, яке є відношенням конгруентності за наявності рефлексивності $\tilde{\tau}^*\left(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y\right)$. Отже, визначені дві системи з відношеннями: емпірична система з відношеннями (ЕСВ) – $\mathcal{M}_1 = \langle X, \theta, \tilde{\tau} \rangle$ і гомоморфна до неї математична система з відношеннями (МСВ) – $\mathcal{M}_2 = \langle \Omega_{\tilde{D}}, =, \tilde{\tau}^* \rangle$. Кортеж $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \eta \rangle$ назвемо нечіткою шкалою вимірювання парціальної нечіткої міри схожості.

Розглянемо проблему подання, в якій досліджуються умови існування нечіткої шкали вимірювання парціальної нечіткої міри схожості (1) та використовується абсолютна шкала вимірювання.

Теорема 1. Умова рефлексивності для нечіткої міри схожості (1) у загальному випадку не виконується.

Доведено, що при застосуванні в (1) операторів норми і конорми, введених Л. Заде, множина результатів вимірювання $\Omega_{\tilde{D}}$ повинна складатись із нормальних нечітких множин. У загальному випадку ця (перша) умова може бути не виконаною.

Крім того, якщо в (1) використаємо норму Л. Заде і конорму Я. Лукасевича, отримаємо другу умову, яка забезпечуватиме рефлексивність нечіткої міри схожості: $\forall x \in X$, $\sum_{t_j \in T_W} \eta_x(t_j) \geq 1.$ Проте, ця умова не завжди матиме місце.

Отже, при вимірюваннях за абсолютними шкалами у загальному випадку на класах еквівалентності фактор-множини X / θ не буде виконуватися умова рефлексивності нечіткої міри схожості.

Розглянемо випадок, коли умови, отримані у теоремі 1, все ж будуть виконуватись. У цьому випадку перейдемо до дослідження адекватності нечіткої міри схожості.

Нехай задано дві подібних системи: $\mathcal{M}_E = \langle E; S_1, ..., S_n \rangle$ – ЕСВ, де $E = \{e_j\}$ – множина об'єктів (елементів) ЕСВ (носій ЕСВ), $S_1, ..., S_n$ – задані відношення на Е, та $\mathcal{M}_F = \langle A; R_1, ..., R_n \rangle$ – формальна модель, тобто числова система з відношеннями (ЧСВ) або МСВ, де $A = \{a_j\}$ – множина елементів ЧСВ або МСВ (носій ЧСВ або МСВ), $R_1, ..., R_n$ – відношення, що задані на А.

Нехай $a_j \in A$ – результат вимірювань властивостей емпіричного об'єкта $e_j \in E$: $a_j = f(e_j)$, $f : E \to A$.

Означення. [2] Формальна модель $\mathcal{M}_F$ називається адекватною, якщо відображення f є гомоморфізмом, тобто зберігає у $\mathcal{M}_F$ відношення ЕСВ $\mathcal{M}_E$ за допустимих перетворень у шкалах, що застосовані при вимірюваннях.

Теорема 2. Нечітка міра схожості (1) не є адекватною при вимірюваннях значень функції належності нечіткої властивості $w \in W$ за шкалою відношень, інтервалів або порядку.

Справедливість теореми випливає з відсутності інваріантності умов рефлексивності, які отримані у теоремі 1, при вимірюваннях за шкалою відношень та інтервалів. У шкалі порядку друга умова не може бути використаною через неприпустимість для такої шкали операції додавання. Вочевидь, що перша умова порушуватиметься за монотонних перетворень, які є допустимими в шкалі порядку.

Отже, міра схожості (1) у загальному випадку є непридатною для побудови адекватної формальної моделі, складовою якої є нечітке відношення схожості, тому для побудови нечіткої шкали схожості пропонується інваріантна нечітка міра схожості, яка визначається за допомогою коефіцієнта лінгвістичної кореляції [3, 4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Овчинников С.В., Рьера Т. О нечетких классификациях. В кн. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. М.: Радио и связь, 1986. С. 100 – 113.
2. Рясна І. І. Нечіткі моделі комбінаторної оптимізації та їх застосування : автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. Київ, 2020. 20 с.
3. Рясная И.И. Об адекватности нечеткой шкалы в задачах нечеткого кластерного анализа. Компьютерная математика. Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. 2018. № 2. С. 71 – 79.
4. Рясная И.И. Кластерный анализ: проблема адекватности. Proc. XX Int. Conf. «Knowledge-Dialogue-Solution» (September 8–10, 2014, Kyiv). Kyiv–Sofia: ITHEA, 2014. С. 75 – 86.

УДК 519.2

ДОСТАТНЯ УМОВА ЗБІГУ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА У ВИПАДКУ, КОЛИ КОВАРІАЦІЙНА МАТРИЦЯ ВІДХИЛЕНЬ Є МАТРИЦЕЮ ТЕПЛІЦА

М.Ю. Савкіна

Інститут математики НАН України
qseft@i.ua

Розглянемо таку модель лінійної регресії

$$y_i = at_i + b + \varepsilon_i, i = 0,1,\dots,n, \qquad (1)$$

де $t_i = \frac{i}{n}, i = 0,1,\dots,n, -$ точки спостереження,

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n -$ випадкові величини з $E\varepsilon_i = 0, i = 0,1,\dots,n,$ та коваріаційною матрицею відхилень

$$cov(\varepsilon) = \sigma^2\Omega,$$

$\Omega -$ відома додатньо визначена матриця,

a та $b -$ невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

Найпоширенішим методом оцінювання параметрів в регресійному аналізі є метод найменших квадратів (МНК), проте у випадку, коли ма-триця Ω не є одиничною, оцінка МНК невідомих параметрів регресії вже не буде ефективною. Для того, щоб отримати ефективну оцінку, треба видозмінити МНК. Так виник зважений МНК[1], відповідна оцінка нази-ваєтьcя оцінкою Ейткена. Однак використання ефективної оцінки Ейтке-на передбачає знання коваріаційної матриці відхилень, яка на практиці як правило невідома. Тому доводиться користуватися оцінкою МНК. Отже знаходження випадків, коли ці оцінки збігаються, має велике значення. В [2] доведено теорему, яка дає необхідну і достатню умову на матрицю плану [3] для збігу оцінки МНК та оцінки Ейткена. Зауважимо, що в цій теоремі оцінки збігаються для всіх параметрів одночасно.

Поставимо задачу знайти умови матрицю $\Omega,$ при яких збігаються оцінка МНК та оцінка Ейткена кожного параметру моделі (1) окремо (одночасно для обох параметрів ці оцінки будуть збігатися тільки у випадку одиничної матриці Ω).

В [1] знайдено формули для оцінка МНК та оцінка Ейткена невідомих параметрів моделі лінійної регресії загального вигляду. З цих формул у випадку моделі (1) маємо такі оцінки МНК та Ейткена невідомих параметрів:

$$\hat{a}_{MNK} = \frac{12n}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right) y_i;$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = (X'\Omega^{-1}X)X'\Omega^{-1}\vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}' = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

Розглянемо випадок, коли $n -$ непарне, а матриця Ω є матрицею Тепліца певного вигляду

$$\Omega_c = \begin{pmatrix} \lambda & c_{k-1} & \cdots & c_2 & c_1 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{k-1} & \lambda & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ c_2 & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ c_1 & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ c & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & c \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & c_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & c_2 \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \lambda & c_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

де

$$k = \frac{n-1}{2}.$$

Виходячи з загальних формул для оцінки МНК та оцінки Ейткена параметрів лінійної регресійної моделі, доведено наступну теорему, яка дає достатню умову для збігу цих оцінок параметра a моделі (1).

Теорема. Якщо в моделі (1) для матриці Ω_c виконується умова $c_i = \left(\frac{k}{k+1}\right)^i c,\ i = 1,2,\dots,k-1,$ то оцінка МНК та оцінка Ейткена параметра a збігаються.

СПИСОК ЛІТЕРАТИРИ

1.Демиденко Е.З.Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко.– Москва: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

2. Андерсон Т.Статистический анализ временных рядов /Т. Андерсон.– Москва: Мир, 1976. – 756 с.

3. Себер Дж.Линейный регрессионный анализ / Дж.Себер.– Москва: Мир, 1980. – 336 с.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Володимир Семенов, Сергій Денисов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

semenov.volodya@gmail.com

Запропоновано новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в банаховому просторі, який є адаптивним варіантом «forward-reflected-backward algorithm», де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевої константи оператора. Крім того, замість метричної проекції на допустиму множину використовується узагальнена проекція Альбера. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведена теорема про слабку збіжність методу.

Постановка задачі

Нехай E – 2-рівномірно опуклий та рівномірно гладкий банахів простір [1], C – непорожня підмножина простору E та A – оператор, що діє з E в спряжений простір E^*. Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \quad \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

множину розв'язків якої позначимо S. Припустимо, що виконані такі умови: множина $C \subseteq E$ опукла та замкнена; оператор $A: E \to E^*$ монотонний та ліпшицевий з константою $L > 0$ на C; $S \neq \varnothing$.

Розглянемо нормалізоване дуальне відображення $J: E \to 2^{E^*}$, що діє таким чином

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\},$$

та функціонал Альбера [2]

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x \rangle + \|y\|^2 \qquad \forall x, y \in E.$$

Відомо [3], що для деякого $\mu \geq 1$ виконується нерівність

$$\phi(x, y) \geq \frac{1}{\mu} \|x - y\|^2 \qquad \forall x, y \in E. \tag{2}$$

Нехай K – непорожня замкнена та опукла підмножина простору E. Відомо [2], що для кожного $x \in E$ існує єдина точка $z \in K$, така, що

$$\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x).$$

Цю точку z позначають $\Pi_K x$, а відповідний оператор $\Pi_K : E \to K$ називають узагальненою проекцією E на K (узагальненою проекцією Альбера) [2].

Алгоритм

Розглянемо тепер новий алгоритм для розв'язання варіаційної нерівності (1). Будемо використовувати просте правило оновлення параметрів λ_n без інформації про константу Ліпшиця оператора A [4]. Алгоритм, який ми пропонуємо, є модифікацією «forward-reflected-backward algorithm», що нещодавно був розроблений у [5] для апроксимації розв'язків операторних включень з сумою максимального монотонного та ліпшицевого монотонного операторів, що діють у гільбертовому просторі.

Припустимо, що відома константа $\mu \geq 1$ з нерівності (2).

Алгоритм 1.

Обираємо $x_0 \in E$, $x_1 \in E$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{2\mu}\right)$ та $\lambda_0, \lambda_1 > 0$. Покладемо $n = 1$.

1. Обчислити

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right)\right).$$

2. Якщо $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, інакше перейти до 3.
3. Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*}\right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n+1$ та перейти до 1.

Ясно, що послідовність (λ_n) незростаюча та обмежена знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \tau L^{-1}\right\}$. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, має місце нерівність

$$-2\left\langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right), y - x_{n+1}\right\rangle \leq$$
$$\leq \phi\left(y, x_n\right) - \phi\left(x_{n+1}, x_n\right) - \phi\left(y, x_{n+1}\right) \qquad \forall y \in C. \tag{3}$$

Нерівність (3) дає обгрунтування правила зупинки. Дійсно, коли $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то з (3) випливає $\left\langle Ax_n, y - x_n\right\rangle \geq 0 \;\; \forall y \in C$, тобто, $x_n \in S$.

Основний результат

Лема 1. Для породженої алгоритмом 1 послідовності (x_n) має місце нерівність

$$\phi\left(z, x_{n+1}\right) + 2\lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z\right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq$$
$$\leq \phi\left(z, x_n\right) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi\left(x_n, x_{n-1}\right) -$$
$$-\left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi\left(x_{n+1}, x_n\right),$$

де $z \in S$.

Теорема 1. Нехай C – непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого простору E, $A: E \to E^*$ – монотонний та ліпшицевий оператор, $S \neq \varnothing$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне. Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) слабко збігається до деякої точки $z \in S$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Beauzamy B. Introduction to Banach Spaces and Their Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.
2. Alber Y. I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, vol. 178. New York: Dekker, 1996. P. 15-50.
3. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. Fixed Point Theory Appl. 2014. 95. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95.
4. Denisov S. V., Semenov V. V., Stetsyuk P. I. Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. Cybernetics and Systems Analysis. 2019. Vol. 55. Issue 3. P. 377-383.
5. Malitsky Y., Tam M. K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. SIAM Journal on Optimization. 2020. Vol. 30. No. 2. P. 1451-1472.

ПОБУДОВА ДВОСТОРОННЬОГО АНАЛОГУ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВИХ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

П.С. Сеньо

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

На основі математики функціональних інтервалів побудовано двосторонній аналог формули Тейлора, що є суттю наступної теореми. Застосування її дає можливість розробляти та досліджувати нові двосторонні методи розв'язування початкових та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема. Нехай функція $y(x)$ n разів неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a,b]$; функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ монотонні і такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність $\underline{g}(x) \le y^{(n)}(x) \le \overline{g}(x)$, де

$$y_a^{(i)} = y^{(i)}(a), \quad y_b^{(i)} = y^{(i)}(b), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Тоді у кожній точці $x \in [a,b]$ виконуються такі нерівності:

1) якщо на проміжку $[a,b]$ обидві функції $\underline{g}(x), \overline{g}(x)$ монотонно зростаючі, то

$$y_a + y_a' \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y_a'' \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(a) \cdot (x-a)^n \le y(x) \le$$

$$y_a + y_a' \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y_a'' \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-a)^n,$$

$$y_b + y_b' \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y_b'' \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-b)^n \le y(x) \le$$

$$y_b + y_b' \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y_b'' \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(b) \cdot (x-b)^n;$$

2) якщо на проміжку $[a,b]$ обидві функції $\underline{g}(x), \overline{g}(x)$ монотонно спадні, то

$$y_a + y_a' \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y_a'' \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-a)^n \le y(x) \le$$

$$y_a + y_a' \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y_a'' \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(a) \cdot (x-a)^n,$$

$$y_b + y_b' \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y_b'' \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(b) \cdot (x-b)^n \le y(x) \le$$

$$y_b + y_b' \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y_b'' \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-b)^n;$$

3) якщо на проміжку $[a,b]$ функція $\overline{g}(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\underline{g}(x)$ монотонно спадна, то

$$y_a + y_a' \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y_a'' \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-a)^n \le y(x) \le$$

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-a)^n,$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-b)^n \le y(x) \le$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-b)^n;$$

4) якщо на проміжку $[a,b]$ функція $\overline{g}(x)$ монотонно спадна, а функція $\underline{g}(x)$ монотонно зростаюча, то

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(a) \cdot (x-a)^n \le y(x) \le$$

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(a) \cdot (x-a)^n,$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(b) \cdot (x-b)^n \le y(x) \le$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(b) \cdot (x-b)^n.$$

Зауваження. Якщо в інтервалі $[a,b]$ функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ не монотонні, то знайшовши проміжки їхньої монотонності та побудувавши об’єднаний список таких проміжків, на кожному спільному проміжку монотонності цих функцій можна послідовно застосовувати висновки цієї теореми.

УДК 519.6

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ РІВНЯНЬ ІНТЕГРОВНОГО ТИПУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Валерій Самойленко[1], Юлія Самойленко[1,2]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

valsamyul@gmail.com, yuliiasam1976@gmail.com

Доповідь присвячена асимптотичному аналізу сингулярно збурених рівнянь типу рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, які використовуються при моделюванні хвильових процесів у середовищах зі змінними характеристиками. Представлено алгоритм побудови наближених (асимптотичних) розв'язків, які в певному сенсі є аналогами солітонних. Дано обгрунтування алгоритму побудови таких наближених розв'язків.

Вступ. При моделюванні різноманітних хвильових процесів часто використовуються рівняння Кортевега-де Фріза (KdV equation) та рівняння типу рівняння Кортевега-де Фріза (KdV-like equation), серед яких одним із найбільш відомих є рівняння Бенжаміна-Бона-Маконі (BBM equation) [1, 2]. Для всіх цих рівнянь однією із характерних рис є наявність солітонних розв'язків. При вивченні хвильових процесів у середовищах зі змінними характеристиками в якості відповідних математичних моделей виступають згадані вище рівняння зі змінними коефіцієнтами. Зважаючи на наявність для рівняння Кортевега-де Фріза та рівняння типу рівняння Кортевега-де Фріза солітонних розв'язків цілком природньо постає питання про існування для рівнянь інтегрованого типу зі змінними коефіцієнтами розв'язків, які за своєю структурою є близькими до солітонних. Такі розв'язки отримали назву солітоноподібних. Саме вивченню цих об'єктів за допомогою методів асимптотичного аналізу і присвячено дану доповідь.

Постановка задачі. Розглядається сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad (x,t) \in R\times[0;T], \tag{1}$$

де нескінченно диференційовні функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N} a_k(x,t)\varepsilon^k+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

$$b(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N} b_k(x,t)\varepsilon^k+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

причому $a_0(x,t)\,b_0(x,t)\neq 0$, $(x,t)\in R\times[0;T]$.

Позначимо [1] через $G_1=G_1(R\times[0;T]\times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційованих функцій $f=f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K\subset R\times[0;T]$ виконуються умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K,$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}(f(x,t,\tau)-f^-(x,t))=0,\quad (x,t)\in K.$$

Нехай $G_1^0(R\times[0;T]\times R)\subset G_1$ – лінійний простір функцій $f=f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset R\times[0:T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K.$$

Означення. Функція $u(x,t,\varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається асимптотичною однофазовою солітоноподібною функцією, якщо ця функція для довільного цілого $N\geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right],\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

де $u_j(x,t)\in C^\infty(R\times[0;T])$, $V_0(t,x,\tau)\in G_1^0$, функції $V_j(t,x,\tau)\in G_1$, $j=\overline{1,N}$.

Вигляд асимптотичного солітоноподібного розв’язку залежить від степеня малого параметра n в рівнянні (1), зокрема,

$$u(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{j}\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right]+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^{n/2}}, \qquad (2)$$

якщо n – парне; та

$$u(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^{j}\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right]+$$

$$+\varepsilon^{k}\sum_{j=1}^{2N-2k}\varepsilon^{j/2}\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right]+O\left(\varepsilon^{N/2+1}\right),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^{k}\sqrt{\varepsilon}}, \qquad (3)$$

якщо n – непарне, причому $n=2k+1$, де k – ціле невід'ємне число.

Алгоритм побудови асимптотичного розв'язку. Наближений (асимптотичний) розв'язок рівняння вигляду (1) складається із регулярної і сингулярної частин, які мають вигляд асимптотичних розкладів. Їх доданки визначаються як розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, які отримуються після підстановки розкладів (2) (або (3)) в рівняння (1).

Доданки регулярної частини асимптотики визначаються як розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. При цьому головний доданок регулярної частини асимптотики задовольняє однорідне квазілінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку, а інші доданки визначаються із неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Регулярна частина відіграє роль фонової функції, в той час як сингулярна частина характеризує солітонні властивості розв'язків. Варто також зауважити, що визначення доданків сингулярної частини асимптотики є суттєво складнішою задачею ніж задача про визначення доданків регулярної частини. Дослідження рівнянь для членів сингулярної частини асимптотики має таку особливість: потрібно не лише знайти невідомі функції, які задовольняють ці рівняння, а необхідно, щоб знайдені функції належали функціональним просторам G_1^0 чи G_1. Крім того, потрібно ще визначити функцію $\varphi=\varphi(t)$, яка задає криву розриву $x=\varphi(t)$.

Ця задача розв'язується наступним чином: спочатку рівняння для доданків сингулярної частини розглядаються на кривій розриву $x=\varphi(t)$, яка апріорі вважається відомою, і визначаються розв'язки цих рівнянь на кривій розриву. Потім знаходиться диференціальне рівняння для функції $x=\varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x=\varphi(t)$. Такий підхід використано при побудові як однофазових,

так і дво- та багатофазових асимптотичних солітоноподібних розв'язків для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням (відповідні посилання див. у вступних частинах праць [1 – 5]).

Типи асимптотичних солітоноподібних розв'язків. Серед асимптотичних солітоноподібних розв'язків виділено два типи. До першого типу належать асимптотичні розв'язки, всі доданки сингулярної частини яких належать простору G_1^0, тобто є швидко спадними функціями стосовно фазової змінної τ. Такі наближені розв'язки названо асимптотичними розв'язками солітонного типу [3]. До другого типу віднесено розв'язки, головний доданок сингулярної частини яких належить простору G_1^0, тобто є швидко спадною функцією фазової змінної τ, а всі інші доданки сингулярної частини належать простору G_1, тобто старші доданки сингулярної частини при прямуванні змінної $\tau \to -\infty$ прямують до деякої (ненульової) функції $f_j^-(x,t)$. Ці наближені розв'язки названо сходинкоподібними [4].

Отримані результати проілюстровані на прикладах рівнянь типу рівняння Кортевега-де Фріза і рівняння Бенжаміна-Бона-Маконі із конкретно заданими змінними коефіцієнтами, для яких проведено асимптотичний аналіз отриманих наближених розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Samoilenko V. Asymptotic soliton-like solutions to the singularly perturbed Benjamin-Bona-Mahony equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // Journal of Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 60, № 1. – P.
2. Samoilenko V. Estimates of accuracy for asymptotic soliton-like solutions to the singularly perturbed Benjamin-Bona-Mahony equation / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko, L.V. Vovk // Nonlinear dynamics and systems theory. – 2020. – Vol. 20, № 1. – P. 92 – 106.
3. Samoilenko V.H. Asymptotic solutions of soliton type of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and singular perturbation / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko, V. Limarchenko, V. Vovk, K. Zaitseva // Mathematical Modeling and Computing. – 2019. – Vol. 6 – № 2. – P. 374-385
4. Lyashko S. Asymptotic analysis of the Korteweg-de Vries equation by the nonlinear WKB technique / S. Lyashko, V. Samoilenko, Yu. Samoilenko, N. Lyashko // Mathematical Modeling and Computing. – 2021.– Vol. 8. – № 3.– P. 368-378.
5. Lyashko S. / S. Lyashko, V. Samoilenko, Yu. Samoilenko, I. Gapyak, N. Lyashko I., M. Orlova // Global Asymptotic Step-Type Solutions to Singularly Perturbed Korteweg-De Vries Equation with Variable Coefficients // Journal of Automation and Information Sciences. – 2020. – Vol. 52. – Issue 9. – P. 27-38.

УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Ганна Стаднікова, Поліна Артюх, Максим Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки

hanna.stadnikova@nure.ua

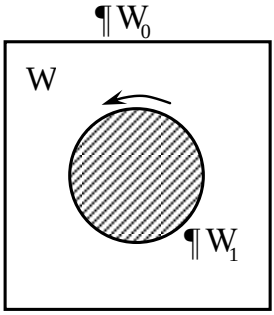
Розглядається задача математичного моделювання нестаціонарних процесів перемішування у плоскій двозв'язній області. Для її чисельного аналізу запропоновано метод, заснований на сумісному використанні принципу суперпозиції та методів R-функцій і Гальоркіна.

Вступ

Однією з актуальних наукових проблем є кінематика перемішування в'язкої рідини при різних умовах їх повільного руху. Результати вивчення механізмів перемішування і керування ним активно застосовується у різних областях науки і техніки: хімічній та харчовій промисловості, геології, океанології тощо [1]. Тому інтерес до математичного моделювання в цій області постійно зростає.

Постановка задачі

Розглянемо нестаціонарну задачу перемішування в'язкої нестисливої рідини в двозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (мал. 1) з кусочно-гладкою межею. Вважатимемо, що ділянки межі $\partial\Omega_0$ нерухомі, а коло, що знаходиться всередині області і має межу $\partial\Omega_1$, рухається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\tau(t)$. Припустимо, що в початковий момент часу рідина знаходиться у стані спокою ($\tau(0) = 0$).



Мал. 1. Область Ω

Математичною моделлю задачі перемішування є система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, яка складається з рівнянь руху для вектору швидкості $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ і тиску p та рівняння неперервності [2]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

де ν – коефіцієнт в'язкості рідини, Δ – оператор Лапласа, t – час.

Введемо функцію течії $\psi = \psi(x, y, t)$, яка пов'язана з вектором $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ швидкостей рідини за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Використовуючи функцію течії ψ, заданою співвідношеннями (4), система рівнянь Нав'є-Стокса (1) – (3) зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi \quad \text{в } \Omega, \quad t > 0. \tag{5}$$

Відомо, що для повільної течії відношення порядку конвекційних сил інерції до порядку сил в'язкості невелике і нелінійним доданком у рівнянні (5) можна знехтувати. Тоді отримаємо лінеаризоване за Стоксом рівняння в'язкої нестисливої рідини:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi)+\nu\Delta^2\psi=0 \quad \text{в } \Omega, \quad t>0. \tag{6}$$

Початкові та крайові умови для функції течії можуть бути отримані з відповідних умов, які накладаються на вектор швидкості $\mathbf{v}$. Враховуючи припущення, наведені вище, крайові та початкові умови запишуться так:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1}=c(t), \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1}=\tau(t), \quad \psi\big|_{t=0}=0, \tag{7}$$

де $c(t)$ - деяка невідома функція часу, $\tau(t)$ – кутова швидкість $\partial\Omega_0$.

Метод розв'язання

Відповідно до принципу суперпозиції, функцію $\psi=\psi(x,y,t)$ шукатимемо в наступному вигляді:

$$\psi=\psi_0+c(t)\psi_1, \tag{8}$$

де $\psi_0=\psi_0(x,y,t)$, $\psi_1=\psi_1(x,y,t)$ – нові невідомі функції.

Для знаходження ψ_0 і ψ_1 необхідно розв'язати дві допоміжні задачі:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi_0)+\nu\Delta^2\psi_0=0 \quad \text{в } \Omega, \quad t>0, \tag{9}$$

$$\psi_0\big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \psi_0\big|_{\partial\Omega_1}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1}=\tau(t), \quad \psi_0\big|_{t=0}=0,$$

та

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi_1)+\nu\Delta^2\psi_1=0 \quad \text{в } \Omega, \quad t>0, \tag{10}$$

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \psi_1\big|_{\partial\Omega_1}=1, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1}=0, \quad \psi_1\big|_{t=0}=0.$$

Функцію $c(t)$ знайдемо з умови однозначності тиску у двозв'язній області $\oint\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=0$. Враховуючи, що для лінеаризованої задачі

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\Delta v_x-\frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=\nu\Delta v_y-\frac{\partial v_y}{\partial t}$$

та беручи до уваги (4), отримаємо задачу Коші для невідомої функції $c(t)$:

$$a(t)\dot{c}(t)+b(t)c(t)+d(t)=0, \quad c(0)=0,$$

$$a(t)=\oint_{\partial\Omega_1}\left[\nu\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial y}\right]dx+\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial x}-\nu\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x}\right]dy,$$

$$b(t)=\oint_{\partial\Omega_1}\left[\nu\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial y}\right]dx+\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial x}-\nu\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial x}\right]dy,$$

$$d(t)=\oint_{\partial\Omega_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}dx+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dy.$$

Кожна з задач (9), (10) може бути розв’язана за допомогою структурного методу R-функцій [3] з використанням методу Гальоркіна [4] для апроксимації невизначених компонент структур. Побудовані відповідно до методу R-функцій структури розв’язку задач (9), (10) мають вигляд

$$\psi_0=-\omega\frac{\tau(t)\omega_1}{\omega_0+\omega_1}+\omega^2\Phi_0, \quad \psi_1=\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}-\omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right)+\omega^2\Phi_1,$$

де ω, ω_0 і ω_1 – нормалізовані рівняння $\partial\Omega$, $\partial\Omega_0$ і $\partial\Omega_1$ відповідно, $\Phi_0(x,y,t)$ і $\Phi_1(x,y,t)$ – невизначені компоненти структури, $D_1 f=(\nabla\omega,\nabla f)$.

Для апроксимації невизначених компонент їх треба подати у вигляді

$$\Phi_0(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\tau_j(x,y), \quad \Phi_1(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}d_j(t)\tau_j(x,y),$$

де $\{\tau_j\}$ – деяка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій.

Для визначення функцій $c_j(t)$ та $d_j(t)$ відповідно до методу Гальоркіна маємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Знання функції течії дозволяє дослідити траєкторії руху окремих частинок рідини, розв’язуючи задачу Коші

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t), \quad x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0.$$

Обчислювальний експеримент

Для обчислювального експерименту було обрано $\tau(t)=-1+e^{-t}$,

$$\omega=\omega_0\wedge_0\omega_1, \quad \omega_0=\left[x(1-x)\right]\wedge_0\left[y(1-y)\right], \quad \omega_1=\frac{1}{8}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}^2\right).$$

У якості координатних функцій було обрано сплайни Шенберга п’ятого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ottino J.M. The mixing of fluids / J.M. Ottino // Sci. Amer. – 1989. – Vol. 260.– № 1.– P. 56-67.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

УДК 539.3

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Євген Сторожук , Володимир Максимюк, Іван Чернишенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

stevan@ukr.net; desc@inmech.kiev.ua

Описано особливості розроблених аналітичних, чисельних та аналітично-чисельних підходів до моделювання лінійного і нелінійного деформування циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу.

Циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу (еліптичного, овального, параболічного, тощо) знаходять широке застосування в сучасній інженерній практиці, наприклад, при проектуванні фюзеляжів літаків і корпусів ракет. Розв’язування крайових задач для некругових циліндричних оболонок пов’язане із значними математичними труднощами, обумовленими зміною кривизни в поперечному напрямку, а також врахуванням нелінійностей і деформацій поперечного зсуву.

Автори доповіді запропонували три підходи до розв’язання лінійних і нелінійних задач статики для циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу, при розробці яких були враховані специфіка та особливості даних задач.

1. Аналітичний підхід

З використанням співвідношень теорії непологих оболонок Тимошенка в системі координат (x,φ), де x – осьова координата, φ – кут між нормаллю до серединної поверхні оболонки і малою віссю поперечного перерізу, отримано [4] точні розв'язки лінійних задач для таких видів циліндричних оболонок: відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки $(0 \le \varphi \le \varphi_k)$, повздовжній край $\varphi = \varphi_k$ якої жорстко закріплений, а на краю $\varphi = 0$ діє рівномірно розподілена поперечна сила Q; відкритої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки $(-\varphi_k \le \varphi \le \varphi_k)$ з жорстко або шарнірно закріпленими повздовжніми краями $\varphi = \pm\varphi_k$, навантаженої рівномірним тиском q або рівномірно розподіленою вздовж твірної поперечною силою Q у вершині овалу $\varphi = 0$; замкненої нескінченно довгої овальної циліндричної оболонки, яка знаходиться під дією рівномірного тиску q або двох діаметрально протилежних рівномірно розподілених поперечних сил Q.

На основі геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховується деформація поперечного зсуву), аналітично досліджено нелінійне деформування і стійкість довгої циліндричної панелі овального поперечного перерізу. Дослідження виконані в системі координат (x,s), де s – довжина дуги напрямної, для оболонки з жорстко або шарнірно закріпленими повздовжніми краями $s = \pm s_k$ при дії рівномірного тиску q або рівномірно розподіленої вздовж твірної поперечної сили Q, яка проходить через вершину овалу, а також кусково-рівномірного навантаження. Побудовані розв'язки у параметричній формі описують нелінійну залежність переміщень, кута повороту і внутрішніх силових факторів від діючого навантаження та дозволяють розглянути поведінку оболонки у всій області деформування – як докритичній, так і закритичній, і виконати аналіз напружено-деформованого стану (НДС) в залежності від геометричних і механічних параметрів, а також виду навантаження і крайових умов.

Зазначимо, що з отриманих точних розв'язків лінійних і нелінійних задач статики для податливої на поперечний зсув овальної циліндричної оболонки (модель Тимошенка) можна отримати відповідні результати для

класичної теорії овальної оболонки (модель Кірхгофа – Лява) при нульовому значенні параметра поперечного зсуву.

2. Аналітично-чисельний підхід

Розв'язання крайових задач теорії тонких і нетонких циліндричних оболонок зводиться до обчислення ряду інтегралів. Для більшості некругових поперечних перерізів первісні підінтегральних функцій не виражаються через елементарні функції. Тому автори розробили методику розв'язання задач статики для даного класу оболонок, яка базується на аналітичному і чисельному інтегруванні (за формулою трапецій) та забезпечує високу (майже аналітичну) точність результатів [2]. За допомогою запропонованого аналітично-чисельного підходу розв'язано ряд лінійних і геометрично нелінійних задач для нескінченно довгих еліптичних і овальних циліндричних оболонок змінної товщини при дії статичного навантаження.

Для підтвердження ефективності розробленої методики представимо результати розв'язання лінійної задачі для замкненої довгої овальної циліндричної оболонки, яка навантажена рівномірним тиском $q =$ 1 кПа.

Радіус кривизни поперечного перерізу оболонки задається формулою: $r = r_0(1+\xi\cos 2\varphi)$, де $r_0 = (a+b)/2$; $\xi = 3(a-b)/(a+b)$; a,b – півосі овалу.

Розрахунки виконані для оболонки з такими параметрами: $E = 70$ ГПа; $\nu = 0{,}3$; $r_0/h = 100$; $a/b = 1{,}5$. Тут E,ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; h – товщина.

В табл. 1 представлені значення відносних прогинів $\tilde{w} = w/h$ в кінцях малої ($\varphi = 0$) і великої ($\varphi = \pi/2$) півосей. Дані отримані з використанням точного (ТР) і аналітично-чисельного (АЧР) розв'язків при розбитті відрізка інтегрування на N частин. Там же наведені значення похибок АЧР (Δ).

Табл. 1. Прогини в кінцях півосей поперечного перерізу

	N	$\tilde{w}(0)$	Δ,%	$\tilde{w}(\pi/2)$	Δ,%
АЧР	5	1,011	15,5	-0,709	9,9
	10	1,148	4,0	-0,768	2,4
	20	1,184	1,0	-0,782	0,6
	40	1,193	0,3	-0,786	0,1
	80	1,196	0,0	-0,787	0,0
ТР	–	1,196	–	-0,787	–

З аналізу даних, представлених в табл. 1, випливає, що при розбитті відрізка інтегрування на 5, 10, 20, 40 і 80 частин найбільша відмінність результатів АЧР задачі від її точного розв'язку складає, відповідно, 15,5; 4,0; 1,0; 0,3; 0,0(%).

3. Чисельний підхід

Відомо [1, 3, 5], що при виконанні конкретних розрахунків для довгої циліндричної оболонки еліптичного або овального поперечного перерізу з використанням традиційних варіантів варіаційно-різницевого методу (ВРМ) і методу скінченних елементів (МСЕ) спостерігається сповільнена збіжність результатів внаслідок так званого явища мембранного замикання. Тому для дослідження НДС некругової циліндричної оболонки автори розробили варіант ВРМ [1], в якому геометричні гіпотези Кірхгофа-Лява реалізовані методом множників Лагранжа і додатково варіюється мембранна деформація, що значно покращує збіжність числових результатів. Так, в традиційному варіанті ВРМ для досягнення збіжності у трьох значущих цифрах для максимальних прогинів еліптичної циліндричної оболонки потрібно було чверть напрямної покрити сіткою, що має 2561 вузлову точку. А для досягнення такої ж точності при використанні змішаного функціоналу, в якому додатково варіюється мембранна деформація, потрібен 41 вузол. Також запропоновано варіант МСЕ з обчисленням мембранної деформації за допомогою подвійної апроксимації [3, 5], що на один або два порядки збільшує швидкість збіжності числових результатів. Наприклад, для того щоб похибка розв'язку задачі для замкненої овальної циліндричної оболонки МСЕ без подвійної апроксимації була меншою 1% необхідно розбити чверть контуру поперечного перерізу на 1000 елементів. В той же час для досягнення вказаної точності при використанні МСЕ з подвійною апроксимацією достатньо всього 10 елементів.

Отже, в роботі отримано аналітичні (точні) і аналітично-чисельні (практично точні) розв'язки задач статики для некругової циліндричної оболонки, які мають самостійне значення, а також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. Розроблено модифікації МСЕ і ВРМ, вільні від мембранного замикання, що значно підвищує точність розв'язання даних задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абросов Ю. Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование длинной цилиндрической оболочки / А. Абросов, В. Максимюк, И. Чернышенко // Прикл. механика. – 2016. – Том. 52. – №5. – С. 106-111.

2. Сторожук Е. Аналитически-численное решение задач статики для некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины / Е. Сторожук, А. Яцура // Прикл. механика. – 2017. – Том. 53. – №3. – С. 91-103.
3. Сторожук Е. Распределение напряжений вокруг кругового отверстия в гибкой ортотропной цилиндрической оболочке эллиптического поперечного сечения / Е. Сторожук, С. Комарчук // Прикл. механика. – 2018. – Том. 54. – №6. – С. 86-93.
4. Сторожук Е. Точные решения краевых задач для цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения / Е. Сторожук, А. Яцура // Прикл. механика. – 2016. – Том. 52. – №4. – С. 68-81.
5. Сторожук Е. Упругопластическое состояние цилиндрической оболочки эллиптического сечения, ослабленной круговым отверстием / Е. Сторожук, И. Чернышенко, О. Пиголь // Прикл. механика. – 2017. – Том. 53. – №6. – С. 49-56.

УДК 517.925

АЛГОРИТМ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДІФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Ігор Черевко, Ірина Тузик, Світлана Іліка

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.cherevko@chnu.edu.ua, i.tusyk@chnu.edu.ua, s.ilika@chnu.edu.ua

У даній роботі досліджуються застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [1-5] до наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв`язків систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням.

Дана задача зводиться до знаходження умов від'ємності дійсних частин усіх нулів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь. Перевірка на практиці таких умови можлива тільки для найпростіших випадків. Ми будемо досліджувати експоненціальну стійкість (нестійкість) лінійних стаціонарних систем із запізненням аналізуючи властивості нульового розв'язку відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

1. Зв'язок між вихідною та апроксимуючою системами.

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $A_i, i = \overline{0,k}$ – $n \times n$-сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \tau$, квазіполіном для системи (1) має вигляд :

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda \tau_i}). \tag{2}$$

Поставимо у відповідність системі (1) за схемою Красовсього-Рєпіна таку апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь [1-3]

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i z_{l_i}(t),\ l_i = [\frac{\tau_i m}{\tau}],$$
$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)),\ i = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau}. \tag{3}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3) має місце співвідношення [1-2]

$$\Psi_m(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i (\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i})(\mu+\lambda)^{mn}. \tag{4}$$

і послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}},\ m \in N \tag{5}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2) [2-5].

Отже, функція $H_m(\lambda)$ апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (2). Оскільки згідно рівності (5) нулі функцій $\psi_m(\lambda)$ та $H_m(\lambda)$ збігаються, то нулі характеристичного рівняння (4) можна брати як наближення неасимптотичних коренів (2).

2. Алгоритм дослідження стійкості.

Теорема 1 [6]. Для того, щоб тривіальний розв’язок системи (1) був експоненціально стійким, необхідно і досить, щоб всі корені його характеристичного рівняння (2) лежали у лівій півплощині

$$Re\lambda < 0. \tag{6}$$

Перевірка цього критерію на практиці є досить складною. Розглянемо можливість дослідження стійкості нульового розв'язку системи із запізненням за допомогою аналізу нульового розв'язку апроксимуючої системи (3) звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 2 [2]. Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$ таке, що при $m > m_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи (3) також експоненціально стійкий (нестійкий).

Якщо для всіх $m > m_0$ нульовий розв'язок системи (3) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді й нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння із запізненням (1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Із наведеної теореми 2 дістаємо, що при достатньо великому m асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку лінійної системи із запізненням еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку системи апроксимуючих звичайних диференціальних рівнянь.

Даний факт буде використовуватись для дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. Схема цього дослідження така:

1) Для лінійних диференціально-різницевих рівнянь будуємо апроксимуючу систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь.
2) Виписуємо характеристичний многочлен апроксимуючої системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь.
3) Приводимо одержаний многочлен до вигляду зручного для знаходження його коренів на ЕОМ.
4) Застосовуючи спеціалізоване програмне забезпечення знаходимо корені характеристичного многочлена апроксимуючої системи і за їх розміщенням визначаємо чи вона стійка.
5) Застосовуючи теорему1 робимо висновок про стійкість чи нестійкість вихідного диференціально-різницевого рівняння.

В роботі для проведення числових експериментів використовується мова програмування Python, яка має потужний набір бібліотек для наукових досліджень. Зокрема в даній роботі використовуються бібліотеки NumPy та SciPy. З бібліотеки NumPy використовується функція roots для знаходження коренів многочлена за заданими коефіцієнтами.

Для реалізації запропонованого алгоритму розроблений прикладний додаток за допомогою фреймворка Flask. Flask – мікрофреймворк для веб-додатків, створений з використанням Python. Його основу складає інструментарій Werkzeug та рушій шаблонів Jinja2.

Приклад. Розглянемо систему ДРР із одним запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau),$$

$x \in R^n, A, B, -n \times n$ – сталі матриці, $\tau > 0,$

$$A = \begin{pmatrix} -0,9 & -6,5 \\ 4,8 & -0,9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1,39 & -0,65 \\ 0,48 & -1,39 \end{pmatrix}$$

Скористаємось схемою Красовського-Рєпіна апроксимації коренів відповідного квазіполінома для дослідження стійкості. Для наглядності побудуємо графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини серед коренів апроксимуючого многочлена.

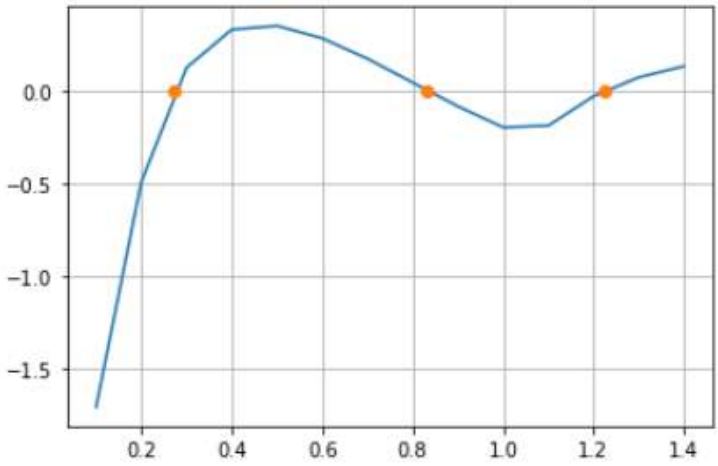


Рис.1 Графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини.

Система буде асимптотично стійкою при розмірності апроксимуючої системи $m = 500,$ коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3),$ де $\tau_1 = 0,2718, \tau_2 = 0,8330,$ $\tau_3 = 1,2290.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями / Ю. М. Репин // ПММ. – 1965. – 29, №2. – С. 226–245.
2. Матвій О.В. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість/ О.В. Матвій, І.М. Черевко // Нелінійні коливання.- 2004.-7, №2.- С.208-216.
3. Матвій О.В. Про стійкість лінійних систем із запізненням / О.В. Матвій, С.А. Пернай, І.М. Черевко // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту: Зб. Наук. пр.. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66–70.
4. Іліка С.А. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / С. А. Іліка, О.В. Матвій, Піддубна Л.А., Черевко І.М. // Буковинський математичний журнал. – 2, № 2-3. – 2014. – С. 92-96.
5. Іліка С.А. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та її застосування / С.А. Іліка, Л.А. Піддубна, І.І. Тузик, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – 6, № 3-4. –2018. – С. 80-83.
6. Rezvan V. Absolute Stability Automatic System with Delay, Nauka, Moscow, 1983. – 360 p

УДК 519.68

ОПТИМАЛЬНА СХЕМА БЛОКОВОГО ПОШУКУ У ВИПАДКУ ЗАКОНУ ЗІПФА РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗВЕРТАННЯ ДО ЗАПИСІВ ФАЙЛІВ БАЗ ДАНИХ

Леся Фундак, Григорій Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка

lesya.fundak@lnu.edu.ua, hryhoriy.tsehelyk@lnu.edu.ua

Побудована оптимальна схема блокового пошуку, за якої математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису у файлі, досягає мінімуму, у випадку закону Зіпфа розподілу ймовірностей звертання до записів і різної кількості записів у блоках.

Розглянемо послідовний упорядкований файл, який містить N записів. Припустимо, що для пошуку запису файл умовно розбивається на n блоків так, що в i-му $(i = 1, 2, ..., n)$ блоці міститься m_i записів. Нехай пошук

потрібного запису відбувається так. Спочатку локалізується блок, який містить шуканий запис, шляхом перегляду останнього запису кожного блоку. Після цього пошук потрібного запису в локалізованому блоці відбувається за допомогою методу послідовного перегляду. Якщо позначити через p_i ймовірність звертання до i-го запису файлу, через E – математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису у файлі, то задача полягає у знаходженні значень параметрів n, m_1, m_2, …, m_n, за яких математичне сподівання досягає мінімуму для різних нерівномірних законів розподілу ймовірностей звертання до записів. Розв'яжемо задачу для закону Зіпфа розподілу ймовірностей.

Позначимо

$$\sum_{i=1}^{s} m_i = k_s, \quad s = 1, 2, ..., n, \quad \text{де } k_1 = m_1, \; k_n = N.$$

Нехай ймовірності звертання до записів розподілені за законом Зіпфа, тобто

$$p_i = \frac{1}{i\,H_N}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

де $H_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$ частинна сума гармонічного ряду. Тоді

$$\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} p_i = \frac{1}{H_N} \sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} \frac{1}{i}, \quad j = 0, 1, ..., n-1, \text{ де } k_0 = 0.$$

Якщо вважати, що сума ймовірностей звертання до записів кожного блоку є одна й та ж і дорівнює $\frac{1}{n}$, то

$$\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} \frac{1}{i} = \frac{H_N}{n}, \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{k_{j+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k_j} \frac{1}{i} = \frac{H_N}{n}.$$

Використовуючи апроксимацію частинної суми гармонічного ряду натуральним логарифмом, одержимо

$$\left(\ln k_{j+1} + C + \gamma_{j+1}\right) - \left(\ln k_j + C + \gamma_j\right) = \frac{H_N}{n},$$

де $C\left(C = 0{,}577...\right)$ – деяка стала, а γ_{j+1} і γ_j – нескінченно малі величини. Звідси

$$\ln\frac{k_{j+1}}{k_j}=\frac{H_N}{n}-\left(\gamma_{j+1}-\gamma_j\right).$$

Нехтуючи нескінченно малою величиною $\gamma_{j+1}-\gamma_j$, з точністю до нескінченно малої величини можемо прийняти

$$k_{j+1}=k_j e^{\frac{H_N}{n}},\quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Тоді

$$k_{j+1}=k_j e^{\frac{H_N}{n}}=k_{j-1}e^{\frac{2H_N}{n}}=\ldots=k_1 e^{\frac{jH_N}{n}}.$$

Оскільки $k_n=N$, то

$$k_1 e^{\frac{(n-1)H_N}{n}}=N.$$

Звідси

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)H_N=\ln\frac{N}{k_1},$$

або

$$n=\frac{H_N}{H_N-\ln\frac{N}{k_1}}=\frac{H_N}{H_N-\ln\frac{N}{m_1}}.$$

Оскільки $m_{j+1}=k_{j+1}-k_j$, то

$$m_{j+1}=k_1\left(e^{\frac{jH_N}{n}}-e^{\frac{(j-1)H_N}{n}}\right)=k_1 e^{\frac{jH_N}{n}}\left(1-e^{\frac{-H_N}{n}}\right),\quad j=1,2,\ldots,n-1,$$

або

$$m_{j+1}=m_1 e^{\frac{jH_N}{n}}\left(1-e^{\frac{-H_N}{n}}\right),\quad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Знайдемо значення n, m_1, m_2, …, m_n, за яких математичне сподівання досягає мінімуму.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{n}m_j=N,$$

то

$$m_1 + m_1\left(1 - e^{\frac{-H_N}{n}}\right)\sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{jH_N}{n}} = N.$$

Знайдемо

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{jH_N}{n}}.$$

Оскільки,

$$S = e^{\frac{H_N}{n}} + e^{\frac{2H_N}{n}} + \ldots + e^{\frac{(n-1)H_N}{n}} = \frac{e^{H_N} - e^{\frac{H_N}{n}}}{e^{\frac{H_N}{n}} - 1},$$

то

$$m_1\left(1 + \left(1 - e^{\frac{-H_N}{n}}\right)\frac{e^{H_N} - e^{\frac{H_N}{n}}}{e^{\frac{H_N}{n}} - 1}\right) = N.$$

Отже, для знаходження n і m_1, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} n = \dfrac{H_N}{H_N - \ln\dfrac{N}{m_1}}, \\ m_1\left(1 + \left(1 - e^{\frac{-H_N}{n}}\right)\dfrac{e^{H_N} - e^{\frac{H_N}{n}}}{e^{\frac{H_N}{n}} - 1}\right) = N, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} n = \dfrac{H_N}{H_N - \ln\dfrac{N}{m_1}}, \\ m_1 e^{H_N - \frac{H_N}{n}} = N. \end{cases}$$

Математичне сподівання кількості порівнянь, необхідне для пошуку запису, подамо у вигляді суми математичного сподівання кількості порівнянь, необхідних для локалізації блока, і математичного сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису в локалізованому блоці. Тоді

$$E = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{m_i} p_{k_{i-1}+j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} j\, p_{k_{i-1}+j}.$$

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{m_i} p_{k_{i-1}+j} = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$E = \frac{1}{2}(n+1) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} j\, p_{k_{i-1}+j},$$

або

$$E = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{H_N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{j}{k_{i-1}+j}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Цегелик Г.Г. Моделювання та оптимізація доступу до інформації файлів баз даних для однопроцесорних і багатопроцесорних систем: монографія/ Г.Г.Ценелик.- Львів: вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2010.- 192 с.

УДК 519.6

ПРО МЕТОД З АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Степан Шахно, Михайло Гавдяк, Галина Ярмола

Львівський національний університет імені Івана Франка

stepan.shakhno@lnu.edu.ua, mykhaylo.havdiak@lnu.edu.ua, halyna.yarmola@lnu.edu.ua

Запропоновано різницевий метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора для пошуку наближеного розв'язку нелінійної задачі про найменші квадрати. Проведено аналіз локальної збіжності запропонованого методу та застосовано до розв'язування тестових задач.

Нелінійні задачі про найменші квадрати найчастіше виникають у разі розв'язування перевизначених систем рівнянь, оцінювання параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, побудови нелінійних регресійних моделей, розв'язування інженерних проблем тощо. Ефективним методом розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати є метод

Гаусса-Ньютона [1]. Однак часто на практиці маємо проблеми з обчисленням похідних. У такому випадку можна використовувати ітераційно-різницеві методи, які не потребують обчислення матриці похідних і водночас не поступаються методу Гаусса-Ньютона за швидкістю збіжності та близькі до нього за кількістю обчислень [2, 4, 5]. В різницевих методах замість матриці часткових похідних обчислюється матриця поділених різниць.

Розглянемо нелінійну задачу про найменші квадрати [1]

$$\min_{x\in R^p} f(x) = \min_{x\in R^p} \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \tag{1}$$

де функція відхилу $F: R^p \to R^m$ ($m \geq p$) є неперервно диференційовною та нелінійною по x. Потрібно знайти x_* таке, що $f(x_*) = \min_{x\in R^p} f(x)$. Якщо $f(x_*) = 0$, то маємо задачу з нульовим відхилом, а в іншому випадку – задачу з ненульовим відхилом.

Для знаходження розв'язку задачі (1) у працях [2, 4] запропоновано та досліджено таку модифікацію методу Гаусса-Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \left(F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k, x_{k-1})\right)^{-1} F(x_k, x_{k-1})^T F(x_k),\ k = 0,1,.... \tag{2}$$

Тут $F(x_k, x_{k-1})$ – поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ за точками x_k, x_{k-1}, x_{-1}, x_0 – задані початкові наближення. Метод хорд (2) вимагає знаходження оберненої матриці на кожній ітерації (або розв'язування СЛАР), що може бути непростою задачею. Тому пропонуємо для розв'язування (1) метод, який не потребує знаходження оберненого оператора, а використовує його апроксимацію:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - A_k B_k^T F(x_k), \\ A_{k+1} &= A_k [2E - B_{k+1}^T B_{k+1} A_k],\ k = 0,1,.... \end{aligned} \tag{3}$$

Тут $B_k = F(x_k, x_{k-1})$, x_0 та A_0 – задані початкові наближення до x_* та $\left(F'(x_*)^T F'(x_*)\right)^{-1}$ відповідно, E – одинична матриця. Формули (3) описують метод хорд з послідовною апроксимацією оберненого оператора. Методи з апроксимацією оберненого оператора складаються з двох гілок. Одна з них призначена для побудови наближень до розв'язку задачі (1), а інша – для апроксимації оберненого оператора. Нами проведено дослідження локальної збіжності методу (3) за класичних умов Ліпшиця у випадку задачі з нульовим відхилом та отримано порядок збіжності.

Для тестових задач з [3] наведемо кількість ітерацій необхідних для обчислення наближеного розв'язку з допомогою різницевих методів (2) і (3). Розглянемо задачі з нульовим та ненульовим відхилом.

У таблиці 1 продемонстровано результати для $\varepsilon = 10^{-8}$. Зупинка обчислювального процесу проводилася за виконання умови $\|x_{k+1} - x_k\| \le \varepsilon$. Додаткове початкове наближення обчислювали за правилом $x_{-1} = x_0 + 0.0001$. У методі (3) $A_0 = (B_0^T B_0)^{-1}$.

Табл. 1. Кількість ітерацій, за які отримано розв'язки задач

Задача	Метод	
	(2)	(3)
Функція Box-3D: $p = 3,\ m = 10$, $x_0 = (0,\ 15,\ 20)$, $x_* = (1,\ 10,\ 1)$, $f(x_*) = 0$	8	12
Функція Вуда: $p = 4,\ m = 6$, $x_0 = (1.1,\ 1.5,\ 1.1,\ 1.5)$, $x_* = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $f(x_*) = 0$	5	8
Розподіл Гнеденка-Вейбулла: $p = 2,\ m = 8$, $x_0 = (1.6,\ 2.8)$, $x_* = (1.41...,\ 1.99...)$, $f(x_*) = 1.30... \times 10^{-7}$	7	8
Функція Фрейденштейна і Роса: $p = 2,\ m = 2$, $x_0 = (10,\ 8)$, $x_* = (5,\ 4)$, $f(x_*) = 0$	10	13
Функція Барда: $p = 3,\ m = 15$, $x_0 = (-1,\ 1.5,\ 2.0)$, $x_* = (0.08...,\ 1.13...,\ 2.34...)$, $f(x_*) = 4.10... \times 10^{-3}$	8	15

Бачимо, що метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора (3) поступається базовому методу хорд (2) щодо кількості ітерацій. Проте він не потребує розв'язування СЛАР на кожній ітерації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р .Шнабель.– М.: Мир, 1988.
2. Шахно С.М. Ітераційні методи для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно // Журнал обчислювальної та прикладної математики.– 2013.– № 1 (111).– С. 154-169.
3. More J.J. Testing Unconstrained Optimization Software / J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom // ACM Transactions on Mathematical Software.– 1981.– Vol. 7., № 1.– P. 17-41.
4. Ren H. Local convergence of a secant type method for solving least squares problems / H. Ren, I. K. Argyros // Applied Mathematics and Computation.– 2010.– Vol. 217.– P. 3816-3824.
5. Shakhno S.M. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving the nonlinear least squares problems / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn // Applied Mathematics and Computation.– 2005.– Vol. 161.– P. 253-264.

ВИСОКОТОЧНІ H-АДАПТИВНІ МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ АПРОКСИМАЦІЯМИ НА ТРИКУТНИКАХ

Георгій Шинкаренко, Олександр Вовк, Василь Танчинець

Львівський національний університет імені Івана Франка
Національний університет «Львівська політехніка»
vasyltanchinets98@gmail.com

В даній роботі h-адаптивна схема методу скінченних елементів (МСЕ), розвинена в праці [2] з кусково лінійними апроксимаціями, доповнюється квадратичними або кубічними апроксимаціями на трикутних елементах.

Розглянемо крайову задачу дифузії-адвекції-реакції в обмеженій області $\Omega \subset R^2$ з ліпшицевою межею $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\begin{cases} \textit{знайти } u = u(x) \textit{ таку, що} \\ -\nabla.(\mu\nabla u) + \beta.\nabla u + \sigma u = f \textit{ в } \Omega,\ u = 0 \textit{ на } \Gamma_u \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_u) > 0, \\ -(\mu\nabla u).\nu = \alpha u + g \textit{ на } \Gamma_q := \Gamma / \Gamma_u, \end{cases} \tag{1}$$

і відповідне їй варіаційне формулювання

$$\begin{cases} \textit{знайти } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \textit{ на } \Gamma_u\} \textit{ таку, що} \\ a(u,v) = < l, v > \qquad \forall v \in V, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\begin{cases} a(u,v) := \int_\Omega [(\mu \nabla u).\nabla v + v(\beta.\nabla u + \sigma u)]dx + \int_{\Gamma_q} \alpha uv d\gamma, \\ < l, v > := \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_q} gvd\gamma, \end{cases} \tag{3}$$

$\mu = \mu(x) > 0,\ \beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^2,\ \sigma = \sigma(x) \geq 0,\ f = f(x),\ g = g(x)$ і $\alpha = \alpha(x) \geq 0$ задані достатньо регулярні коефіцієнти [3].

Вибравши в зручний спосіб конформну тріангуляцію $\Im_h = \{K\}$ області Ω ми визначаємо кусково поліноміальний підпростір $V_h \subset V$ і, скориставшись схемою Гальоркіна, обчислюємо апроксимацію $u_h \in V_h$ розв'язку задачі (2); за деталями алгоритму див. [2].

Щоб оцінити похибку $e := u - u_h$ знайденого наближення $u_h \in V_h$ ми будуємо таку варіаційну задачу про лишок

$$\begin{cases} \textit{задано } u_h \in V_h;\ \textit{знайти } e := u - u_h \in E,\ V = E \oplus V_h, \textit{ таку, що} \\ a(e,v) = < l, v > - a(u_h, v) \qquad \forall v \in E, \end{cases} \tag{4}$$

Наближені розв'язки (апостеріорні оцінювачі похибок (АОП) апроксимацій МСЕ) задачі (4) шукаємо за схемою Гальоркіна в підпросторах $E_h \subset E, \dim E_h < +\infty,$ які конструюються в такий спосіб.

У випадку знайденої кусково лінійної або квадратичної апроксимацій МСЕ ми подаємо АОП у вигляді лінійної комбінації

$$e_h(x) = \sum_{K \in \Im_h} \lambda_K \phi_K(x), \tag{5}$$

де $\{\phi_K(x)\}_{K \in \Im_h}$ – ортогональний базис E_h, який обирався у вигляді

$$\text{supp } \phi_K = K,\ \ \phi_K(x) = 27 L_1^K(x) L_2^K(x) L_3^K(x) \qquad \forall K \in \Im_h. \tag{6}$$

Тут $\{L_i^K(x)\}_{i=1}^3$ – барицентричні координати трикутника K.

У випадку знайдених кубічних апроксимацій АОП обчислювався в дещо складніший спосіб

$$e_h(x) = \sum_{K \in \Im} L_1^K(x) L_2^K(x) L_3^K(x) [\lambda_1^K L_1^K(x) + \lambda_2^K L_2^K(x) + \lambda_3^K L_3^K(x)], \tag{7}$$

оскільки знаходження значень коефіцієнтів $\{\lambda_i^K\}_{i=1}^3$ вимагає (згідно процедури Гальоркіна) формування і розв'язання системи із трьох лінійних алгебричних рівнянь на кожному скінченному елементі сітки.

Нарешті, для обчислення апроксимацій МСЕ із наперед заданою точністю $TOL > 0$ застосовувався ітераційний алгоритм h-адаптування (локального покращення тріангуляцій з використанням бісекції [3]). Тут незалежно від порядку кусково поліноміальної апроксимації МСЕ спочатку обчислювався розподіл індикаторів АОП $\{\| e_h \|_K\}_{K\in\Im_h}$, де

$$\| v \|_K^2 := \int_K [(\mu\nabla u).\nabla v + v(\beta.\nabla u + \sigma u)]dx + \int_{\Gamma_q \cap \partial K} \alpha uv d\gamma \ \ \forall K \in \Im_h.$$

Пізніше визначалася множина $\Re_h$ трикутників $K \in \Im_h$, які не задовольняють умову наперед заданої допустимої похибки

$$\eta_K := \sqrt{N}\frac{\| e_h \|_K}{\| u_h + e_h \|_\Omega} 100\% \le TOL \quad , \qquad (8)$$

і, нарешті, локальне покращення якості тріангуляції здійснювалося поділом трикутників множини $\Re_h$ методом бісекції [3].

Числові результати. Властивості побудованих схем аналізувалися за результатами числових експериментів з модельною задачею [1]

$$-\mu\Delta u + (2,3).\nabla u = f \quad в \ \ \Omega = (0,1)^2, u = 0 \ \ на \ \ \Gamma,$$

з точним розв'язком $u(x) = x_1 x_1^2 - x_2^2 g(2,x_1) + g(3,x_2)[g(2,x_1) - x_1]$, де

$\mu = 2\times 10^{-2}$, $f(x) = 2\{(\mu - 3x_2)[g(2,x_1) - x_1] - g(3,x_2) + x_2^2\}$,

$g(\gamma,t) := \exp[\mu^{-1}\gamma(t-1)]$.

Деякі характеристики наближень, обчислених на послідовності рівномірно згущуваних сіток до досягнення точності з допустимою похибкою $TOL = 1\%$ подано в табл. 1.

Таблиця 1. АОП і порядки збіжності апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних тріангуляціях

M	$N(\Im_h)$	$card\,\Im_h$	$\| e_h \|_\Omega$	$\| u - u_h \|_\Omega$	$\| u_h \|_\Omega$	$P(u_h)$	$P(u)$
1	25	36	348.05	138.72	6.762		
	85		96.09	106.16	6.007		
	181		52.07	77.26	5.739		
2	85	144	173.45	114.33	5.719	1.25	0.27
	313		72.14	81.56	5.726	0.48	0.37
	685		37.41	50.29	5.699	0.49	0.61
3	313	576	86.93	99.26	5.701	1.00	0.20
	1201		39.91	57.21	5.701	0.66	0.51
	2655		16.56	26.89	5.696	1.18	0.90
4	1201	2304	44.28	79.96	5.702	0.97	0.31
	4705		16.66	33.10	5.696	1.26	0.79

	10513		4.43	10.59	5.695	1.90	1.34
5	4705	9216	22.70	55.38	5.699	0.96	0.53
	18625		5.74	14.27	5.695	1.54	1.21
	41761		0.79	2.68	5.695	2.48	1.98
6	18625	36864	11.50	32.16	5.696	0.98	0.78
	74113		1.66	4.60	5.695	1.79	1.63
	166465		0.11	0.46	5.695	2.81	2.56
7	74113	147456	5.77	16.87	5.695	0.99	0.93
	295681		0.43	1.25	5.695	1.95	1.88
8	295681	589824	2.89	8.55	5.695	1.00	0.98
	1181185		0.11	0.32	5.695	2.00	1.96
9	1181185	2359296	1.45	4.29	5.695	1.00	1.00

Тут M – крок згущення сітки, $card\,\Im_h$ – кількість елементів сітки $\Im_h$, $N(\Im_h)$ – кількість її вузлів, $P(u_h)$ та $P(u)$ – порядки швидкості збіжності АОП та істинної похибки, обчислені з використанням біжучої і попередньої сітки. Для кожного кроку M у першому рядку подано результати обчислень з кусково лінійними апроксимаціями, другому і третьому – квадратичними і кубічними відповідно (якщо такі виконувалися).

Подібні характеристики h-адаптивних наближень подано в табл. 2.

Таблиця 2. АОП і порядки збіжності h-адаптивних апроксимацій

M	$N(\Im_h)$	$card\,\Im_h$	$\| e_h \|_\Omega$	$\| u-u_h \|_\Omega$	$\| u_h \|_\Omega$	$P(u_h)$	$P(u)$
1	25	36	348.05	138.72	6.762		
			96.09	106.16	6.007		
			52.07	77.26	5.739		
3	85	144	173.45	114.33	5.719	1.69	0.61
	313	143	72.14	81.56	5.686	0.43	0.66
	649	136	37.41	50.29	5.699	0.82	1.19
5	310	570	86.93	99.26	5.701	1.22	0.41
	912	435	39.91	57.21	5.694	0.26	1.30
	1402	299	16.56	26.89	5.696	2.23	2.50
7	693	1308	44.27	79.97	5.697	1.62	0.71
	1763	848	16.66	33.10	5.695	1.45	2.29
	2575	552	4.43	10.59	5.695	5.91	4.14
9	1235	2344	22.70	55.38	5.696	2.62	1.30
	2958	1423	5.74	14.28	5.695	3.24	3.16
	4060	869	0.818	2.71	5.695	10.87	5.95

11	2152 5017	4083 2410	11.50 1.67	32.17 4.65	5.696 5.695	2.40 4.06	1.18 3.26
12	3157 6556	5917 3113	8.18 0.78	19.76 2.56	5.695 5.695	1.84 5.89	2.63 4.67
13	4743	9083	5.78	16.89	5.695	1.62	0.73
14	7584	14431	4.102	9.910	5.695	1.48	2.30
15	11918	23089	2.914	8.592	5.695	1.46	0.61
16	19161	36972	2.084	5.043	5.695	1.42	2.26
17	29344	57307	1.513	4.42	5.695	1.46	0.60
18	44161	85978	1.133	2.828	5.695	1.43	2.20
19	61177	119917	0.902	2.52	5.695	1.37	0.69

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A. A posteriori error estimator for diffusion-advection-reaction boundary value problems: piecewise linear approximation on triangles. J. Numer. Appl. Math. 2 (2011), 111-123.
2. Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A., Vovk O.V., A posteriori error estimator and h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems. Recent Advances in Computational Mechanics, London, Taylor & Francis Group. – 2014. – P. 329-337.
3. Ostapov O.Yu., Shynkarenko H.A., Vovk O.V., Computable two-sided a posteriori error estimates h-adaptive finite element. Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues, London , Taylor & Francis Group. – 2016. – P. 449-453.

УДК 519.6

ЗАСТОСУВАННЯ СУРОГАТНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПОШИРЕННЯ COVID-19

Михайло Щербатий, Юлія Стахів

Львівський Національний університет імені Івана Франка

mykhaylo.shcherbatyy@lnu.edu.ua, yuliia.stakhiv.pmp@lnu.edu.ua

Розглядається SEIRD модель поширення COVID-19, за допомогою якої отримується прогноз поширення коронавірусної інфекції, та будується сурогатна модель для задачі ідентифікації параметрів. На основі даних

моніторингу поширення коронавірусу в Україні приведені результати числових досліджень.

Математичне моделювання на основі системи звичайних диференціальних рівнянь може забезпечити ефективний механізм прогнозування динаміки різних інфекційних захворювань, включаючи COVID-19. В даній роботі розглядається наступна SEIRD модель поширення коронавірусного захворювання COVID-19 [1]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -a_e s(t)e(t) - a_i s(t)i(t) + gr(t) \\ \dot{e}(t) = a_e s(t)e(t) + a_i s(t)i(t) - ke(t) - re(t) \\ \dot{i}(t) = ke(t) - bi(t) - mi(t) \\ \dot{r}(t) = bi(t) + re(t) - gr(t) \\ \dot{d}(t) = mi(t) \end{cases}, \quad t \in (t_0, t_e]. \qquad (1)$$

Система рівнянь (1) доповнюється початковими умовами:

$$s(t_0) = s_0,\ e(t_0) = e_0,\ i(t_0) = i_0,\ r(t_0) = r_0,\ d(t_0) = d_0. \qquad (2)$$

Згідно моделі (1)-(2) все населення розглядуваного регіону ділиться на 5 категорій: $s(t)$ - частка населення, яка сприйнятлива до захворювання; $e(t)$ - частка інфікованого населення без симптомів хвороби; $i(t)$ - частка населення, яка хворіє; $r(t)$ - частка населення, яка одужала; $d(t)$ - частка населення, яка померла від захворювання на COVID-19. Частка населення відповідної категорії обчислюється шляхом ділення кількості населення відповідної категорії на загальну кількість населення даного регіону.

Зауважимо, що відповідні частки задовольняють умову:

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) + d(t) = 1.$$

В таблиці 1 приведено опис параметрів моделі, їхні значення та діапазон зміни тих параметрів моделі, які підлягають ідентифікації на основі даних спостережень.

Таблиця 1. Параметри моделі (1)-(2).

Пара-метр	Опис параметра	Значення, Діапазон зміни
a_e	Швидкість зараження за одиницю часу сприятливої до зараження людини від інфікованої людини без симптомів зараження.	0.25, [0.2,0.3]

a_i	Швидкість зараження за одиницю часу сприятливої до зараження людини від хворої людини.	0.005, [0,0.01]
g	Швидкість повернення з категорії людей, яка видужала, в категорію сприятливих до захворювання людей ($g = 0$ - стійкий імунітет, $g > 0$ - ймовірність повторного зараження).	0.001
k	Швидкість появи симптомів у інфікованої людини без симптомів зараження, що призводить до переходу даної людини в категорію, яка хворіє.	0.05, [0,0.1]
r	Швидкість одужання інфікованих людей без проявів симптомів зараження.	0.08, [0.03,0.13]
b	Швидкість одужання хворих людей.	0.01 [0.05,0.2]
m	Рівень смертності хворих людей.	0.02

Ключовою проблемою у використання математичних моделей для прогнозування динаміки інфекційних захворювань є наявність числових значень параметрів моделі. Деякі параметри моделі можна оцінити за клінічними даними. Інші параметри (або їх комбінації) оцінюються відповідно до даних спостережень. Варто зазначити, що різні комбінації параметрів моделі можуть дати однакову точність прогнозування.

В даній роботі здійснювались оцінка наступних параметрів моделі $b = [\alpha_e, \alpha_i, k, \rho, \beta, e_0]^T$ на основі відомих з моніторингу значень частки хворих i_j та померлих d_j людей в моменти часу (дні) $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Оцінка параметрів моделі зводиться до задачі мінімізації квадратичного функціоналу

$$\psi(b) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(i(t_j,b) - i_j)^2 + (d(t_j,b) - d_j)^2\right) \tag{3}$$

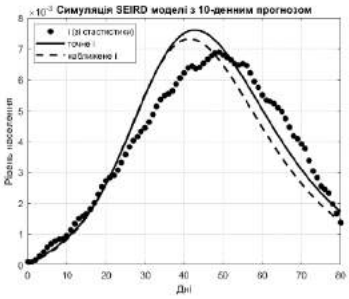
на множині параметрів $B = \{b : b \in R^5, b^- \le b \le b^+\}$. Для параметру e_0 задано наступні межі: $e_0 \in [0.01, 0.02]$. В (3): $i(t_j,b),\ d(t_j,b)$ - частка хворих та померлих людей в момент часу t_j, які отримані в результаті розв’язування задачі (1)-(2) для значень параметрів моделі b.

Розв’язання задачі ідентифікації параметрів (3) призводить до багатократного розв’язування задачі Коші (1)-(2) для системи звичайних диференціальних рівнянь, що вимагає значних обчислювальних затрат. В роботі запропоновано для обчислення функціоналу (3) використовувати спрощену (сурогатну) модель з використанням кубічних радіальних базисних функцій [2].

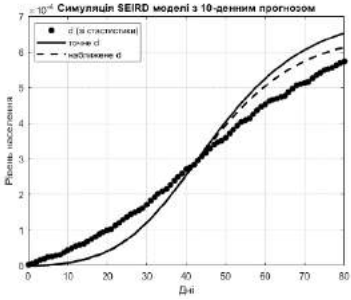
При розв’язуванні задачі ідентифікації параметрів моделі використано статистичні дані про кількість хворих та померлих від коронавірусу людей в Україні з 01.03.2021 по 10.05.2021 [3], $t_j = 0,1,...,70$. На основі отриманих значень параметрів здійснено короткостроковий прогноз динаміки протікання хвороби на наступні 10 днів з 11.05.2021 по 20.05.2021, $t_j = 71,...,80$.

Для побудови сурогатної моделі навчальна вибірка складалась із масиву параметрів b розмірністю 70, згенерованого за допомогою латинського гіперкуба. У випадку точної моделі отримано наступні значення параметрів $b = [0.2517, 0.0108, 0.051, 0.079, 0.1347, 0.01]^T$. Для сурогатної моделі отримано такі значення параметрів $b = [0.2567, 0.0056, 0.045, 0.084, 0.1, 0.012]^T$.

На мал. 1-3 точковими лініями зображено частки населення, отримані на основі щоденного моніторингу за кількістю людей в Україні, які захворіли, померли та вилікувались з 01.03.2021 по 20.05.2021. Відповідні частки населення, які отримано в результаті чисельного моделювання з допомогою SEIRD моделі з використанням значень параметрів, які знайдені з допомогою точної та сурогатної моделей, зображено на даних малюнках суцільною та пунктирною лініями відповідно. З даних малюнків видно, що обидві набори параметрів дають практично однакову точність короткотермінових прогнозів динаміки захворювання.

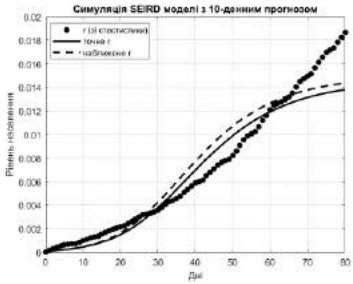


Мал. 1. Динаміка інфікованої частки



Мал. 2. Динаміка частки населення,

населення, яка хворіє. яка померла.



Мал. 3. Динаміка частки населення,
яка видужала.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Sameni R. Mathematical Modeling of Epidemic Diseases; A Case Study of the COVID-19 Coronavirus / R. Sameni // Grenoble, France, 2020. – 19 p. - https://arxiv.org/abs/2003.11371.
2. Forrester A. I. J. Engineering Design via Surrogate Modelling A Practical Guide / A.I.J. Forrester, A. Sóbester, A. J. Keane // University of Southampton, UK, 2008. – 238 p.
3. https://covid19.rnbo.gov.ua/

УДК 004.422.639, 004.432

ВИКОРИСТАННЯ ШАБЛОНІВ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ У ПРОГРАМАХ МОВОЮ С++

Світлана Ярошко, Сергій Ярошко

Львівський національний університет імені Івана Франка

serhiy.yaroshko@lnu.edu.ua

Узагальнене програмування мовою С++ використовує шаблон класу для опису нового типу, незалежного від конкретного типу окремих його складових. У складніших випадках конкретний тип може характеризувати низка властивостей. Їх описують за допомогою спеціального шаблону – характеристики типу. У доповіді описано загальну техніку

побудови шаблонів характеристик та наведено конкретні приклади їхнього використання для оголошення узагальнених типів.

Стандартні шаблони працюють не завжди

Для зображення комплексних чисел мова C++ надає узагальнений тип complex<T>, де T – довільний (числовий) тип. За правильну конкретизацію типу відповідає програміст. Замість T він мав би використовувати один з дійсних типів, наприклад, double. Проте, синтаксис мови дозволяє підставляти у шаблон справді довільний тип. Ви можете використовувати для обчислень complex<int>, не забуваючи лише, що при діленні втрачатиметься дробова частина результату. Оголошення complex<string> a, b; також не викличе помилки етапу компіляції, і, навіть, вираз a + b з такими "комплексними" значеннями буде обчислено, оскільки для рядків оператор + визначено.

Така реалізація шаблону complex<T> не сприяє надійності програм. Звичайно, тип комплексного числа не надто складний, і програміст може успішно використовувати стандартний шаблон, проте, хотілося б мати засіб, який би допомагав виявляти невідповідні конкретизації узагальненого типу ще на етапі компіляції програм. На нашу думку, таким засобом може бути клас характеристик параметра шаблона типу. Наведемо загальну схему побудови характеристик і конкретні приклади її використання.

Статичний поліморфізм шаблонів характеристик

Нехай кожен тип даних T деякої множини типів характеризується кількома властивостями Prop1, Prop2, …, PropN. Такими властивостями можуть бути деякі константи, типи чи функції. Як оголосити шаблон функції чи класу, параметризований типом T так, щоб він враховував ці властивості? Можна спробувати зробити їх параметрами шаблона. Якщо з типом пов’язано дві-три властивості, то такий підхід працюватиме. Наведемо фрагмент програми:

```
template <typename T, typename Prop1, typename Prop2>
class Example
{   // using Prop1 & Prop2
 ... };
```

Проте, не дуже зручно і дуже ненадійно, адже в оголошенні тип T ніяк не пов’язано з Prop1 та Prop2.

Щоб зробити оголошення зручним і надійним, варто всі характеристики типу T зібрати в одному місці – в окремому класі. Клас, що містить оголошення пов’язаних з типом T констант, типів, функцій, називають класом характеристик цього типу [1]. Клас характеристик допомагає налаштувати шаблони на правильну взаємодію з типом-параметром. Для побудови характеристик використовують механізм спеціалізації шаблонів.

```
// основа ієрархії характеристик – порожній шаблон
template <typename Type> class TypeTraits;
// шаблон класу, що використовує характеристики
```

```
template <typename T, typename Traits = TypeTraits<T>>
class Example { ... };
```

Завдяки використанню значення параметра шаблону за промовчанням, при використанні Example можна вказувати тільки один тип.

Щоб зробити деякий конкретний тип T1 придатним до використання в шаблоні Example, потрібно оголосити його характеристику як явну спеціалізацію шаблона TypeTraits.

```
// оголошення типу T1
class T1 { ... };
// характеристика типу спеціалізує загальний шаблон
template <> class TypeTraits<T1>
{   // definition of Prop1;
    // definition of Prop2;
};
```

Тепер можна зробити оголошення

```
Example<T1> instance;
```

Компілятор сам знайде та використає відповідну спеціалізацію TypeTraits. Якщо для типу T2 характеристику не визначено, то оголошення Example<T2> викличе помилку етапу компіляції.

Шаблон класу раціональних чисел

Раціональне число можна зобразити парою цілих чисел. Залежно від потрібної кількості десяткових цифр у чисельнику і знаменнику такого числа, можна використовувати різні цілі типи: short int, int, long long int, класи "довгих цілих". Використання дійсних чи нечислових типів не має сенсу. Вберегти шаблон від неправильної конкретизації можна за допомогою характеристик. Наприклад, конструктор раціонального числа міг би використовувати стандартні значення, які визначено в характеристиках. Для всіх допустимих класів такі характеристики треба визначити, а всі інші типи спричинятимуть помилку під час компіляції.

```
template<typename TNum> class NumTraits;
// наведено приклади характеристик двох класів
template<> class NumTraits<int>
{ public:
    const int NumTag = 4;
    static const int numerator = 0;
    static const int denominator = 1;
};
template<> class NumTraits<long long>
{ public:
    const int NumTag = 8;
    static const long long numerator = 0LL;
    static const long long denominator = 1LL;
};
// раціональне число описує шаблон структури
```

```
template<typename TNum, typename Traits = NumTraits<TNum>>
struct Frac
{   TNum num; TNum den;
    Frac():num(Traits::numerator),den(Traits::denominator){}
    static int FracSize(){ return NumTraits<TNum>::NumTag 2; }
    // ...
};
// усі оператори задано зовнішніми функціями
template<typename TNum>
Frac<TNum> operator+(Frac<TNum> a, Frac<TNum> b)
{ return Frac<TNum>(a.num*b.den + b.num*a.den, a.den*b.den); }
// ...
```

Повне оголошення шаблону класу можна знайти в [2].

Рядок, нечутливий до регістра

За допомогою зміни класу характеристик символів можна легко змінити поведінку стандартного рядка бібліотеки STL. Справа в тому, що звичний нам тип string насправді є спеціалізацією загального шаблона basic_string для типу char. Загальний шаблон описує алгоритми опрацювання рядків, незалежні від множини символів. Логіку порівняння символів відокремлено від алгоритмів. Її описують класи характеристик char_traits. Така архітектура робить шаблон basic_string готовим до використання нових типів літер. Достатньо описати їхні характеристики, і ви отримаєте рядок хоч би й 8-байтових символів (таких поки що нема). Тим часом ми визначимо новий клас характеристик для стандартного типу char і отримаємо новий тип рядка, що не робить різниці між малими і великими латинськими літерами. Треба сказати, що клас характеристик символів досить об’ємний, тому ми не будемо писати його весь, а застосуємо наслідування і перевизначимо тільки окремі методи.

```
struct ignore_char_traits: char_traits<char>
{   static bool eq(char a, char b)
    {   return toupper(a) == toupper(b);  }
    static bool ne(char a, char b)
    {   return !eq(a,b);  }
    static bool lt(char a, char b)
    {   return toupper(a) < toupper(b);  }
    static int compare(const char * str1, const char * str2,
      size_t n) { // ... }
    static const char * find(const char * str, size_t n,
      char c) { // ... }
};
```

Тепер новий тип рядка можна оголосити як нову спеціалізацію загального шаблона. Створити його екземпляри можна так само як для стандартного типу.

```
typedef basic_string<char, ignore_char_traits> ignore_string;
```

```
ignore_string first  = "Ukraine";
ignore_string second = "UKRAINE";
// first == second
```

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Эккель Б. Философия C++. Практическое программирование / Б. Эккель, Ч. Эллисон // СПб: Питер, 2004. – 608 С.
2. Ярошко С. Fraction [Електронний ресурс] / Сергій Ярошко // GitHub, 2021.– Режим доступу: https://github.com/LNUitTutor/Fraction

ЗМІСТ

ДО СТОРІЧЧЯ ПРОФЕСОРА НАУМА ПЕТРОВИЧА ФЛЕЙШМАНА 3

ІЗ СПОГАДІВ ПРО ПРОФЕСОРА НАУМА ПЕТРОВИЧА ФЛЕЙШМАНА 7

РОЗДУМИ ПРО ВЧЕНОГО-ПЕДАГОГА ІВАНА ДМИТРОВИЧА КВІТА ДО 100-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ 15

МИХАЙЛУ ЯРОСЛАВОВИЧУ БАРТІШУ – 80 17

МИКОЛІ МИКОЛАЙОВИЧУ ПРИТУЛІ – 75 19

ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА ЯРЕМИ ГРИГОРОВИЧА САВУЛИ 21

MULTISTEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS 24

Ioannis K. Argyros, Stepan Shakhno, Halyna Yarmola

THE GENERATOR TO CONTROL PROBLEM FOR THE TRANSFER PROCESS WITH SEMI- MARKOV SWITCHINGS 26

Yaroslav Chabanyuk , Anatoli Nikitin, Uliana Khimka

APPROXIMATION OF A SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DELAY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS 30

I. Cherevko, A. Dorosh, I. Haiuk, L. Piddubna

MODELLING OF DIAGNOSTICS AND FORECASTS OF SPREAD COVID-19 34

Ivan Dyyak, Vitaliy Horlatch, Vitalii Nastosiak, Mazen Shahin

NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND IN POTENTIAL THEORY 38

Ya. Garasym

USING MACHINE LEARNING (ML) TO DETECT THREAT ANOMALIES FOR REDUCING FALSE-POSITIVES ON THE DAILY CYBERSECURITY OPERATION CENTRE ROUTINE . 42

Roman Karpiuk, Petro Venherskyi

EXTENSION OF THE CLASSIC METHOD OF LIE-ALGEBRAIC DISCRETE APPROXIMATIONS FOR THE WAVE EQUATION..... 47

Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula

APPLICATION OF FEM FOR MODELING OF COMPATIBLE MOVEMENT OF SURFACE AND RIVER FLOWS 50

Petro Venherskyi, Yaryna Kokovska

ВИЗНАЧЕННЯ ЦІЛЕЙ ТРЕНУВАННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ БЕЗ ЗМІН ЦІЛЬОВОЇ ФУКНЦІЇ ВТРАТ 54

Микола Баранов , Юрій Щербина

ДЕЯКІ МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ З НАДКВАДРАТИЧНОЮ ЗБІЖНІСТЮ 57

Михайло Бартіш, Ольга Ковальчук, Наталя Огородник

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРІОРИТЕТІВ ВДОСКОНАЛЕННЯ РОБОТИ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ 59

О. Ю. Бенько, О. П. Гнатишин

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ 63

Ірина Бернакевич, Ірина Козій

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ЗАЛЕЖНІСТЮ ЧАСТОТ ВІД ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ 65

Я.Й. Бігун, М.О. Пастула

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ ДИНАМІКИ ІНФЕКЦІЙНОГО ЗАХВОРЮВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВИХ ЗБУРЕНЬ ТА ІМПУЛЬСНИХ ВПЛИВІВ..... 68

Андрій Бомба, Сергій Барановський, Сергій Ляшко

ПРИМЕЖОВІ ПОПРАВКИ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ХАРАКТЕРИСТИК P-I-N-СТРУКТУР 71

Бомба А.Я., Мороз І.П.

ПРО МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ 73

Ігор Борачок , Роман Хапко

НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ ПІДХОДИ У ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... 77

Петро Венгерський , Валерій Трушевський

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА..... 80

А.Р. Глова, С.В. Літинський, Ю.А. Музичук, А.О. Музичук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИСКРЕТНОЇ ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ПОШИРЕННЯ АКУСТОЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРАХ..... 84

Олександр Григоренко, Ігор Лоза,Світлана Сперкач

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОСТІННИХ ОБОЛОНОК 88

Олександр Григоренко, Максим Борисенко,
Олена Бойчук,Тетяна Пінчук

УЗАГАЛЬНЕНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ: ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ 91

Леонід Гуляницький 91

ПРО НАПІВГРУПУ, ПОРОДЖЕНУ РОЗШИРЕНОЮ БІЦИКЛІЧНОЮ НАПІВГРУПОЮ ТА ω-ЗАМКНЕНОЮ СІМ'ЄЮ..... 95

Олег Гутік, Інна Позднякова 95

МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ МАНІПУЛЯЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ..... 97

Мирослав Демидюк

ДЕНДРОГРАМИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ РЕГІОНІВ УКРАЇНИ ЗА РІВНЕМ РОЗВИТКУ МАЛОГО БІЗНЕСУ 101

Леся Добуляк, Світлана Костенко

ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕСУРСНИХ ВИТРАТ В БАГАТОЕТАПНОМУ ПРОКАТНОМУ ВИРОБНИЦТВІ 104

Тимур Желдак, Лариса Коряшкіна, Дмитро Сердюк

ГЕНЕРУВАННЯ МУЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ... 108

Юрій Калічун , Надія Колос

ПОРІВНЯННЯ Н-АДАПТИВНИХ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ 112

Галина Квасниця, Павло Малашняк, Георгій Шинкаренко

ІСНУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ЦИКЛІВ У ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ 116

І.І. Клевчук, М.В. Гритчук

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НАЙБІЛЬШОЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ МНОЖИНИ ВЕРШИН ГРАФУ НА КВАНТОВО-КЛАСИЧНИХ ХМАРНИХ СЕРВІСАХ..... 120

Вячеслав Корольов , Олександр Ходзінський

КОНЦЕПЦІЯ ЕКОЛОГІЧНО БЕЗПЕЧНОЇ ДОРОГИ “SMARTWAY” 124

Андрій Мельничин, Андрій Веліховський, Іванків Олег

СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ МАТРИЦЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З НЕВИЗНАЧЕНОСТЯМИ 127

Наконечний О.Г., Зінько П.М., Зінько Т.П., Кудін Г.І.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТРИЧНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ 131

А.М. Недашковська, А.С. Чернікова

РОЗРОБКА КРИПТОГРАФІЧНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЗАХИСТУ БЕЗПРОВІДНИХ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ РОЇВ БПЛА 133

Максим Огурцов

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ 137

Анатолій Пашко

ПРО ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ 139

Олександр Поліщук, Михайло Яджак

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ КРЕДИТНИХ КОШТІВ БАНКУ НА ФІНАНСУВАННЯ ПРОЕКТІВ 143

Прядко О.Я., Цегелик Г.Г.

ПОБУДОВА РЕКОМЕНДАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАШИННОГО НАВЧАННЯ 145

Богдан Романюк , Ольга Пелюшкевич

НЕЧІТКА ШКАЛА СХОЖОСТІ ТА УМОВИ ЇЇ ІСНУВАННЯ 148

Ірина Рясна

ДОСТАТНЯ УМОВА ЗБІГУ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА У ВИПАДКУ, КОЛИ КОВАРІАЦІЙНА МАТРИЦЯ ВІДХИЛЕНЬ Є МАТРИЦЕЮ ТЕПЛІЦА 153

М.Ю. Савкіна

АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ 155

Володимир Семенов, Сергій Денисов

ПОБУДОВА ДВОСТОРОННЬОГО АНАЛОГУ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВИХ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ 158

П.С. Сеньо

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ РІВНЯНЬ ІНТЕГРОВНОГО ТИПУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ 161

Валерій Самойленко, Юлія Самойленко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ 165

Ганна Стаднікова, Поліна Артюх, Максим Сидоров

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК 169

Євген Сторожук , Володимир Максимюк, Іван Чернишенко

АЛГОРИТМ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДІФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ 173

Ігор Черевко, Ірина Тузик, Світлана Іліка

ОПТИМАЛЬНА СХЕМА БЛОКОВОГО ПОШУКУ У ВИПАДКУ ЗАКОНУ ЗІПФА РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗВЕРТАННЯ ДО ЗАПИСІВ ФАЙЛІВ БАЗ ДАНИХ 177

Леся Фундак, Григорій Цегелик

ПРО МЕТОД З АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ 181

Степан Шахно, Михайло Гавдяк, Галина Ярмола

ВИСОКОТОЧНІ Н-АДАПТИВНІ МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ АПРОКСИМАЦІЯМИ НА ТРИКУТНИКАХ 184

Георгій Шинкаренко, Олександр Вовк, Василь Танчинець

ЗАСТОСУВАННЯ СУРОГАТНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПОШИРЕННЯ COVID-19 188

Михайло Щербатий, Юлія Стахів

ВИКОРИСТАННЯ ШАБЛОНІВ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ У ПРОГРАМАХ МОВОЮ С++ 192

Світлана Ярошко, Сергій Ярошко

XXVI Міжнародна наукова конференція

Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук

APAMCS – 2021

Збірник наукових праць

Матеріали доповідей надруковано в авторській редакції без внесення суттєвих змін оргкомітетом

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,9.
Тираж 100 прим. Зам. 23/09.

Видавець:
Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000