

## Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною.

### 3. Аналіз впливу в'язкості середовищ

В працях [1,2,3] проаналізовані (з погляду застосування проекційно-сіткових методів) математичні моделі процесу нестационарної акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини для випадків ідеальних середовищ та середовищ з втратами енергії (дисипацією). В даній праці, на прикладі задачі про акустичну взаємодію пружного поршня з рідиною, що заповнює абсолютно жорстку камеру, проаналізовано вплив врахування в'язкості середовищ на характер чисельних розв'язків.

Математична модель акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини з врахуванням дисипації формулюється наступним чином [2,4].

#### 1. Постановка задачі взаємодії

Нехай пружне тіло (відповідно, рідина) займає область  $\Omega_S$  (відп.,  $\Omega_F$ ) точок  $x = (x_1, x_2, x_3)$  евклідового простору  $R^3$  з межею  $\Gamma_S$  (відп.,  $\Gamma_F$ ). Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі  $\Gamma_C = \Gamma_S \cap \Gamma_F$ . Позначимо через  $\nu^S = (\nu^S_1, \nu^S_2, \nu^S_3)$  (відп.,  $\nu^F$ ) одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $\Gamma_S$  (відп.,  $\Gamma_F$ ), та  $t$  – час,  $0 \leq t \leq T$ . Рух пружного тіла описується вектором переміщень  $u^S = (u^S_1, u^S_2, u^S_3)$ , що задовольняє рівняння:

$$\rho_S (u^S_i)'' - \sigma_{j,i}^S = f_i^S \quad \text{в } \Omega_S \times (0, T], \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^S(u^S) = a_{ijkm}^S \varepsilon_{km}(u^S) + c_{ijkm}^S \varepsilon_{km}((u^S)') \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(u^S) = (u^S_{i,j} + u^S_{j,i}) / 2, \quad (3)$$

де  $\rho_S$  – густина,  $\{a_{ijkl}^S\}$  і  $\{c_{ijkl}^S\}$  – модулі пружності та в'язкості,  $f^S = (f^S_1, f^S_2, f^S_3)$  – відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут та надалі маємо на увазі підсумовування від 1 до 3 за індексами, що повторюються, а також

$$(\circ)' = \frac{\partial}{\partial t}(\circ), \quad (\circ)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\circ).$$

Рух рідини описується вектором переміщень  $u^F = (u^F_1, u^F_2, u^F_3)$ , що задовольняє рівняння:

$$\rho_F (u^F_i)'' - \sigma_{j,i}^F = 0 \quad \text{в } \Omega_F \times (0, T], \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^F(u^F) = [\rho_F c^2 u^F_{k,k} + (\lambda + \eta - 2\mu/3)(u^F_{m,m})'] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}((u^F)') \quad (5)$$

де  $\rho_F$  – густина,  $c$  – швидкість звуку,  $\mu$  та  $\eta$  – відповідно коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості [4],  $\lambda = \kappa(1/C_V - 1/C_P)$ , де  $\kappa$  – коефіцієнт теплопровідності,  $C_V$  та  $C_P$  – питомі теплоємності рідини при сталих об'ємі й тиску відповідно. Рівняння (5) отримані з акустичного наближення рівняння нерозривності та рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{1}{\rho_F c^2} p' + v^F_{k,k} = 0 \quad ; (*)$$

$$\begin{cases} \rho_F (v^F_i)' - \sigma_{j,i}^F = 0, \\ \sigma_{ij}^F = [-p + (\lambda + \eta - 2\mu/3)v^F_{k,k}] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(v^F) \end{cases} (**)$$

шляхом виключення тиску  $p$  з рівнянь (\*\*) за допомогою рівняння (\*).

Надалі позначатимемо індексами  $U$  – нерухомі (жорсткі), а  $P$  – вільні (або з заданим тиском) частини меж  $\Gamma_S$  та  $\Gamma_F$ , так що

$$\Gamma_S = \Gamma_{SU} \cup \Gamma_{SP} \cup \Gamma_C \text{ та } \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{FP} \cup \Gamma_C,$$

причому  $\Gamma_{SU}$ ,  $\Gamma_{FU}$  та  $\Gamma_C$  – непорожні множини точок. Розглядаємо граничні умови, що відповідають цим поверхням:

$$u_i^S = 0 \text{ на } \Gamma_{SU}, \quad \sigma_{ij}^S v_j^S = \sigma_i^S \text{ на } \Gamma_{SP}; \quad (6)$$

$$u_i^F = 0 \text{ на } \Gamma_{FU}, \quad \sigma_{ij}^F v_j^F = \sigma_i^F \text{ на } \Gamma_{FP}; \quad (7)$$

$$u_i^S = u_i^F \text{ на } \Gamma_C, \quad (\sigma_{ij}^S - \sigma_{ij}^F) v_j^S = 0 \text{ на } \Gamma_C; \quad (8)$$

Для визначеності розв'язку до задачі (1)-(8) додаємо необхідні початкові умови.

Таким чином сформульована задача є математичною моделлю акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною для середовищ з дисипацією в термінах переміщень тіла та рідини.

## 2. Узагальнення задачі взаємодії

Нехай  $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F$ . Оскільки співвідношення (5) можуть бути отримані як частковий випадок співвідношень (2) відповідним підбором коефіцієнтів  $\{a_{ijk}^S\}$  і  $\{c_{ijk}^S\}$ , а умови контакту (8) є природними для суцільного середовища, то рух середовища описується вектором переміщень  $u = (u_1, u_2, u_3)$  так, що

$$u = \begin{cases} u^S, & x \in \Omega_S \\ u^F, & x \in \Omega_F; \end{cases}$$

Аналогічним чином введемо  $\rho$  – густину,  $f = (f_1, f_2, f_3)$  – інтенсивність розподілених джерел звуку в середовищі, яке заповнює область  $\Omega$ ,  $\{a_{ijk}\}$  і  $\{c_{ijk}\}$  – модулі пружності та в'язкості, які в області  $\Omega_F$  приймають значення

$$c_{ijm}^F = \begin{cases} 2\mu, & i \neq j, i = k, j = m; \\ \lambda + \eta + 4\mu/3, & i = j, k = i, m = j; \\ \lambda + \eta - 2\mu/3, & i = j, k = m, i \neq k; \\ 0; \end{cases}$$

$$a_{ijm}^F = \begin{cases} \rho c^2, & i = j = k = m; \\ 0. \end{cases}$$

У цьому випадку задача взаємодії може бути узагальнена наступним чином.

Нехай пружне тіло та рідина займають область  $\Omega$  точок  $x = (x_1, x_2, x_3)$  евклідового простору  $R^3$  з межею  $\Gamma$ . Позначимо через  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $\Gamma$ . Рух середовища описується вектором переміщень  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , що задовольняє рівняння:

$$\rho u_i' - \sigma_{ij,j} = f_i \text{ в } \Omega \times (0, T], \quad (9)$$

$$\sigma_{ij,j}(u) = a_{ijm} \varepsilon_{km}(u) + c_{ijm} \varepsilon_{km}(u'), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (11)$$

Як і раніше позначатимемо індексами  $U$  – нерухомі (жорсткі), а  $P$  – вільні (або з заданим тиском) частини межі  $\Gamma$  так, що  $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P$ , причому  $\Gamma_U$  – непорожня множина точок. Цим поверхням відповідають граничні умови:

$$u_i = 0 \text{ на } \Gamma_U, \quad \sigma_{ij} v_j = \hat{\sigma}_i \text{ на } \Gamma_F. \quad (12)$$

Для визначеності розв'язку до (9)-(12) додаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad \text{в } \Omega \quad (13)$$

Таким чином, задача (9)-(13) є узагальненою математичною моделлю акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною для середовищ з дисипацією в термінах переміщень.

### 3. Методика чисельного дослідження задачі взаємодії

Для побудови чисельної моделі процесу взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною застосовується методика, детально описана в працях [1,2,5]: формулюється варіаційна (слабка) постановка задачі

Введемо простори

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^n \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_U\}, \quad H = L^2(\Omega)^n$$

Варіаційна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), \quad u^0 \in V, \quad u^1 \in H. \\ \text{Знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + c(u'(t), v) + a(u(t), v) = \langle l, v \rangle, \\ a(u(0) - u^0, v) = 0, \quad m(u'(0) - u^1, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (14)$$

тут введено такі позначення :

$$\begin{cases} m(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \\ c(u, v) = \int_{\Omega} c_{ym} s_y(u) s_{nm}(v) dx, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ym} s_y(u) s_{nm}(v) dx, \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f_i v_i d\gamma + \int_{\Gamma_r} \sigma_i v_i d\gamma \end{cases} \quad (15)$$

Дискретизація варіаційної задачі за просторовими змінними базується на методі Гальоркіна з використанням скінченноелементних апроксимацій, а для інтегрування за часом застосовується однокрокова рекурентна схема, яка з використанням матричних позначень допускає таке алгебраїчне зображення [5]:

$$\text{Задано } \Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0; \{U^j\}, \{V^j\} \subset R^n.$$

$$\text{Знайти } \{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \subset R^n \text{ такі що}$$

$$\begin{cases} \{M + \Delta t \gamma C + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta A\} V^{j+1/2} = \Delta t \{L_{j+1/2} - A U^j\} + \\ \quad + \{M + \frac{1}{2} \Delta t (\beta - 2\gamma^2) A\} V^j; \\ U^{j+1} = U^j + \Delta t V^{j+1/2}, \quad V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j, \quad j = 0, 1, \dots, K. \end{cases} \quad (16)$$

Побудова (16) передбачає, що процедура Гальоркіна використовує базис  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  підпростору  $V_h \subset V, \dim V_h = N$ , а інтегрування за часом виконується з кроком  $\Delta t, \Delta t K = T$ . Тоді наближений розв'язок задачі (14) визначається формулою

$$u_h(x, t_m) = \sum_{k=1}^n U_k^m \varphi_k(x)$$

Коректність варіаційної задачі та збіжність чисельного розв'язку показані в працях [2,5].

Описана вище методика чисельного дослідження задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною реалізована у вигляді програми, створеної в середовищі візуального програмування Borland Delphi 3.0. Передбачена можливість розв'язування задач взаємодії як для ідеальних середовищ, так і для середовищ з дисипацією.

#### 4. Нестационарна взаємодія пружного поршня з рідиною, що заповнює абсолютно жорстку камеру.

Розглянемо задачу про імпульсне навантаження пружного поршня товщини  $H$ , що взаємодіє з рідиною, яка заповнює абсолютно жорстку камеру довжини  $L$  (рис.1). Припустимо, що пружний поршень ковзає по жорсткій поверхні камери без тертя та сила, що діє на поршень, розподілена по його поверхні рівномірно.

Аналітичний та чисельні розв'язки даної задачі для випадку ідеальних середовищ досліджувались в працях [3,7].

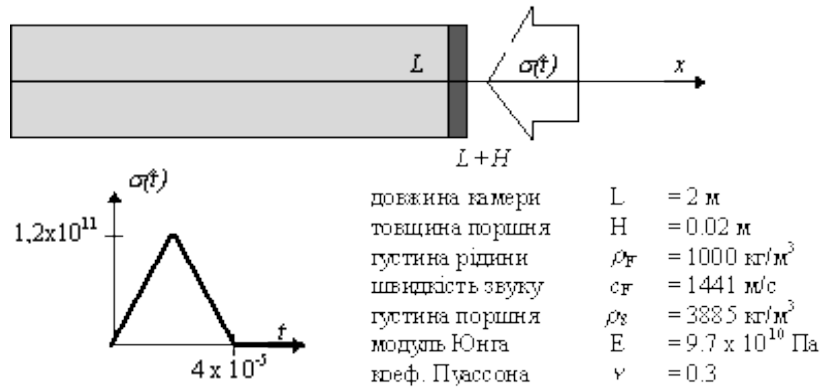


Рис. 1.

На рис.2,3 представлені результати аналізу впливу в'язкості.

**Графік залежності акустичного тиску  $p(x,t)$  на поршні ( $x=L$ ) від часу  $t$**   
( 1 -  $k=0$ , 2 -  $k=1.0E-07$  )

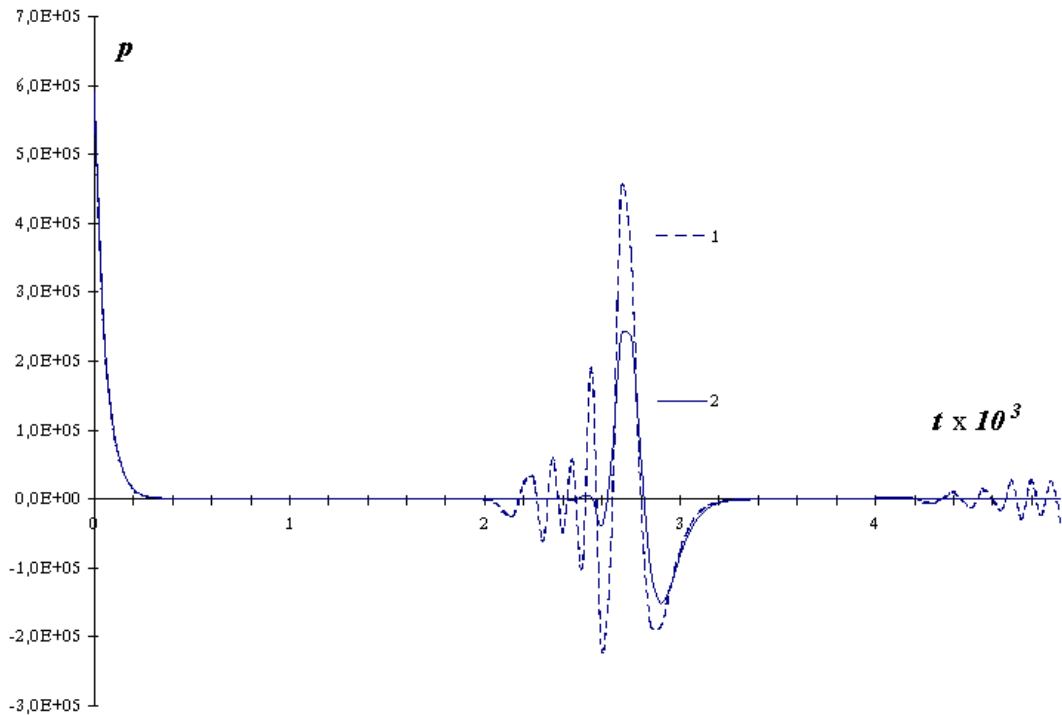


Рис. 2

Криві 1 на обох рисунках відповідають розв'язкам для ідеальних середовищ. Криві 2 – середовищам з дисипацією. Модулі в'язкості для тіла та рідини вибирались як відповідні модулі пружності, домножені на коефіцієнт  $k = 10^{-7}$ . З рис.2 добре видно, що введення в'язкості в математичну модель дозволяє позбутись паразитичних осциляцій в чисельному розв'язку.

Криві 3 та 4 на рис.3 відповідають повним енергіям пружного поршня та рідини відповідно, а їх поведінка в часі ілюструє баланс енергій в гідропружній системі.

Розрахунки проводились при різних параметрах дискретизації за просторовими та часовою змінними. Апостеріорно отримані порядки збіжності чисельних схем добре узгоджуються з апіорними оцінками.

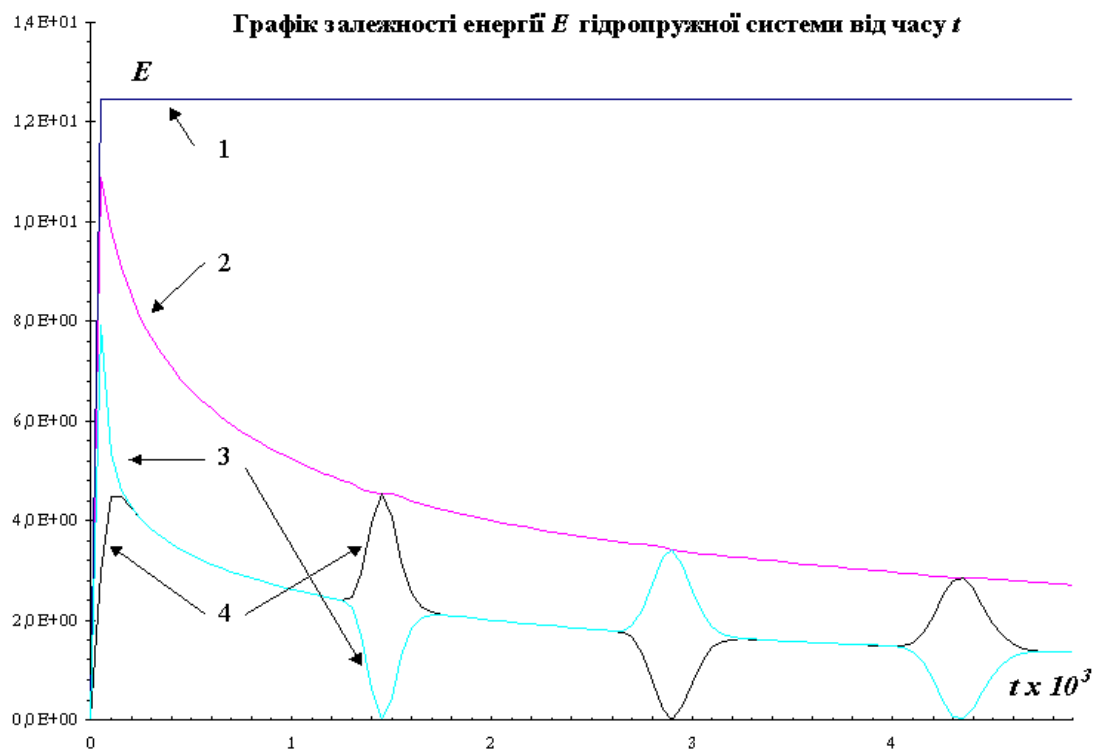


Рис. 3.

1. Горлач В.М.,Шинкаренко Г.А. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. I. Ідеальні середовища // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.76-82.
2. Горлач В.М. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 2. Середовища з дисипацією // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.82-88.
3. Горлач В.М. Численное моделирование акустических колебаний упругого тела с жидкостью: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Львов, 1990. –18с.
4. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.:Наука, 1984. – 400 с.
5. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: УМК ВО, 1991. – 87с.
6. Горлач В.М., Кондратюк Я.В. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною для середовищ з дисипацією // Modelling and investigation of system stability: thesis of Int.Conf. – Kiev – 1997. – P.41.
7. Geradin M., Robert G., Huck A. Eigenvalue analysis and transient response of fluid-structure interaction problems // Eng.Computational. – 1984. – Vol.1, №2. – P.151-160.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97