

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Затверджено

на засіданні
кафедри обчислювальної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29 серпня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Роман ХАПКО

Силабус з навчальної дисципліни
«Чисельні методи»,
що викладається в межах ОПІ Прикладна математика
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
зі спеціальності 113 Прикладна математика

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Чисельні методи
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – математика та статистика 113 – прикладна математика
Викладачі дисципліни	Хапко Роман Степанович, завідувач кафедри обчислювальної математики, професор; Ярмола Галина Петрівна, доцент кафедри обчислювальної математики; Стягар Андрій Орестович, доцент кафедри прикладної математики
Контактна інформація викладачів	roman.chapko@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/chapko ; halyna.yarmola@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/yarmola ; andriy.styagar@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/stiahar-a-o Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/chyselni-metody-prykladna-matematyka
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Чисельні методи» є нормативною дисципліною з спеціальності 113 – прикладна математика для освітньої програми Прикладна математика, яка викладається в 5-му семестрі (4 кредити ECTS) і 6-му семестрі (4 кредити ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Чисельні методи є класичним курсом для математичних спеціальностей та спеціальностей пов'язаних з комп'ютерними науками. В ньому вдало поєднуються як глибоко теоретичні результати, так і алгоритмічні аспекти. Курс розроблено таким чином, щоб ознайомити студентів з ідеями побудови методів, принципами обґрунтування їх збіжності та аналізу похибки, нюансами алгоритмів, що реалізують ці методи.
Мета та цілі дисципліни	Метою вивчення нормативної дисципліни «Чисельні методи» є освоєння студентами теоретичних і практичних основ побудови і використання чисельних методів та принципів розробки програмного забезпечення для їх реалізації.
Література для вивчення дисципліни	Основна література 1. Kress R. Numerical analysis. – New York: Springer, 1998. 2. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. – New York, Springer-Verlag, 2000. 3. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995. – Ч.1, Ч.2. 4. Цегелик Г.Г. Чисельні методи: Підручник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с. 5. Sauer T. Numerical Analysis. Pearson, 2012. – 622p. 6. Костюшко І.А., Любашенко Н.Д., Третиник В.В. Методи обчислень: підручник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во

	<p>«Політехніка», 2021. – 243 с.</p> <p>Додаткова література</p> <p>7. Шахно С.М., Дудикевич А.Т., Левицька С.М. Практикум з чисельних методів. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 434 с.</p>
Обсяг курсу	<p>Загальний обсяг:</p> <p>5 семестр, 120 годин (аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекцій та 32 години лабораторних робіт; самостійної роботи: 56 год).</p> <p>6 семестр, 120 годин (аудиторних занять: 96 год., з них 48 год. лекцій та 48 години лабораторних робіт; самостійної роботи: 24 год).</p>
Очікувані результати навчання	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>Знати основні чисельні методи:</p> <ul style="list-style-type: none"> • інтерполяції; • середньо-квадратичного наближення; • диференціювання; • інтегрування; • розв'язування нелінійних рівнянь і систем; • розв'язування задач Коші для ЗДР; • розв'язування крайових задач для ЗДР; • розв'язування еліптичних задач; • розв'язування нестационарних задач. <p>Вміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> - застосовувати вивчені методи до конкретних прикладних задач; - здійснювати програмну реалізацію вивчених алгоритмів. <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <p>ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.</p> <p>Фахові компетентності:</p> <p>ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.</p> <p>ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.</p> <p>ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень</p> <p>ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.</p> <p>ФК19. Здатність аналізувати інтегральні рівняння та методи їх розв'язування.</p> <p>Програмні результати навчання:</p> <p>РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.</p> <p>РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.</p> <p>РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний</p>

	<p>метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.</p> <p>PH05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.</p> <p>PH06. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності їх розв'язку.</p> <p>PH07. Вміти проводити практичні дослідження та знаходити розв'язок некоректних задач.</p> <p>PH09. Будувати ефективні щодо точності обчислень, стійкості, швидкодії та витрат системних ресурсів алгоритми для чисельного дослідження математичних моделей та розв'язання практичних задач.</p> <p>PH21. Розробляти програмне забезпечення для чисельного розв'язування задач, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь.</p> <p>PH22. Аналізувати та чисельно розв'язувати інтегральні рівняння.</p>				
Ключові слова	Інтерполяція, елемент найкращого наближення, квадратурні формули, метод Ньютона, одно- та багатокрокові методи для задач Коші, метод стрільби, різницевий метод, проєкційно-варіаційні методи для ЗДР, метод сіток для еліптичних задач, методи Рунге для нестационарних задач.				
Формат курсу	Очний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.				
Теми	Подано нижче у таблиці Схема курсу «Чисельні методи»				
Підсумковий контроль, форма	Іспити у кінці кожного семестру				
Пререквізити	<p>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з</p> <ul style="list-style-type: none"> - Математичного аналізу; - Алгебри; - Диференціальних рівнянь; - Функціонального аналізу - Програмування; 				
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції Лабораторні роботи				
Необхідне обладнання	Комп'ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі.				
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.				
	Оцінка за шкалою ECTS		Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
				Екзамен, диференційований залік	
	A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5
B	Дуже добре	81- 89	Добре	4	

C	Добре	71 -80			зараховано
D	Задовільно	61 - 70	Задовільно	3	
E	Достатньо	51- 60			
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано

Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- лабораторні роботи: максимальна кількість балів 30 (семестр 5) / 24 (семестр 6)
- контрольна робота: максимальна кількість балів 6 (семестр 6)
- колоквіум: максимальна кількість балів 20
- екзамен: максимальна кількість балів 50

Лабораторні роботи.

Кожен студент отримує задачу, для розв'язування якої треба використати один із розглянутих на лекціях чисельних методів. Алгоритм необхідно запрограмувати на мові високого рівня, відлагодити програму і отримати результати тестових прикладів (6 балів).

Критерії оцінювання завдання:

6 балів - студент повністю виконав умови завдання, алгоритм реалізовано правильно, відповідає на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання, проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів, пропонує інші підходи до вирішення поставленого завдання;

4-5 балів - студент повністю виконав умови завдання, на деякі запитання, алгоритм реалізовано правильно, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями;

3-4 балів - студент виконав завдання з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач, на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з неточностями;

2-3 бали - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач, на запитання відповідає з помилками, проводить аналіз отриманих результатів з помилками;

1-2 бали - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які самостійно не може виправити, переважно не відповідає на запитання;

0 балів - студент не виконав завдання.

Контрольна робота. Проводиться в кінці семестру під час лабораторних занять (одне завдання на 6 балів).

Колоквіум. Проводиться у письмовій формі у середині семестру (4 завдання по 5 балів кожне).

Екзамен. Проводиться у письмовій формі (5 завдань по 10 балів кожне). До здачі допускаються студенти, які отримали більше 10балів за роботу протягом семестру.

Критерії оцінювання теоретичних/практичних завдань (колоквіум, екзамен):

Колоквіум	Екзамен	Критерії оцінювання
-----------	---------	---------------------

(Контрольна робота) (6 балів)	(10 балів)	
6 балів	10 балів	студент правильно виконав завдання; вільно володіє навчальним матеріалом, чітко розкриває зміст теоретичних питань;
5-4 бали	7-9 балів	студент виконав завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв'язування знає і вміє його застосовувати; добре володіє навчальним матеріалом, розкриває повністю зміст теоретичних питань з незначними неточностями;
3 бали	4-6 балів	студент виконав завдання з помилками, алгоритм виконання, в основному, знає; володіє навчальним матеріалом на достатньому рівні, розкриває зміст теоретичних питань невичерпно та з неточностями, виникають труднощі під час аналізу матеріалу;
1-2 бали	1-3 бали	студент виконав лише частину завдання або повністю, але зі значними помилками; частково знає теоретичний матеріал (основні поняття, твердження, нескладні алгоритми), розкриває зміст питань зі значними помилками;
0 балів		студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання.

Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.

Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при виконанні

	індивідуальних завдань, контрольної роботи, колоквиуму та бали за екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторні заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.
Питання до екзамену.	Інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона. Вигляд залишкового члена. Тригонометричне інтерполювання. Інтерполяція сплайнами. Побудова елемента найкращого наближення у евклідовому просторі. Квадратурні формули Ньютона-Котеса. Квадратури Гаусса. Квадратури Ромберга. Метод Ньютона для нелінійних систем. Методи Ейлера і Хойна для з-чі Коші для ЗДР. Методи Рунге-Кутта для з-чі Коші для ЗДР. Методи Адамса для з-чі Коші для ЗДР. Метод стрільби для крайових задач. Різницеві методи для крайових задач. Проекційно-варіаційні методи. Метод Рітца. Метод сіток для рівняння Пуассона. Метод Гальоркіна для еліптичних задач. Методи Роте для нестационарних задач. Метод сіток для нестационарних задач.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу «Чисельні методи»

А. 5 семестр

Модуль 1. Наближення функцій				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Предмет чисельних методів. Інтерполяція. Постановка задачі. Існування і єдиність розв'язку. [1,2,3,6].	2	-	4
2	Інтерполяційний поліном у формах Лагранжа і Ньютона. Вигляд залишкового члена. Чебишовські вузли. Інтерполяційний поліном Ерміта [1].	2	4	4
3	Тригонометричні інтерполяційні поліноми. Випадок рівновіддалених вузлів. Дискретне перетворення Фур'є [1,5].	2	4	4
4	Інтерполяція сплайнами. Постановка задачі. Існування і єдиність розв'язку. В-сплайни [1,5].	2	4	4
5	Кусково-поліноміальна інтерполяція у двовимірному випадку.	2	-	4

6	Елемент найкращого наближення. Постановка задачі. Існування і єдиність. Ортогональні	2	2	4
7	Середньо-квадратичне наближення. Неперервний і дискретний випадки. Наближене розв'язування перевизначених систем лінійних рівнянь. Приклади використання ортогональних поліномів	4	2	4
8	Найкраще рівномірне наближення. Чисельне диференціювання [1,5].	2	2	2
9	Колоквіум	-	2	6

Модуль 2. Чисельне інтегрування.				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Квадратурні формули інтерполяційного типу. Алгебраїчна точність квадратур. Квадратури Ньютона-Котеса [1,2,5].	2	2	3
2	Квадратурні формули середніх прямокутників, трапецій і Сімпсона [1,2].	2	2	3
3	Квадратурна формула Гаусса [1,2].	2	4	3
4	Розвинення Ейлера-Маклорена. Квадратурні формули для періодичних функцій [1].	2	2	3
5	Квадратури Ромберга [1,2].	2	-	4
6	Квадратурні формули для інтегралів з особливостями [1].	2	2	2
7	Випадок багатомірних інтегралів. Метод Монте-Карло [2].	2	-	2
Усього:		32 год	32 год	56 год

Теми лабораторних робіт

Лабораторна робота №1. Інтерполяція алгебраїчними поліномами.

- Теоретичні відомості: постановка задачі; вигляд інтерполяційного полінома у формах Лагранжа і Ньютона.
- Алгоритм обчислення поліномів Лагранжа і Ньютона (окремо у вигляді блок-схеми).
- Написати дві процедури для обчислення інтерполяційних поліномів Лагранжа і Ньютона. Розглянути випадки рівновіддалених вузлів та вузлів Чебишева.

Лабораторна робота №2. Інтерполяція тригонометричними поліномами.

- Теоретичні відомості: постановка задачі, тригонометричний інтерполяційний поліном у формі Лагранжа; випадок рівновіддалених вузлів.
- Алгоритм обчислення (блок-схема).
- Написати дві процедури для обчислення полінома Лагранжа і для випадку рівновіддалених вузлів.

Лабораторна робота №3. Інтерполяція сплайнами.

- Теоретичні відомості: постановка задачі; лінійні і кубічні В-сплайни.
- Алгоритм обчислення (блок-схема).
- Написати дві процедури для побудови лінійних і кубічних інтерполяційних сплайнів.

Лабораторна робота №4. Середньо-квадратичне наближення.

- Теоретичні відомості: постановка задачі; дискретне і неперервне середньо-квадратичне наближення; використання ортогональних поліномів.
- Алгоритм обчислення дискретного середньоквадратичного наближення у вигляді полінома заданого степеня (блок-схема).
- Написати процедуру обчислення дискретного середньо-квадратичного наближення у вигляді полінома заданого степеня.

Лабораторна робота №5. Квадратури Ньютона-Котеса та Гаусса.

- Теоретичні відомості: ідея побудови; ф-ли середніх прямокутників, трапецій і Сімпсона; складені квадратури; квадратури Гаусса; оцінки похибок.
- Алгоритм обчислення із заданою точністю (блок-схема).
- Написати три процедури для обчислення інтегралів із заданою точністю за формулами середніх прямокутників, трапецій, Сімпсона і Гаусса.

Б. 6 Семестр

Модуль 3. Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь та систем				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь. Геометричні міркування. Метод Ньютона [1,2,6]	2	2	-
2	Метод простої ітерації. Збіжність [1,2,5].	2	2	-
3	Чисельне розв'язування систем нелінійних рівнянь. Похідна Фреше. Методи Ньютона і простої ітерації [1,2,5].	2	2	2

Модуль 4. Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Постановка задачі та її коректність. Методи Пікара і рядів Тейлора [1].	2	2	-
2	Однокрокові методи (м-ди Ейлера і Рунге-Кутта). Апроксимаційність, стійкість і збіжність однокрокових методів. Оцінка похибки [1,2].	6	4	2

3	Багатокрокові методи (м-ди Адамса-Мултона і Адамса-Башфорта). Апроксимаційність, стійкість і збіжність багатокрокових методів. Оцінка похибки [1,2]	4	4	2
4	Чисельне розв'язування жорстких задач. Метод Гіра. Методи предиктор-коректор [2].	2	2	-

Модуль 4. Чисельне розв'язування крайових задач для ЗДР

№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Методи зведення до задач Коші (м-д стрільби) [1,2].	2	2	2
2	Метод скінченних різниць. Апроксимаційність, стійкість і збіжність. Оцінка похибки [2,3].	4	4	2
3	Варіаційні методи. Еквівалентність диференціальної і варіаційної задач. Метод Рітца і його збіжність. Метод найменших квадратів [2,3].	4	4	2
4	Проекційні методи. Методи зважених нев'язок (поточкова колокація, колокація по під-областях, методи Гальоркіна і моментів). М-д скінченних елементів. Аналіз збіжності і похибки [2,3].	4	4	2
5	Колоквіум		2	

Модуль 5. Чисельне розв'язування крайових задач для рівнянь у частинних похідних

№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Крайові задачі для рівняння Лапласа. Метод сіток. Збіжність і оцінка похибки [2,4].	4	4	4
2	Варіаційні та проекційні методи. Метод скінченних елементів [2].	4	4	4
3	Чисельне розв'язування нестационарних задач. Початково-крайові задачі для параболічних і гіперболічних рівнянь. Методи Рунге [2].	4	4	2
4	Явні і неявні схеми методу сіток. Стійкість і збіжність [2,3,4].	2	2	-

Усього:	48 год	48 год	24 год
----------------	--------	--------	--------

Теми лабораторних робіт

Лабораторна робота №1. Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь та систем:

- відокремлення коренів (аналітичний метод, метод табуляції); методи простих ітерацій, дотичних, хорд, січних.
- метод Ньютона для розв'язування нелінійних систем. Алгоритми програми.
- Програми: методи розв'язування одного нелінійного рівняння; метод Ньютона і січних для розв'язування нелінійних систем з двома рівняннями.

Лабораторна робота №2. Однокрокові методи розв'язування задачі Коші:

- метод Ейлера, предиктор-коректор (м-д Хойна), Рунге-Кутта для задач Коші для ДР 1-го порядку та задач Коші для систем ДР 1-го порядку; для задач Коші для ДР n-го порядку.
- Алгоритми програм.
- Програми: метод Ейлера або предиктор-коректор (м-д Хойна) для задачі Коші для ДР 1-го порядку та задачі Коші для системи ДР 1-го порядку; методи Рунге-Кутта 2-4 порядку для задачі Коші та системи.

Лабораторна робота №3. Багатокрокові методи розв'язування задачі Коші:

- Різницеві рівняння.
- Багатокрокові методи, способи задання стартових значень.
- Алгоритм програми.
- Програма: неявний метод 3-го або 4-го порядку (з різними способами задання стартових значень) для задачі Коші.

Лабораторна робота №4. Чисельне розв'язування крайових задач:

- Методи стрільби, варіації сталих, диференціальної прогонки.
- Метод сіток.
- Алгоритми програм.
- Програма: методи стрільби, варіації сталих або метод сіток.