

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра інформаційних систем

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему:

Чисельне розв'язування початково-крайової задачі
термоп'єзоелектрики

Виконав: студент групи ПМІ-42
спеціальності 122 - комп'ютерні
науки
Войтович М. В.

Керівник:
доцент кафедри інформаційних
систем,
канд. фіз.-мат. наук
Стельмашук В. В.

Рецензент:

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ТА ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ	5
2. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ПРОСТОРОВОЮ ЗМІННОЮ	8
3. ОДНОКРОКОВА РЕКУРЕНТНА СХЕМА ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ	10
4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ	12
5. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ	15
5.1 Прямий п'єзоефект	16
5.2 Обернений п'єзоефект	21
6. АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ	26
7. ЕНЕРГЕТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	29
7.1 Енергетичні характеристики при прямому п'єзоефекті	30
7.2 Енергетичні характеристики при оберненому п'єзоефекті	34
ВИСНОВКИ	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	39

ВСТУП

Піроелектрики - речовини, здатні генерувати електроенергію при їх нагріванні чи охолодженні а також при механічній напрузі(піроелектричний ефект). Отже, усі піроелектрики є п'єзоелектриками. Прикладами піроелектриків є турмалін, нефелін, кварц та піротин.

Перші згадки про піроелектричний ефект можна знайти навіть близько 300 років до нашої ери в працях Теофраста, який зазначив, що турмалін може притягувати нагріту тирсу або солому. Властивості турмаліну були заново відкриті в 1707 році Йоганном Георгом Шмідтом, який зазначив, що мінерал не здатний притягувати холодний попіл, а лише гарячий.

Піроелектрики мають низку застосувань, найчастіше саме в датчиках тепла. Такі датчики є кращими у виконанні своїх функцій ніж інфрачервоні датчики, адже здатні вловлювати інфрачервоні промені що виходять із людського тіла і відповідно мають більший радіус дії. Ці датчики в свою чергу використовуються як для сигналізаційних систем, так і для автоматичного відкривання дверей, вікон та при автоматичному освітленні. Враховуючи сучасні тенденції до встановлення людьми у своїх будинки систем розумних будинків, важко переоцінити вплив цих матеріалів на життя сучасної людини. Ще однією надзвичайно важливою сферою використання піроелектриків у сучасному світі є військове обладнання. До приладів з цього поля, в яких наявність піроелектриків є незамінною відносяться тепловізори та датчики для виявлення наземних мін.

Оскільки усі піроелектрики є також п'єзоелектриками, слід також зазначити обширне використання цих матеріалів у багатьох світових галузях, А саме: радіотехніка, медицина, побутові справи(запальнички).

Із вище наданої інформації можна зробити такі висновки: Піроелектрики відіграють та відіграватимуть важливу роль у житті людини бо завдяки своїм властивостям їм можна знайти використання в різних галузях.

В цій дипломній роботі буде продемонстроване розв'язання початково-крайової

задачі термоп'єзоелектрики методом скінченних елементів. Будемо розглядати лише одновимірний випадок.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ТА ВАРІАЦІЙНОЇ

ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ

В цій дипломній роботі буде розглядатися піроелектричний стержень довжиною L , один кінець якого жорстко заземлений, заземлений і теплоізолюваний, а інший може бути навантажений змінним у часі $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$, механічним навантаженням $\sigma = \sigma(t)$, електричним струмом $J = J(t)$ та тепловим потоком $h = h(t)$. Вважатимемо, що процеси, які відбуваються в розглядуваному піроелектрику, цілком задовільно описано поздовжнім пружним зміщенням $u = u(x, t)$, електричним потенціалом $p = p(x, t)$ і приростом температури $\theta = \theta(x, t)$ (стосовно температури T_0 стану, вільного від напружень). Тоді математичну модель піроелектричного ефекту можна конкретизувати до одновимірної початково-крайової задачі для системи взаємозв'язаних диференціальних рівнянь руху, електродинаміки та теплопровідності. Згідно з [2] математична модель буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \rho[u_{tt}(x, t) - f(x, t)] - \sigma_x(x, t) &= 0, \\ \sigma(x, t) &= c(x)[u_x(x, t) - a(x)\theta(x, t)] + \\ &+ a(x)u_{xt}(x, t) + e(x)p_x(x, t), \quad \forall(x, t) \in (0, L) \times (0, T] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} D_{xt}(x, t) + J_x(x, t) &= 0, \\ D(x, t) &= -\varepsilon(x)p_x(x, t) + e(x)u_x(x, t) + \pi(x)\theta(x, t), \\ J(x, t) &= -z(x)p_x(x, t), \quad \forall(x, t) \in (0, L) \times (0, T] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho c_\varepsilon(x)\theta_t(x, t) + h_x(x, t) + T_0 d(x, t) &= w, \\ d(x, t) &= c(x)a(x)u_{xt}(x, t) - \pi(x)p_{xt}(x, t), \\ h(x, t) &= -\lambda(x)\theta_x(x, t), \quad \forall(x, t) \in (0, L) \times (0, T] \end{aligned} \quad (1.3)$$

З такими крайовими умовами

$$u(0, t) = 0, \sigma(L, t) = \bar{\sigma}(t), \forall t \in [0, T], \quad (1.4)$$

$$p(0, t) = 0, - [D_t(L, t) + J(L, t)] = \bar{J}(t), \forall t \in [0, T], \quad (1.5)$$

$$\theta(0, t) = 0, h(L, t) = \bar{h}(t), \forall t \in [0, T], \quad (1.6)$$

та початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = v_0(x),$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \forall x \in [0, L]. \quad (1.7)$$

Індексми t і x позначено часткові похідні шуканих функцій, наприклад, $v_t = dv/dt$, $v_x = dv/dx$, $\sigma(x, t)$ – розподіл напружень, $D(x, t)$ – електрична індукція, $J(x, t)$ – електричний струм, $h(x, t)$ – тепловий потік, $f = f(x, t)$ та $w = w(x, t)$ – задані розподіли об'ємних сил і теплових джерел, відповідно. Подані нижче коефіцієнти описують фізико-механічні характеристики матеріалу піроелектрика: ρ – густина, $c = c(x)$ – модуль Юнга, $\alpha = \alpha(x)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення, $a = a(x)$ – коефіцієнт в'язкості, $e = e(x)$ – п'єзомодуль, $c_\varepsilon = c_\varepsilon(x)$ – питома теплоємність, $\pi = \pi(x)$ – піромодуль, $\Xi = \Xi(x)$ – діелектрична проникливість, $z = z(x)$ – електропровідність.

Введемо простір інтегрованих за квадратом функцій $H = L^2(0, L)$ зі скалярним добутком $(u, v) = \int_0^L uvdx$ і нормою $[u]_0 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$, а також простори функцій V (простір допустимих пружних зміщень), Q (простір допустимих електричних потенціалів) та Z (простір допустимих приростів температури), які у випадку крайових умов (1.4)-(1.6) визначають таким способом

$$V \equiv Q \equiv Z := \{v \in H^1([0, L]): v(0) = 0\}. \quad (1.8)$$

Тоді початково-крайовій задачі піроелектрики (1.1)-(1.7) можна надати варіаційного формулювання вигляду.

Знайти $u = u(t) \in V$, $p = p(t) \in Q$, $\theta = \theta(t) \in Z$ такі, що

$$\begin{aligned} m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) - y(\theta(t), v) &= \langle l(t), v \rangle, \\ \exists(p'(t), q) + e(q, u'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t), q) &= \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t), \zeta) + k(\theta(t), \zeta) + y(\zeta, u'(t)) + \pi(\zeta, p'(t)) &= \langle \mu(t), \zeta \rangle, \forall t \in (0, T], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

$$\exists(p(0) - p_0, q) = 0, \quad \forall q \in Q,$$

$$s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0, \quad \forall \zeta \in Z.$$

Тут введено білінійні форми

$$m(u, v) = (\rho u, v),$$

$$c(u, v) = (cu_x, v_x),$$

$$a(u, v) = (au_x, v_x),$$

$$y(\zeta, v) = (ac\zeta, v_x), \quad \forall u, v \in V,$$

$$e(q, v) = - (eq_x, v_x),$$

$$\exists(p, q) = (\exists p_x, q_x), \quad (1.10)$$

$$z(p, q) = (zp_x, q_x),$$

$$\pi(\zeta, q) = - (\pi\zeta, q_x), \quad \forall p, q \in Q,$$

$$s(\theta, \zeta) = (\rho c_\varepsilon T_0^{-1} \theta, \zeta),$$

$$k(\theta, \zeta) = (\lambda T_0^{-1} \theta_x, \zeta_x), \quad \forall \theta, \zeta \in Z,$$

і лінійні функціонали

$$\langle l, v \rangle = \int_0^L \rho f v dx + \bar{\sigma} v(L), \quad \forall v \in V,$$

$$\langle r, q \rangle = \bar{J} q(L), \quad \forall q \in Q, \quad (1.11)$$

$$\langle \mu, \zeta \rangle = T_0^{-1} \left\{ \int_0^L w \zeta dx - \bar{h} \zeta(L) \right\}, \quad \forall \zeta \in Z.$$

2. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ПРОСТОРОВОЮ ЗМІННОЮ

Припустимо, що скінченновимірні підпростори апроксимацій $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$ і $Z_h \subset Z$ побудовано методом скінченних елементів так, що $V_h = Q_h = Z_h$, $\dim V_h = N$ і система кусково визначених функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ становить їхній

базис. Тоді згідно з [2] апроксимація

$\Psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ розв'язку задачі (1.9) буде мати наступний вигляд

$$\Psi_h(x, t) = \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i(t), \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) p_i(t), \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \theta_i(t) \right) \quad (2.1)$$

За базисні функції візьмемо функції Куранта, де $\varphi_i =$

$$\begin{aligned} & 0, & x < x_{i-1} \\ & \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ & \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ & 0, & x \geq x_{i+1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Якщо підставити (2.1) в (1.9) то отримаємо наступну задачу Коші у матричному вигляді:

Дано u_0, v_0, p_0, θ_0 , знайти $\{u(t), p(t), \theta(t)\}$ такі, що

$$Mu''(t) + Au'(t) + Cu(t) - E^T p(t) - Y^T \theta(t) = L(t),$$

$$Gp'(t) + Eu'(t) + Zp(t) + \Pi^T \theta'(t) = R(t),$$

$$S\theta'(t) + K\theta(t) + \Pi p'(t) + Yu'(t) = F(t),$$

$$M[u'(0) - v_0] = 0, C[u(0) - u_0] = 0,$$

$$G[p(0) - p_0] = 0, S[\theta(0) - \theta_0] = 0. \quad (2.3)$$

Де вектор $u(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^N$, $p(t) = \{p_i(t)\}_{i=1}^N$, $\theta(t) = \{\theta_i(t)\}_{i=1}^N$ це невідомі

коефіцієнти розвинення (2.1). Матриці $M, A, C, E, Y, G, Z, \Pi, S, K$ і вектори L, R, F

обчислюються за відповідними їм білінійними формами та лінійними функціоналами.

3. ОДНОКРОКОВА РЕКУРЕНТНА СХЕМА ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ

Для остаточної дискретизації задачі потрібно поділити часовий інтервал $[0, T]$ на рівні проміжки, використавши вузли $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, N_T$, де N_T - фіксоване натуральне число і $T = N_T\Delta t$. Для того, щоб апроксимувати розв'язок напівдискретизованої задачі на кожному проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ використовуватимемо такі поліноми:

$$\begin{aligned} u(t) \equiv u_{\Delta t}(t) &:= [1 - w^2(t)]u^j + \Delta t[1 - w(t)]w(t)\dot{u}^j + w^2(t)u^{j+1} \\ &\equiv u^j + \Delta tw(t)u^j + \frac{1}{2}[\Delta tw(t)]^2\ddot{u}^{j+\frac{1}{2}}, \\ p(t) \equiv p_{\Delta t}(t) &:= [1 - w(t)]p^j + w(t)p^{j+1} \equiv p^j + \Delta tw(t)\dot{p}^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\theta(t) \equiv \theta_{\Delta t}(t) := [1 - w(t)]\theta^j + w(t)\theta^{j+1} \equiv \theta^j + \Delta tw(t)\dot{\theta}^{j+\frac{1}{2}},$$

де $w(t) := (t - t_j)/\Delta t$.

$u^j, \dot{u}^j, p^j, \theta^j$ - вузлові значення пружного зміщення, його швидкості, електричного потенціалу та приросту температури в момент часу $t_j = j\Delta t$.

$\ddot{u}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{p}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{\theta}^{j+\frac{1}{2}}$ - вузлові значення прискорення, швидкості електричного потенціалу та швидкості приросту температури які вважаємо сталими на часовому проміжку $[t_j, t_{j+1}]$.

Вектори $u^0, \dot{u}^0, p^0, \theta^0$ ми отримуємо з початкових умов задачі Коші (2.3). Після того, як ми підставимо (3.1) в (2.3) та виконаємо належні перетворення отримаємо однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі задачі (2.3)

задано $\Delta t > 0$, $\gamma \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$, $u^j, \dot{u}^j, p^j, \theta^j$;

знайти $\ddot{u}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{p}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{\theta}^{j+\frac{1}{2}}$ такі, що

$$\begin{array}{l}
|M + \Delta tyA + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta C - \Delta tyE^T - \Delta tyY^T| \quad |\ddot{u}^{j+\frac{1}{2}}| \\
|\Delta tyE \quad G + \Delta tyZ \quad \Pi^T| \quad |\dot{p}^{j+\frac{1}{2}}| \\
|\Delta tyY \quad \Pi \quad (S + \Delta tyK)| \quad |\theta^{j+\frac{1}{2}}|
\end{array} = \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{l}
|L_{j+1/2} - A\dot{u}^j - Cu^j - \Delta tyC\dot{u}^j + E^T p^j + Y^T \theta^j| \\
= \quad |R_{j+1/2} - E\dot{u}^j - Zp^j| \\
\quad |F_{j+1/2} - K\theta^j - Y\dot{u}^j|
\end{array}$$

$$u^{j+1} = u^j + \Delta t\dot{u}^j + \frac{1}{2}\Delta t^2\ddot{u}^{j+\frac{1}{2}},$$

$$\dot{u}^{j+1} = \dot{u}^j + \Delta t\ddot{u}^{j+1/2},$$

$$P^{j+1} = p^j + \Delta t\dot{p}^{j+1/2},$$

$$\theta^{j+1} = \theta^j + \Delta t\dot{\theta}^{j+1/2},$$

$$j = 0, \dots, N_{T-1}.$$

Згідно з [2], схема є безумовно стійкою при $\frac{1}{2} \leq y \leq \beta$ і найвищий порядок збіжності можна досягти при $y = \beta = \frac{1}{2}$.

4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Програма була написана мовою програмування Python, вона здатна розв'язати початково-крайову задачу піроелектрики за допомогою методу скінченних елементів та однокрокової рекурентної схеми. Використовувалися такі бібліотеки: numpy для швидких операцій з матрицями та векторами, matplotlib для графічного відображення результатів. Також, в програмі реалізовані кусково задані лінійні функції Куранта, які я обрав як базисні та метод Гауса для розв'язання системи лінійних рівнянь. Для заповнення коефіцієнтів матриці потрібно було інтегрувати на відрізку, для цього я використав квадратурну формулу Гауса. Для подальшого аналізу збіжності розв'язків в програмі я рахував норми функцій розв'язків в просторі $L^2[0, L]$. Також програма відображає графіки функцій апроксимацій: механічного переміщення $u(x)$, електричного потенціалу $p(x)$, приросту температури $\theta(x)$.

Користувач має змогу ввести такі коефіцієнти рівняння: густину, модуль Юнга, початковий коефіцієнт температури стержня T_0 , коефіцієнт теплового розширення, коефіцієнт п'єзоелектрики, коефіцієнт діелектричної проникливості, коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт піроелектрики а також довжину піроелектричного стержня L , кількість скінченних елементів N та T - кінцевий момент часу. Також користувач може задати змінні в часі значення механічного навантаження, електричного струму та теплового потоку.

```

1 class CourantFunctions:
2
3     def __init__(self, I=0, NOFE=10, L=0.01):
4         self.i = I
5         self.NumberOfFiniteElements = NOFE
6         self.Length = L
7
8     def fi(self, x):
9         h = self.Length / self.NumberOfFiniteElements
10
11         if x < 0 or x > self.Length:
12             return 0
13         else:
14             if (self.i - 1) * h < x and x <= self.i * h:
15                 return (x - (self.i - 1) * h) / h
16
17             if self.i * h < x and x <= (self.i + 1) * h:
18                 return ((self.i + 1) * h - x) / h
19             else:
20                 return 0
21
22
23
24     def fiDerivative(self, x):
25         h = self.Length / self.NumberOfFiniteElements
26
27         if x < 0 or x > self.Length:
28             return 0
29         else:
30             if (self.i - 1) * h < x and x <= self.i * h:
31                 return self.NumberOfFiniteElements / self.Length
32
33             if self.i * h < x and x <= (self.i + 1) * h:
34                 return -self.NumberOfFiniteElements / self.Length
35             else:
36                 return 0
37
38

```

Рисунок 4.1 - реалізація кусково лінійних функцій апроксимації Куранта

```

7 def IntegrateGauss(f, a, b):
8     x = list(np.zeros(8))
9
10     x[0] = -0.96028986
11     x[7] = -x[0]
12     x[1] = -0.79666648
13     x[6] = -x[1]
14     x[2] = -0.52553242
15     x[5] = -x[2]
16     x[3] = -0.18343464
17     x[4] = -x[3]
18
19     A = list(np.zeros(8))
20     A[0] = A[7] = 0.10122854
21     A[1] = A[6] = 0.22238103
22     A[2] = A[5] = 0.31370664
23     A[3] = A[4] = 0.36268378
24
25     t = []
26     for i in range(0, 8):
27         t.append((a + b) / 2 + ((b - a) / 2) * x[i])
28
29     integral = 0
30
31     for i in range(0, 8):
32         if callable(f):
33             integral += (b - a) * (A[i] * f(t[i])) / 2
34         else:
35             integral += (b - a) * (A[i] * f) / 2
36
37     return integral
38

```

Рисунок 4.2 - реалізація квадратурної формули Гауса для чисельного обчислення визначених інтегралів

```

def FillMatrix(koefficient):
    CMatrix = list(np.zeros((N+1,3)))
    CMatrix[0][0] = 0
    CMatrix[0][1] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[0](x)*fi[0](x)),xi[0],xi[1])
    CMatrix[0][2] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[0](x)*fi[1](x)),xi[0],xi[1])

    for i in range(1,N):
        CMatrix[i][0] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[i-1](x)*fi[i](x)),xi[i-1],xi[i])
        CMatrix[i][1] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[i](x)*fi[i](x)),xi[i-1],xi[i])
        CMatrix[i][1] += mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[i](x)*fi[i](x)),xi[i],xi[i+1])
        CMatrix[i][2] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[i](x)*fi[i+1](x)),xi[i],xi[i+1])

    CMatrix[N][0] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[N-1](x)*fi[N](x)),xi[N-1],xi[N])
    CMatrix[N][1] = mh.IntegrateGauss(lambda x: (koefficient*fi[N](x)*fi[N](x)),xi[N-1],xi[N])
    CMatrix[N][2] = 0

    CMatrixNew = list(np.zeros((N+1,N+1)))
    for i in range(0,N+1):
        CMatrixNew[i][i] = CMatrix[i][1]
        if i > 0:
            CMatrixNew[i][i-1] = CMatrix[i][0]
        if i < N:
            CMatrixNew[i][i+1] = CMatrix[i][2]

    return np.array(CMatrixNew)

```

Рисунок 4.3 - реалізація заповнення однієї з під матриць однокрокової рекурентної схеми

```

#розв'язок однокрокової рекурентної схеми
LJplusHalf = np.zeros((N+1))
RJplusHalf = np.zeros((N+1))
FJplusHalf = np.zeros((N+1))
result = np.zeros(3*(N+1))
while t<=T:
    #формуємо вектори L, R та F за лінійними функціоналами
    for i in range(0,N+1):
        LJplusHalf[i] = sigmaShtrih(t)*fi[i](L)
        RJplusHalf[i] = JShtrih(t)*fi[i](L)
        FJplusHalf[i] = (-hShtrih(t)*fi[i](L))*Tzero

    #формуємо праву частину слар
    Vec1 = LJplusHalf - AMatrix.dot(udot0) - CMatrix.dot(u0) - dt*gamma*CMatrix.dot(udot0)+EMatrix.transpose().dot(p0)+YMatrix.transpose().dot(theta0)
    Vec2 = RJplusHalf - EMatrix.dot(udot0)-ZMatrix.dot(p0)
    Vec3 = FJplusHalf - KMatrix.dot(theta0)-YMatrix.dot(udot0)
    rightSideVec = list(Vec1) + list(Vec2) + list(Vec3)
    #розв'язуємо слар
    result = np.linalg.solve(np.array(MainMatrix), np.array(rightSideVec))
    #відокремлюємо окремі розв'язки з загального
    uKoeffsSub = np.zeros((N+1))
    pKoeffsSub = np.zeros((N+1))
    thetaKoeffsSub = np.zeros((N+1))
    for i in range(0,N+1):
        uKoeffsSub[i] = result[i]
        pKoeffsSub[i] = result[N+1+i]
        thetaKoeffsSub[i] = result[2*N+2+i]
    u0Next = u0 + dt*udot0 + 0.5*dt*dt*np.array(uKoeffsSub)
    p0Next = p0 + dt*np.array(pKoeffsSub)
    udot0Next = udot0 + dt*np.array(uKoeffsSub)
    theta0Next = theta0 + dt*np.array(thetaKoeffsSub)
    #оновлюємо значення векторів
    u0 = u0Next
    p0 = p0Next
    udot0 = udot0Next
    theta0 = theta0Next

    if t>12*math.pow(10,-7):
        break

    t+=dt

```

Рисунок 4.4 - реалізація однокрокової рекурентної схеми

5. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Будемо розглядати піроелектричний стержень, зроблений з кераміки PZT-4, довжина якого становить $L=0.01$ м. Також припустимо, що напрям його поляризації є таким самим, як напрям його осі Ox . Наведені нижче коефіцієнти характеризують фізико-механічні властивості розглядуваного матеріалу:

$$\begin{aligned} \rho &= 7500 \text{ кг/м}^3, c = 13.9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, e = 15.1 \text{ Кл/м}^2, \\ \varepsilon &= 6.46 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, z = 5 \cdot 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \pi = 27 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}, \\ \alpha &= 2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, c_\varepsilon = 350 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \lambda(x) = 1.1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \\ a(x) &= 4 \text{ м}^2/\text{с}, f = 0 \text{ м/с}^2, w = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned}$$

Варто зазначити, що обидва кінці стержня є електродами, отже можуть бути під'єднаними до електричного кола та електричний струм може проходити вздовж стержня. До правого кінця стержня буде подаватися тепловий потік, механічне навантаження та електричний струм для моделювання п'єзоефекту за умов, що в нульовий момент часу електричний потенціал, швидкість зміщення та коливання температури будуть нульовими у всіх точках стержня. Лівий ж кінець стержня вважатимемо жорстко закріпленим, заземленим та з відсутністю збурень температури.

Період часу спостережень візьмемо $T = 75 \cdot 10^{-7}$ с. Для дискретизації області оберемо рівномірну сітку з $N = 512$ скінченних елементів з кусково лінійними апроксимаціями розв'язку та $N_T = 4000$ кроків інтегрування в часі. Наведені далі результати отримано з значеннями $\beta = \gamma = 0.5$. Для початку, розглянемо прямий п'єзоефект.

5.1 Прямий п'єзоэффект

В випадку прямого п'єзоэффекту, механічне навантаження ударного типу подаватиметься до правого кінця стержня, значення електричного струму та потоку тепла будуть дорівнювати нулю на правому кінці стержня. Крайові умови на правому кінці стержня будуть такого виду:

$$\bar{\sigma}(t) = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2, t \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ с та } 0 \text{ Н/м}^2, t \geq 5 \cdot 10^{-7},$$

$$\bar{J}(t) = 0 \text{ А},$$

$$\bar{h}(t) = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (5.1)$$

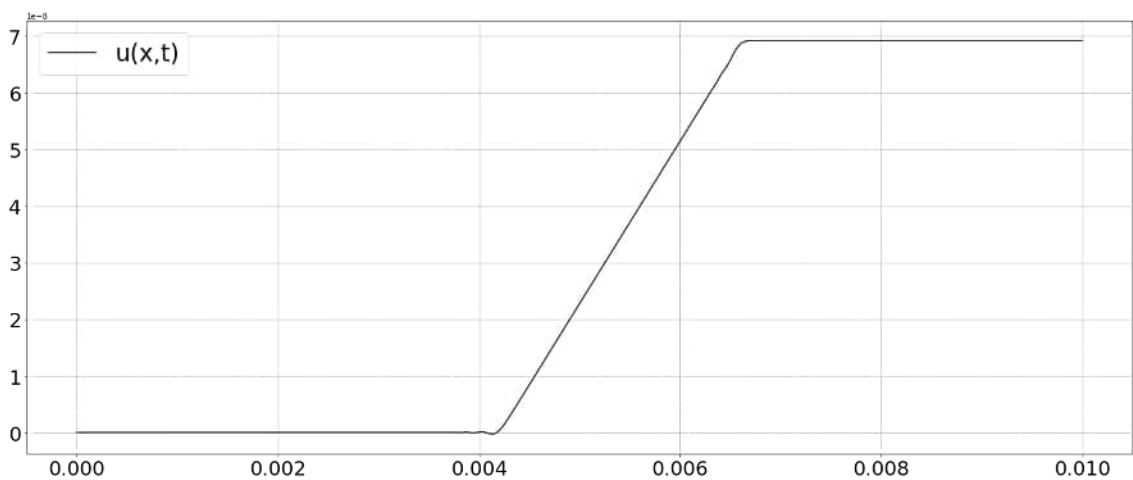


Рисунок 5.1 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 12 \cdot 10^{-7} \text{ с}$

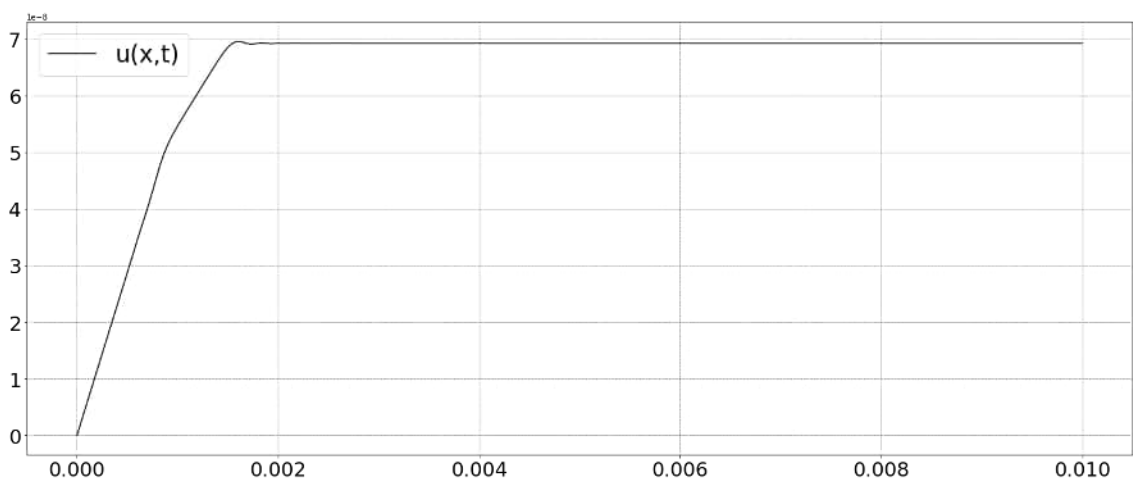


Рисунок 5.2 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 23.85 \cdot 10^{-7} \text{ с}$

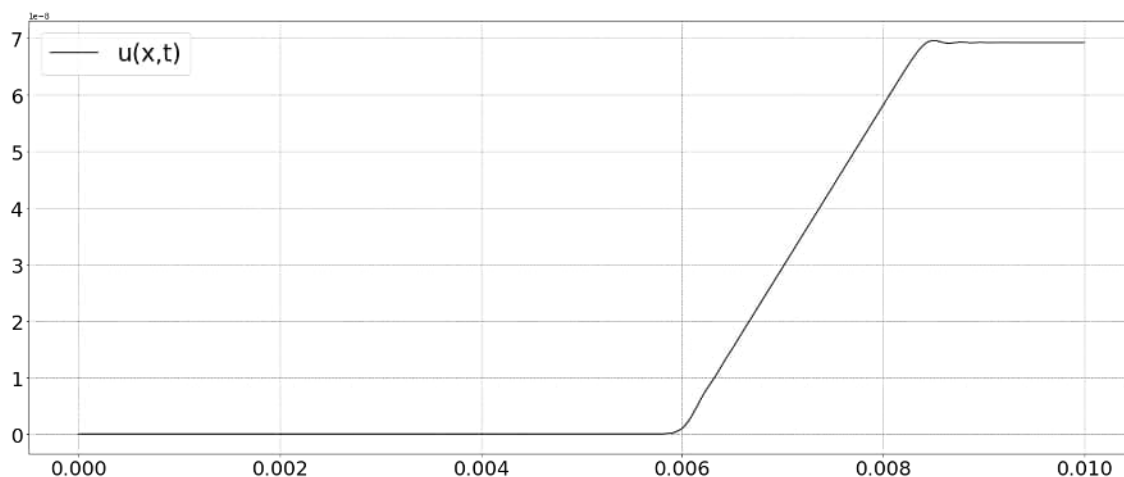


Рисунок 5.3 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 38.1 * 10^{-7}$ с

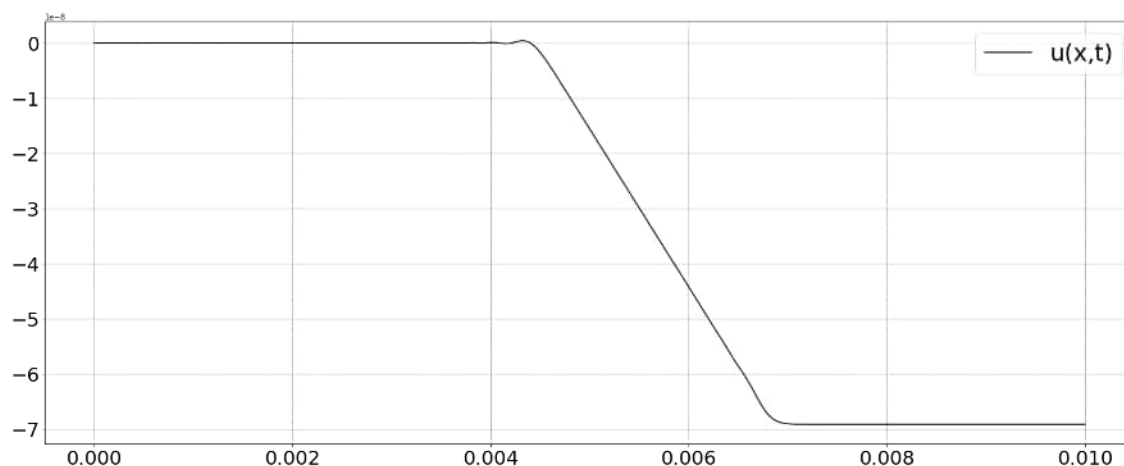


Рисунок 5.4 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 52.95 * 10^{-7}$ с

На першому рисунку бачимо профіль хвилі під час руху до лівого кінця стержня після зняття навантажень, на другому продемонстровані перетворення структури хвилі при відбитті від закріпленого кінця стержня. На третьому рисунку профілю хвилі, що рухається до правого кінця стержня, а на останньому - після відбиття від лівого(вільного) кінця стержня. Ідентичну поведінку має й електричний потенціал.

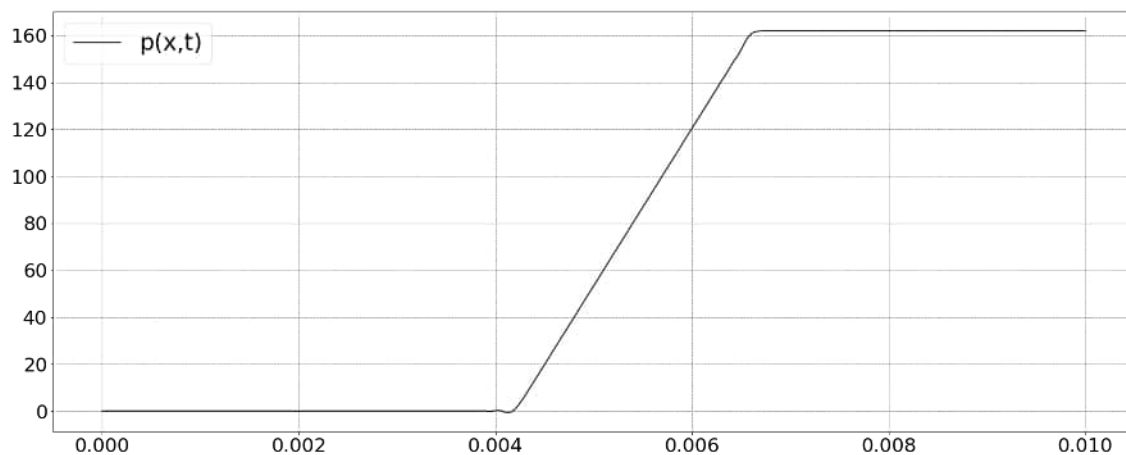


Рисунок 5.5 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 12 \cdot 10^{-7}$ с

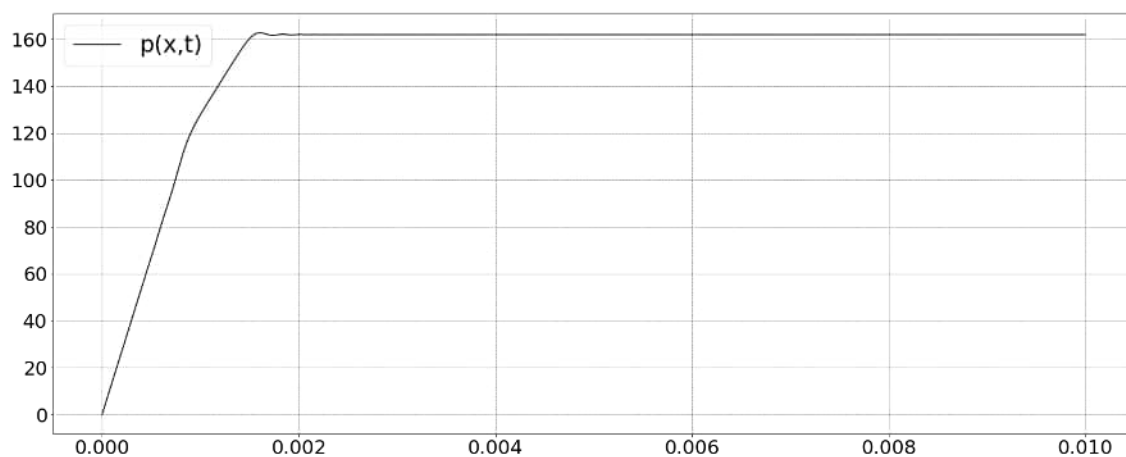


Рисунок 5.6 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 23.85 \cdot 10^{-7}$ с

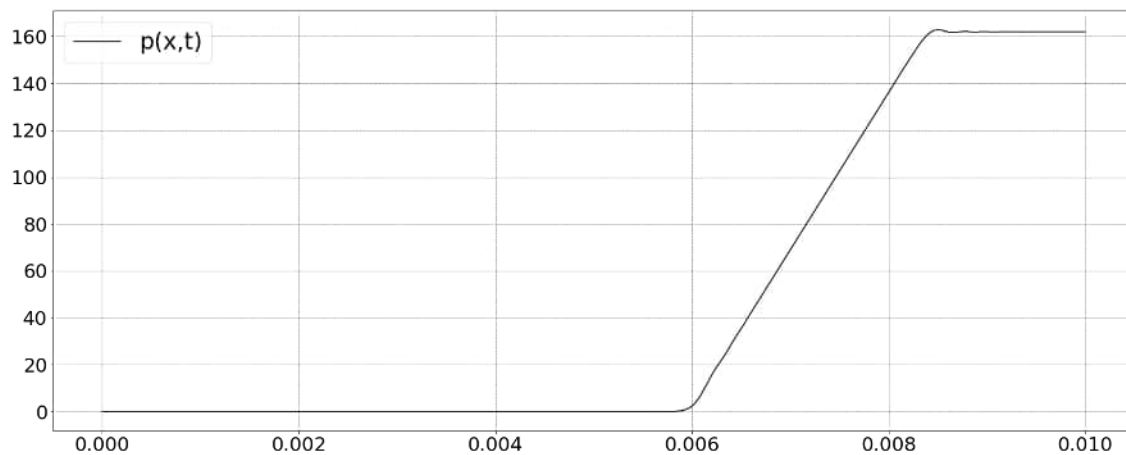


Рисунок 5.7 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 38.1 \cdot 10^{-7}$ с

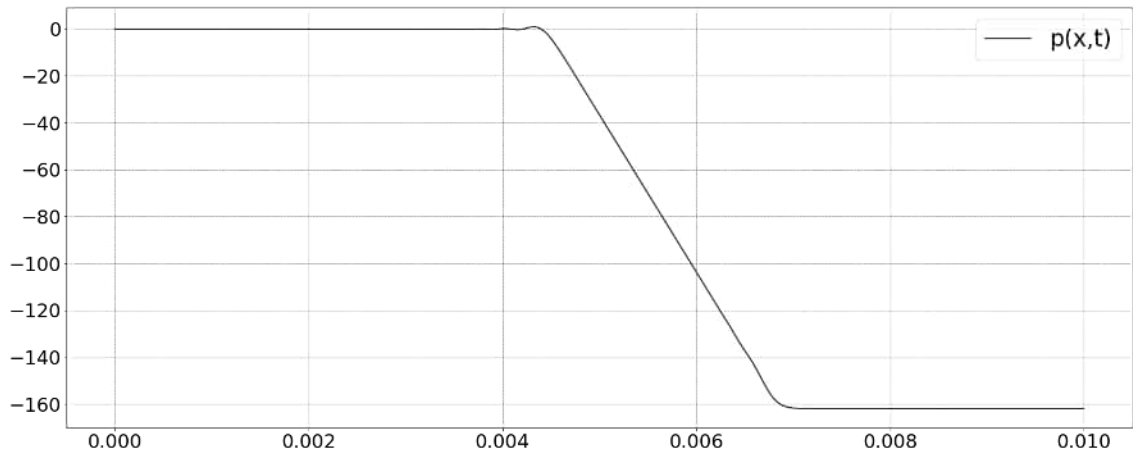


Рисунок 5.8 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 52.95 * 10^{-7}$ с

Варто зауважити, що і електричний потенціал, і пружне зміщення - кусково лінійні функції, структура профілів яких є однакова. Тепер розглянемо структуру профілів хвиль приросту температури $\theta(x,t)$ та швидкості пружного зміщення $u'(x,t)$.

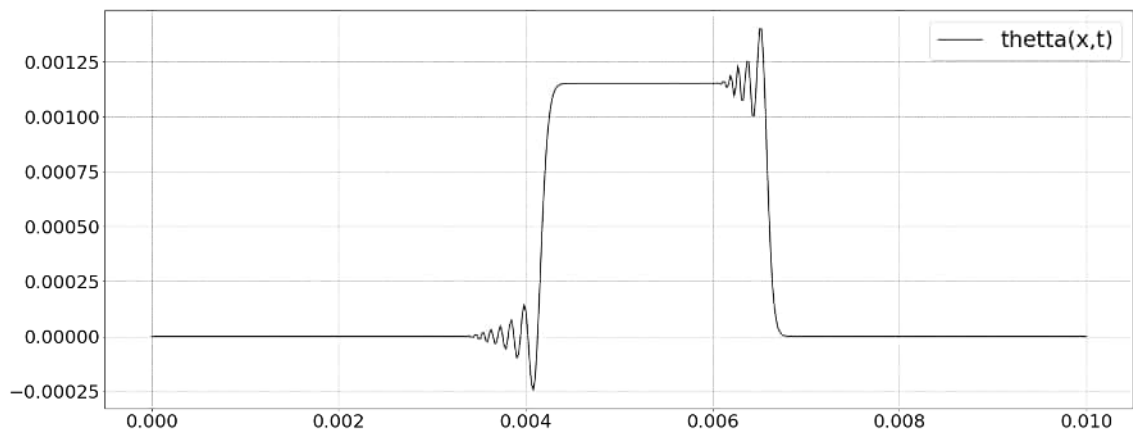


Рисунок 5.9 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 12 * 10^{-7}$ с

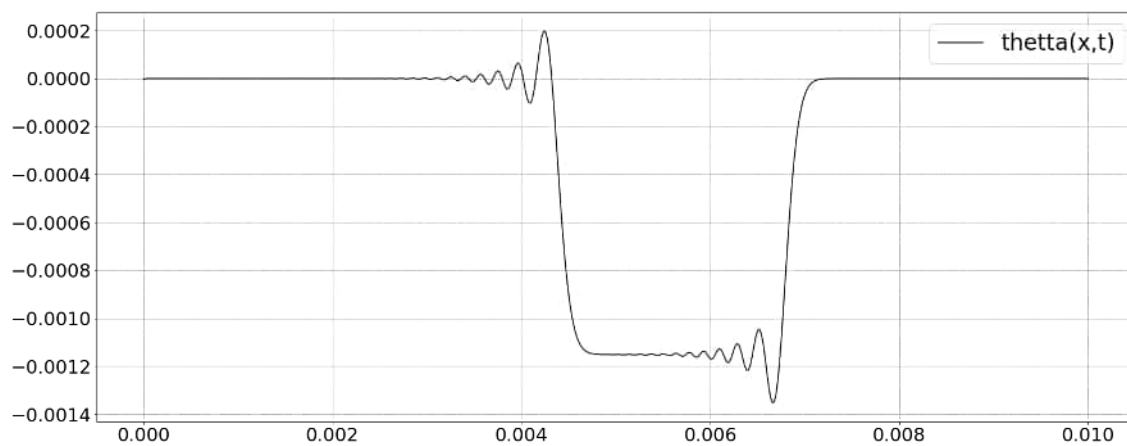


Рисунок 5.10 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 52.95 * 10^{-7} \text{ c}$

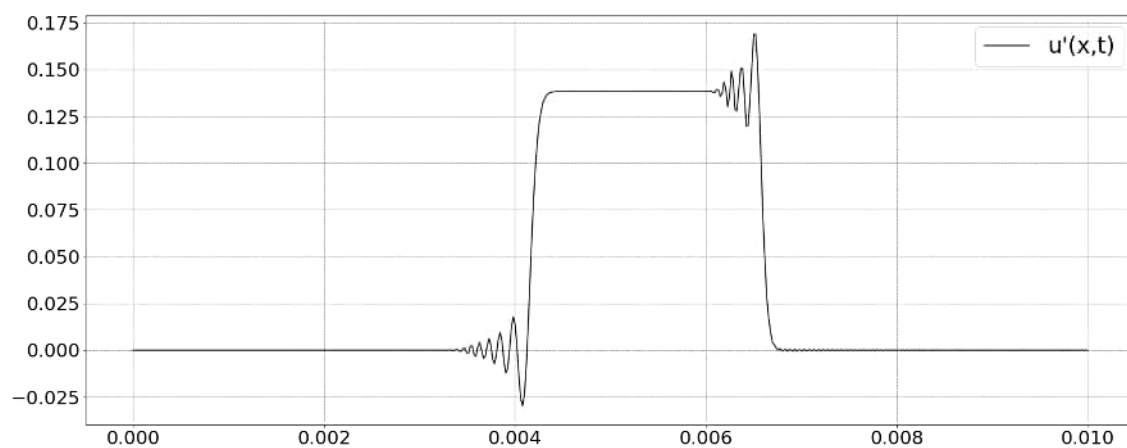


Рисунок 5.11 - Швидкість пружного зміщення в момент часу $t = 12 * 10^{-7} \text{ c}$

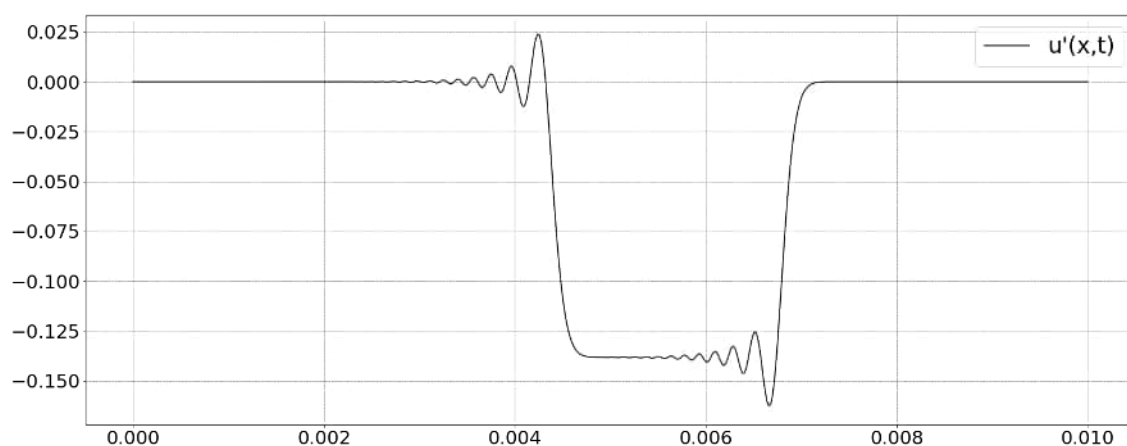


Рисунок 5.12 - Швидкість пружного зміщення в момент часу $t = 52.95 * 10^{-7} \text{ c}$

Структура наведених вище профілів є однаковою.

5.2 Обернений п'єзоэффект

Якщо розглядати явище оберненого п'єзоэффекту, то слід подавати імпульс електричного струму на правий кінець стержня. Механічне навантаження та тепловий потік дорівнюватимуть 0. Тоді крайова умова набуде такого вигляду на вільному кінці стержня:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(t) &= 0 \text{ Н/м}^2, \\ \bar{J}(t) &= 100 \text{ А, } t \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ с та } 0 \text{ А, } t > 5 \cdot 10^{-7} \text{ с,} \\ \bar{h}(t) &= 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Тривалість часу спостереження та густину сітки скінченних елементів залишимо такими ж, як і при симуляції прямого п'єзоэффекту ($T = 75 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, $N_T = 4000$ кроків ОРС та $N = 512$ скінченних елементів).

Для демонстрації профілів розв'язків наведемо їх графіки в момент часу $t = 12 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, в цей момент хвилі будуть розташовані приблизно на середині стержня.

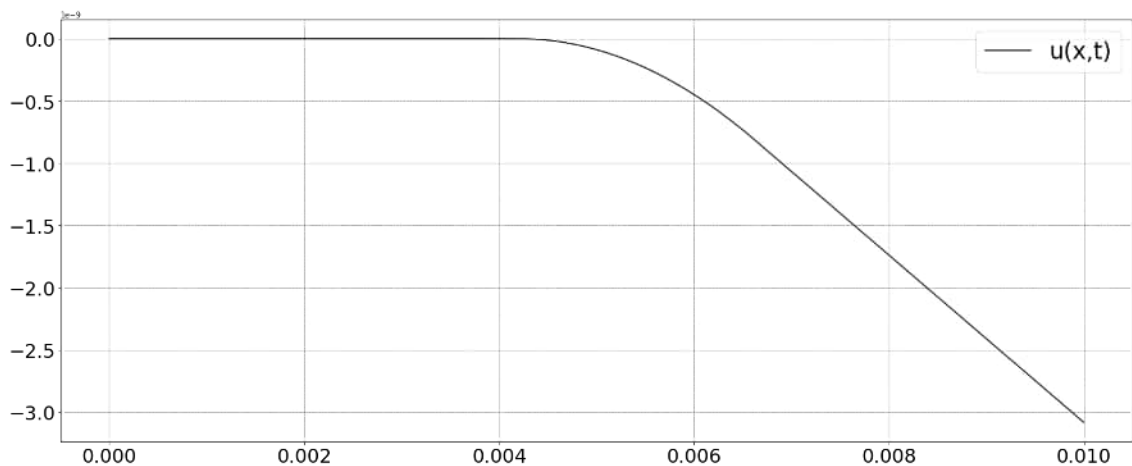


Рисунок 5.13 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 12 \cdot 10^{-7} \text{ с}$

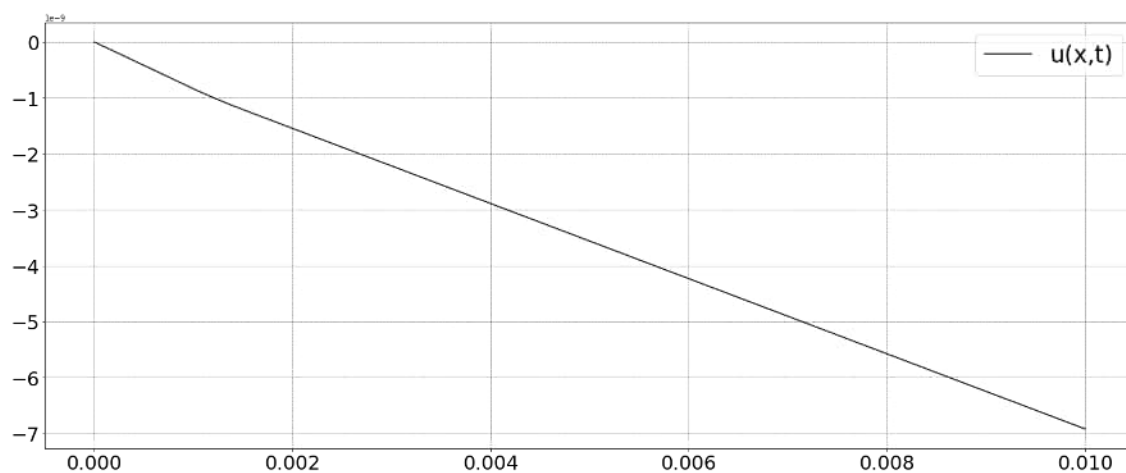


Рисунок 5.14 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 23.85 \cdot 10^{-7}$ с

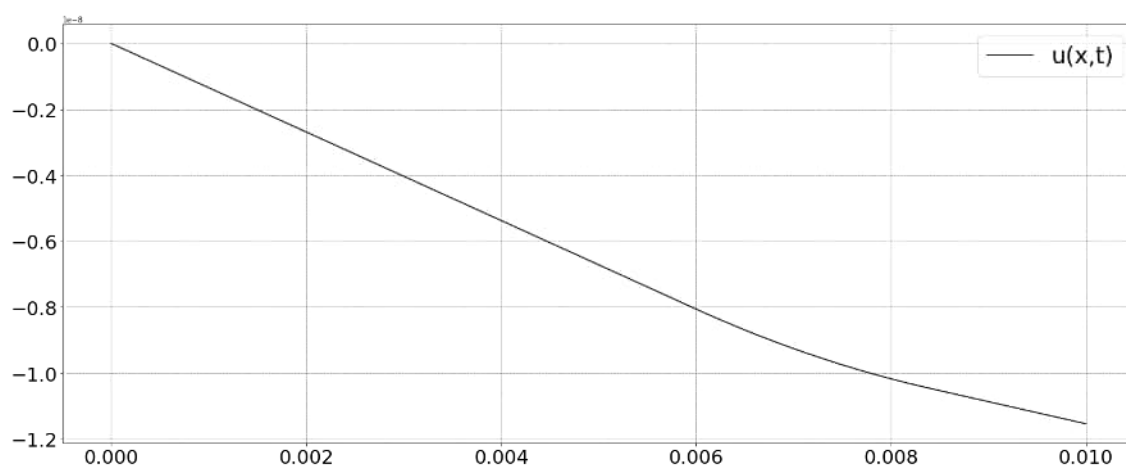


Рисунок 5.15 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 38.1 \cdot 10^{-7}$ с

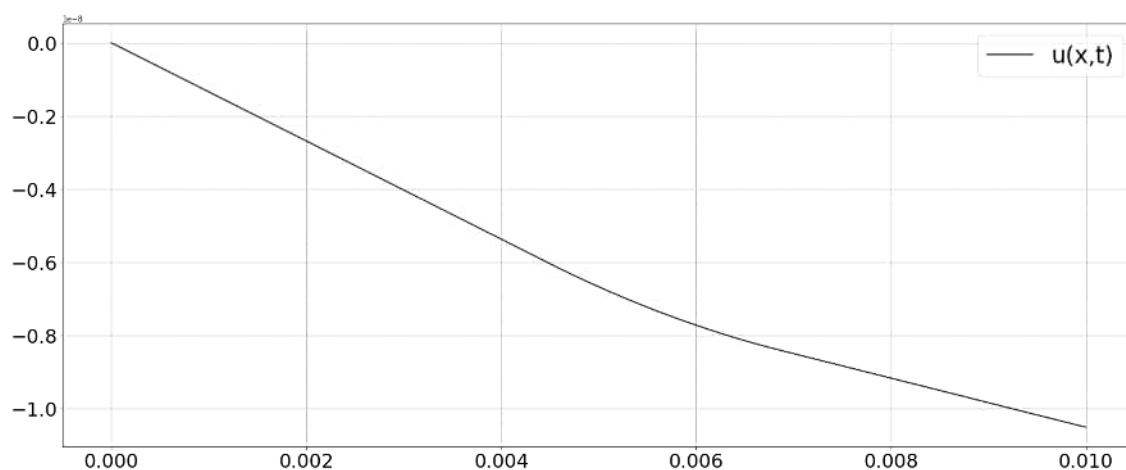


Рисунок 5.16 - Профіль пружного зміщення в момент часу $t = 52.95 \cdot 10^{-7}$ с

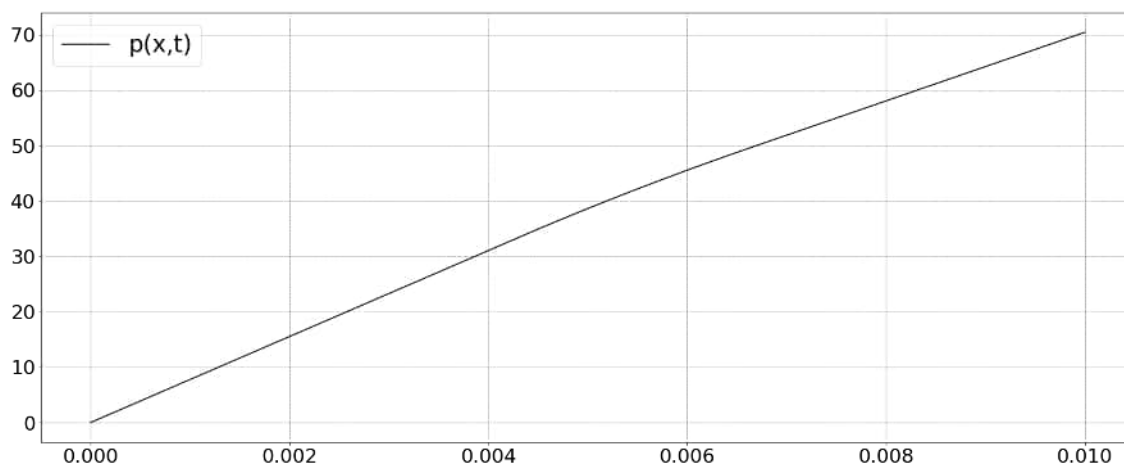


Рисунок 5.17 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 12 \cdot 10^{-7}$ с

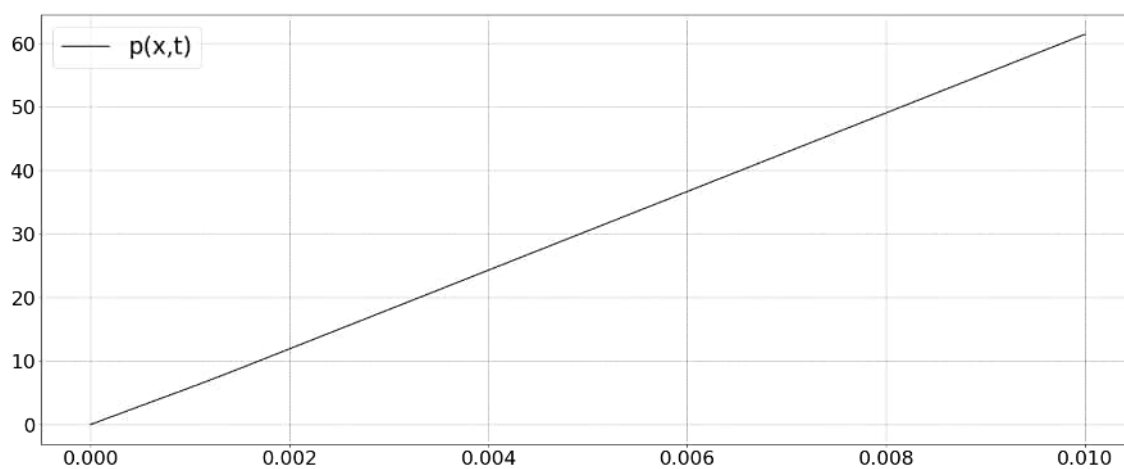


Рисунок 5.18 - Профіль електричного потенціалу в момент часу

$$t = 23.85 \cdot 10^{-7} \text{ с}$$

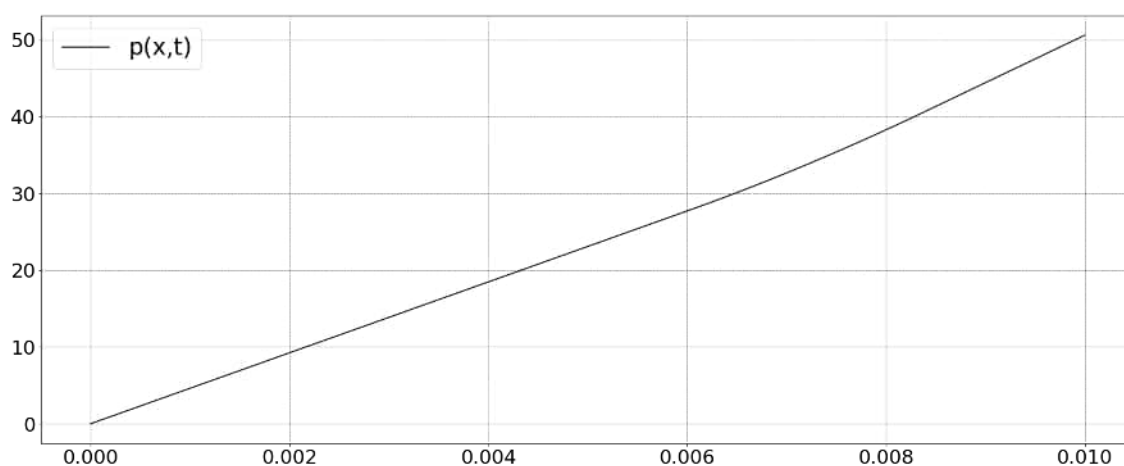


Рисунок 5.19 - Профіль електричного потенціалу в момент часу $t = 38.1 \cdot 10^{-7}$ с

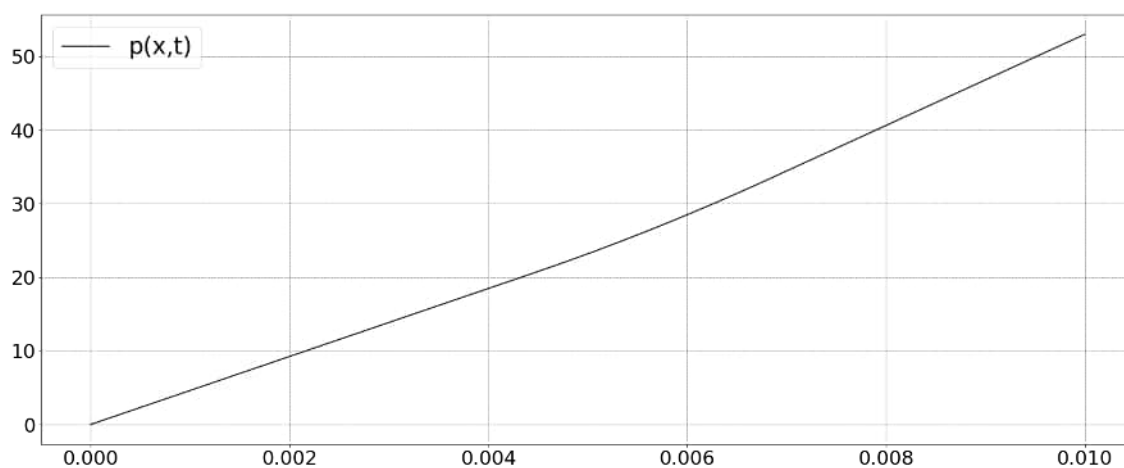


Рисунок 5.20 - Профіль електричного потенціалу в момент часу

$$t = 52.95 * 10^{-7} \text{ c}$$

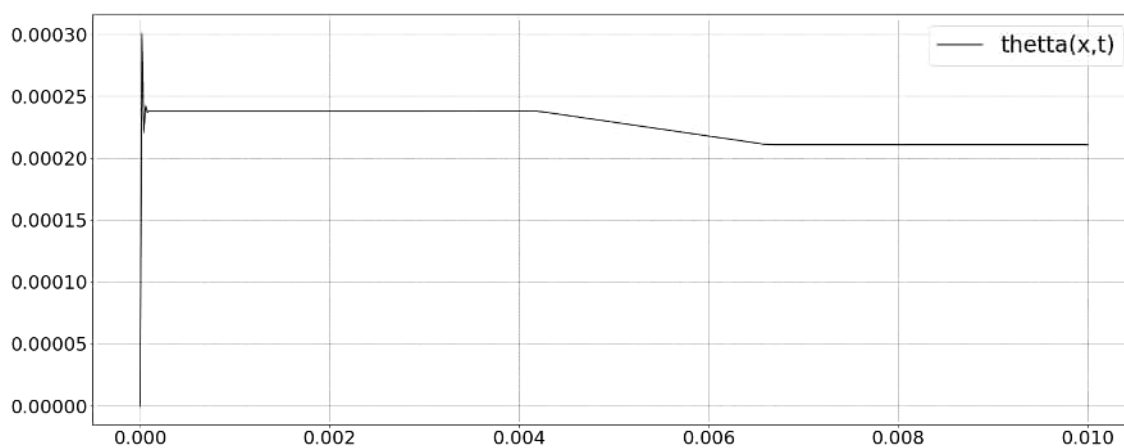


Рисунок 5.21 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 12 * 10^{-7} \text{ c}$

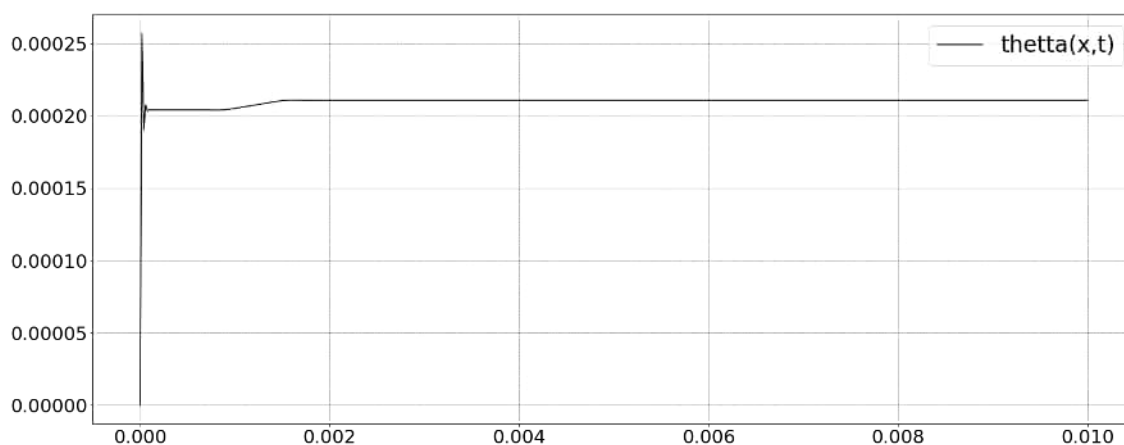


Рисунок 5.22 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 23.85 * 10^{-7} \text{ c}$

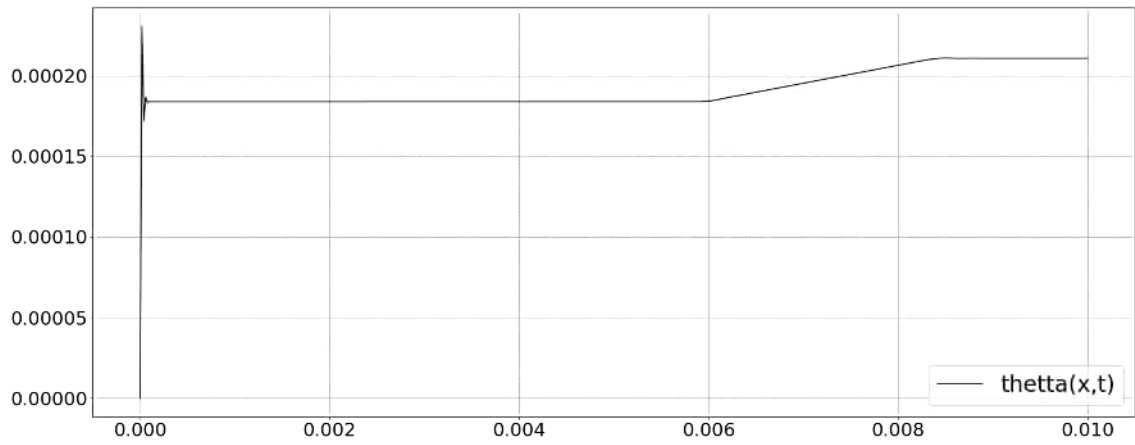


Рисунок 5.23 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 38.1 * 10^{-7}$ с

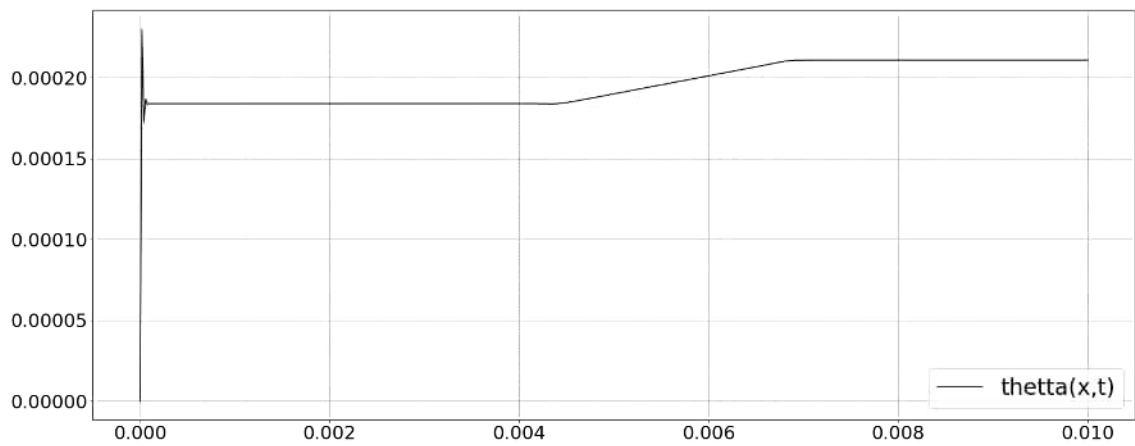


Рисунок 5.24 - Профіль приросту температури в момент часу $t = 52.95 * 10^{-7}$ с

Слід зазначити, що при оберненому п'єзоефекті, профілі електричного потенціалу та пружного зміщення вже не є кусково-лінійними, як при прямому п'єзоефекті, також між ними відсутня структурна подібність.

6. АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ

Для перевірки збіжності розв'язків $u(x,t)$, $p(x,t)$ та $\theta(x,t)$ запишемо таку систему:

$$\begin{aligned} z &= z_h + c_1(h)^p \\ z &= z_{\frac{h}{2}} + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p \\ z &= z_{\frac{h}{4}} + c_1\left(\frac{h}{4}\right)^p \end{aligned} \quad (6.1)$$

де z - норма точного розв'язку, z_h - норма апроксимального розв'язку з кроком h ,

$z_{\frac{h}{2}}$ - норма апроксимального розв'язку з кроком $\frac{h}{2}$,

$z_{\frac{h}{4}}$ - норма апроксимального розв'язку з кроком $\frac{h}{4}$

p - порядок збіжності.

Для знаходження порядку збіжності з системи рівнянь (6.1) віднімемо перше рівняння від другого:

$$-c_1(h)^p + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p = z_h - z_{\frac{h}{2}} \quad (6.2)$$

Від другого рівняння віднімемо третє:

$$-c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p + c_1\left(\frac{h}{4}\right)^p = z_{\frac{h}{2}} - z_{\frac{h}{4}} \quad (6.3)$$

Поділивши рівняння (6.2) на рівняння (6.3) отримаємо:

$$\frac{z_h - z_{\frac{h}{2}}}{z_{\frac{h}{2}} - z_{\frac{h}{4}}} = 2^p \quad (6.4)$$

З рівняння (6.4) можна визначити p - порядок збіжності:

$$p = \log_2 \left| \frac{z_h - z_{\frac{h}{2}}}{z_{\frac{h}{2}} - z_{\frac{h}{4}}} \right| \quad (6.5)$$

```
L2 Norm for u with N = 4 elements = 4.593316376328735e-09
-----
L2 Norm for p with N = 4 elements = 10.745032104616024
-----
L2 Norm for theta with N = 4 elements = 4.814551125687814e-05
-----
```

Рисунок 6.1 - норми в просторі L_2 для пружного зміщення, електричного потенціалу та приросту температури для $N=4$

```
L2 Norm for u with N = 8 elements = 4.5441795442977e-09
-----
L2 Norm for p with N = 8 elements = 10.629124452116386
-----
L2 Norm for theta with N = 8 elements = 5.259192917898107e-05
-----
```

Рисунок 6.2 - норми в просторі L_2 для пружного зміщення, електричного потенціалу та приросту температури для $N=8$

```
L2 Norm for u with N = 16 elements = 4.533946899942703e-09
-----
L2 Norm for p with N = 16 elements = 10.60546505290183
-----
L2 Norm for theta with N = 16 elements = 5.471528663737103e-05
-----
```

Рисунок 6.3 - норми в просторі L_2 для пружного зміщення, електричного потенціалу та приросту температури для $N=16$

Представимо обчислені норми в просторі L_2 в табличному вигляді:

Таблиця 6.1 - Норми $u(x,T)$, $p(x,T)$ та $\Theta(x,T)$ для $N = 4,8$ та 16 скінченних елементів

N	Норма $u(x,T)$	Норма $p(x,T)$	Норма $\Theta(x,T)$
4	4.59331637632e-09	10.7450321046124	4.81455112568e-05
8	4.54417954429e-09	10.6291244521186	5.25919291789e-05
16	4.53394689994e-09	10.6054650529073	5.47152866373e-05

Підставивши отримані дані в рівняння (6.5) отримаємо порядки збіжності для розв'язків:

$$p_{u_{L^2}} \approx 1.9813$$

$$p_{p_{L^2}} \approx 2.011$$

$$p_{\theta_{L^2}} \approx 2$$

Як бачимо, отримані порядки збіжності приблизно дорівнюють 2.

Слід також зазначити, що аналіз збіжності отриманих розв'язків було проведено для явища прямого п'єзоефекту, зокрема використовувалися норми отриманих розв'язків в момент часу $T = 75 \cdot 10^{-7}$ с.

7. ЕНЕРГЕТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Якщо підставити в рівняння варіаційної задачі (1.9) $v = u'(t)$, $q = p(t)$, $\zeta = \theta(t)$ і додати їх та проінтегрувати на інтервалі часу $(0, t) \subset [0, T]$ та врахувати початкові умови варіаційної задачі (1.9) то отримаємо енергетичне рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [m(u'(t), u'(t)) + c(u(t), u(t)) + \exists (p(t), p(t)) + \\ & \quad + s(\theta(t), \theta(t)) + 2\pi(\theta(t), \theta(t))] + \\ & + \int_0^t [a(u'(\tau), u'(\tau)) + z(p(\tau), p(\tau)) + k(\theta(\tau), \theta(\tau))] d\tau = \\ & = \frac{1}{2} [m(u'_0, u'_0) + c(u_0, u_0) + \exists (p_0, p_0) + s(\theta_0, \theta_0) + 2\pi(\theta_0, p_0)] = \\ & = \int_0^t \langle l(\tau), u'(\tau) \rangle + \langle r(\tau), p(\tau) \rangle + \langle \mu(\tau), \theta(\tau) \rangle d\tau, \quad \forall t \in (0, T]. \quad (7.1) \end{aligned}$$

де $\frac{1}{2}m(u'(t), u'(t)) \geq 0$ - кінетична енергія піроелектрика, $\frac{1}{2}c(u(t), u(t)) \geq 0$ - потенціальна енергія механічного поля, $\frac{1}{2}\exists (p(t), p(t)) \geq 0$ - електрична енергія, $\frac{1}{2}s(\theta(t), \theta(t)) \geq 0$ - теплова енергія, $\int_0^t a(u'(\tau), u'(\tau))$, $\int_0^t z(p(\tau), p(\tau))$, та $\int_0^t k(\theta(\tau), \theta(\tau))$ - втрати механічної, електричної і теплової енергії до моменту в часі $t \in (0, T]$.

7.1 Енергетичні характеристики при прямому п'єзоефекті

Наведені нижче в цьому пункті графіки описують енергетичні компоненти піроелектрика, а саме їх розподіл в часі:

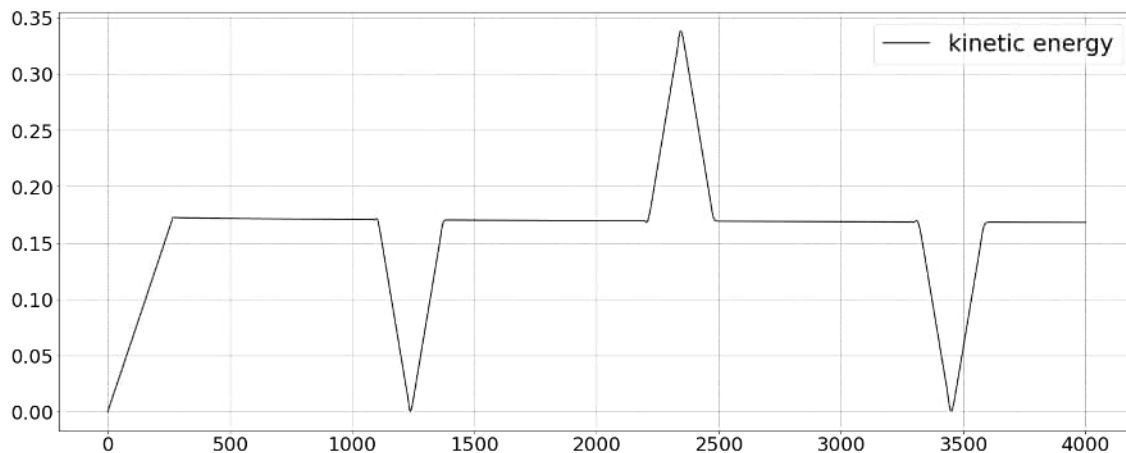


Рисунок 7.1 - зміна в часі кінетичної енергії піроелектрика

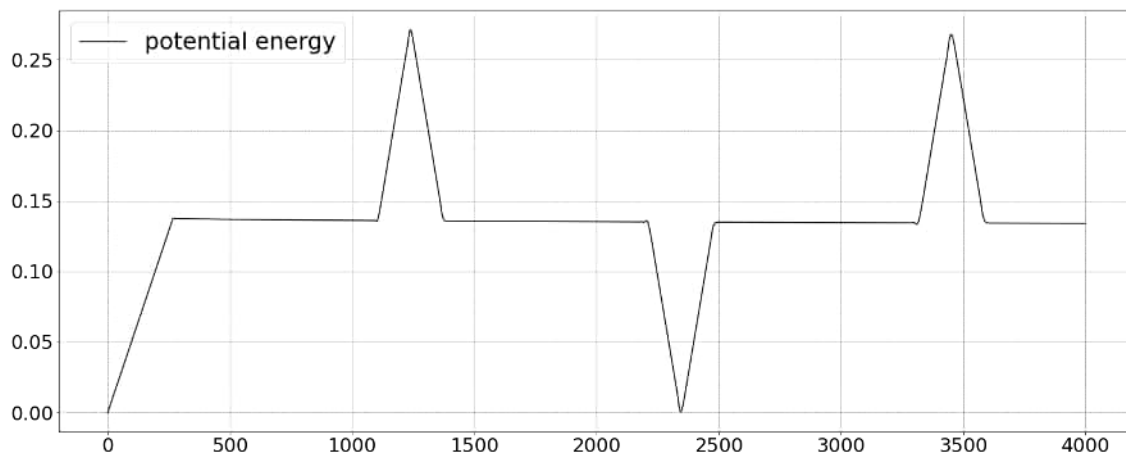


Рисунок 7.2 - зміна в часі потенційної енергії піроелектрика

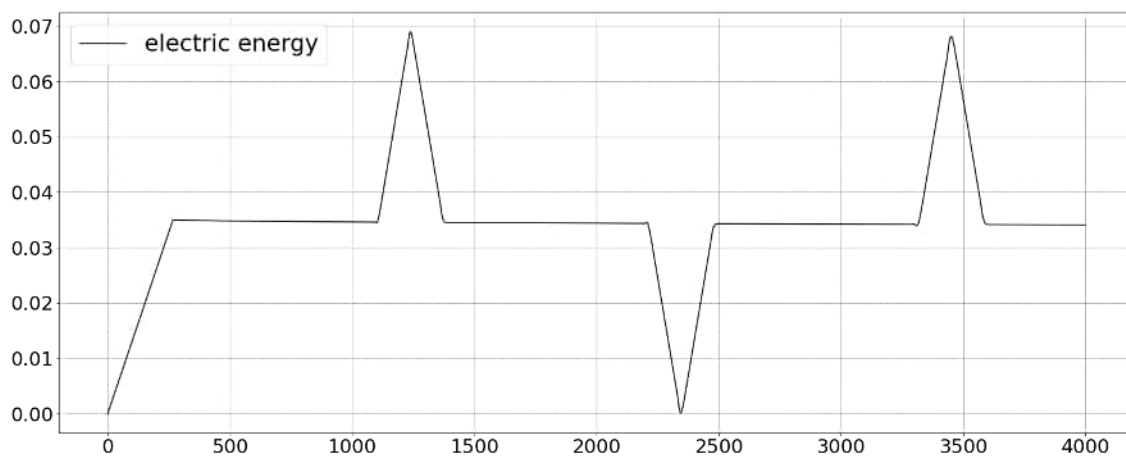


Рисунок 7.3 - зміна в часі електричної енергії піроелектрика

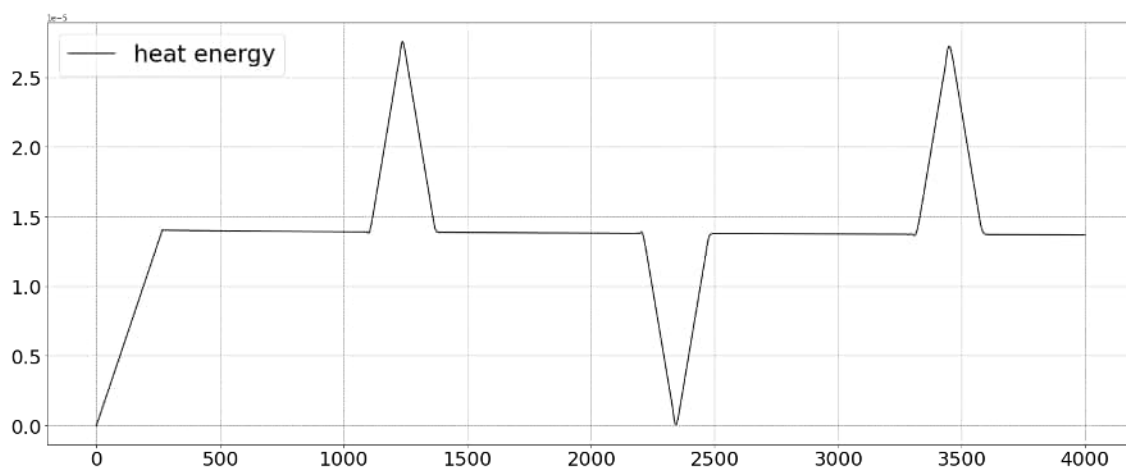


Рисунок 7.4 - зміна в часі теплової енергії піроелектрика

Зазначимо подібну структуру механічної, потенціальної та теплової енергії, що є очікувано, адже всі вони складають повну потенціальну енергію. Всі компоненти повної енергії піроелектрика зростають лінійно при подачі імпульсу механічного напруження. При подальшому русі хвилі до правого кінця стержня всі компоненти є сталими. При досягненні хвилею правого кінця в структурі відбуваються описані в пункті (5.1) перетворення. Усі енергії, крім кінетичної, досягають свого максимуму в цей момент, кінетична ж прямує до нуля. Далі бачимо обернену ситуацію, кінетична енергія досягає свого максимуму, а інші - прямують до нуля. При завершенні перетворень хвилі всі компоненти повної енергії є сталими.

Тепер розглянемо графіки втрат механічної, електричної та теплової енергії для прямого п'єзоефекту.

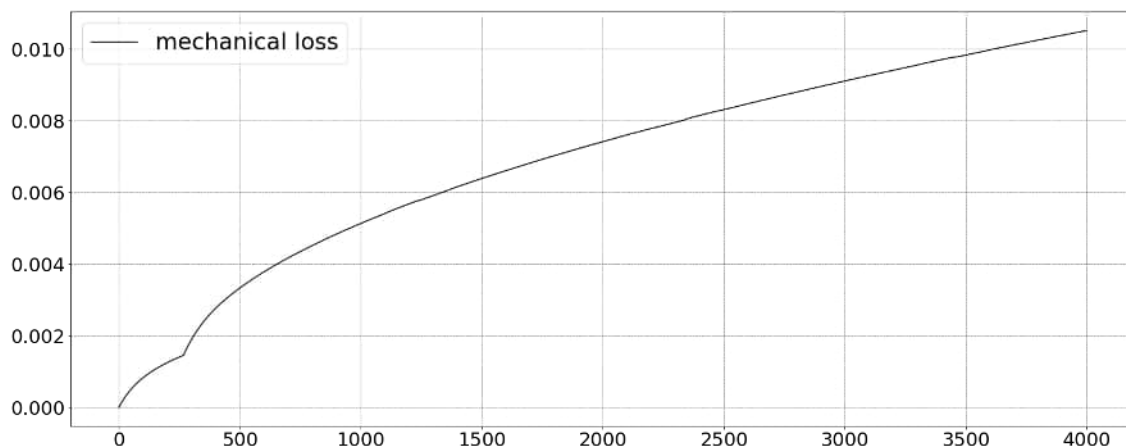


Рисунок 7.5 - накопичені в часі механічні втрати

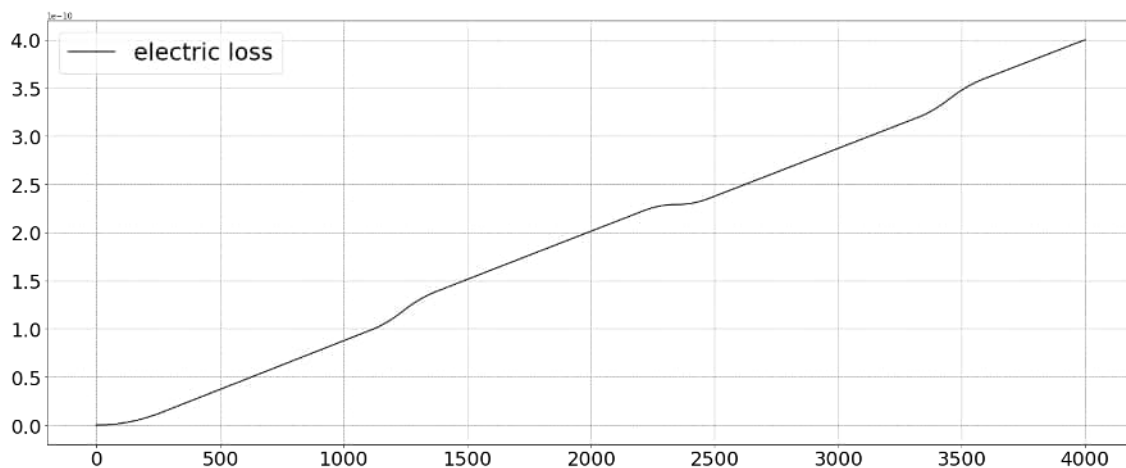


Рисунок 7.6 - накопичені в часі електричні втрати

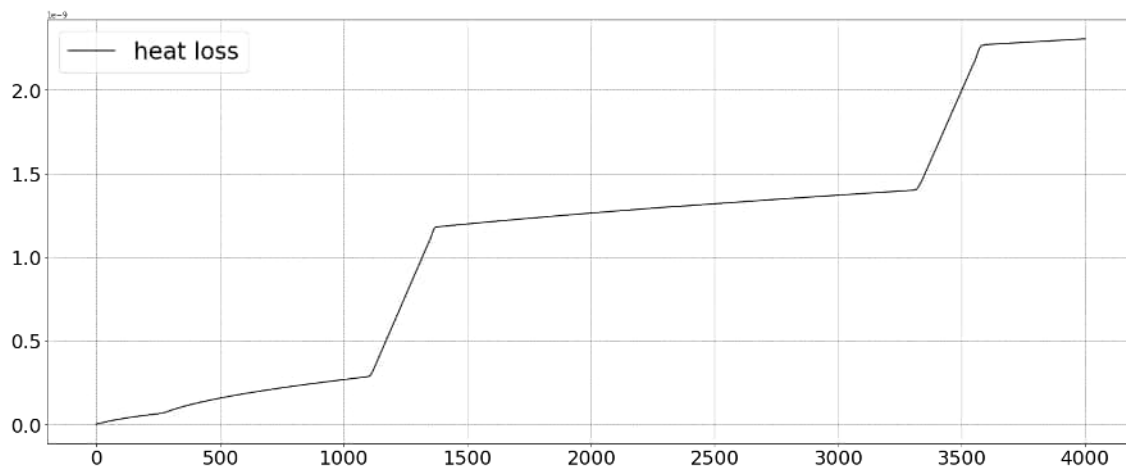


Рисунок 7.7 - накопичені в часі теплові втрати

Також варто перевірити, чи задовольняється рівняння енергетичного балансу в будь-який момент часу $t \in (0, T]$. Для цього зобразимо графічні представлення лівої так правої частини цього рівняння.

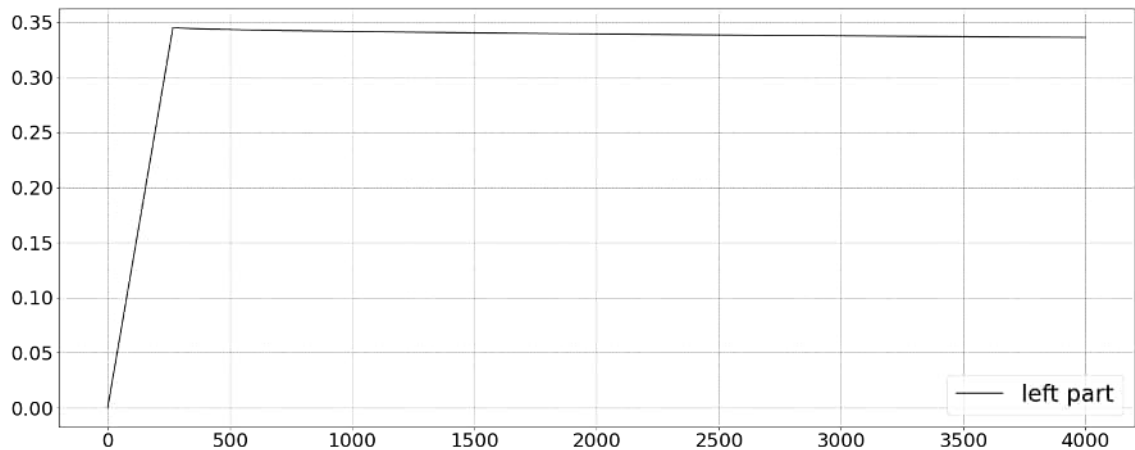


Рисунок 7.8 - графік правої частини рівняння рівноваги

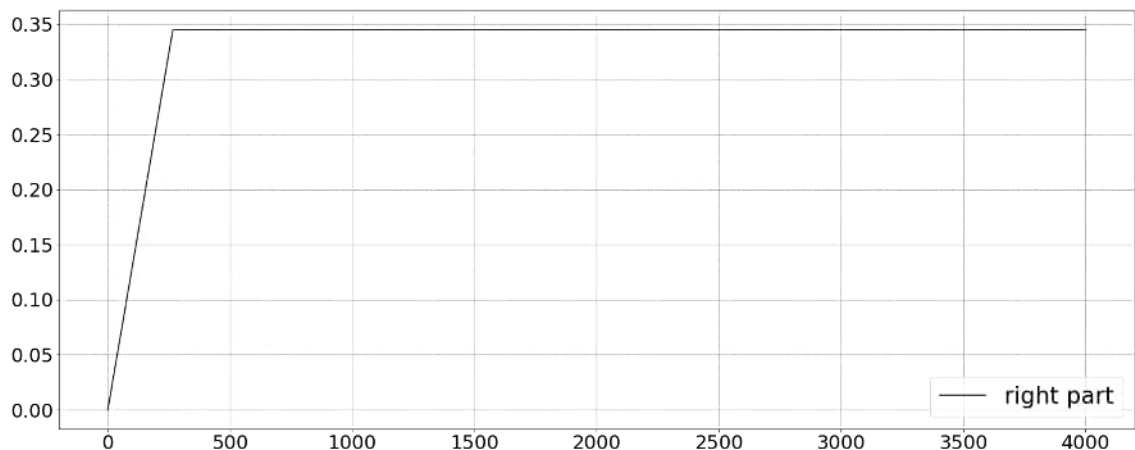


Рисунок 7.9 - графік лівої частини рівняння рівноваги

Як бачимо, графіки є майже ідентичними а отже рівняння енергетичної рівноваги задовольняється в будь який момент часу $t \in (0, T]$.

7.2 Енергетичні характеристики при оберненому п'єзоєфекті

Тепер розглянемо розподіл енергій піроелектрика в часі для оберненого п'єзоєфекту. Крайові умови оберненого п'єзоєфекту описано в рівнянні (5.2).

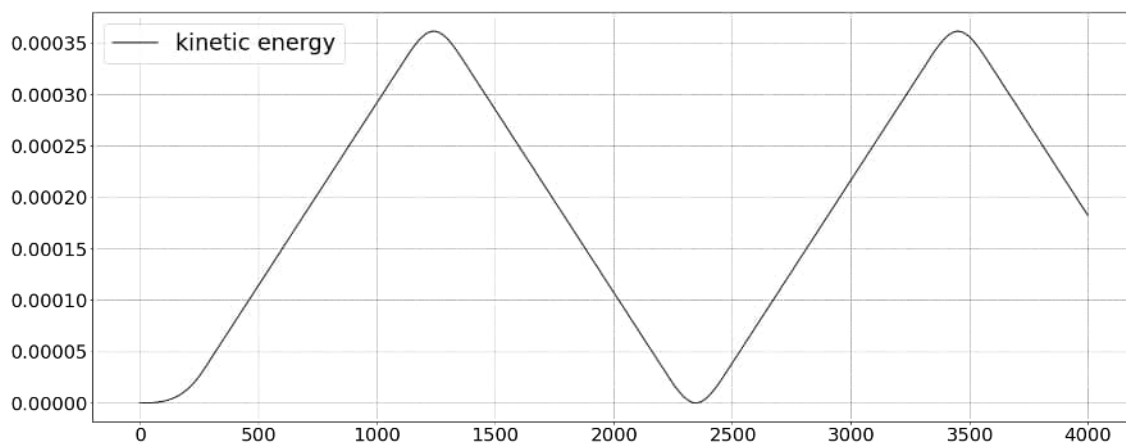


Рисунок 7.10 - зміна в часі кінетичної енергії піроелектрика

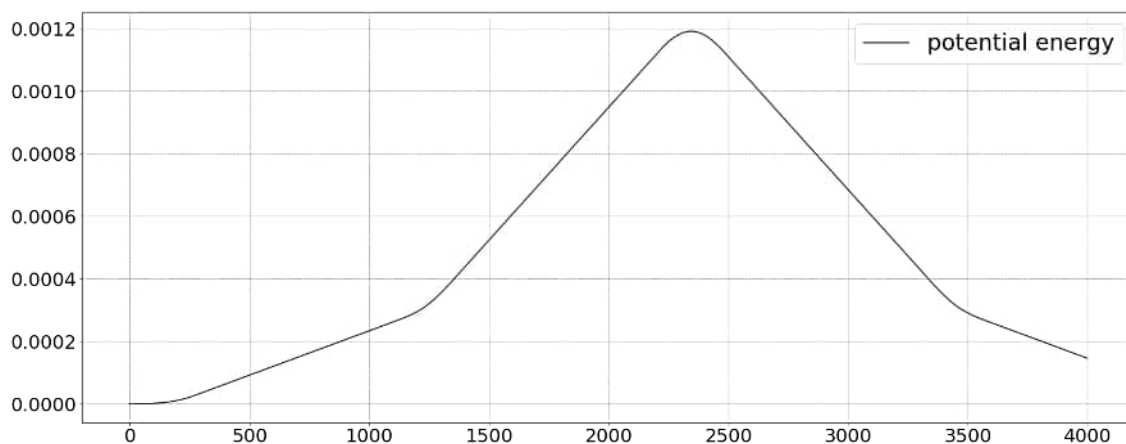


Рисунок 7.11 - зміна в часі потенційної енергії піроелектрика

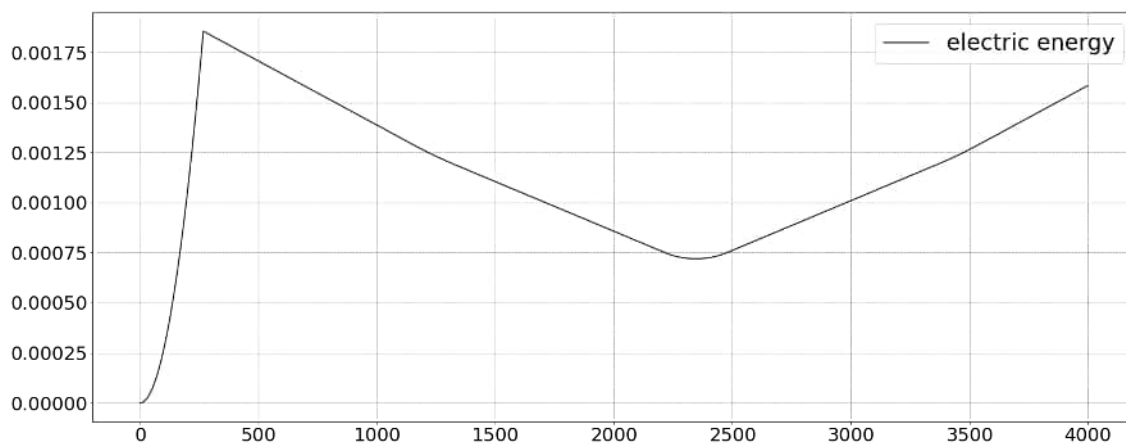


Рисунок 7.12 - зміна в часі електричної енергії піроелектрика

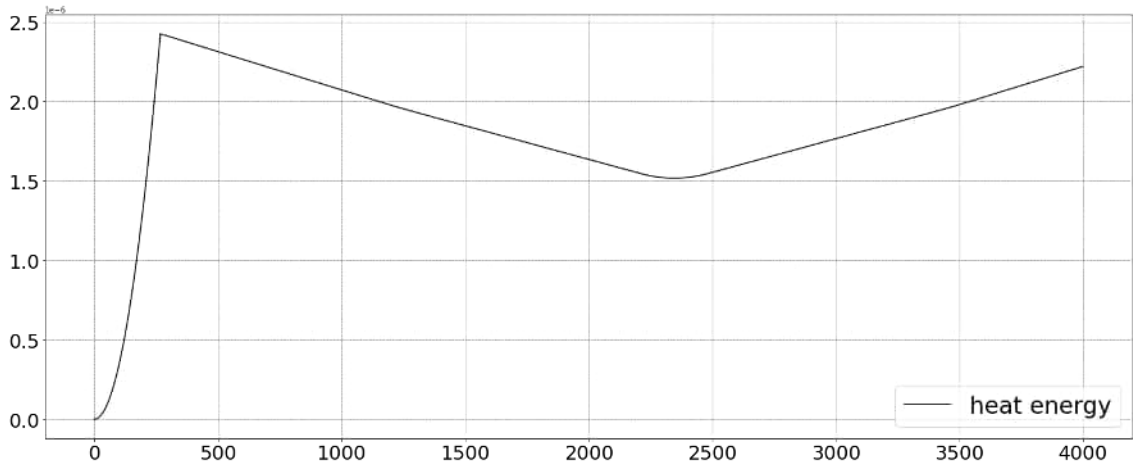


Рисунок 7.13 - зміна в часі теплової енергії піроелектрика

В першу чергу слід зазначити, що структури електричної енергії та теплової мають схожі профілі. Також, усі компоненти повної енергії зростають квадратично при подачі струму на стержень. Потім кінетична та механічна енергії зростають лінійно, а тепла ж спадає лінійно при русі хвилі в напрямі лівого кінця стержня. Під час перетворень на правому кінці, кінетична енергія квадратично зростає, а після досягнення свого максимуму - квадратично спадає. Інші енергетичні характеристики лише змінюють швидкість спадання чи зростання.

Тепер розглянемо графіки втрат механічної, електричної та теплової енергії для оберненого п'єзоефекту.

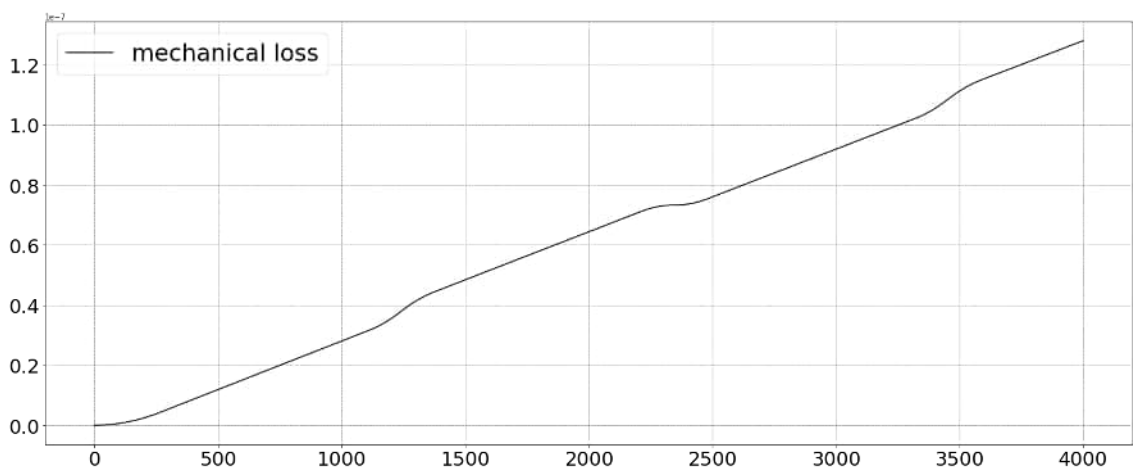


Рисунок 7.14 - накопичені в часі механічні втрати

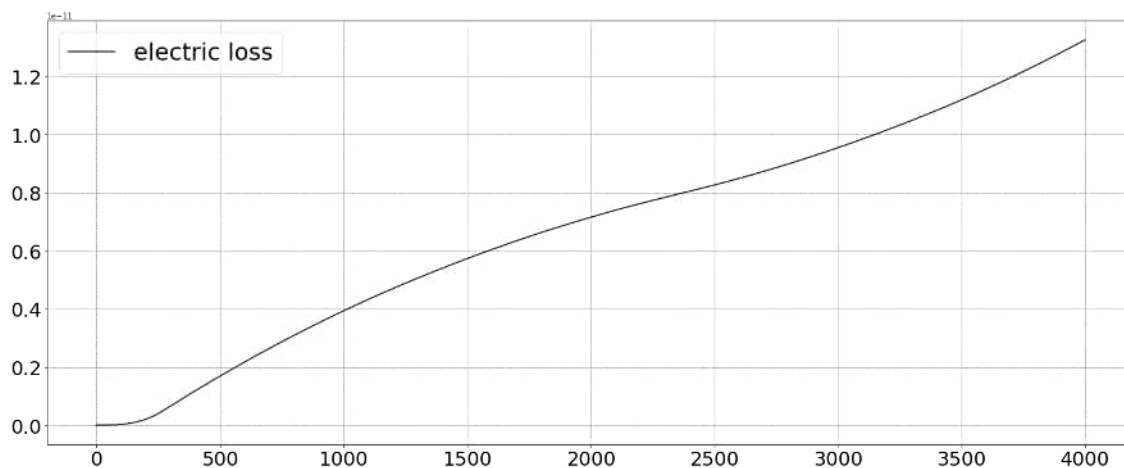


Рисунок 7.15 - накопичені в часі електричні втрати

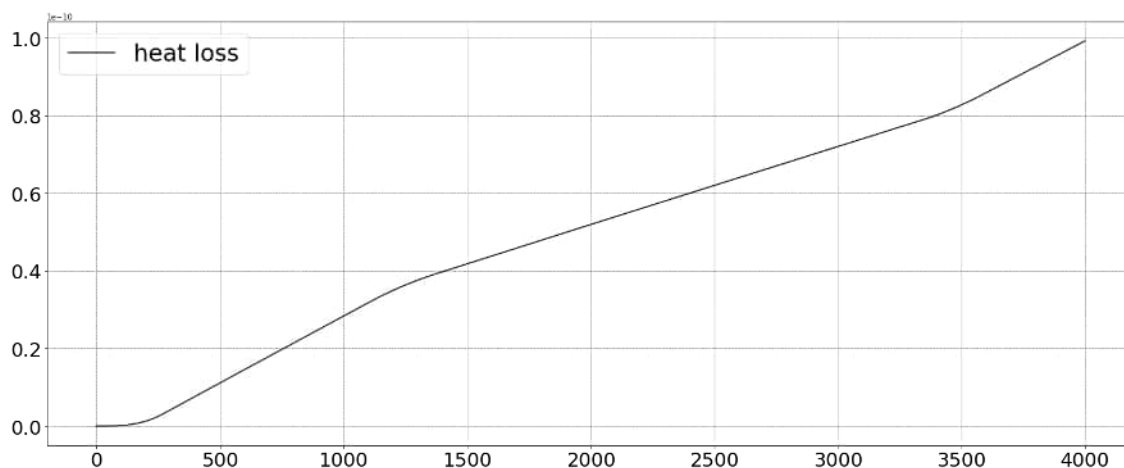


Рисунок 7.16 - накопичені в часі теплові втрати

Тепер перевіримо, чи задовольняється рівняння енергетичного балансу в будь-який момент часу $t \in (0, T]$ для оберненого п'єзоefекту. Для цього зобразимо графічні представлення лівої так правої частини цього рівняння.

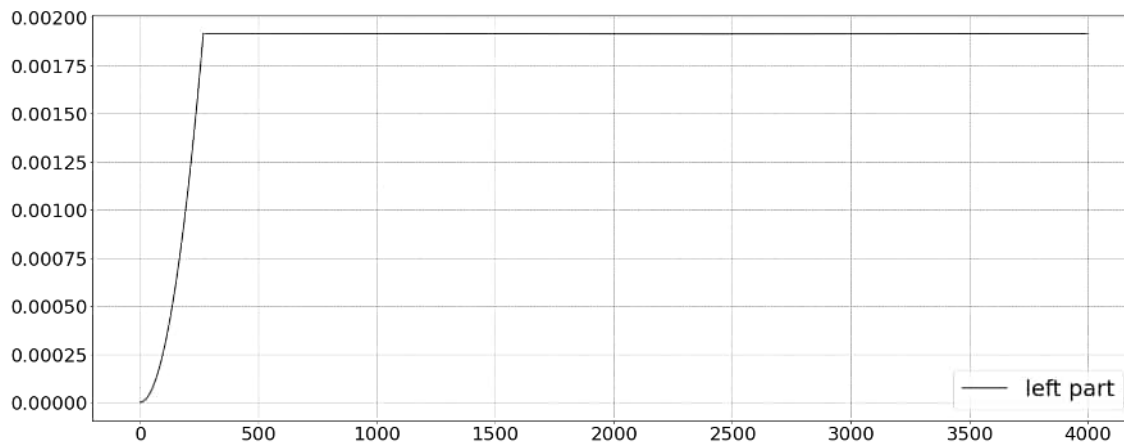


Рисунок 7.17 - графік лівої частини рівняння рівноваги

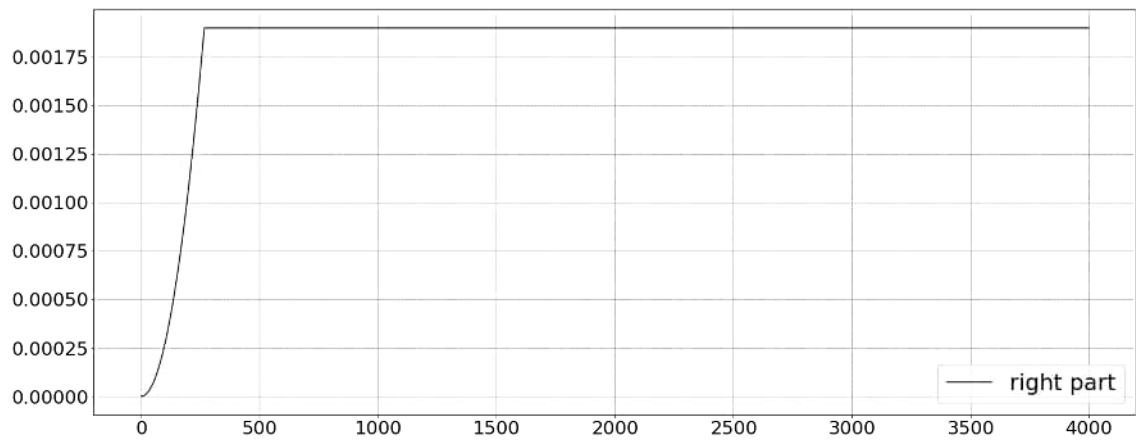


Рисунок 7.18 - графік правої частини рівняння рівноваги

Як бачимо, графіки є майже ідентичними а отже рівняння енергетичної рівноваги задовольняється в будь який момент часу $t \in (0, T]$.

ВИСНОВКИ

У цій дипломній роботі розглядається початково-крайова задача термоп'єзоелектрики, а саме поведінка стержня з матеріалу PZT-4 під дією механічного навантаження (прямий п'єзоэффект) та електричного струму (обернений п'єзоэффект). Початково-крайову задачу початково-крайову задачу було зведено до варіаційної задачі, ввівши відповідні білінійні форми та лінійні функціонали. Далі за допомогою напівдискретизації Гальоркіна за просторовою змінною та однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі було зведено цю варіаційну задачу до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. За базисні функції я обрав кусково задані лінійні функції Куранта. Отриману СЛАР на кожному кроці однокрокової рекурентної схеми було розв'язано методом Гауса.

Програмне забезпечення для розв'язання цієї задачі я написав за допомогою мови програмування Python та інтегрованого середовища розробки JupyterLab. Створена мною програма дає можливість користувачеві вводити коефіцієнти рівняння, бачити графіки результатів, виводить норми функцій апроксимацій, обчислює порядок збіжності отриманих розв'язків в просторі $L^2[0, L]$ та виводить профілі складових повної енергії піроелектрика, енергетичні втрати в часі та графічне відображення лівої та правої частин рівняння енергетичної рівноваги.

За допомогою розробленого програмного забезпечення було проведено числові експерименти для випадків прямого та оберненого п'єзоэффекту у піроелектричному стрижні. В обох випадках було продемонстровано графіками і проаналізовано зміну в часі шуканих невідомих величин, а також перевірено виконання рівняння енергетичного балансу та наведено графіки зміни в часі повної енергії піроелектричного стрижня.

Було обчислено порядок збіжності для отриманих розв'язків, а саме при явищі прямого п'єзоэффекту в момент часу $T = 75 \cdot 10^{-7}$ с. Для пружного зміщення, приросту температури та електричних потенціалів порядок збіжності

$p \approx 2$, що й очікувалося. Також було перевірено виконання рівняння енергетичного балансу та наведено графіки зміни в часі компонент повної енергії піроелектричного стрижня.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вагін П. Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. /П.П. Вагін, Б.А. Остудін, Г.А. Шинкаренко. – Львів:ЛНУ, 2005. - 140 с.
2. Стельмашук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмашук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 22. – С. 92-107.
3. Шинкаренко Г. Постановка та розв'язуваність початково-крайових задач електров'язкопружності. / Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. -1990. - Вип. 33. - С. 10-16.
4. Becker E. B. Finite Elements. An Introduction / E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1981. – Vol. I. – 272 p.
5. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectrics. / F.Chaban, H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk, S.Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. – Opole: Politechnika Opolska. –2012. – Vol.1, Ch.9. – P. 107-118.
6. Schwartz M. Encyclopedia of Smart Materials / M. Schwartz. –New-York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 1073 p.
7. Tichy J. Fundamentals of Piezoelectric Sensorics. Mechanical, Dielectric and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials / J. Tichy, J. Erhart, E. Kittinger, J. Privratska. – Berlin:Springer, 2010. – 216 p.