

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Факультет прикладної математики та інформатики**  
**Кафедра теорії оптимальних процесів**

**Затверджено**

На засіданні кафедри теорії оптимальних процесів факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 7.09. 2020 р.)

Завідувач кафедри Шахно С.М.

---

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Чисельні методи лінійної алгебри”,**  
**що викладається в межах ОПП Системний аналіз**  
**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з**  
**спеціальності 124 – системний аналіз**

**Львів 2020 р.**

<b>Назва дисципліни</b>	<b>Чисельні методи лінійної алгебри</b>
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Факультет прикладної математики та інформатики, Кафедра теорії оптимальних процесів
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	12 – інформаційні технології 124 – системний аналіз
<b>Викладачі дисципліни</b>	Шахно Степан Михайлович, завідувач кафедри теорії оптимальних процесів, професор, Шунькін Юрій Валерійович, асистент
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:stepan.shakhno@lnu.edu.ua">stepan.shakhno@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/shahno">https://ami.lnu.edu.ua/employee/shahno</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, ауд. 269. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://ami.lnu.edu.ua/?post_type=course&amp;p=15323&amp;preview=true">https://ami.lnu.edu.ua/?post_type=course&amp;p=15323&amp;preview=true</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Цей курс охоплює такі розділи чисельних методів лінійної алгебри: Теорія похибок, прямі методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь, ітераційні розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь, методи розв'язування задач на власні значення, поняття про методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь великої розмірності. При розгляді конкретних методів з перелічених розділів основна увага зосереджується на строгій постановці задач, обґрунтуванню їх коректності, розгляду ідей побудови методів, обґрунтуванню їх збіжності та стійкості, побудові оцінок похибок. Викладення матеріалу здійснюється на основі понять математичного та функціонального аналізу, лінійної алгебри. Студенти мають можливість представити результати своїх програм.
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Дисципліна “Чисельні методи лінійної алгебри” є нормативною дисципліною зі спеціальності 124 – системний аналіз для бакалаврської освітньої програми, яка викладається в 3-му семестрі в обсязі 4-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).  У курсі вивчаються прямі та ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), ітераційні методи для проблем власних значень. Викладаються основи методів для лінійних систем великої розмірності та лінійних задач найменших квадратів. Значна увага приділяється дослідженню чисельної стійкості та збіжності методів, врахуванню похибок заокруглень, алгоритмам і їх реалізації на комп'ютерах.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Метою цього курсу є строге викладення основ чисельних методів з доведенням збіжності, аналізом похибок та роз'яснення нюансів алгоритмічної реалізації.  Головними цілями курсу є ознайомлення студентів із основними чисельними методами з перелічених розділів, із способами їх

	обґрунтування та із практичними рекомендаціями щодо використання.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	<p style="text-align: center;"><b>Рекомендована література Базова</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень.-К.: Вища школа, 1995.- Ч.1, Ч.2.</li> <li>2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1982.</li> <li>3. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. Львів; 2004. – 408 с.</li> <li>4. Шахно С.М. Чисельні методи лінійної алгебри. Львів, 2007. – 248 с.</li> <li>5. Шахно С.М., Дудикевич А.Т., Левицька С.М. Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри. Львів, 2009. – 148 с.</li> <li>6. Quarteroni G. and others. Numerical Mathematics. - Berlin:Springer, 2001.</li> </ol> <p style="text-align: center;"><b>Допоміжна</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.-М.: Наука, 1987.</li> <li>8. Джорж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.</li> <li>9. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М., Наука, 1984. – 192 с.</li> <li>10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1985. - 280 с.</li> <li>11. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. – 288 с.</li> <li>12. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. - М.:Мир, 1983.</li> <li>13. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. – 616 с.</li> <li>14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. – 432 с.</li> <li>15. Сборник задач по методам вычислений. Под ред. П.И. Монастырного. Мн., 1983.- 287 с.</li> <li>16. Уилкинсон Дж., Райнш К.. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976. – 329 с.</li> <li>17. Калиткин Н.Н. Численные методы.-М.: Наука, 1978.</li> <li>18. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. –840 с.</li> </ol>
<b>Обсяг курсу</b>	Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 56 год., з них 28 год. лекцій і 28 год. лабораторних занять. Самостійної роботи: 64 год.
<b>Очікувані результати навчання</b>	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p><b>Знати:</b> Теорію похибок обчислень, основні чисельні методи лінійної алгебри (прямі та ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь та задач на власні значення) та їх обґрунтування.</p> <p><b>Вміти:</b> створювати власні програми та використовувати наявне програмне забезпечення для лінійних задач, застосовувати вивчені методи та алгоритми для розв'язування конкретних лінійних задач.</p>
<b>Ключові слова</b>	Абсолютна та відносна похибки, система лінійних алгебричних рівнянь, прямий метод, ітераційний процес, збіжність, варіаційний метод, задача на власні значення, алгоритми, програмна реалізація алгоритмів.

<b>Формат курсу</b>	Очний, дистанційний . Проведення лекційних та лабораторних занять, виконання індивідуальних завдань, реалізація програм і консультацій.
<b>Теми</b>	<p><b>Змістовий модуль 1. Теорія похибок.</b></p> <p><b>Тема 1. Врахування похибок наближених обчислень.</b> Класифікація похибок. Точні десяткові знаки. Похибка функції. Похибки математичних операцій. Обернена задача теорії похибок.</p> <p><b>Змістовий модуль 2. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.</b></p> <p><b>Тема 2. Метод Гауса та його модифікації.</b> Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Класифікація методів (прямі, ітераційні). Метод Гауса з постовпцевим вибором головного елемента. Алгоритм та програма методу. Метод головних елементів. Застосування методу Гауса до обчислення визначників і до обертання матриць.</p> <p><b>Тема 3. Розклади матриць та їх застосування.</b> LU-розклад матриць. Теорема про LU-розклад матриць. Виведення формул LU-розкладу. Розв'язування лінійних систем і обертання матриць з допомогою LU-розкладу. Зв'язок методу Гауса з розкладом матриці на множники. Розклад симетричних матриць. Метод квадратних коренів.</p> <p><b>Тема 4. Методи розв'язування СЛАР з розрідженими матрицями.</b> Метод прогонки розв'язування СЛАР з тридіагональною матрицею. Стійкість методу прогонки. Метод ортогоналізації. Метод поворотів розв'язування лінійних систем. Стрічковий метод. Профільний метод для розв'язування розріджених систем лінійних рівнянь. Алгоритм Калхілла-Маккі.</p> <p><b>Тема 5. Зумовленість матриць та оцінка відносної похибки наближеного розв'язку.</b> Норми та обумовленість матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Повна оцінка відносної похибки. Контроль точності і уточнення наближеного розв'язку в рамках прямого методу.</p> <p><b>Змістовий модуль 3. Ітераційні методи розв'язування лінійних алгебраїчних систем і обертання матриць.</b></p> <p><b>Тема 6. Ітераційні методи релаксаційного типу.</b> Метод простих ітерацій. Збіжність методу. Метод Якобі та його збіжність. Метод Зейделя і його збіжність. Метод релаксації.</p> <p><b>Тема 7. Ітераційні методи варіаційного типу.</b> Метод мінімальних нев'язок. Метод мінімальних поправок. Метод спряжених градієнтів.</p> <p><b>Тема 8. Методи обертання матриць.</b> Швидкозбіжний ітераційний спосіб обертання матриць. Вплив похибок заокруглення в ітераційних методах.</p> <p><b>Змістовий модуль 4. Методи розв'язування алгебраїчних проблем власних значень.</b></p> <p><b>Тема 8. Власні пари матриці і їх найпростіші властивості.</b></p> <p><b>Тема 9. Методи розв'язування часткових задач на власні значення.</b></p>

	<p>Метод тепенів. РМ-алгоритм. Знаходження найменшого за модулем власного числа, інших її чисел. Метод скалярних добутоків. SP-алгоритм. Зворотні ітерації. Метод зворотних ітерацій зі зсувом. Змінні зсуви. Зворотні ітерації з відношеннями Релея. RQI – алгоритм.</p> <p><b>Тема 10. Методи розв'язування повної проблеми власних значень.</b>  Метод поворотів Якобі розв'язування симетричної повної проблеми власних значень. Алгоритм методу поворотів Якобі. Збіжність методу. Циклічний метод Якобі з бар'єрами. Поняття про LU-алгоритм для несиметричних задач. QR-алгоритм. Матриця Хессенберга та матриця Хаусхолдера. Зведення матриць загального вигляду до матриць Хессенберга за допомогою матриці відображення Хаусхолдера. Перетворення плоских поворотів Гівенса та його використання в QR-розкладі. Метод бісекцій для обчислення власних значень тридіагональних матриць. QR-алгоритм зі зсувами.</p>																		
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Екзамен у кінці семестру.																		
<b>Пререквізити</b>	<p>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Математичного аналізу; Лінійної алгебри;</li> <li>- Програмування,</li> </ul> <p>достатніх для сприйняття сучасних чисельних методів розв'язування лінійної алгебри.</p>																		
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Лекції, лабораторні заняття в комп'ютерних класах. Індивідуальні завдання.																		
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер із стандартним програмним забезпеченням, Internet доступ..																		
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <table border="1" data-bbox="459 1301 1469 1592"> <thead> <tr> <th colspan="4">Поточне тестування та самостійна робота</th> <th>Контр. робота</th> <th>екзамен</th> <th>Сума</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Зміст. мод. 1</td> <td>Зміст. мод. 2</td> <td>Зміст. мод.3</td> <td>Зміст. мод.4</td> <td rowspan="2">20</td> <td rowspan="2">50</td> <td rowspan="2">100</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>10</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Академічна доброчесність:</b>  Відвідування лекцій та лабораторних завдань обов'язкове.  Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>	Поточне тестування та самостійна робота				Контр. робота	екзамен	Сума	Зміст. мод. 1	Зміст. мод. 2	Зміст. мод.3	Зміст. мод.4	20	50	100	2	10	8	10
Поточне тестування та самостійна робота				Контр. робота	екзамен	Сума													
Зміст. мод. 1	Зміст. мод. 2	Зміст. мод.3	Зміст. мод.4	20	50	100													
2	10	8	10																
<b>Питання до екзамену.</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Врахування похибок наближених обчислень. Класифікація похибок.</li> <li>2. Абсолютна та відносна похибки. Точні десяткові знаки. Приклади.</li> <li>3. Похибка функції. Похибки математичних операцій.</li> <li>4. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Класифікація методів .</li> <li>5. Метод Гауса з постовпцевим вибором головного елемента. Алгоритм методу. Приклад.</li> <li>6. Особливості реалізації алгоритму методу Гауса. Застосування методу Гауса до обчислення визначників і до обертання матриць.</li> <li>7. LU-розклад матриць. Теорема про LU-розклад матриць.</li> </ol>																		

	<p>8. Виведення формул LU-розкладу. Приклад.</p> <p>9. Розв'язування лінійних систем і обертання матриць з допомогою LU-розкладу. Зв'язок методу Гауса з розкладом матриці на множники. Приклад.</p> <p>10. Розклад симетричних матриць. Метод квадратних коренів. Приклад.</p> <p>11. Метод прогонки розв'язування СЛАР з тридіагональною матрицею.</p> <p>12. Стійкість методу прогонки.</p> <p>13. Метод ортогоналізації. Приклад.</p> <p>14. Метод поворотів розв'язування лінійних систем.</p> <p>15. Метод відбиттів.</p> <p>16. Контроль точності і уточнення наближеного розв'язку в рамках прямого методу.</p> <p>17. Ітераційні методи розв'язування лінійних алгебраїчних систем і обертання матриць. Метод простих ітерацій. Збіжність методу.</p> <p>18. Метод Якобі та його збіжність. Приклад.</p> <p>19. Метод Зейделя і його збіжність (варіанти МПІ і методу Якобі). Приклад.</p> <p>20. Метод релаксації.</p> <p>21. Ітераційні методи варіаційного типу для розв'язування СЛАР. Метод мінімальних відхилів.</p> <p>22. Метод мінімальних поправок.</p> <p>23. Методи найшвидшого спуску.</p> <p>24. Методи розв'язування алгебраїчних проблем власних значень. Власні пари матриці і їх найпростіші властивості. Приклад.</p> <p>25. Метод степенів. РМ-алгоритм. Приклад.</p> <p>26. Знаходження найменшого за модулем власного числа, інших її чисел. Метод скалярних добутків. SP-алгоритм. Приклад.</p> <p>27. Зворотні ітерації. Приклад.</p> <p>28. Зворотні ітерації зі співвідношеннями Релея. RQI – алгоритм.</p> <p>29. Метод поворотів Якобі розв'язування симетричної повної проблеми власних значень. Алгоритм методу поворотів Якобі.</p> <p>30. Поняття про LU-алгоритм для несиметричних задач. Приклад.</p> <p>31. QR-алгоритм. Матриця Хессенберга та матриця Хаусхолдера. Зведення матриць загального вигляду до матриць Хессенберга за допомогою матриці відображення Хаусхолдера. Приклад.</p> <p>32. Перетворення плоских поворотів Гівенса. Приклад.</p> <p>33. Метод бісекцій для обчислення власних значень тридіагональних матриць. Приклад.</p> <p style="text-align: center;"><b>Практичні вправи</b></p> <p>Норми матриць. Знаходження LU-розкладу та <math>U^T U</math>-розкладу матриці та їх застосування при розв'язуванні СЛАР. Метод Гауса. Ітераційні формули методів Якобі та Зейделя, умови їх збіжності. Власні пари матриць. Степеневий метод та метод скалярних добутків знаходження власних пар. Застосування перетворень Хаусхолдера та Гівенса. LU-алгоритм для задач на власні значення. Метод бісекцій.</p>
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.