

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Вступ..... | 2 |
| 1.Формулювання крайової задачі..... | 3 |
| 2. Варіаційна постановка задачі..... | 4 |
| 3. Дискретизація Гальоркіна..... | 5 |
| 4. Метод скінченних елементів..... | 6 |
| 4.1 Кусково-лінійні апроксимації..... | 6 |
| 4.1.1 Попередні позначення..... | 6 |
| 4.1.2 Лінійний поліном на скінченному елементі..... | 7 |
| 4.2. Кусково-квадратичні апроксимації..... | 8 |
| 4.2.1. Попередні позначення..... | 8 |
| 4.2.2 Квадратичний поліном на скінченому елементі..... | 8 |
| 4.3. Кусково-кубічні апроксимації Ерміта..... | 9 |
| 4.3.1. Попередні позначення..... | 9 |
| 4.3.2. Стандартна кубічна апроксимація..... | 9 |
| 5. Апостеріорний оцінювач похибки..... | 11 |
| 5.1. Апостеріорний оцінювач похибки частинами лінійних апроксимацій..... | 12 |
| 5.2. Апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій..... | 12 |
| 5.3. Апостеріорний оцінювач похибки кубічних апроксимацій Ерміта..... | 13 |
| 6. Стратегії адаптування сіток МСЕ..... | 15 |
| 6.1. Стратегія №1..... | 15 |
| 6.2. Стратегія №2 (класична)..... | 16 |
| 7. Програмна реалізація алгоритмів..... | 17 |
| 8. Аналіз результатів..... | 19 |
| 8.1 Лінійна апроксимація..... | 19 |
| 8.2 Квадратична апроксимація..... | 27 |
| 8.3 Кубічна апроксимація..... | 31 |
| Висновок..... | 35 |
| Список використаної літератури..... | 36 |

ВСТУП

Один з найбільш популярних методів прикладної математики, який широко використовується в комп'ютерно-орієнтованих науках, - це метод скінчених елементів (МСЕ). Його теоретичні основи були започатковані в роботах Рітца, Гальоркіна і Куранта. Завдяки сучасним інформаційним засобам, цей метод отримав значний розвиток.

Метод скінчених елементів ґрунтується на використанні варіаційних формулювань крайових задач, використанні функцій скінчених елементів та призводить до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь зі спеціальною структурою. Ці матриці мають розріджену форму, з багатьма нульовими елементами, за деталями див. [1].

У цій роботі метод скінчених елементів використовується для вирішення крайових задач, які містять звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Для отримання наближених розв'язків цих задач були розроблені адаптивні схеми методу скінчених елементів з використанням кусково-лінійних, кусково-квадратичних та кусково-кубічних апроксимацій, див [2].

У даній роботі досліджується проблема адаптації сіток методу скінчених елементів (МСЕ). Метою є розробити ефективні алгоритми адаптації сіток. Проблема адаптації сіток методу скінчених елементів полягає у визначенні оптимального розміру і кількості скінчених елементів. Це важливо, оскільки недостатньо точна або надмірно деталізована сітка може призвести до неточності апроксимації розв'язку або зайвих обчислювальних витрат.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Ця робота присвячена чисельному розв'язуванню крайової задачі, яка має наступний вигляд: рівняння (1.1) разом з крайовими умовами (1.2).

$$-\frac{d}{dx} \left(\mu \frac{du(x)}{dx} \right) + \beta(x) \frac{du(x)}{dx} + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0,$$

$$-\mu \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = \alpha[u(1) - \bar{u}] \quad (1.2)$$

Шукаємо функцію $u(x)$, на області $\Omega = [0,1]$, яка задовольняє це рівняння та крайові умови, враховуючи обмеження, описані в (1.3).

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, \sigma(x) \geq 0 \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.3)$$

Розглянуті $\mu(x)$, $\beta(x)$ і $\sigma(x)$ – попередньо задані функції.

2. ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для отримання варіаційного формулювання крайової задачі (1.1)-(1.2), ми розглянемо функцію $v=v(x)$ і перемножимо наше рівняння (1.1) на цю функцію. Після цього проінтегруємо отримане рівняння частинами на проміжку $[0,1]$. Це призведе до такої форми:

$$0 = \int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left[\mu(x) \frac{du}{dx} \right] + \beta(x) \frac{du}{dx} + \sigma(x)u - f(x) \right\} v dx \quad (2.1)$$

$$0 = -\mu(x)v(x) \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \mu(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 \left\{ \beta(x) \frac{du}{dx} + \sigma(x)u - f(x) \right\} v dx$$

З урахуванням отриманої тотожності та крайових умов задачі (1.2), ми встановлюємо множину функцій, які задовольняють вимогам задачі.

$$V = \{v \in H^1(0; 1): v(0) = 0\}$$

Формулюємо варіаційну задачу, що відповідає (1.1)-(1.2):

$$\text{Знайти } u \in V = \{v \in H^1(0; 1): v(0) = 0\}: \quad (2.2)$$

$$\int_0^1 \left\{ \mu(x) \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + \beta(x)v \frac{du}{dx} + \sigma(x)vu - f(x)v \right\} dx + \alpha u(1)v(1) - \alpha \bar{u}v(1) = 0$$

$\forall v \in V$

Цю задачу можна записати у вигляді (2.3)

$$\text{Знайти } u \in V: c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \text{ де} \quad (2.3)$$

$$c(u, v) = \int_0^1 \left\{ \mu(x) \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + \beta(x)v \frac{du}{dx} + \sigma(x)vu \right\} dx + \alpha u(1)v(1)$$

$$\langle l, v \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot v dx + \alpha \bar{u}v(1)$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

Далі ми використовуємо метод Гальоркіна для дискретизації, що означає перехід від варіаційної задачі у нескінченновимірному просторі допустимих функцій V до відповідно обраного скінченновимірного підпростору $V_h \subset V$. Цей підхід дозволяє перетворити варіаційну задачу на систему алгебраїчних рівнянь, розв'язок яких може бути знайдений за допомогою вже відомих методів.

Основна ідея методу Гальоркіна полягає в тому, що ми переносимо розв'язування варіаційної задачі з нескінченновимірного простору допустимих функцій до відповідного скінченновимірного підпростору. Це дозволяє перетворити варіаційну задачу на систему алгебраїчних рівнянь, які можна розв'язати за допомогою вже відомих методів, реалізованих у потужних програмах.

Замість точного розв'язку варіаційної задачі, ми отримуємо лише наближений розв'язок, що можна назвати "апроксимацією розв'язку" в цьому скінченновимірному просторі. Вибираючи послідовність підпросторів, відповідних простору допустимих функцій V , ми можемо переформулювати варіаційну задачу у вигляді послідовності задач (3.1).

$$\begin{cases} \text{Задано } h = \text{const } i V_h \in V, \dim V_h = n < +\infty \\ \text{знайти } u_h \in V_h: c(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h \end{cases} \quad (3.1)$$

4. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

Для подальшого розв'язання варіаційної задачі (2.6) за допомогою методу скінченних елементів, фіксуємо натуральне $N > 1$ і за допомогою сітки вузлів $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N = b$ поділимо відрізок $[a, b]$ на скінченні елементи $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N - 1$. Щоб уніфікувати процеси визначення базисних функцій та необхідних обчислень на кожному такому елемент $K_{i+\frac{1}{2}}$ вводимо локальну координату ξ .

Переформулювавши варіаційну задачу (2.6) у локальних координатах ξ на кожному скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$, ми отримуємо систему лінійних рівнянь для невідомих значень коефіцієнтів на цьому елементі. Ця система включає визначення базисних функцій, обчислення матриц, збирання системи рівнянь і розв'язання її.

Після розв'язання системи лінійних рівнянь на кожному елементі, отримується наближений розв'язок варіаційної задачі на цьому елементі. Ці розв'язки зібрані разом для утворення повного розв'язку на всьому відрізку $[a, b]$. Цей процес дозволяє наближено розв'язати варіаційну задачу (2.6) за допомогою методу скінченних елементів, розбиваючи її на простіші задачі на кожному скінченному елементі сітки.

4.1 Кусково-лінійні апроксимації

4.1.1 Попередні позначення

Для скінченного елемента $K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$ який має довжину $h = x_{i+1} - x_i$ вводимо локальну координату ξ відповідно до наступного правила

$$\left\{ \begin{aligned} x = x(\xi) &:= \frac{1 - \xi}{2} x_i + \frac{1 + \xi}{2} x_{i+1} \\ &:= \theta(\xi) x_i + \omega(\xi) x_{i+1} \\ &:= x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \xi \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

$$\xi \in [-1,1]$$

$$\text{Тут } \theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.2)$$

4.1.2 Лінійний поліном на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі вибираємо лінійну апроксимацію для розв'язку варіаційної задачі (1.1).

$$\begin{aligned} u_h(x) &:= \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ q_i \left[1 - \omega_{n+\frac{1}{2}}(x) \right] + \omega_{n+\frac{1}{2}}(x) \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^N q_n \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Де коефіцієнти представляють апроксимацію МСЕ як лінійну комбінацію кусково-визначених базисних функцій Куранта

$$\varphi_n := \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}]; \\ \omega_{n-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{n-1}, x_n]; \\ 1 - \omega_{n+\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_n, x_{n+1}]; \\ 0, & x \in (x_{n+1}, 1]; \end{cases} \quad (4.4)$$

$$n = 1, \dots, N$$

Саме ця система функцій утворює базис у вибраному нами просторі наближень V_h . Це означає, що будь-яка функція з цього простору може бути представлена як лінійна комбінація цих базисних функцій. Розмірність цього простору апроксимацій дорівнює N , що відображає кількість базисних функцій у системі.

4.2. Кусково-квадратичні апроксимації

4.2.1. Попередні позначення

Для скінченного елемента $K_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$, який має довжину $h = x_{i+1} - x_i$, вводимо локальну координату ξ відповідно до наступного правила

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_{i+1} \\ \quad := \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ \quad := x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\xi \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\xi \in [-1, 1]$$

Тут

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.6)$$

4.2.2 Квадратичний поліном на скінченому елементі

Виберемо квадратичну апроксимацію розв'язку варіаційної задачі (1.1) на кожному скінченому елементі у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] = u_h(\xi) := \left\{ 2\theta(\xi) \left[\theta(\xi) - \frac{1}{2} \right] \right\} u_i + \left\{ 4\omega(\xi)\theta(\xi) \right\} u_{i+\frac{1}{2}} \\ \quad + \left\{ 2\omega(\xi) \left[\omega(\xi) - \frac{1}{2} \right] \right\} u_{i+1} \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1}, \forall \xi \in [-1, 1], i = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4.7)$$

У цій формулі, для опису квадратичної апроксимації з (4.7) як функції глобальної змінної x , достатньо замінити визначення (4.6) функції на

$$\theta(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h}, \quad \omega(x) = \frac{x - x_i}{h}.$$

4.3. Кусково-кубічні апроксимації Ерміта

4.3.1. Попередні позначення

Для скінченного елемента $K_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$, який має довжину $h = x_{i+1} - x_i$, вводимо локальну координату ξ відповідно до наступного правила

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_{i+1} \\ \quad := \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ \quad := x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\xi \\ \xi \in [-1,1] \end{cases} \quad (4.8)$$

Тут

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.9)$$

Зазначимо, що

$$\begin{cases} \theta(\xi) + \omega(\xi) = 1 \\ \frac{d}{d\xi} \theta(\xi) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.10)$$

отже, при обчисленні похідних функції $u=u(x)$, ми використовуємо відповідні правила та формули:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} u[x(\xi)] = \frac{2}{h} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{2}{h}\right)^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

4.3.2. Стандартна кубічна апроксимація

Існують два способи побудови апроксимацій Ерміта: стандартна кубічна апроксимація та кубічна апроксимація з центральним вузлом. В даному

випадку ми розглядаємо стандартну кубічну апроксимацію, де використовуються невідомі $\{u_k, \frac{du_k}{dx}\}$ значення в вузлах x_k , де $k = i, i + 1$, на скінченному елементі $K_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$. Формула для такої апроксимації має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} u(x) &\cong u_h(\xi) := & (4.12) \\ &:= \{\theta^2(2\omega + 1)\}u_i + \{2\theta^2\omega\}\frac{d}{dx}u_i + \{\omega^2(2\theta + 1)\}u_{i+1} + \{-2\omega^2\theta\}\frac{d}{dx}u_{i+1} \end{aligned}$$

Після обчислень отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}u_h(\xi) &= \{-3\omega\}u_i + \{\theta(1 - 3\omega)\}\frac{d}{dx}u_i + \\ &\quad \{3\theta\omega\}u_{i+1} + \{\omega(1 - 3\theta)\}\frac{d}{dx}u_{i+1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}u_h(\xi) &= \left\{\frac{3}{2}(\omega - \theta)\right\}u_i + \{\omega - 2\theta\}\frac{d}{dx}u_i + \left\{\frac{3}{2}(\theta - \omega)\right\}u_{i+1} \\ &\quad + \{2\omega - \theta\}\frac{d}{dx}u_{i+1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Зокрема, при використанні цієї апроксимації ми отримуємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\xi}u_h(-1) &= \frac{d}{dx}u_i \\ \frac{d}{d\xi}u_h(1) &= \frac{d}{dx}u_i \\ \frac{d}{d\xi}u_h(0) &= \frac{3}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx}u_{i+1} - \frac{d}{dx}u_i\right) \\ \frac{d^2}{d\xi^2}u_h(0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}u_{i+1} + \frac{d}{dx}u_i\right) \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

5. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ.

Апостеріорний оцінювач похибки використовується для оцінки точності числового розв'язку задачі методом скінчених елементів. Він дозволяє приблизно визначити рівень похибки апроксимації і відповідно адаптувати сітку для покращення точності розв'язку. Використання оцінювача дозволяє визначити, наскільки точним є поточний розв'язок та яка є його похибка. Це дозволяє здійснити адаптацію сітки, змінивши розмір і кількість скінчених елементів, з метою поліпшення точності розв'язку. В результаті можна досягти кращої збіжності розв'язку, зменшити похибку апроксимації та забезпечити оптимальне використання обчислювальних ресурсів.

За допомогою схеми Гальоркіна ми можемо розкласти простір допустимих функцій V на пряму суму вибраного підпростору апроксимацій V_h та підпростору E , який називається простором всеможливих похибок, за деталями див. [3]. Це дозволяє нам переформулювати вихідну варіаційну задачу в наступний спосіб:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано апроксимацію Гальоркіна } u_h \in V_h \text{ для розв'язку} \\ u \in V \text{ задачі (2.4), } V_h \in V \\ \text{знайти похибку } e := u - u_h \in E := V \setminus V_h \text{ таку, що} \\ c(e, v) = \langle p(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\langle p(u_h), v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

Знаходження точного розв'язку задачі (5.1), як і вихідної варіаційної задачі (2.4), досить складне. Тому ми дискретизуємо її за схемою Гальоркіна в скінченновимірному підпросторі E_h простору похибок E . В результаті сформульовано дискретизовану варіаційну задачу для апроксимації похибки Гальоркіна:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } E_h \subset E, \dim E_h = N < \infty \\ \text{знайти } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ c(e_h, v) = \langle p(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E \end{array} \right. \quad (5.2)$$

5.1. Апостеріорний оцінювач похибки частинами лінійних апроксимацій

У випадку кусково-лінійних апроксимацій вигляду (4.3) похибку e_h будемо апроксимувати квадратичною бабл-функцією $b(\xi) = 4(1 - \omega)\omega$.

Будемо шукати наближення $\varepsilon_h \in E_h$ до істинної похибки апроксимації e_h у вигляді лінійної комбінації

$$e_h \approx \varepsilon_h := \sum_{i=0}^N \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x) \quad (5.3)$$

Для знаходження $\{\lambda_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$ скористаємося схемою Гальоркіна.

В результаті отримаємо наступний оцінювач похибки

$$\|\varepsilon_h\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3}{\mu} \frac{(f - \beta q - \sigma q)^2}{10 + PeSh} \right\}_{i+1/2} \quad (5.4)$$

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu}, Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu}.$$

5.2. Апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій

У випадку квадратичних апроксимацій вигляду (4.7) похибку e_h будемо апроксимувати кубічною бабл-функцією $b(\xi) = \theta\omega(\theta - \omega)$

З огляду на задачу про апостеріорний оцінювач похибки та класичну схему Гальоркіна її розв'язування знаходимо, що

$$e_{i+1/2} = \frac{\langle l, b \rangle_{i+1/2} - c(u_h, b)_{i+1/2}}{c(b, b)_{i+1/2}} \quad (5.5)$$

де $e_{i+1/2}$ апостеріорний оцінювач похибки на i -тому елементі

$$u_h(\xi) = \sum_{i=1}^3 t_i \varphi_i; \quad t = [u_i, u_{i+1/2}, u_{i+1}]$$

$$u_h(\xi) = \sum_{i=1}^3 t_i \varphi_i;$$

$$t = [u_i, u_{i+1/2}, u_{i+1}]$$

Для обчислення оцінювач похибки потрібно обчислити всі необхідні інтеграли. Після обчислень підставляємо обраховані інтеграли в (5.5) і отримуємо наступні формули:

$$\langle l, b \rangle_{i+\frac{1}{2}} = 0 \tag{5.6}$$

$$c(b, b)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma h}{210} + \frac{\beta}{5h} \tag{5.7}$$

$$c(u_h, b)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma h(u_i - u_{i+1})}{60} - \frac{\mu(2u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i+1} - u_i)}{15} \tag{5.8}$$

5.3. Апостеріорний оцінювач похибки кубічних апроксимацій Ерміта

Користуючись локальною координатою $\xi \in [-1; 1]$, у відповідності до викладеного у роботі [2], бабл-функцію у вигляді полінома четвертого порядку на $[x_i, x_{i+1}]$ можна подати у вигляді:

$$b = 16 \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^2 = 1 - 2\xi + \xi^4 \tag{5.9}$$

Щоб використати цю бабл-функцію для побудови апостеріорного оцінювача похибки апроксимацій Ерміта, виконуємо і отримуємо, що в цьому випадку оцінювач похибки апроксимацій МСЕ рівний:

$$e_h(x) \cong \varepsilon_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\langle l, b \rangle_{i+\frac{1}{2}} - c(u_h, b)_{i+\frac{1}{2}}}{c(b, b)_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ де} \quad (5.10)$$

$$u_h(\xi) = \sum_{i=1}^3 t_i \varphi_i; \quad t = [u_i, u_{i+1/2}, u_{i+1}] \quad (5.11)$$

$$\varphi_1 = \theta^2(2\omega + 1) = \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2);$$

$$\varphi_2 = 2\theta^2\omega = \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1);$$

$$\varphi_3 = -2\theta\omega^2 = \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1);$$

$$\varphi_4 = 2\omega(2\theta + 1) = \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2)$$

Обчисливши всі необхідні інтеграли, отримуємо, що оцінювач похибки рівний:

$$e_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\langle l, b \rangle_{i+\frac{1}{2}} - c(u_h, b)_{i+\frac{1}{2}}}{c(b, b)_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ де} \quad (5.12)$$

$$\langle l, b \rangle_{i+\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} h f_{i+\frac{1}{2}};$$

$$c(b, b)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{512}{105} \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{128}{315} \sigma_{i+\frac{1}{2}} h,$$

$$\begin{aligned} c(u_h, b)_{i+\frac{1}{2}} = & t_1 \left(\frac{4}{15} \sigma_{i+\frac{1}{2}} h - \frac{14}{35} \beta_{i+\frac{1}{2}} \right) + t_2 \left(\frac{4}{35} \sigma_{i+\frac{1}{2}} h - \frac{16}{105} \beta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{16}{15} \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}}{h} \right) \\ & + t_3 \left(-\frac{4}{35} \sigma_{i+\frac{1}{2}} h - \frac{16}{105} \beta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{16}{15} \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}}{h} \right) + t_4 \left(\frac{4}{15} \sigma_{i+\frac{1}{2}} h + \frac{14}{35} \beta_{i+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

6. СТРАТЕГІЇ АДАПТУВАННЯ СІТОК МСЕ

На кожному скінченному елементі перевіряємо чи виконується нерівність

$$\eta_{i+1/2} > eps, \quad (6.1)$$

де $\eta_{i+1/2} = \frac{\sqrt{N} \|e_h\|_{i+1/2}}{\sqrt{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} 100\%$, $\|e_h\|_{i+1/2}$ - локальна енергетична норма

оцінювача на $K_{i+1/2}$, $\|u_h\|_V^2$ - енергетична норма розв'язку на скінченному елементі K , eps - заданий максимально допустимий рівень похибки.

$\eta_{i+1/2}, i = 0, \dots, N - 1$ - індикатори похибки, які встановлюють відсоток, на який норма похибка відхиляється від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі. У випадку, якщо це значення перевищує заданий допустимий рівень, скінченний елемент розбивається на нові скінченні елементи. Якщо ж елемент не перевищує допустимого рівня, то такий елемент залишається без змін.

Для адаптування сіток будемо використовувати дві стратегії.

6.1. Стратегія №1

Для кожного скінченного елемента обчислюються індикатори похибки $\eta_{i+1/2}$. В залежності від значення індикатора похибки на скінченному елементі, цей елемент буде розділено на певну кількість нових скінченних елементів. Для цього шукаємо коефіцієнт $k = \max(\eta_{i+1/2})/m$, де m - кількість скінченних елементів, на яку буде поділено скінченний елемент з найбільшою похибкою. Після знаходження коефіцієнта кожен елемент, на якому виконується нерівність (5.1), ділиться на декілька нових, у співвідношенні $\eta_{i+1/2} : k$. Наприклад, скінченний елемент $K_{1+1/2}$, для якого $\eta_{1+1/2} = 40\% =$

$\max(\eta_{i+1/2})$, при $m = 5$ отримаємо $k = 8$. Тоді скінченний елемент $K_{4+1/2}$, для якого $\eta_{4+1/2} = 26\%$ буде поділений на 3 нових скінченних елементів. Решта елементів також буде розділена в співвідношенні до коефіцієнта, а елементи для яких не виконується нерівність, залишаються без змін і разом з усіма новоутвореними скінченними елементами формують уточнену сітку. Алгоритм буде повторюватися, поки жоден з елементів не задовольнить даної умови .

6.2. Стратегія №2 (класична)

Для кожного скінченного елемента обчислюються індикатори похибки $\eta_{i+1/2}$. Скінченні елементи, у яких значення індикаторів похибки перевищують заданий допустимий рівень, піддаються поділу. Це означає, що такі елементи розбиваються на два нових рівних скінчених елементи. Після поділу елементів сітка оновлюється, включаючи нові вузли. Процес адаптації сітки повторюється до досягнення певної точності.

7. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ

Програма для реалізації кусково-лінійних апроксимацій розроблена на мові програмування C# з використанням графічної бібліотеки ZedGraph і бібліотеки Accord.Math, яка доповнює функціонал матриць в .Net.

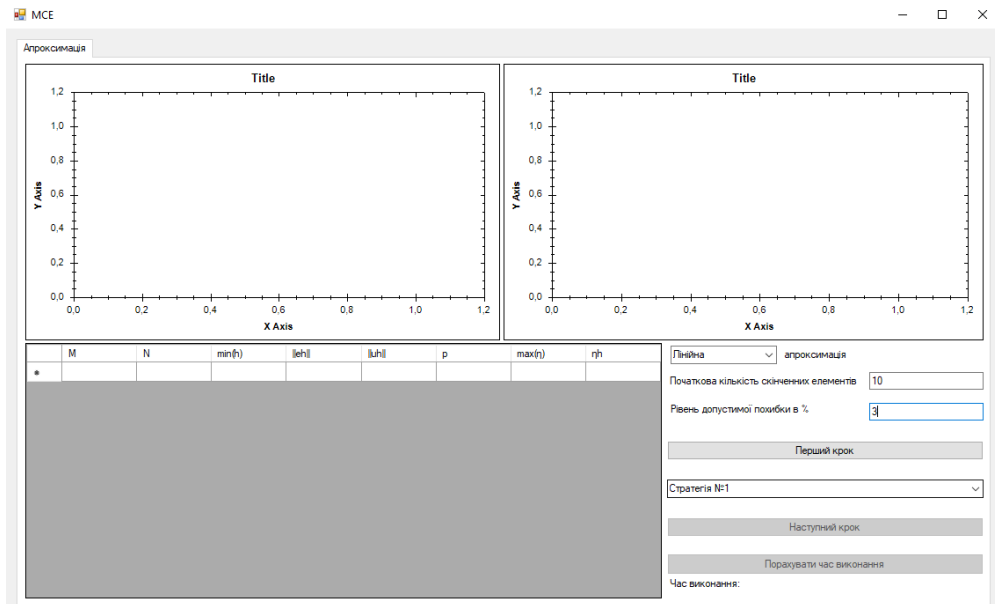


Рис.6.1 Вікно програми

В вікні рис.6.1 є графік наближеного розв’язку і графік поелементної похибки для попереднього кроку. В таблицю записуються значення кількості вузлів та кількості скінченних елементів, мінімальної довжина елемента, енергетичної норми похибки, енергетичної норми розв’язку, порядок збіжності, максимальної відносної похибки та глобальної похибки. Присутня можливість вводу початкової кількості скінченних елементів, а також рівня допустимої похибки. Є можливість вибору лінійної, квадратичною або кубічної апроксимацій, а також стратегії адаптування сітки.

При натисканні кнопки “Наступний крок” графік наближеного розв’язку оновлюється, як і графік похибки. Для кожного елемента перевіряємо нерівність (6.1), та в залежності від результату та вибраної стратегії ділимо його на певну кількість нових елементів. Під час кожного з розрахунків, в

табличку додається новий рядок. Програма реалізована таким чином щоб бачити результати апроксимації на кожному кроці.

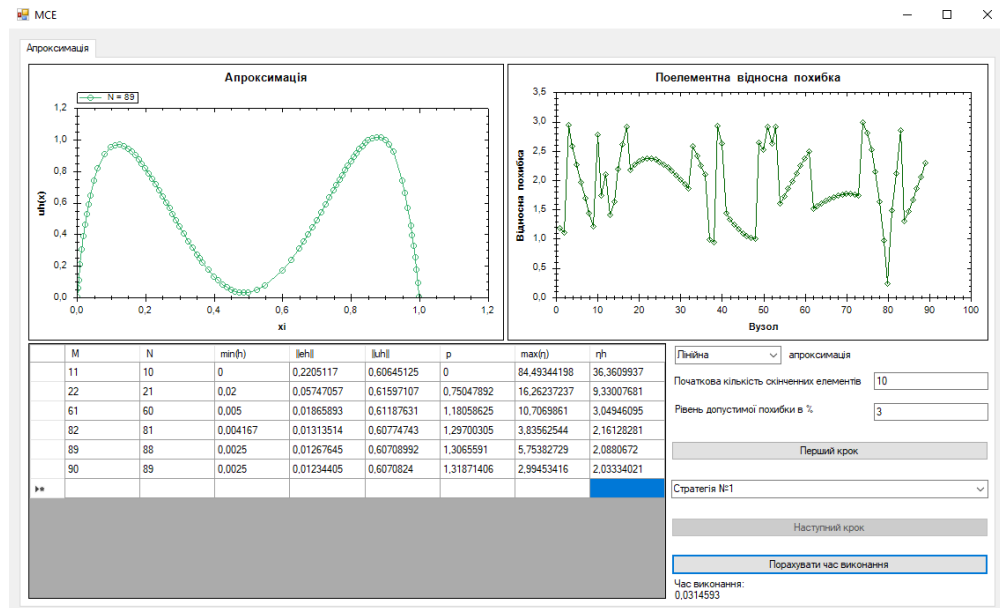


Рис.6.2 Вікно програми після обчислень

При натисканні кнопки “Порахувати час виконання” вираховується час розрахувань від першого до останнього кроку заданої апроксимації з вибраною стратегією, поки не досягнеться заданий максимально допустимий рівень похибки.

8. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для демонстрації розробленої методики розв'язування крайових задач розглянемо приклад.

Покладемо в рівняння крайової задачі (1.1)-(1.3) $\mu(x) = 0.0025$, $\beta(x) = 0$, $\sigma(x) = 1$, $f(x) = \cos^2 \pi x + 0.005 \pi^2 \cos 2 \pi x$.

В крайовій умові(1.2) візьмемо $\alpha = 10^{28}$, $\bar{u} = 0$

Візьмемо початкову кількість скінченних елементів $N=10$.

Обчислимо розв'язок нашої крайової задачі за допомогою кусково-лінійних, кусково-квадратичних та кусково-кубічних апроксимацій, задаємо максимальний рівень похибки $\varepsilon = 3\%$

8.1 Лінійна апроксимація

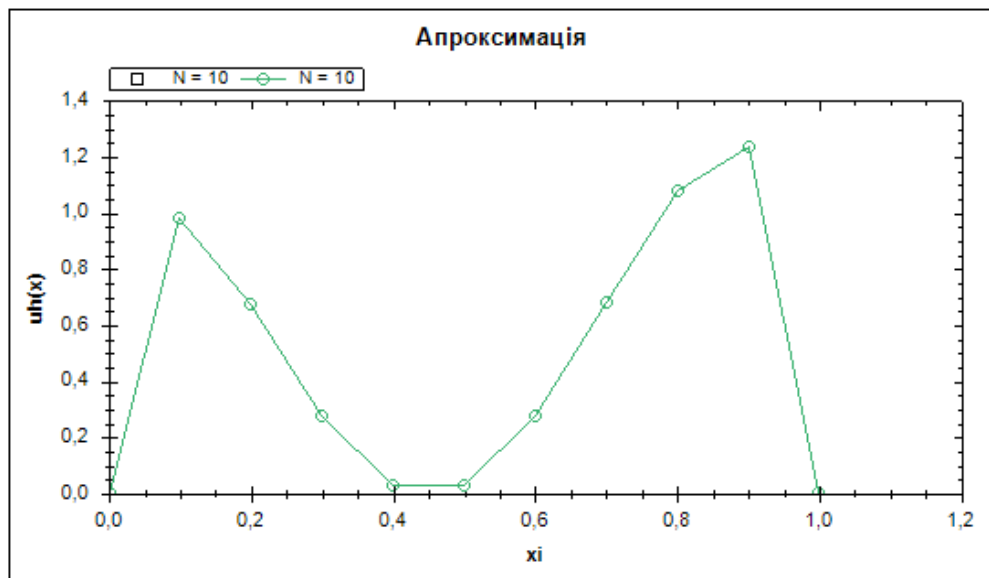


Рис.8.1.1 Перший крок кусково-лінійної апроксимації

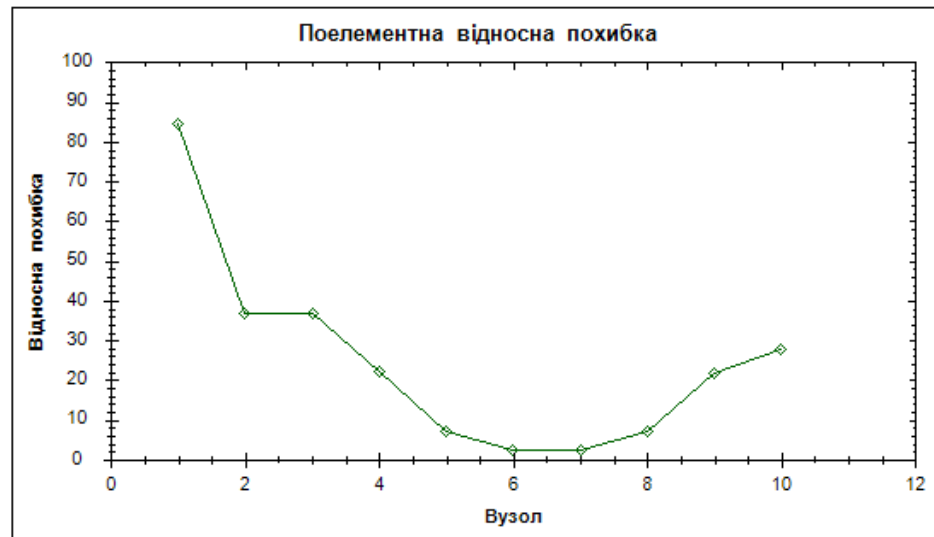


Рис. 8.1.2 Поелементна відносна похибка кусково-лінійної апроксимації на першому кроці

На рисунку 8.1.1 ми можемо побачити перший крок кусково-лінійної апроксимації. Рисунок 8.1.2 показує нам поелементну відносну похибку для кожного з скінченних елементів. Варто зазначити, що максимальне значення похибки припадає на перший скінченний елемент. Для порівняння візьмемо апроксимацію стратегіями №1 з різними значеннями коефіцієнта розбиття та стратегію №2, а також апроксимацію з рівномірним згущенням сітки.

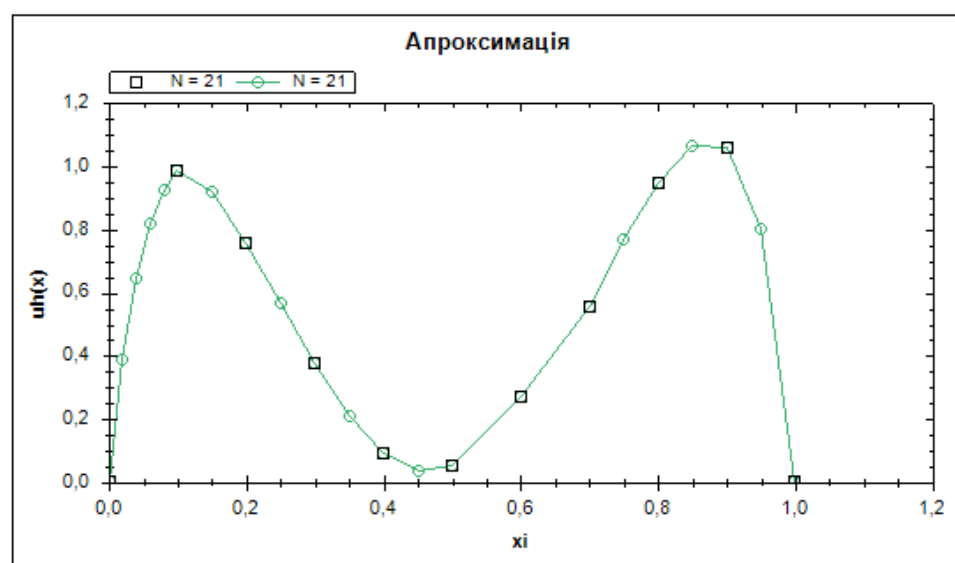


Рис. 8.1.3 Другий крок адаптування кусково-лінійної апроксимації стратегією №1 для $m=5$

Для адаптування сітки виберемо $m = 5$. Оскільки $\max(\eta_{i+1/2}) = \eta_{1/2} = 84.5$, отримуємо $k = 17$. На рис 8.1.3 ми можемо побачити другий крок з стратегією №1 для $k = 17$, перший скінченний елемент $K_{1/2}$, у якого була максимальна похибка, був поділений на 5 скінченних елементи, тоді як шостий скінченний елемент $K_{5+1/2}$ з $\eta_{5+1/2} = 2.3$ залишився без змін, оскільки $\eta_{5+1/2} < eps$.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №1 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 6 кроків та 89 скінченних елементи.

Таблиця 8.1.1. Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №1 та $m=5$

| M | N | min(h) | $\ e_h\ $ | $\ u_h\ $ | p | max(η) | η_h |
|----|----|----------|------------|------------|------------|---------------|------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,2205117 | 0,60645125 | 0 | 84,49344198 | 36,3609937 |
| 22 | 21 | 0,02 | 0,05747057 | 0,61597107 | 0,75047892 | 16,26237237 | 9,33007681 |
| 61 | 60 | 0,005 | 0,01865893 | 0,61187631 | 1,18058625 | 10,7069861 | 3,04946095 |
| 82 | 81 | 0,004167 | 0,01313514 | 0,60774743 | 1,29700305 | 3,83562544 | 2,16128281 |
| 89 | 88 | 0,0025 | 0,01267645 | 0,60708992 | 1,3065591 | 5,75382729 | 2,0880672 |
| 90 | 89 | 0,0025 | 0,01234405 | 0,6070824 | 1,31871406 | 2,99453416 | 2,03334021 |

У таблицях вжито таких позначень: M – кількість вузлів; N – кількість скінченних елементів поділу на даному кроці; $\min(h)$ – мінімальна довжина скінченного елемента; $\|e_h\|$ – енергетична норма апостеріорного оцінювача похибки; $\|u_h\|$ – енергетична норма наближеного розв'язку; p – порядок швидкості збіжності апроксимацій, $\max(\eta)$ – максимальна відносна похибка, η_h – глобальна відносна похибка знайденого наближення, де

$$\|e_h\|^2 := c(e_h, e_h), \quad \|u_h\|^2 := c(u_h, u_h), \quad \eta_h := \frac{\|e_h\|}{\|u_h\|} 100\%.$$

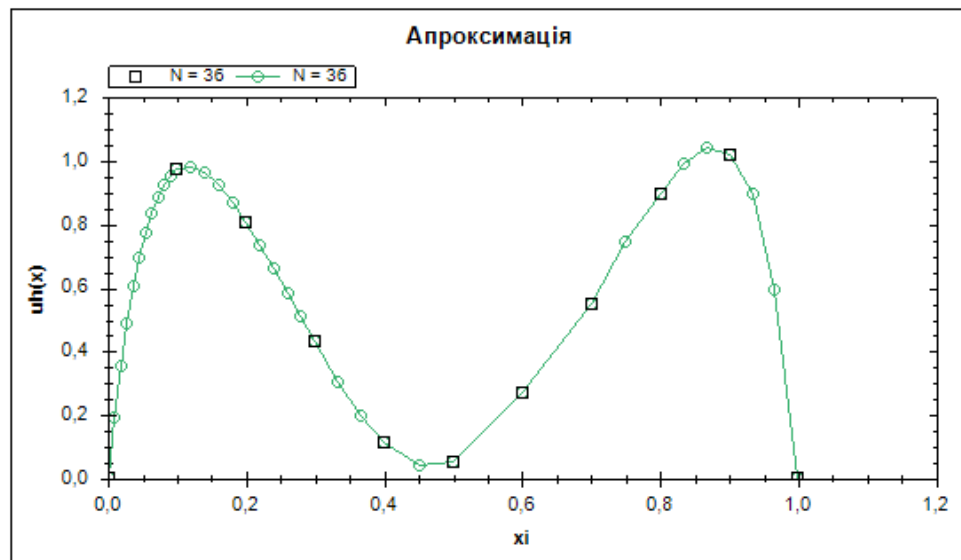


Рис.8.1.4 Другий крок адаптування кусково-лінійної апроксимації стратегією №1 для $m=10$

Для порівняння адаптування сітки виберемо $m = 10$. Оскільки $\max(\eta_{i+1/2}) = \eta_{1/2} = 84.5$, отримуємо $k = 8$. На рис 8.1.4 ми можемо побачити другий крок з стратегією №1 для $k = 8$, перший скінченний елемент $K_{1/2}$, у якого була максимальна похибка, відповідно поділився на 10 скінченних елементи, тоді як другий та третій скінченні елементи з $\eta_{1+1/2} = 36,8$ та $\eta_{2+1/2} = 36,7$ поділилися на 5 скінченних елементів. Інші скінченні елементи, на яких виконується нерівність (6.1) теж поділились в співвідношенні $\eta_{i+1/2} : k$.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №1 для $m = 10$ з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 9 кроків та 96 скінченних елементи.

Таблиця 8.1.2 Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №1 та $m=10$

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(h) | ηh |
|----|----|----------|------------|------------|------------|-------------|------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,2205117 | 0,60645125 | 0 | 84,49344198 | 36,3609937 |
| 37 | 36 | 0,009091 | 0,03306942 | 0,62092817 | 1,04924705 | 13,37850236 | 5,32580509 |
| 62 | 61 | 0,004545 | 0,01913192 | 0,61412254 | 1,16861917 | 10,75030006 | 3,11532672 |
| 82 | 81 | 0,004545 | 0,0138035 | 0,61077739 | 1,25483872 | 5,52018086 | 2,25998945 |
| 92 | 91 | 0,004167 | 0,01251315 | 0,6098312 | 1,28661516 | 5,86483745 | 2,05190454 |
| 94 | 93 | 0,004167 | 0,01205682 | 0,60985605 | 1,29705363 | 3,00229034 | 1,97699371 |
| 95 | 94 | 0,004167 | 0,01204938 | 0,6097551 | 1,29123082 | 3,00791026 | 1,97610198 |
| 96 | 95 | 0,004167 | 0,01193194 | 0,60964516 | 1,28958337 | 3,00340798 | 1,95719392 |
| 97 | 96 | 0,004167 | 0,01183085 | 0,60954358 | 1,29334529 | 2,98301244 | 1,94093505 |

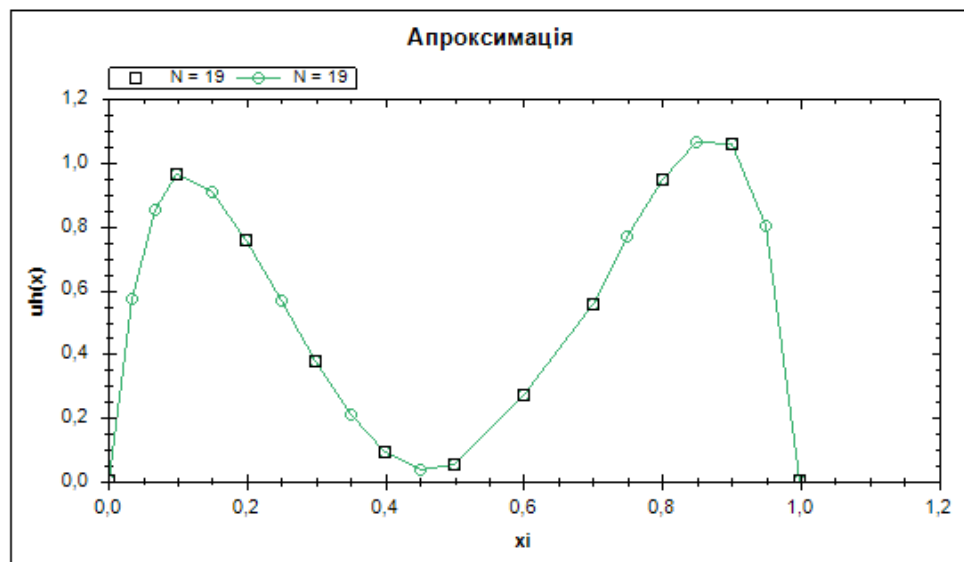


Рис.8.1.5 Другий крок адаптування кусково-лінійної апроксимації стратегією №1 для $m=3$

Аналогічно робимо з $m = 3$, отримуємо $k = 28$.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №1 для $m = 4$ з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 9 кроків та 101 скінченних елементи.

Таблиця 8.1.3 Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №1 та $m=3$

| M | N | min(h) | eh | uh | ρ | max(η) | ηh |
|-----|-----|----------|------------|------------|------------|---------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,2205117 | 0,60645125 | 0 | 84,49344198 | 36,3609937 |
| 20 | 19 | 0,033333 | 0,06543114 | 0,61297544 | 0,92862646 | 25,7707757 | 10,67434942 |
| 38 | 37 | 0,011111 | 0,02929653 | 0,60896563 | 1,07836268 | 12,04114502 | 4,81086793 |
| 66 | 65 | 0,005556 | 0,01580011 | 0,60809683 | 1,29135185 | 4,96931638 | 2,59828908 |
| 78 | 77 | 0,002778 | 0,01353018 | 0,60678616 | 1,29708949 | 3,90406883 | 2,22981001 |
| 87 | 86 | 0,002778 | 0,01297859 | 0,60757238 | 1,27023826 | 6,00656113 | 2,1361391 |
| 94 | 93 | 0,002778 | 0,01197451 | 0,60727541 | 1,27637281 | 3,17099 | 1,97184118 |
| 99 | 98 | 0,002778 | 0,0113598 | 0,60724161 | 1,28806109 | 3,10249009 | 1,87072106 |
| 101 | 100 | 0,002778 | 0,01112135 | 0,60719762 | 1,29169231 | 3,01448472 | 1,83158631 |
| 102 | 101 | 0,002778 | 0,01100424 | 0,60705296 | 1,29626978 | 2,99814087 | 1,81273208 |

Порівнявши різні значення m , можна зробити висновок, що для даної задачі $m = 5$ є оптимальним рішенням.

Виконаємо адаптування кусково-лінійної апроксимації стратегією №2.

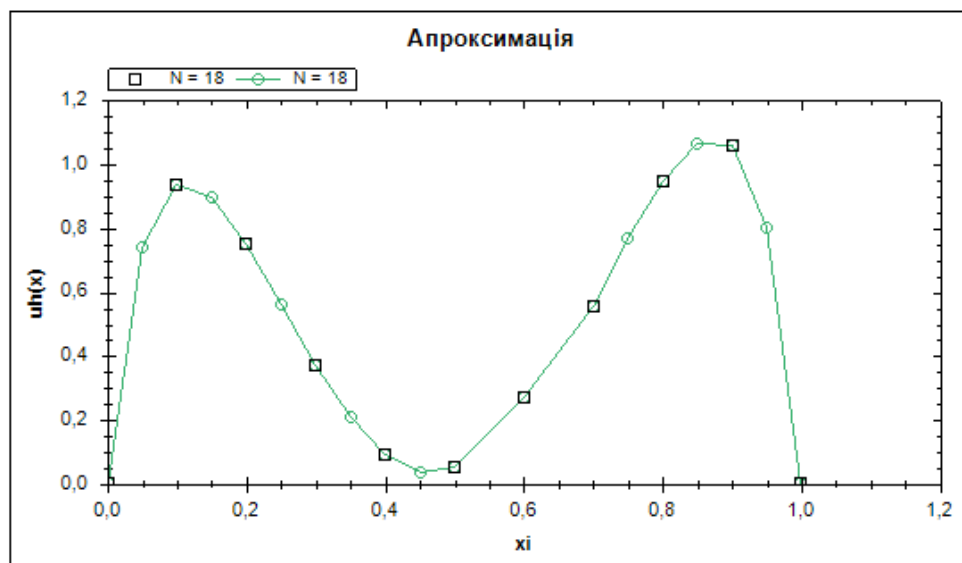


Рис.8.1.6 Другий крок кусково-лінійної апроксимації стратегією №2

На рис 8.1.6 ми можемо побачити другий крок з стратегією №2, скінченні елементи для яких відносна поелементна похибка перевищувала задану точність, були поділений на два нових.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №2 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 10 кроків та 107 скінченних елементи.

Таблиця 8.1.4 Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №2

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|-----|-----|----------|------------|------------|------------|---------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,2205117 | 0,60645125 | 0 | 84,49344198 | 36,3609937 |
| 19 | 18 | 0,05 | 0,08434843 | 0,60920981 | 0,76710009 | 45,52617394 | 13,84554666 |
| 36 | 35 | 0,025 | 0,03823622 | 0,60809484 | 0,96896452 | 23,10152304 | 6,28787035 |
| 62 | 61 | 0,0125 | 0,01970252 | 0,60870319 | 1,20670907 | 10,83997778 | 3,23680294 |
| 75 | 74 | 0,00625 | 0,01429773 | 0,6080826 | 1,27839514 | 4,23165908 | 2,35128043 |
| 86 | 85 | 0,003125 | 0,0132814 | 0,60815038 | 1,2479886 | 5,962217 | 2,18389998 |
| 96 | 95 | 0,003125 | 0,01190227 | 0,60821598 | 1,267802 | 3,20100549 | 1,95691431 |
| 101 | 100 | 0,003125 | 0,01129233 | 0,6079771 | 1,26903216 | 3,03894154 | 1,85736134 |
| 105 | 104 | 0,003125 | 0,01083197 | 0,6079827 | 1,27136675 | 3,04872427 | 1,78162425 |
| 108 | 107 | 0,003125 | 0,01050135 | 0,60790387 | 1,28444465 | 2,98136261 | 1,72746893 |

При апроксимації з рівномірним згущенням сітки, для кожного кроку всі скінченні елементи були поділені на два нових. В результаті, для кінцевої апроксимації з максимальною похибкою меншою за 3% нам знадобилось 7 кроків та 640 скінченних елементи.

Таблиця 8.1.5 Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ методом рівномірного поділу

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|-----|-----|----------|------------|------------|------------|---------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,2205117 | 0,60645125 | 0 | 84,49344198 | 36,3609937 |
| 21 | 20 | 0,05 | 0,08455688 | 0,60660501 | 0,69143058 | 48,18870578 | 13,93936399 |
| 41 | 40 | 0,025 | 0,03833529 | 0,60664137 | 0,84137011 | 24,75525022 | 6,31926687 |
| 81 | 80 | 0,0125 | 0,0186402 | 0,60665033 | 0,89109142 | 12,45655999 | 3,07264378 |
| 161 | 160 | 0,00625 | 0,00925294 | 0,60665257 | 0,91496006 | 6,23802324 | 1,52524459 |
| 321 | 320 | 0,003125 | 0,00461803 | 0,60665313 | 0,92957222 | 3,12022545 | 0,76123103 |
| 641 | 640 | 0,001562 | 0,00230796 | 0,60665327 | 0,93972758 | 1,56026429 | 0,3804414 |

Аналізуючи таблицьки 8.1.1-8.1.5 ми можемо побачити, що для стратегії №1 у порівнянні з іншими, уже на другому кроці максимальна відносна

похибка зменшилась у 5 разів. Для інших методів адаптації сітки зменшується тільки у 2.

Таблиця 8.1.6 Результати адаптування лінійної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$

| | m | Кількість кроків | Остаточна кількість елементів | Порядок збіжності | Максимальна відносна похибка | Глобальна похибка | Час виконання |
|---------------------------|----|------------------|-------------------------------|-------------------|------------------------------|-------------------|---------------|
| Стратегія №1 | 3 | 9 | 101 | 1,296 | 2,998 | 1,812 | 0,084 |
| | 5 | 6 | 89 | 1,319 | 2,994 | 2,033 | 0,048 |
| | 10 | 9 | 96 | 1,293 | 2,983 | 1,94 | 0,093 |
| Стратегія №2 | | 10 | 107 | 1,284 | 2,981 | 1,727 | 0,159 |
| Рівномірне згущення сітки | | 7 | 640 | 0,939 | 1,56 | 0,38 | 4,466 |

Як можемо побачити з таблиці 8.1.6 для максимального рівня допустимої похибки $\varepsilon = 3\%$ для стратегії №1 не залежно від значення m нам знадобилось менша кількість кроків та скінченних елементів, для стратегії №2 – 107 за 10 кроків, а для рівномірного згущення – 640 за 7 кроків, що більш ніж у 6 разів більше. Середній час виконання стратегією №1 майже у 60 разів менший ніж рівномірним згущенням, а для стратегії №2 – у 28 разів менший.

8.2 Квадратична апроксимація

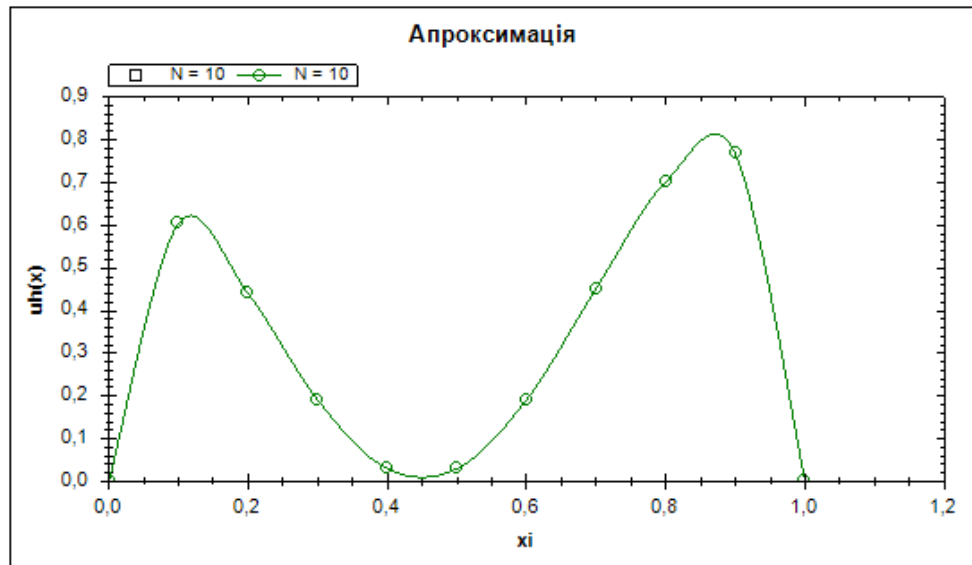


Рис.8.2.1 Перший крок кусково-квадратичної апроксимації

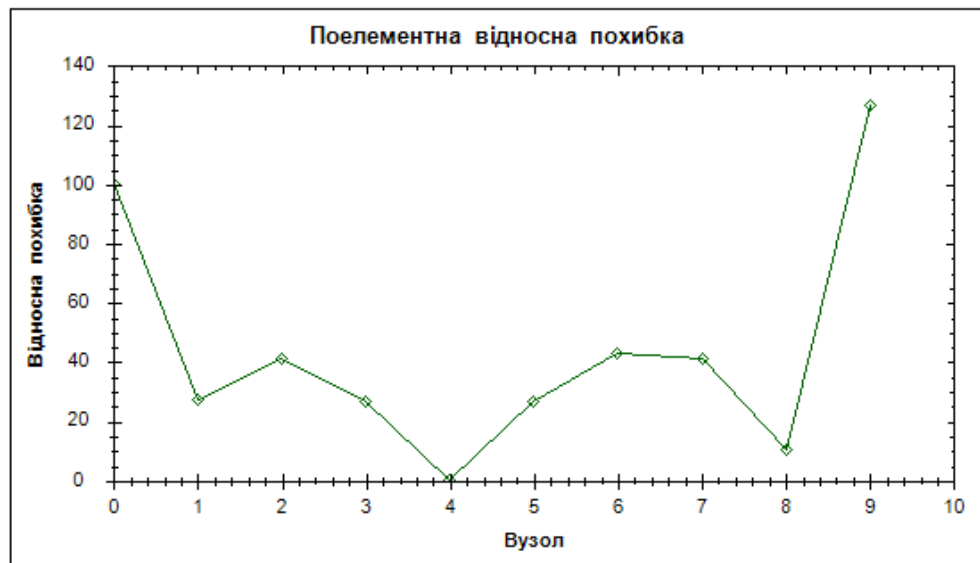


Рис.8.2.2 Поелементна відносна похибка кусково-квадратичної апроксимації на першому кроці

На рисунку 8.2.1 ми можемо побачити перший крок кусково-квадратичної апроксимації. Рисунок 8.2.2 показує нам поелементну відносну похибку для кожного з скінченних елементів. Здійснимо обчислення аналогічно до лінійної апроксимації.

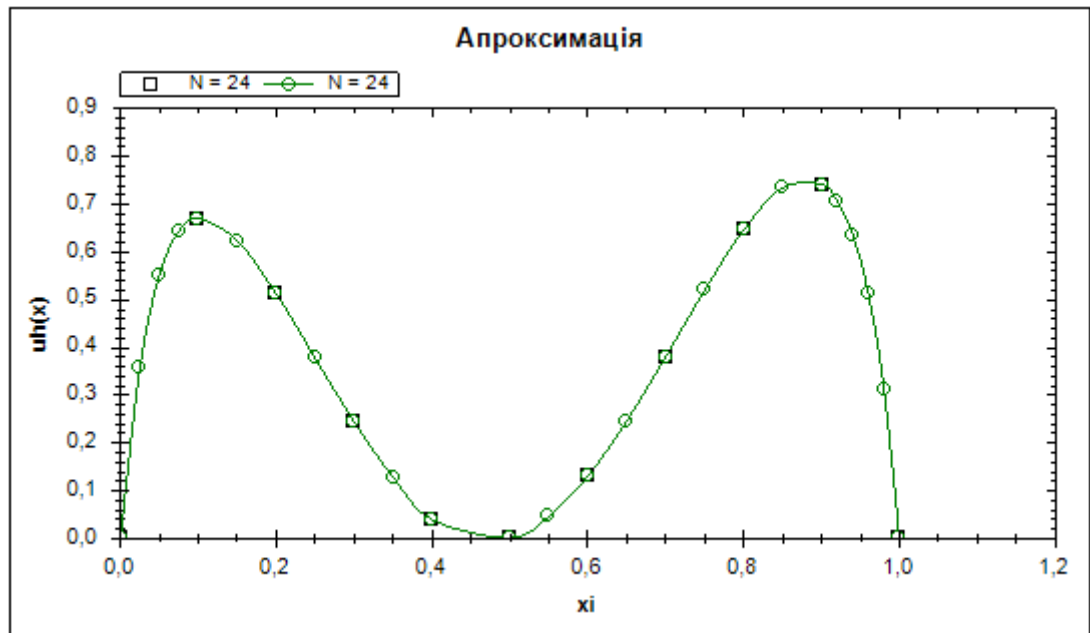


Рис.8.2.3 Другий крок адаптування кусково-квадратичної апроксимації стратегією №1 при $t = 5$

На рис 8.2.3 ми можемо побачити другий крок з стратегією №1, десятий скінченний елемент $K_{9+1/2}$ з відносною похибкою $\eta_{9+1/2} = \max(\eta_{i+1/2})$ в уточненій сітці був поділений на 5 скінченних елементів. Інші скінченні елементи, на яких виконується нерівність (6.1) теж поділились в співвідношенні $\eta_{i+1/2} : k$.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №1 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 4 кроків та 43 скінченних елементи.

Таблиця 8.2.1 Результати адаптування квадратичної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №1

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|--------|------------|------------|------------|--------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,36840312 | 0,51702739 | 0 | 126,88774783 | 71,25408253 |
| 25 | 24 | 0,02 | 0,03911809 | 0,51579005 | 1,58937881 | 12,08041982 | 7,5841107 |
| 42 | 41 | 0,01 | 0,00937877 | 0,5173715 | 2,51658532 | 5,85315108 | 1,81277282 |
| 42 | 43 | 0,01 | 0,00762882 | 0,51739137 | 2,65816888 | 2,80787129 | 1,47447697 |

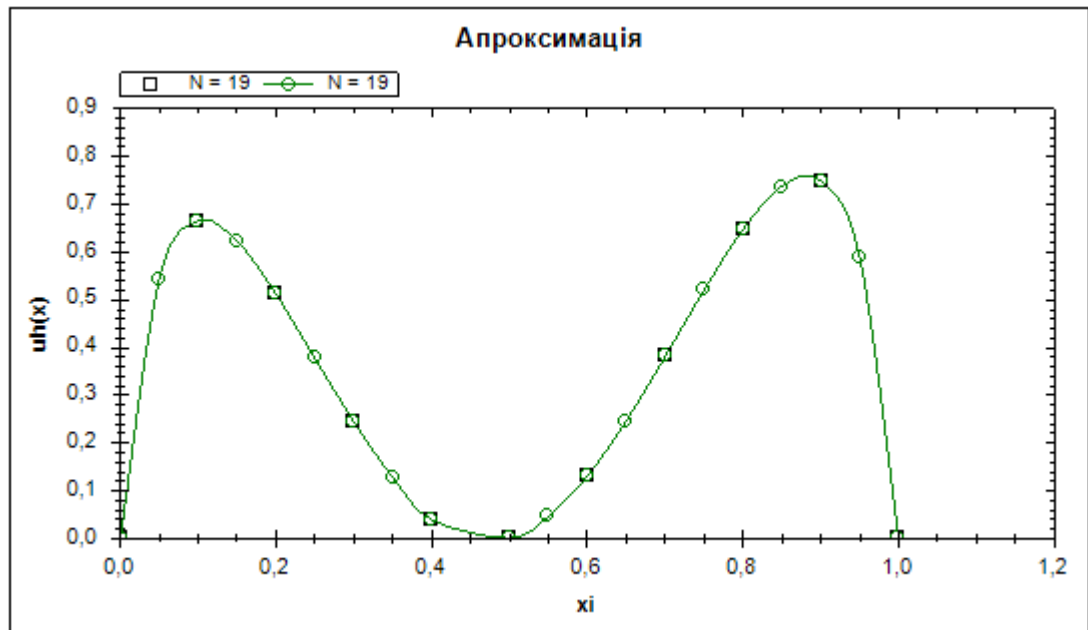


Рис.8.2.4 Другий крок адаптування кусково-квадратичної апроксимації стратегією №2

На рис 8.2.4. ми можемо побачити другий крок адаптування стратегією №2, скінченні елементи для яких відносна поелементна похибка перевищувала задану точність, були поділений на два нових.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №2 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 5 кроків та 43 скінченних елементи.

Таблиця 8.2.2 Результати адаптування квадратичної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №2

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|--------|------------|------------|------------|--------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,36840312 | 0,51702739 | 0 | 126,88774783 | 71,25408253 |
| 20 | 19 | 0,05 | 0,08274325 | 0,51585033 | 1,14147971 | 43,79771097 | 16,04016581 |
| 38 | 37 | 0,025 | 0,01617457 | 0,51752962 | 2,17808621 | 9,96467739 | 3,12534096 |
| 43 | 42 | 0,0125 | 0,00796702 | 0,51761217 | 2,62842974 | 3,13395532 | 1,53918739 |
| 43 | 43 | 0,0125 | 0,00756772 | 0,51737077 | 2,66368197 | 2,80798794 | 1,46272577 |

При апроксимації з рівномірним згущенням сітки, для кожного кроку всі скінченні елементи були поділені на два нових. В результаті, для кінцевої

апроксимації з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 4 кроків та 80 скінченних елементи.

Таблиця 8.2.3 Результати адаптування квадратичної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ методом рівномірного поділу

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|--------|------------|------------|------------|---------------|-------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,36840312 | 0,51702739 | 0 | 126,88774783 | 71,25408253 |
| 21 | 20 | 0,05 | 0,08175579 | 0,51589674 | 1,08594624 | 44,94494967 | 15,84731671 |
| 41 | 40 | 0,025 | 0,01536084 | 0,51561574 | 1,52798535 | 10,37661158 | 2,97912597 |
| 81 | 80 | 0,0125 | 0,00275804 | 0,51554281 | 1,76537506 | 2,08816122 | 0,53497709 |

Аналізуючи таблички 8.2.1-8.2.3 ми можемо побачити, що для стратегії №1 у порівнянні з іншими, уже на другому кроці максимальна відносна похибка зменшилась у 10 разів. Для інших методів адаптації сітки зменшується тільки у 4.

Таблиця 8.2.4 Результати адаптування квадратичної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$

| | Кількість кроків | Остаточна кількість елементів | Порядок збіжності | Максимальна на відносна похибка | Глобальна похибка | Час виконання |
|---------------------------|------------------|-------------------------------|-------------------|---------------------------------|-------------------|---------------|
| Стратегія №1 | 4 | 43 | 2,658 | 2,807 | 1,474 | 0,011 |
| Стратегія №2 | 5 | 43 | 2,663 | 2,807 | 1,462 | 0,023 |
| Рівномірне згущення сітки | 4 | 80 | 1,765 | 2,088 | 0,534 | 0,064 |

Як можемо побачити з таблиці 8.2.4. для максимального рівня допустимої похибки $\varepsilon = 3\%$ для стратегії №1 нам знадобилось 43 елементи за 4 кроки, для стратегії №2 – 43 за 5 кроків, а для рівномірного згущення – 80 за 4 кроків. Час виконання стратегією №1 у 6 разів менший ніж рівномірним згущенням, а для стратегії №2 – у 3 разів менший.

8.3 Кубічна апроксимація

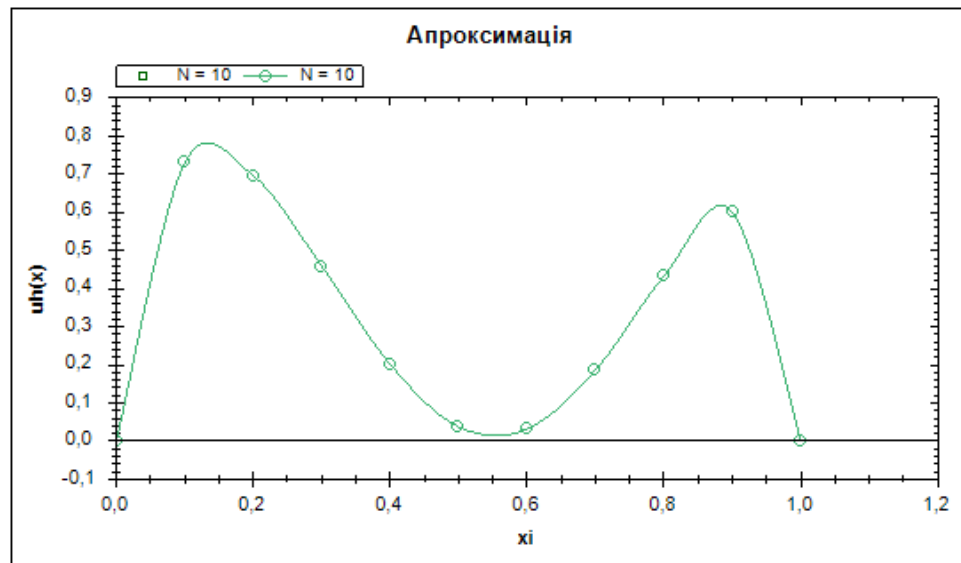


Рис.8.3.1 Перший крок кусково-кубічної апроксимації

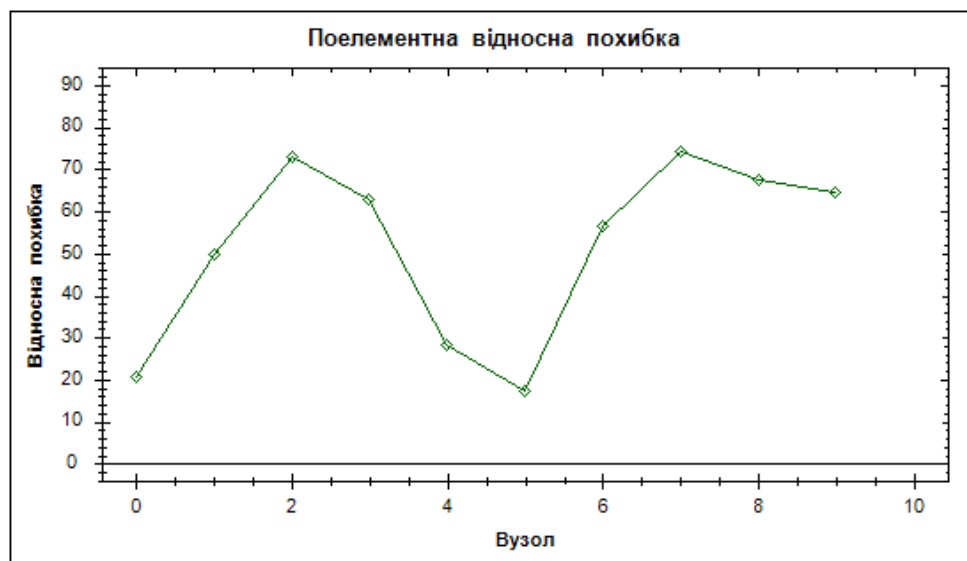


Рис.8.3.2 Поелементна відносна похибка кусково-кубічної апроксимації на першому кроці

На рисунку 8.3.1 ми можемо побачити перший крок кусково-кубічної апроксимації. Рисунок 8.3.2 показує нам поелементну відносну похибку для кожного з скінченних елементів. Здійснимо аналогічні обчислення.

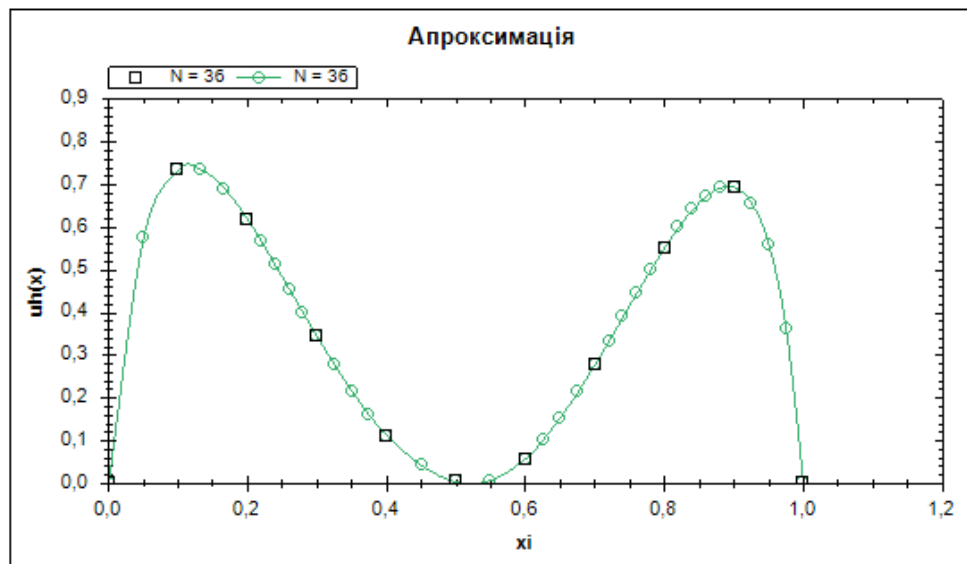


Рис.8.3.3 Другий крок адаптування кусково- кубічної апроксимації стратегією №1

На рис 8.3.3 ми можемо чітко побачити, що на другому кроці для стратегії №1 елементи, відносні похибки яких були близькими до максимальної розділились на декілька частин, інші поділились на дві частини.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №1 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 4 кроки та 54 скінченних елементи.

Таблиця 8.3.1 Результати адаптування кубічної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №1

| M | N | min(η) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|---------------|------------|------------|------------|---------------|------------|
| 11 | 10 | 0 | 0.09028376 | 0.88987965 | 0 | 74.30750503 | 10.145615 |
| 37 | 36 | 0,02 | 0,00797535 | 0,89792661 | 1,48940705 | 13,92660169 | 0,88819598 |
| 52 | 51 | 0,0125 | 0,00108279 | 0,89145707 | 2,62299686 | 3,48638235 | 0,12146263 |
| 52 | 54 | 0,0125 | 0,00107198 | 0,89211151 | 2,62894642 | 2,90167243 | 0,12016184 |

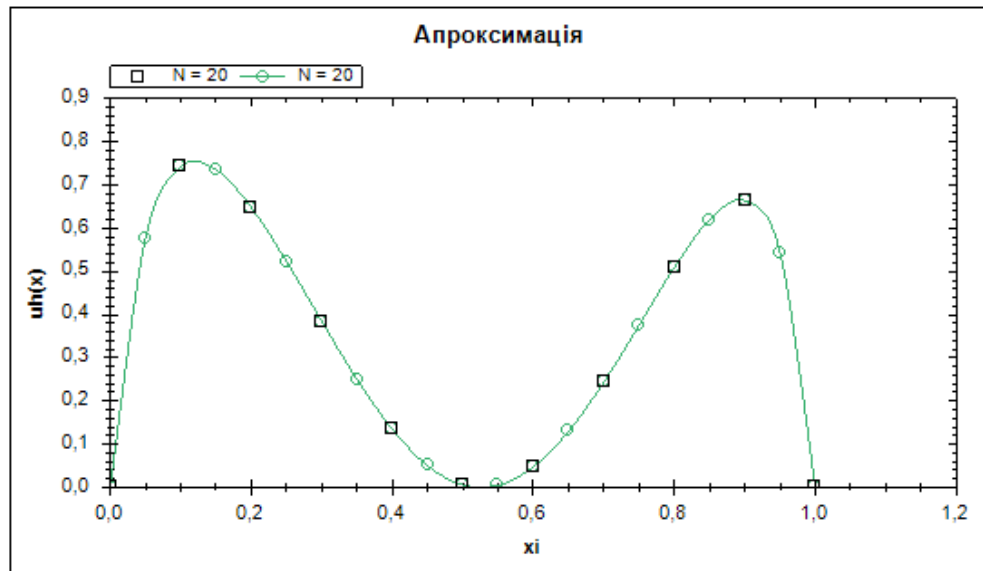


Рис.8.3.4 Другий крок адаптування кусково-кубічної апроксимації стратегією №2

На рис 8.3.4 ми можемо побачити другий крок з стратегією №2, оскільки поелементна похибка для всіх елементів перевищувала задану точність, кожен з скінченних елементів був поділений на два нових, аналогічно до рівномірного розподілу.

В результаті, для кінцевої апроксимації стратегією №2 з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 6 кроків та 67 скінченних елементів.

Таблиця 8.3.2 Результати адаптування кубічної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ стратегією №2

| M | N | min(h) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|--------|------------|------------|------------|---------------|------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,09028376 | 0,88987965 | 0 | 74,30750503 | 10,145615 |
| 21 | 20 | 0,05 | 0,01122404 | 0,89183506 | 1,53191443 | 22,0778373 | 1,2585333 |
| 40 | 39 | 0,025 | 0,00121348 | 0,89261454 | 2,36193621 | 4,62717306 | 0,1359462 |
| 63 | 62 | 0,0125 | 0,00108423 | 0,89315381 | 2,34336334 | 3,70959124 | 0,12139315 |
| 67 | 66 | 0,0125 | 0,00106947 | 0,89307321 | 2,33204367 | 3,05730896 | 0,11975126 |
| 68 | 67 | 0,0125 | 0,00106902 | 0,89312875 | 2,33226095 | 2,91328603 | 0,11969433 |

При апроксимації з рівномірним згущенням сітки, для кожного кроку всі скінченні елементи були поділені на два нових. В результаті, для кінцевої

апроксимації з максимальною похибкою $\varepsilon = 3\%$ нам знадобилось 4 кроки та 80 скінченних елементів.

Таблиця 8.3.3 Результати адаптування кубічної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$ методом рівномірного поділу

| M | N | min(η) | eh | uh | p | max(η) | ηh |
|----|----|---------------|------------|------------|------------|---------------|------------|
| 11 | 10 | 0 | 0,09028376 | 0,88987965 | 0 | 74,30750503 | 10,145615 |
| 21 | 20 | 0,05 | 0,01122404 | 0,89183506 | 1,50393717 | 22,0778373 | 1,2585333 |
| 41 | 40 | 0,025 | 0,00109663 | 0,89261557 | 2,12110725 | 4,68609352 | 0,12285547 |
| 81 | 80 | 0,0125 | 9,951E-05 | 0,89283029 | 2,45636826 | 0,87147223 | 0,01114496 |

Аналізуючи таблички 8.2.1.-8.2.3. знову ж таки, можемо побачити, як на другому кроці стратегії №1 похибки зменшуються майже у 6 разів, при цьому кількість елементів зростає у 3.6 разів, тобто, в середньому кожен елемент поділився на 3-4 нових скінченних елементи. У стратегії №2 та при рівномірному розподілі на другому кроці максимальна відносна похибка зменшилась майже у 4 рази.

Таблиця 8.3.4 Результати адаптування кубічної апроксимації для $\varepsilon = 3\%$

| | Кількість кроків | Остаточна кількість елементів | Порядок збіжності | Максимальна відносна похибка | Глобальна похибка | Час виконання |
|---------------------------|------------------|-------------------------------|-------------------|------------------------------|-------------------|---------------|
| Стратегія №1 | 4 | 54 | 2,629 | 2,901 | 0,121 | 0,071 |
| Стратегія №2 | 6 | 67 | 2,332 | 2,913 | 0,119 | 0,145 |
| Рівномірне згущення сітки | 4 | 80 | 2,456 | 1,871 | 0,011 | 0,281 |

Як можемо побачити з таблиці 8.3.4. для стратегії №1 нам знадобилось 54 елементів за 4 кроки, для стратегії №2 – 67 за 6 кроків, а для рівномірного згущення – 80 за 4 кроків. Час виконання стратегією №1 у 4 разів менший ніж рівномірним згущенням, а для стратегії №2 – у 2 разів менший.

ВИСНОВОК

В даній курсовій роботі були розроблені h -адаптивні схеми методу скінченних елементів для числового розв'язування крайових задач зі звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Ці схеми використовують кусково-лінійні, кусково-квадратичні та кусково-кубічні апроксимації розв'язків на нерівномірних сітках скінченних елементів і здатні обчислювати наближення з заданою точністю шляхом згущення елементів сітки.

Основними компонентами цих схем є апостеріорні оцінювачі похибок. Вони дозволяють оцінити похибку апроксимації на основі порівняння шуканого розв'язку зі своїми апроксимаціями. На основі цих оцінювачів були розроблені стратегії контролю за розподілом похибок між елементами сітки та згущенням сітки з метою рівномірного розподілу похибки між елементами.

Аналіз числових результатів показав ефективність та надійність запрограмованих h -адаптивних схем. Ми можемо зробити висновок, що стратегії №1 та №2 переважають над рівномірним згущенням сітки.

При використанні стратегії №1 ми отримуємо мінімальну кількість кроків і оптимальну кількість скінченних елементів, на другому кроці ми вже можемо побачити значні результати завдяки розділенню по коефіцієнту, проте останні кроки зводяться до схожої задачі, як у стратегії №2. При використанні стратегії №2 завжди отримуємо оптимальну кількість елементів, проте кількість кроків може бути достатньо великою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Квасниця Г.А., Шинкаренко Г.А. Порівняння простих апостеріорних оцінок похибок методу скінченних елементів для задачі еластостатики / Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 162–174.
2. Абрамов Є., Квасниця Г., Шинкаренко Г. Частинами квадратичні та кубічні апроксимації h -адаптивного МСЕ для одновимірних крайових задач./ Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2011. Вип. 17. С.47–61..
3. Квасниця Г.А. Побудова та аналіз h -адаптивних схем методу скінчених елементів для задач теорії пружності: Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02/ Львівський національний ун-т ім. І. Франка.- Л., 2021. – 148 с.
4. Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А. Кусково-лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач./ Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2006. Вип. 11. С. 3–18.
5. Шинкаренко Г., Козаревська Ю. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h -адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. / Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. інформ. 2002. Вип.. 5. С 153-165.
6. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач електростатики / Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 95–106. 4.
7. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач./ Київ: НМК ВО, 1991. -88с.
8. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів./ Київ: НМК ВО, 1993. -100с.
9. Tarek I. Zohdi. A Finite Element Primer for Beginners The Basics./ Springer
10. Cham Heidelberg New York Dordrecht London 2015
11. Zienkiewicz O. The Finite Element Method. Vol.1: The Basis/ Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. – 663 p