МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
(повне найменування назва факультету)

Програмування
(повна назва кафедри)

Магістерська робота

Дослідження термопружних процесів в тонкостінних тілах

Виконав: студент групи ПМІМ-21
спеціальності
122 «Комп`ютерні науки»
(шифр і назва спеціальності)

Кіселик Р. О.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник Малець Р.Б.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент Шинкаренко Г.А.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Львів – 2022

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет Прикладної математики та інформатики
Кафедра Програмування
Спеціальність 122 «Комп`ютерні науки»
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри Ярошко С. А.
"13" 09 **2022 року**

З А В Д А Н Н Я

НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТУ
Кіселик Роман Олегович
(прізвище, ім'я, по батькові)

1 .Тема роботи Дослідження термопружних процесів в тонкостінних тілах

керівник роботи Малець Романна Богданівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від " 13 " вересня 2022 року № 15

2. Строк подання студентом роботи 12.12.2022р.

3. Вихідні дані до роботи Література та інтернет-джерела

4. Зміст магістерської роботи (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі термопружності гнучких тіл з короткочасною пам'яттю
2. Частково дискретизована варіаційна задача термов'язкопружності для для тонкостінного тіла
3.Схеми методу скінченних елементів для задачі теплопровідності (МСЕ)
4. Пакет COMSOL Multiphysics
5. Числові дослідження динамічної задачі термопружності тонких за допомогою пакету COMSOL

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Скріншоти, рисунки

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 15.09.2022

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів магістерської роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
	Постановка задачі термопружності гнучких тіл з короткочасною пам'яттю	15.09.2022 – 20.09.2022	
	Частково дискретизована варіаційна задача термов'язкопружності для тонкостінного тіла	21.09.2022 – 15.10.2022	
	Схеми методу скінченних елементів для задачі теплопровідності (МСЕ)	16.10.2022 – 25.10.2022	
	Пакет COMSOL Multiphysics	25.10.2022 – 10.11.2022	
	Числові дослідження диначної задачі термопружності тонких за допомогою пакету COMSOL	10.11.2022 – 07.12.2022	
	Оформлення роботи	07.12.2022 – 12.12.2022	

Студент _____ _____
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис)

Зміст

Вступ.....5
1. Постановка задачі термопружності гнучких тіл з короткочасною пам'яттю 7
1.1 Початково-крайова задача термопружності.....7
1.2 Варіаційна задача термопружності гнучких.....9
2. Частково дискретизована варіаційна задача термов'язкопружності для тонкостінного тіла.....11
3. Схеми методу скінченних елементів для задачі теплопровідності (МСЕ)..15
3.1. Серендипові квадратичні ізопараметричні апроксимації методу скінченних елементів.....16
4. Пакет COMSOL Multiphysics.....19
5. Числові дослідження диначної задачі термопружності тонких за допомогою пакету COMSOL.....22
5.1 Визначення модулів пакету COMSOL та задання початковх та крайових умов для задачі термопружності оболонок.....22
5.2 Результати чисельного експерименту для визначення температурного поля.....27
5.3 Результати чисельного експерименту для визначення термопружних напружень циліндричної панелі.....31
Висновок.....34
Список використаної літератури.....35

Вступ

Більшість елементів конструкцій сучасної техніки являє собою тонкі оболонки різної форми та складної структури, які знаходяться під дією нерівномірних сил та температурних навантажень. Використання оболонкових конструкцій зумовлене потребами в дослідженні роботи машин, літальних апаратів, різних споруд та інших об`єктів, а також, можливістю вибору раціональних параметрів щодо міцності та надійності конструкцій.

У зв`язку з широким застосуванням комп`ютерів в наш час, підхід до розрахунку оболонкових структур в основному базується на числових методах розв`язування задач. Задачі, які моделюють поведінку складних конструкцій, в тому числі тонких оболонок, у більшості випадків зводяться до розв`язування початково крайових задач для системи диференційних рівнянь або диференційних рівнянь в частокових похідних.

Методи математичного моделювання тонкостінних конструкцій, що функціонують в умовах силового, температурного та електромагнітного навантажень, утворюють багатий арсенал засобів у механіці твердого тіла та її інженерних застосуваннях.

Однією з найпоширеніших у галузі дослідження конструкції оболонок є теорія оболонок Тимошенка-Міндліна, основна гіпотеза якої базується на припущенні незалежного обертання нормалей оболонок.

У даній роботі використано 6-модальний варіант узагальненої теорії. Він враховує три компоненти вектора переміщення серединої поверхні і три функції, що характеризують поворот і стиснення нормального елемента оболонки.

Актуальною є задача побудови моделі термопружних процесів у тонкостінних гнучких тілах, яка б дозволяла врахувати властивості матеріалу та складну геометрію. Дослідження температурних полів, квазістатичних термопружних станів і визначення динамічної поведінки, спричиненої змінами температури та силовим навантаженням, залишаються актуальними проблемами для інженерних застосувань.

Чисельні методи, засновані на варіаційних принципах, що мають універсальні можливості для опису законів збереження енергії математичними засобами, зазвичай використовуються для вирішення завдань механіки. Варіаційне числення понижує порядок похідної шуканої функції для отримання розв`язку, автоматично задовольняючи природні крайові умови, таким чином знижуючи вимоги до класу функцій, які використовуються для побудови наближеного розв`язку.

Серед ефективних чисельних методів вирішення сучасних прикладних задач термопружності широко використовується метод скінченних елементів (МСЕ).

На сьогодні відомо багато різних пакетів для розв`язування подібних задач. Найпопулярнішими серед них є COMSOL, ABACUS та AutoCAD, хоча кожен з них має свої особливості застосування та специфіку роботи.

У роботі досліджується динамічна задача термопружності тонких оболонок. Чисельний розв`язок отримано за допомогою програмного пакету COMSOL, який використовує метод скінченних елементів.

1. Постановка задачі термопружності гнучких тіл з короткочасною пам'яттю

1.1 Початково-крайова задача термопружності

Припустимо, у нас є пружнє тіло, яке займає у просторі певну обмежену область D що є неперевна за Ліпшицем границею $S = \partial D$

Нехай, на нього діють наступні сили:

- масові сили $\{F_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^3$
- поверхневі навантаження $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{\widetilde{\sigma_i}(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^3$ на $S_\sigma \subset S$
- внутрішні джерела тепла $g = g(\mathbf{x},t)$ і тепловий потік $q = q(\mathbf{x},t)$ на границі $S_q \subset S$

Під впливом цих сил виникають пружні переміщенні $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^3$ та збільшення температури відносно початкової $\theta_0(\mathbf{x})$. Важатимемо, що описані характеристики будуть задовільняти рівнняння лінійної термопрожності:

$$\begin{aligned} &\rho U_i'' - \partial_k \sigma_{ki} = \rho F_i, \\ &c_\varepsilon \theta' - \partial_i(\lambda_{ij}\partial_j\theta) + \theta_0 \beta_{ij}\partial_i U_i' = g \ \text{в} \ D\times(0,T], \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $\partial_i := \partial v / \partial x_i$, $v' := \partial v / \partial t$, $v'' := \partial_t(\partial_t v)$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до 3. Зважаючи, на те, що нас матеріал з короткочасною пам`яттю, то його фізичні співідношення, а саме гіпотеза Дюгамеля-Неймана буде набувати наступного вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{U},\theta) &:= \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) + \sigma_{ij}^v(\mathbf{U}') + \sigma_{ij}^t(\theta) \\ &= c_{ijkm}E_{km}(\mathbf{U}) + a_{ijkm}E_{km}(\mathbf{U}') - \beta_{ij}\theta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

де

$$E_{ik}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2}(\partial_i U_k + \partial_k U_i). \tag{1.3}$$

Властивості матеріалу пружного тіла характеризуються густиною маси $\rho = \rho(\mathbf{x})$, коефіцієнтом питомої теплоємності при сталих деформаціях

$c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{x})$; теплові та механічні характеристики описуються такими коефіцієнтами: коефіцієнтом температурних напружень β_{ij}, коефіцієнтами теплопровідності λ_{ij}, коефіцієнтами c_{ijkm} термопружності та коефіцієнтами a_{ijkm} в'язкості. Зазначимо, що теплові та механічні характеристики також володіють властиостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, \quad a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij}, \\ c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad c_0 = const > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbf{R}, \\ a_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq a_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad a_0 = const > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \mathbf{R}; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad \lambda_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda_0, \quad \lambda_0 = const > 0, \\ \beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad \beta_{ij}\xi_i\xi_j \geq \beta_0, \quad \beta_0 = const > 0 \quad \forall \xi_i \in \mathbf{R}.. \end{cases} \tag{1.4}$$

Оскільки наш матеріал є ізотропним, то вище описані коіфіцієнти будуть набувати наступних значень:

$$c_{ijkm} = \frac{\mathsf{E}}{(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{km} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})\right],$$

$$a_{ijkm} = \lambda^{\nu}\delta_{ij}\delta_{km} + \mu^{\nu}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}),$$

$$\beta_{ij} = \beta\delta_{ij} = \frac{\mathsf{E}}{(1+\nu)}\left(\frac{3\nu}{(1-2\nu)} + 1\right)\alpha_T\delta_{ij},$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, λ^{ν}, μ^{ν} – модулі в'язкості, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення, E –модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Доповнимо рівняння (1.1)-(1.3) крайовими умовами вигляду

$$\begin{aligned} &\mathbf{U} = 0 \quad \text{на } S_u \times [0,T], \quad S_u \subset S, \\ &\sigma_{ij}n_j = \widehat{\sigma_i} \quad \text{на } S_\sigma \times [0,T], \quad S_\sigma = S \setminus S_u, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\theta = 0 \quad \text{на } S_\theta \times [0,T], \\ &-\lambda_{ij}n_i\partial_i\theta = \kappa\theta + \widehat{q} \quad \text{на } S_q \times [0,T], \quad S_q = S \setminus S_\theta, \end{aligned} \tag{1.6}$$

та початковими умовами

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \partial_t\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{V}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.7}$$

де κ – відомий коефіцієнт теплообміну з довкіллям.

1.2 Варіаційна задача термопружності гнучких

Описана початково-крайова задача термопружності (1.1, 1.5-1.7), набуває варіаційного формолювання вигляду

$$\begin{cases} \text{дано } \mathbf{U}_0 \in \mathbf{Y},\ \mathbf{V}_0 \in \mathbf{H},\ \theta_0 \in Z; \\ \text{знайти пару } \{\mathbf{U}, \theta\} \in L^2(0,T;\mathbf{Y}\times G) \text{ таку, що} \\ m(\mathbf{U}''(t),\mathbf{V}) + a(\mathbf{U}'(t),\mathbf{V}) + c(\mathbf{U}(t),\mathbf{V}) - b(\theta(t),\mathbf{V}) = < l(t),\mathbf{V} >, \\ \Xi(\theta'(t),\xi) + \Lambda(\theta(t),\xi) + b(\xi,\mathbf{U}'(t)) = < r(t),\xi > \quad \forall t \in (0,T], \\ m(\mathbf{U}'(0) - \mathbf{V}_0,\mathbf{V}) = 0,\ \ c(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0,\mathbf{V}) = 0 \qquad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{Y}, \\ \Xi(\theta(0) - \theta_0,\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in G, \end{cases} \tag{1.8}$$

де простори допустимих переміщень і температури

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V} = 0 \text{ на } S_u\},$$
$$G = \{\xi \in H^1(D) : \xi = 0 \text{ на } S_\theta\},$$
$$\mathbf{Z} = L^2(D) \quad \text{та} \quad \mathbf{H} = Z^3,$$

та білінійні форми і лінійні функціонали

$$m(\mathbf{U},\mathbf{V}) := \iiint_D \rho \mathbf{U}.\mathbf{V} dD = \iiint_D \rho U_i V_i dD,$$
$$c(\mathbf{U},\mathbf{V}) := \iiint_D \sigma^e(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD = \iiint_D \sigma^e_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij}(\mathbf{V}) dD$$
$$a(\mathbf{U},\mathbf{V}) := \iiint_D \sigma^v(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V})\, dD = \iiint_D \sigma^v_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij}(\mathbf{V}) dD,$$
$$b(\xi,\mathbf{V}) := \iiint_D \sigma^t(\xi) : E(\mathbf{V})\, dD = \iiint_D \beta \xi\, \partial_i V_i\, dD,$$
$$\Xi(\theta,\xi) := \iiint_D c_\varepsilon \theta_0^{-1} \theta \xi\, dD, \qquad \forall \mathbf{U},\mathbf{V} \in \mathbf{Y},$$
$$\Lambda(\theta,\xi) := \iiint_D \theta_0^{-1} (\lambda_{ij} \nabla \theta).\nabla \xi dD + \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \kappa \theta \xi dS,$$
$$< l,\mathbf{V} > := \iiint_D \rho \mathbf{F}.\mathbf{V} dD + \iint_{S_q} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}.\mathbf{V} dS, \quad \forall \mathbf{U},\mathbf{V} \in \mathbf{Y},$$
$$< r,\xi > := \iiint_D \theta_0^{-1} g\, \xi\, dD - \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \widehat{q} \xi dS \qquad \forall \theta,\xi \in G.$$

З огляду на нерівність Корна, властивості симетрії та еліптичності (1.4) можна ввести норми на просторах Y та G

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} := m^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U},\mathbf{U}), \quad \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{Y}} := c^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U},\mathbf{U}),$$
$$|||\mathbf{U}|||_{\mathbf{Y}} := a^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U},\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{Y} \quad \forall \theta \in G$$
$$\| \theta \|_{Z} := \Xi^{\frac{1}{2}}(\theta,\theta), \quad \| \theta \|_{G} := \Lambda^{\frac{1}{2}}(\theta,\theta) \tag{1.9}$$

та одержати таке рівняння балансу енергії:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[\|\mathbf{U}'(t)\|^2_{\mathbf{H}}+\|\mathbf{U}(t)\|^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta(t)\|^2_{\mathbf{Z}}\right]+\\
&\int_0^t\left[|||\mathbf{U}'(\tau)|||^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta(\tau)\|^2_{G}\right]d\tau=\\
&\tfrac{1}{2}\left[\|\mathbf{V}_0\|^2_{\mathbf{H}}+\|\mathbf{U}_0\|^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta_0\|^2_{\mathbf{Z}}\right]\\
&+\int_0^t\left[<l(\tau),\mathbf{V}'(\tau)>+<r(\tau),\theta(\tau)>\right]d\tau \quad \forall \tau\in(0,T].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Зазначимо, що вираз $\tfrac{1}{2}\left[\|\mathbf{U}'(t)\|^2_{\mathbf{H}}+\|\mathbf{U}(t)\|^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta(t)\|^2_{\mathbf{Z}}\right]$ - позначає миттєве значення повної енергії, $\int_0^t\left[|||\mathbf{U}'(\tau)|||^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta(\tau)\|^2_{G}\right]d\tau$ - позначає дисипацію, що зумовлену наявністю в'язкості та температурного поля пружного тіла, $\tfrac{1}{2}\left[\|\mathbf{V}_0\|^2_{\mathbf{H}}+\|\mathbf{U}_0\|^2_{\mathbf{Y}}+\|\theta_0\|^2_{\mathbf{Z}}\right]-$ початкове значення енергії, $\int_0^t\left[<l(\tau),\mathbf{V}'(\tau)>+<r(\tau),\theta(\tau)>\right]d\tau$ – притік енергії

Відповідно до задачі (1.1)-(1.7), сформульована варіаційна задача динамічної термопружності пружного тіла із врахуванням відповідних лінійних пружно-в'язких властивостей матеріалу, і рівняння балансу енергії (1.10) слугуватиме основою для досліджень термопружних процесів в тонкостінних елементах.

2. Частково дискретизована варіаційна задача термов'язкопружності для тонкостінного тіла

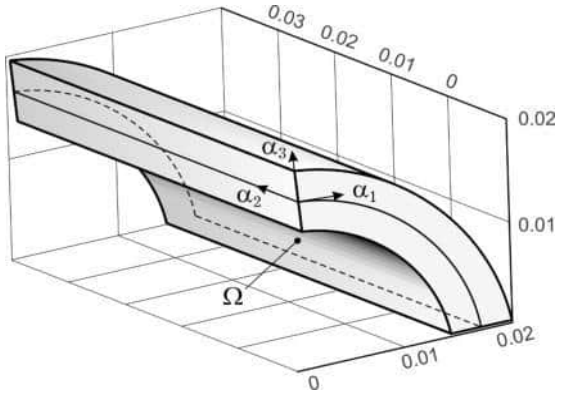

Рисунок 1.1 – Область D та серединна поверхня Ω, описані у криволінійній ортогональній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Припустимо, що обрана область $D \in R^3$ може бути описати у криволінійній ортогональній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (рис.1.1) так, що

$$D := \left\{ r = (\alpha, \alpha_3) \epsilon R^3 : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \epsilon \Omega, \alpha_3 = \left(\frac{-1}{2} h, + \frac{1}{2} h \right) \right\} \equiv \Omega \times \left(\frac{-1}{2} h, + \frac{1}{2} h \right)$$

де товщина $h = const$ є малою відносно інших розмірів тіла, $h / diam\, \Omega \ll 1$ та $\Omega = \{ \mathbf{r} = (\boldsymbol{\alpha}, 0) \in D \}$ що є його серединною поверхнею, контур якої будемо позначати через $\Gamma = \partial \Omega$. У цій системі координат елемент поверхні $d\Omega$ та об'єму dD визначаються як:

$$d\Omega = H_1 H_2 d\boldsymbol{\alpha}, \qquad dD = H_1 H_2 H_3 d\boldsymbol{\alpha} d\alpha_3 = d\Omega d\alpha_3, \tag{1.11}$$

$$H_i = A_i (1 + \alpha_3 k_i), \quad H_3 = A_3 \equiv 1, \quad i = 1, 2. \tag{1.12}$$

Де $A_i = A_i(\boldsymbol{\alpha})$ та $k_i = k_i(\boldsymbol{\alpha})$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω [3].

Називатимемо тіло постійної товщини h, істотно меншої від решти характерних розмірів, тонкостінним елементом. Позначимо через

$\Omega_{\pm} = \Omega \times \{\pm h/2\}$ його лицьові поверхні та $\Sigma = \Gamma \times (-h/2,\, h/2)$ як бічну поверхню, тоді $S = \Omega_{+} \cup \Omega_{-} \cup \Sigma$.

Припустимо, що поверхня тіла розділена на частини ненульової міри наступним чином

$$S_u = S_\theta = \Sigma := \left\{ \mathbf{r} \in D:\ \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma = \partial\Omega,\ |\alpha_3| \le \tfrac{1}{2} h \right\},$$
$$S_\sigma = S_q = \Omega_+ \,\mathbb{N}\, \Omega_-, \quad \Omega_\pm := \left\{ \mathbf{r} \in \bar{D}:\ \boldsymbol{\alpha} \in \Omega,\ \alpha_3 = \pm \tfrac{1}{2} h \right\}.$$

За гіпотезами Тимошенка-Міндліна [7] будемо вважати, що вектор зміщення $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{r},t)\}_{i=1}^3$ та температура $\theta = \theta(\mathbf{r},t)$ можна апроксимувати лінійними комбінаціями функцій $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha},t),\ (\ ,t))$ та $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\boldsymbol{\alpha},t), \theta_2(\boldsymbol{\alpha},t))$ таких що

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) \cong \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha},t) + \alpha\, \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha},t),$$
$$\theta(\mathbf{r},t) \cong \theta(\boldsymbol{\alpha},t) + \alpha\, \theta(\boldsymbol{\alpha},t) \quad \forall (\boldsymbol{\alpha},\alpha) \in D.$$

Тут $\mathbf{u} = \{u_i(\boldsymbol{\alpha},t)\}_{i=1}^3$ та $\theta_1 = \theta_1(\boldsymbol{\alpha},t)$ є апроксимаціями вектора переміщення та температури на середній поверхні

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha},t) \cong \partial \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha},0,t)/\partial\alpha_3,$$
$$\theta_2(\boldsymbol{\alpha},t) \cong \partial\theta(\boldsymbol{\alpha},0,t)/\partial\alpha_3, \quad \forall (\boldsymbol{\alpha},t) \in \bar{\Omega} \times [0,T].$$

В результаті часткової дискретизації за змінною товщини рівнянь задачі отримано варіаційну постановку задачі для термопружних оболонок в термінах вектора переміщень $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha},t), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha},t))$ та вектора температури $\boldsymbol{\theta} = (\theta(\boldsymbol{\alpha},t), \theta(\boldsymbol{\alpha},t))$:

$$\begin{cases} \text{given } \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbf{g} W_h, \mathbf{Z}\ \mathbf{v}\mathbf{f} \in \mathbf{H}, \quad {}_0, \ \in\ , \ \in\ ; \\ \text{find} \quad \boldsymbol{\psi} = \{\boldsymbol{\theta}, \ \} \in L^2(0,T; W_h \times Q_h) \text{ such,as} \\ m_\Omega(\mathbf{s}''(t), \mathbf{v}) + a_\Omega(\mathbf{s}'(t), \mathbf{v}) + c_\Omega(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) \\ \qquad - b_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{v}) = < l(t), \mathbf{v} >, \\ \Xi_\Omega(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \Lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) \qquad \forall t \in (0,T], \\ \qquad + b_\Omega(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}'(t)) = < r(t), \boldsymbol{\xi} > \\ m_\Omega(\mathbf{s}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c_\Omega(\mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_0, \mathbf{v}) = 0 \\ \Xi_\Omega(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in W_h, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h. \end{cases}$$

Ми використали наступні введені простори:

$$W_h = \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^6 : \mathbf{w} = 0 \ на \ S_u\},$$
$$Q_h = \{\xi \in [H^1(\Omega)]^2 : \xi = 0 \ на \ S_\theta\}.$$

Білінійна та лінійна форми визначаються як

$$m_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \rho \sum_{i,j=1}^{2} \iint_\Omega \phi^{i+j-2} \mathbf{s}_i . \mathbf{v}_j A_1 A_2 d \ ,$$
$$a_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \iint_\Omega (\mathbf{C}\mathbf{s}) . \left(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{v}\right) A_1 A_2 \ d \ ,$$
$$c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \iint_\Omega (\mathbf{C}\mathbf{s}) . \left(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{v}\right) A_1 A_2 \ d$$
$$\forall \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \ \ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_h,$$
$$b_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) = \beta \iint_\Omega \Phi(\boldsymbol{\theta}) . (\mathbf{C}\mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha},$$
$$\Xi_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \theta_0^{-1} \sum_{i,j=1}^{2} \iint_\Omega \phi^{i+j-2} \theta_i \xi_j \ A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha},$$
$$\Lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}),$$
$$\forall \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \ \ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in Q_h,$$
$$< r, \boldsymbol{\xi} > := -\theta_0^{-1} \iint_\Omega \Big\{ (q^+ + q^-)\xi_1$$
$$+ \frac{h}{2}(q^+ - q^-)\big((k_1 + k_2)\xi_1 + \xi_2\big) \Big\} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}$$
$$+ \Xi_\Omega(c_\varepsilon^{-1} \mathbf{g}(t), \ ) \quad \forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in Q_h;$$

$$< l, \mathbf{v} > := -\sum_{i,j=1}^{2} \iint_\Omega (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^+ + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^-) \Big\{ [1 + \tfrac{1}{2} h(1 + k_1 + k_2)] \mathbf{v}_1$$
$$- \tfrac{1}{2} h \mathbf{u}_2 \Big\} A_1 A_2 \mathbf{f} d \ + \mathbf{v} m_\Omega(\ (t), \ \mathbf{v}) \ \forall = (\ _1, \ _2) \in W_h.$$

Тут $\mathbf{C} = \left\{C_{ij}\right\}_{i,j=1}^{6}$, $\mathbf{B} = \left\{B^{ij}(\boldsymbol{\theta})\right\}_{i,j=1}^{11}$, $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \left\{\Phi^i(\boldsymbol{\theta})\right\}_{i=1}^{11}$, β дані теплового потоку q^+, q^- надані для Ω_+, Ω_-, також поверхневі навантаження $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{r}, t)$ описані наступним чином

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{r}, t) = \{\overline{\overline{\sigma}}_i(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_3, t)\}_{i=1}^{3} =$$
$$= \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{\alpha}, t) = \{\sigma_i^+(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^{3}, \ if \ \ \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_+, \\ \boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{\alpha}, t) = \{\sigma_i^-(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^{3}, \ if \ \ \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_-. \end{cases}$$

$$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) = \theta_0^{-1} \sum_{i,j=1}^{2} \iint_{\Omega} \lambda \left[\sum_{k=1}^{2} \frac{\chi_k^{i+j-2}}{\mathrm{A}_k^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_k} + (ij - i - j + 1) \phi^{i+j-4} \theta_i \xi_j \right] A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha},$$

$$\kappa_{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) = \left\{ (\kappa^+ + \kappa^-)\theta_1 \xi_1 + (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{h}{2} \left[(k_1 + k_2)\theta_1 \xi_1 + (\theta_1 \xi_2 + \theta_2 \xi_1) \right] \right\} \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha},$$

$$\phi^n := \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n (1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3,$$

$$\chi_m^n = \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_3)^n \frac{(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)}{(1 + \alpha_3 k_m)^2} d\alpha_3, \quad m = 1, 2.$$

Тут κ^+, κ^- коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях Ω_+, Ω_-, відповідно.

3. Схеми методу скінченних елементів для задачі теплопровідності (МСЕ)

Запишемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій $\{Q_h\}$ для розв'язання описаної частково дискретизованої за товщиною задачі методом Гальоркіна в просторі $\mathbf{G}$ допустимих функцій, причому таких що $\dim Q_h = N \to \infty$ та $\{\psi_k\}_{k=1}^{N}$ – довільний фіксований базис простору Q_h. Далі наближення $\boldsymbol{\theta}_N \in Q_h$ можна описати у наступному вигляді:

$$\boldsymbol{\theta}_N = \{\theta_i(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^{n}: \quad \theta_i(\boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{k=1}^{N} \theta_i^k(t)\,\psi_k(\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.1}$$

де $\theta_i^k(t)$ - невідомі коефіцієнти лінійної комбінації, які утворюють вектор невідомих $\Theta = \{\theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3, \ldots \theta_1^N, \theta_2^1, \ldots \theta_2^N, \ldots, \theta_n^1, \ldots \theta_n^N\}^T$.

В результаті підстановки отриманого у рівння задачі, отримаємо задачу Коші для системи $n \diamond N$ звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знайти } \Theta \in L^{\infty}(0,T;\mathbb{R}^{n\times N}) \cap L^{2}(0,T;\mathbb{R}^{n\times N}) \text{ таке, що} \\ \mathbf{S}\,\Theta'(t) + \mathbf{D}\Theta(t) = \mathbf{R}(t) \quad \forall t \in (0,T], \\ \mathbf{S}(\Theta(0) - \Theta_0) = 0 \quad , \end{cases} \tag{3.2}$$

де

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}\Theta(t) = S\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \vec{\varphi}_{k,j}\,\theta_j^m(t), \vec{\varphi}_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{N} S\,(\vec{\varphi}_{m,j}, \vec{\varphi}_{k,i})\,\theta_j^m(t), \\ &\mathbf{D}\Theta(t) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} T\ (\vec{\varphi}_{m,j}, \vec{\varphi}_{k,i}) u_j^m(t), \\ &\mathbf{R}(t) = < R\ (t), \sum_{k=1}^{N} \vec{\varphi}_{k,i} >, \\ &\vec{\varphi}_{k,i} = \{0,\ldots,0,\psi_k,0,\ldots,0\}^T, \qquad k = 1,2,\ldots N,\ i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\mathbf{S} = \{\mathrm{S}_{ij}\}_{i,j=1}^{n\times N}, \mathbf{D} = \{\mathrm{D}_{ij}\}_{i,j=1}^{n\times N}$ – **додатноозначені симетричні матриці, розмірності $n \diamond N$.**

3.1. Серендипові квадратичні ізопараметричні апроксимації методу скінченних елементів

Запишемо область Ω у вигляді об'єднання криволінійних чотирикутників Ω_k таких, що $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$. Перейдемо від змінних α_1, α_2 до змінних ζ_1, ζ_2 за допомогою ізопараметричних перетворень координат, в яких скінченні елементи Ω_k – це квадрати $\Omega^* = \{(\zeta_1, \zeta_2) : -1 \le \zeta_1, \zeta_2 \le 1\}$.

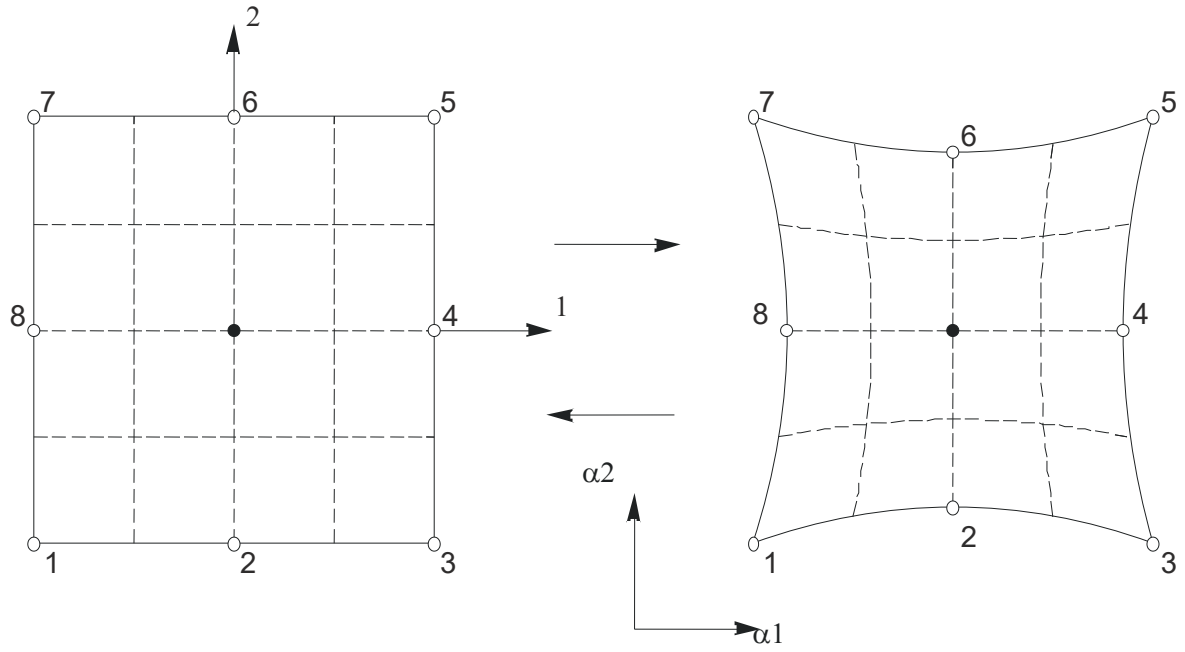

Рисунок 2.1 – Квадратичне ізоперіметричне відображення квадрата $\Omega^* = \{(\zeta_1, \zeta_2) : -1 \le \zeta_1, \zeta_2 \le 1\}$ на чотирикутний скінченний елемент .

Запишемо квадратичне перетворення кординат

$$\alpha_j(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ji}\, \upsilon_i(\zeta_1, \zeta_2), \tag{3.4}$$

де α_{ji} – значення координати α_j i-го вузла елемента Ω_k, $\upsilon_i = \upsilon_i(\zeta_1, \zeta_2)$ – базисні функції вигляду [4]

$$\upsilon_1 = -\tfrac{1}{4}(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(1+\zeta_1+\zeta_2), \qquad \upsilon_2 = \tfrac{1}{2}(1-\zeta_1^2)(1-\zeta_2^2),$$
$$\upsilon_3 = -\tfrac{1}{4}(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(1-\zeta_1+\zeta_2), \qquad \upsilon_4 = \tfrac{1}{2}(1-\zeta_2^2)(1+\zeta_1),$$
$$\upsilon_5 = -\tfrac{1}{4}(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(1-\zeta_1-\zeta_2), \qquad \upsilon_6 = \tfrac{1}{2}(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_2),$$
$$\upsilon_7 = -\tfrac{1}{4}(1-\zeta_1)(1+\zeta_2)(1+\zeta_1-\zeta_2), \qquad \upsilon_8 = \tfrac{1}{2}(1-\zeta_2^2)(1-\zeta_1). \tag{3.5}$$

Отримане перетворення дало нам можливість відобразити внутрішню частину квадрата Ω* на внутрішню частину області Ω_k .

Дискретизуючи область серединної поверхні на скінченні елементи необхідно, щоб використовуване біквадратичне відображення (3.5) не вироджувалось, а саме достатньою умовою невиродженості такого перетворення є:

$$det\, J_e \neq 0, \tag{3.6}$$

де J_e – матриця Якобі

$$J_e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_1} \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix}.$$

Окрім цього нам необхідно обчислити матриці методу скінченних елементів для яких необхідні формули для обчислення похідних від базисних функцій $\upsilon_i(\zeta_1, \zeta_2)$ за змінними α_1, α_2

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{det\, J_e} \sum_{i=1}^{8} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial \zeta_2}\alpha_{2i} & -\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial \zeta_1}\alpha_{2i} \\ -\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial \zeta_2}\alpha_{1i} & \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial \zeta_1}\alpha_{1i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{pmatrix},$$

де з врахуванням (3.4) Якобіан $det\, J_e$ обчислюється згідно правила:

$$det\, J_e = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \zeta_1}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial \zeta_2}(\alpha_{1i}\alpha_{2j} - \alpha_{1j}\alpha_{2i}), \qquad i \neq j.$$

Далі виберемо в (3.1) замість $\psi_k(\boldsymbol{\alpha})$ функції

$N^k(\zeta_1,\zeta_2)=(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8)$ та дискретизуємо шуканий розвязкок задачі, причому

$$N_j(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{pmatrix} \upsilon_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \upsilon_j & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \upsilon_j \end{pmatrix},$$

4. Пакет COMSOL Multiphysics

Інженери та вчені використовують програмне забезпечення COMSOL Multiphysics® для моделювання конструкцій, пристроїв і процесів у всіх сферах інженерії, виробництва та наукових досліджень. COMSOL Multiphysics® — це платформа для моделювання, яка надає можливості повного поєднання мультифізичного та окремого фізичного моделювання. Model Builder включає всі етапи робочого процесу моделювання — від визначення геометрії, властивостей матеріалу та фізики, які описують конкретні явища, до розв'язання та постобробки моделей для отримання точних результатів.

Коли ви розробили модель, ви можете використовувати Application Builder, щоб перетворити її на програму моделювання зі спеціальним інтерфейсом користувача, який можуть використовувати співавтори та клієнти, які не є експертами в програмному забезпеченні моделювання. Щоб упорядкувати ваші моделі та додатки, платформа COMSOL Multiphysics® також включає в себе диспетчер моделей, який є інструментом для керування моделюванням і моделюванням, який забезпечує контроль версій і ефективне зберігання.

Ви можете додати будь-яку комбінацію додаткових продуктів із набору продуктів COMSOL до програмної платформи COMSOL Multiphysics®. Це дає вам доступ до спеціалізованих функцій, які відповідають вашим конкретним потребам моделювання в інтерфейсі користувача, який завжди виглядає однаково, незалежно від галузі техніки чи фізики.

Моделювання корисно разом з експериментами для оптимізації процесів і пристроїв швидше, а часто й ефективніше й точніше, ніж використання експериментальних методів або тестування прототипів. Розробляючи експериментально підтверджені моделі для свого аналізу, ви можете отримати глибше розуміння дизайну або процесу, оскільки ви можете вивчати його більш зручним способом, ніж у лабораторії.

Мультифізика часто необхідна для точного моделювання вашого проекту чи процесу. Як користувач COMSOL Multiphysics®, ви вільні від обмежувального характеру, зазвичай пов'язаного з програмним забезпеченням моделювання, і маєте повний контроль над усіма аспектами вашої моделі. Ви можете бути креативними у такий спосіб, який неможливий або набагато складніший за допомогою традиційних підходів, завдяки здатності поєднувати разом будь-яку кількість фізичних явищ. Для ще більшого налаштування

введіть визначені користувачем описи фізики з пов’язаними рівняннями та виразами безпосередньо в інтерфейсі користувача.

Точні мультифізичні моделі враховують широкий спектр можливих робочих умов і фізичних ефектів. Це дає змогу використовувати моделі для розуміння, проектування та оптимізації процесів і пристроїв для реалістичних умов експлуатації

Моделювання за допомогою COMSOL Multiphysics® означає можливість переміщатися між моделюванням електромагнетики, структурної механіки, акустики, потоку рідини, теплообміну та явищ хімічних реакцій в одному програмному середовищі. Ви також можете об’єднати фізичні явища з цих областей в одну модель. Конструктор моделей у COMSOL Multiphysics® надає вам повне середовище моделювання та послідовний робочий процес моделювання від початку до кінця, незалежно від типу проекту чи процесу, який ви хочете проаналізувати та розробити.

Робочий процес моделювання охоплює:

- Геометрія та САПР
- Моделювання на основі фізики
- Моделювання на основі рівнянь
- Мешінг
- Дослідження та оптимізація
- Розв'язники
- Візуалізація та постобробка

У багатьох організаціях невелика група експертів із чисельного моделювання обслуговує набагато більшу групу людей, які працюють над розробкою продукту, виробництвом або як студенти, які вивчають явища та процеси фізики. Щоб ця невелика група могла обслуговувати набагато більшу групу, програмне забезпечення COMSOL Multiphysics® містить функціональність для створення додатків моделювання. Конструктор додатків включений у COMSOL Multiphysics® і дозволяє експертам із симуляції створювати інтуїтивно зрозумілі та дуже специфічні інтерфейси користувача для своїх загальних обчислювальних моделей — готові до використання спеціальні програми.

Програми можна тестувати та запускати через COMSOL Multiphysics®, а також розгортати з додаванням продуктів COMSOL Server™ або COMSOL Compiler™. Обидва продукти дозволяють вам ділитися своїми готовими програмами з вашими проектними групами, виробничими відділами, операторами процесів, випробувальними лабораторіями, клієнтами та клієнтами по всьому світу.

5. Числові дослідження диначної задачі термопружності тонких за допомогою пакету COMSOL

5.1 Визначення модулів пакету COMSOL та задання початковх та крайових умов для задачі термопружності оболонок

Розглянемо четвертину циліндра, радіус якого дорівнює 2/pi, висотою 1 *м* та товщиною 0.05 *м.*

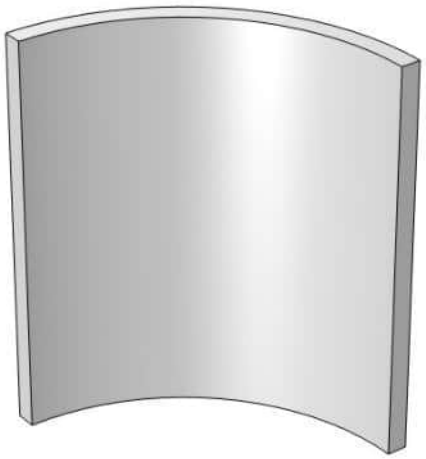

Рисунок 5.1 – Вигляд циліндричної панелі у пакеті COMSOL

Матеріалом панелі був обраний титан, фізико-механічні характеристики якого наступні:

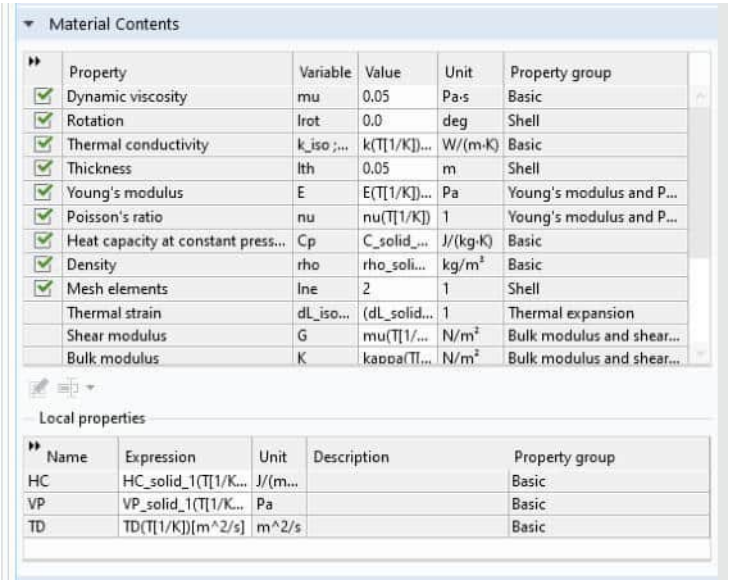

Рисунок 5.2 – Фізико-механічні характеристики

Для розв`язування задачі у COMSOL вибираємо розділ Shell.

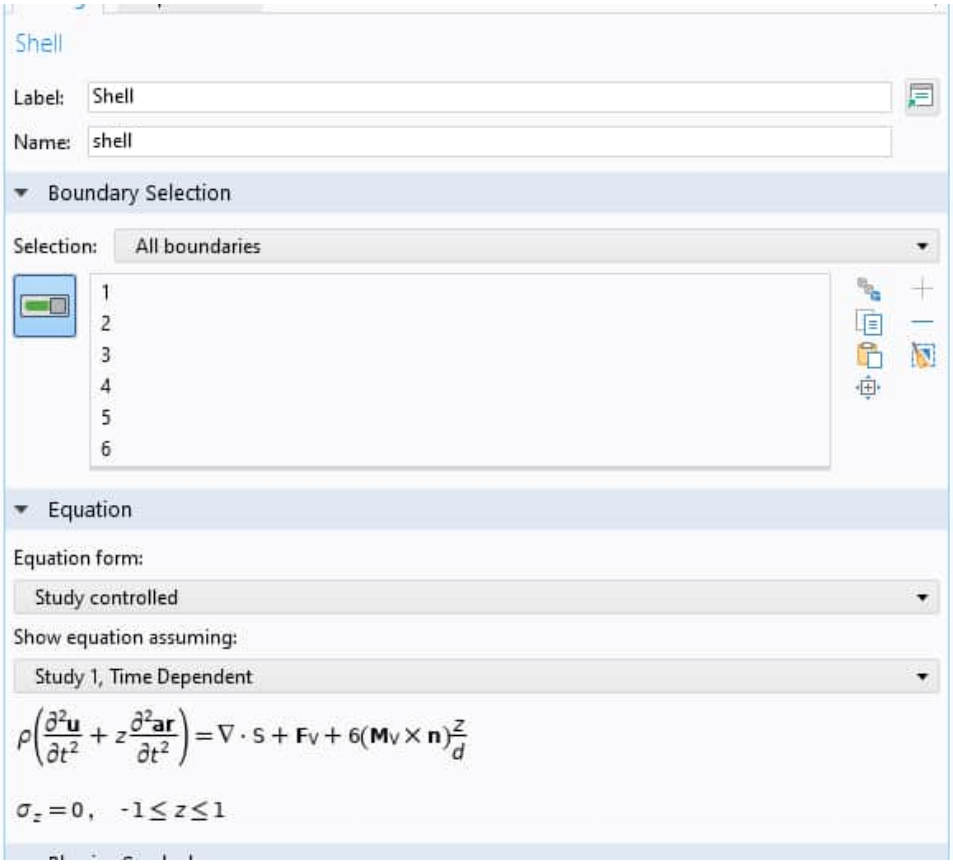

Рисунок 5.3 – Вигляд модуля Shell

Потім задаємо початкові умови для циліндричної панелі

Рисунок 5.4 – Задання значень початкових умов на переміщення та швидкість

Задаємо поверхневе навантаження на лицьовій поверхні циліндричної панелі зі значенням (0,0,1)

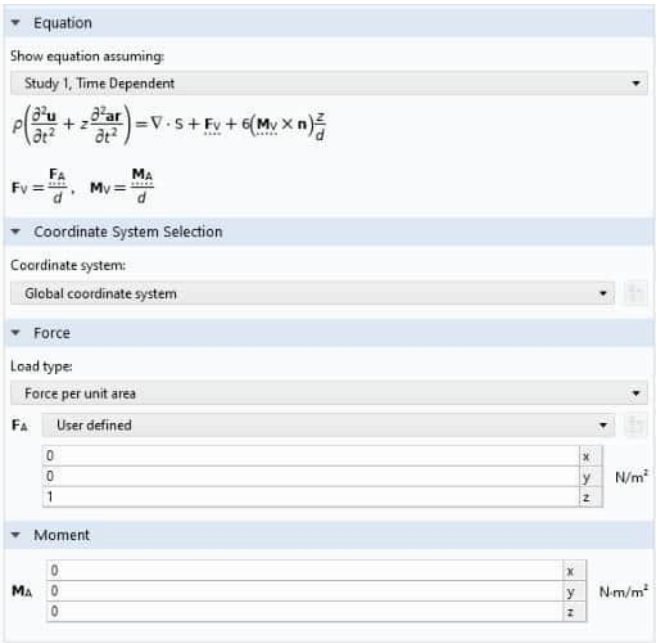

Рисунок 5.5 – Визначення поверхневого навантаження

Задача розв`язувалась за умови жорсткого закріплення при z = 1

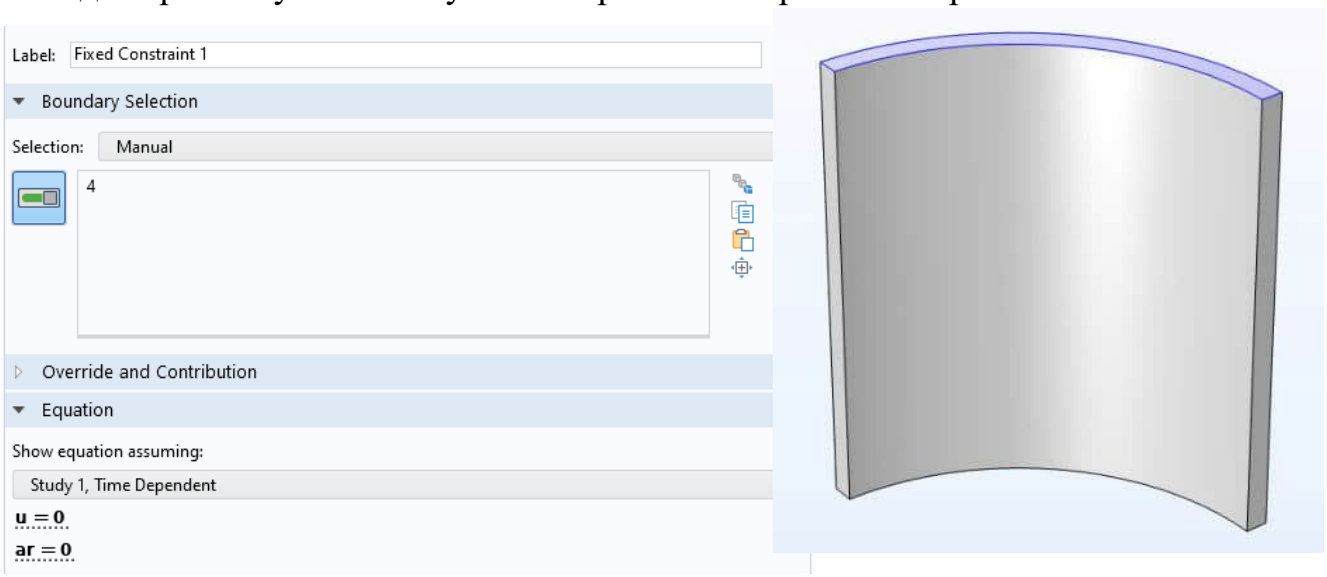

Рисунок 5.6 – Задання крайової умови

Для розв`язування задачі динамічної термопружності оболонок додаємо модуль Heat Transfer in Shells

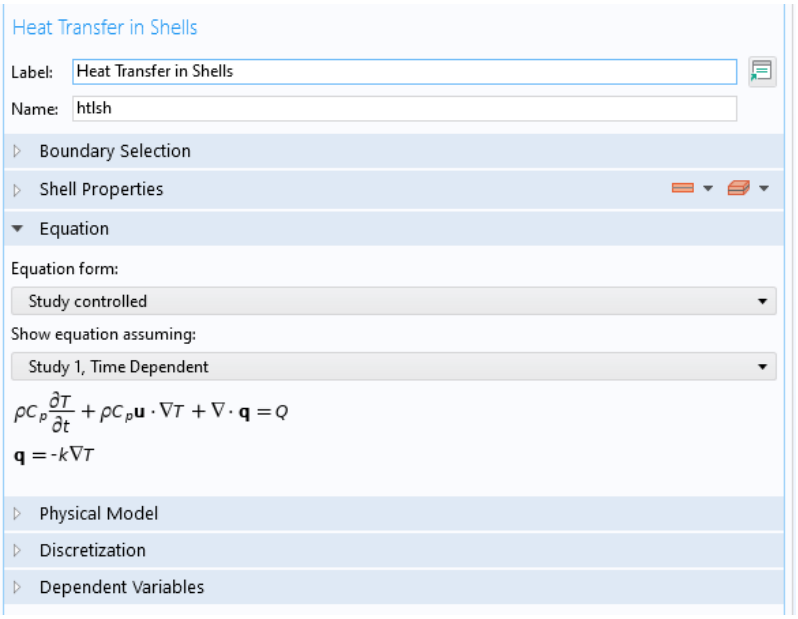

Рисунок 5.7 – Вигляд модуля Heat Transfer in Shells

Для створення умов нагрівання було підведене постійне лінійне джерело тепла до правої бічної поверхні $1000 * T\left[\frac{W}{m^3}\right]$.

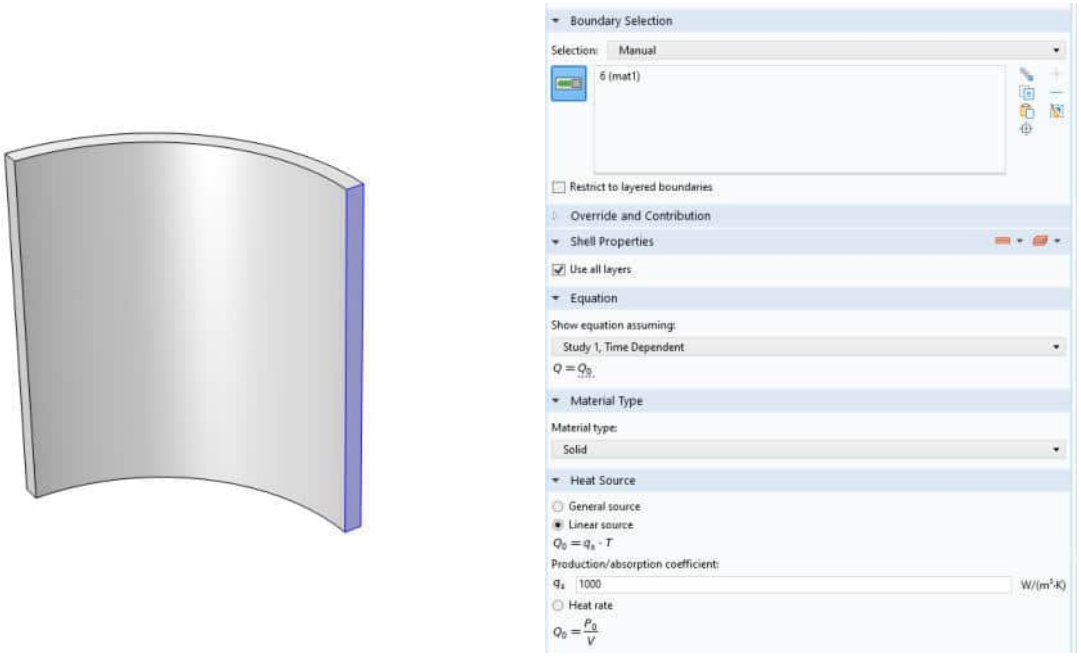

Рисунок 5.8 – Задання джерело тепла

Окрім цього, задано конвективний теплообмін для лівої бічної поверхні, значення температури зовнішнього середовища задається $293.73\,K$.

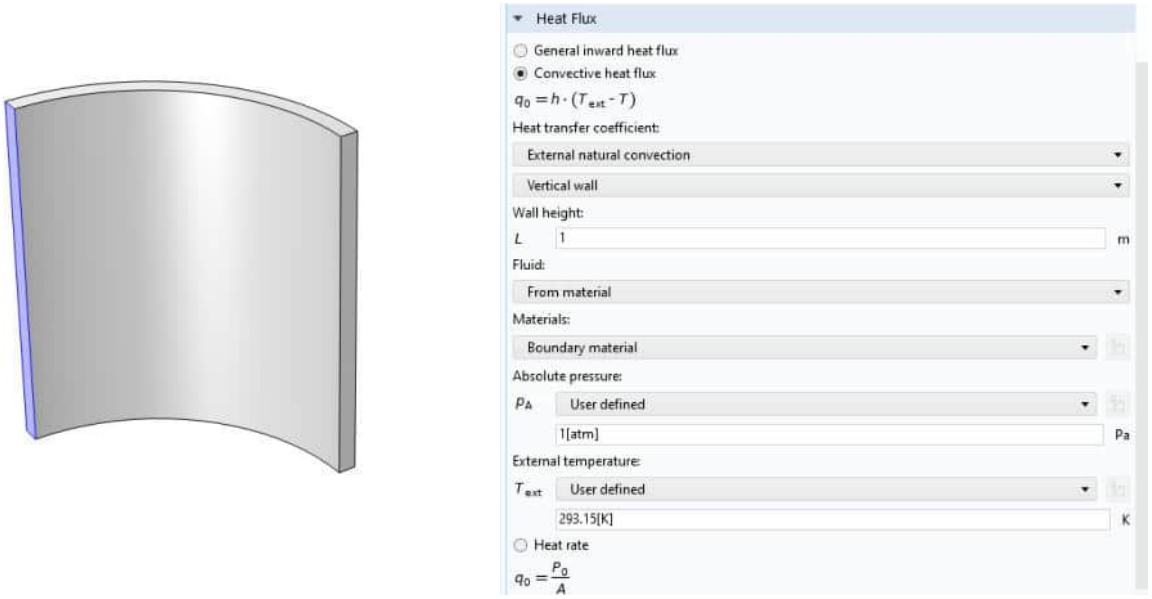

Рисунок 5.9 – Задання конвективного теплообміну

Усі решта поверхні теплоізольовані:

Дослідження проводилося в часовому проміжку [0, 1800] (с).

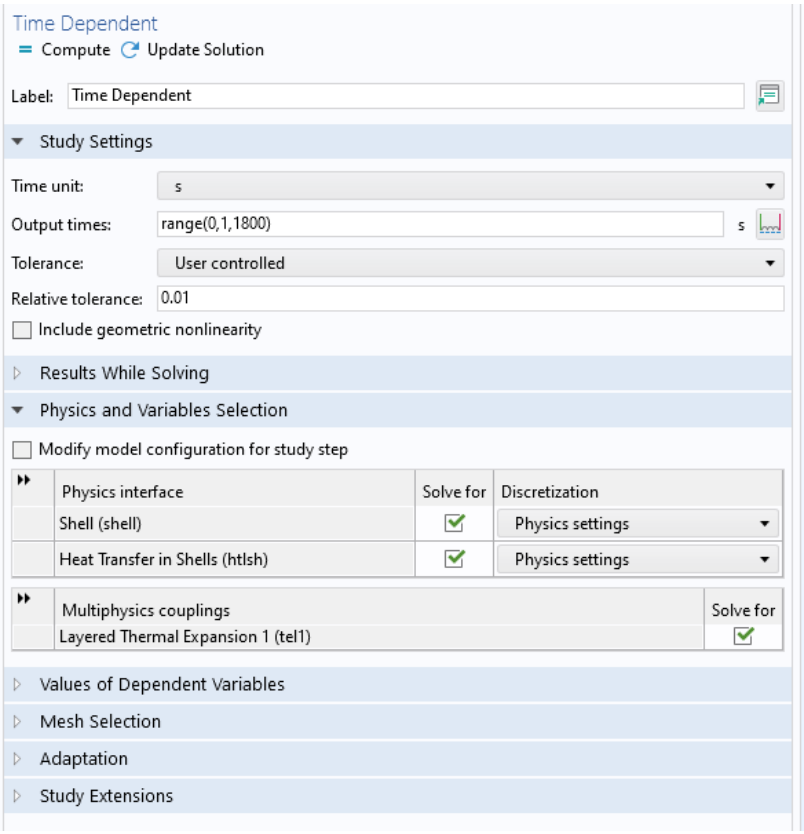

Рисунок 5.10 – Задання параметрів часу

5.2 Результати чисельного експерименту для визначення температурного поля

Представимо розв`язки динамчіної задачі термопружності отримані за допомогою програмного пакету COMSOL, мова іде про розподіл температурного поля в різні моменти часу.

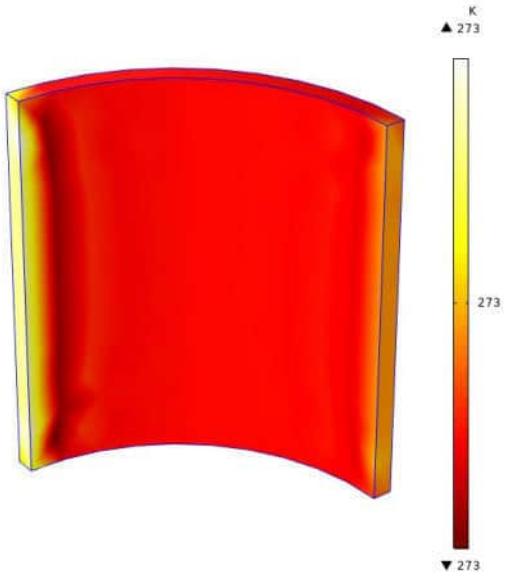

Рисунок 5.11 – Початкове розподіл температурного поля

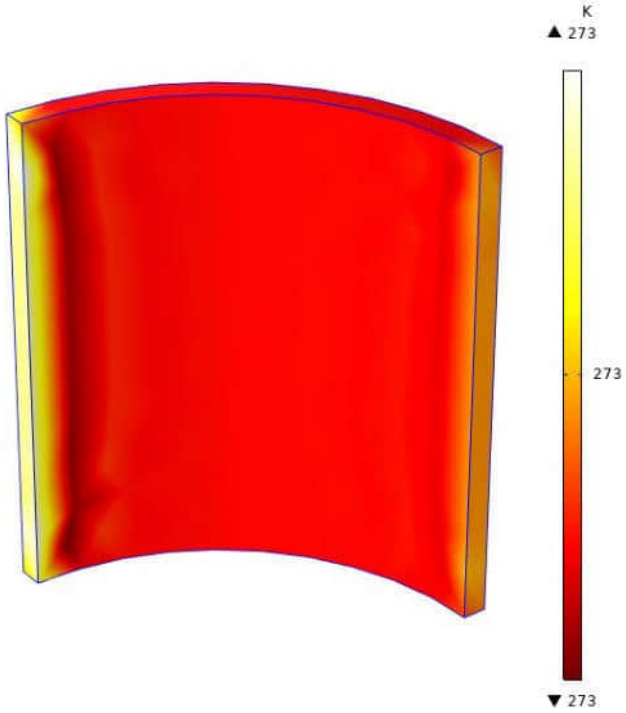

Рисунок 5.12 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 100 с

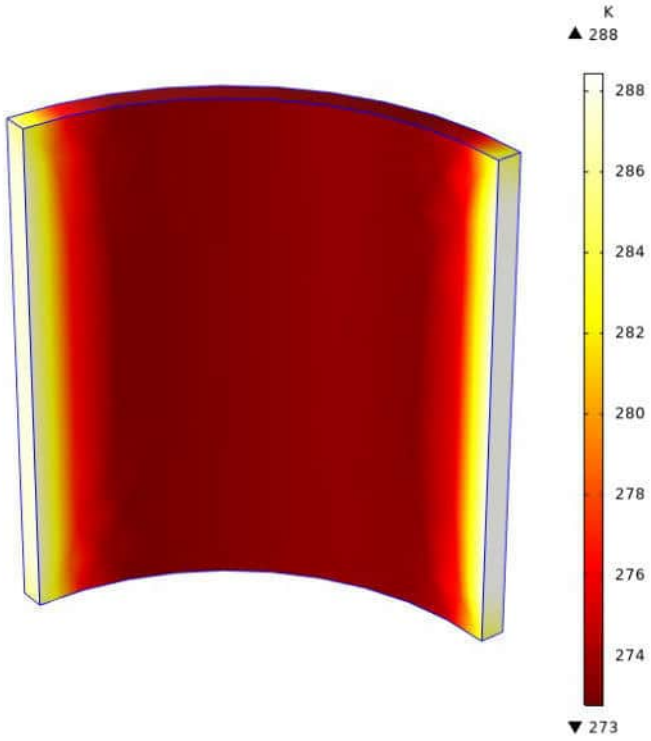

Рисунок 5.13 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 400 с

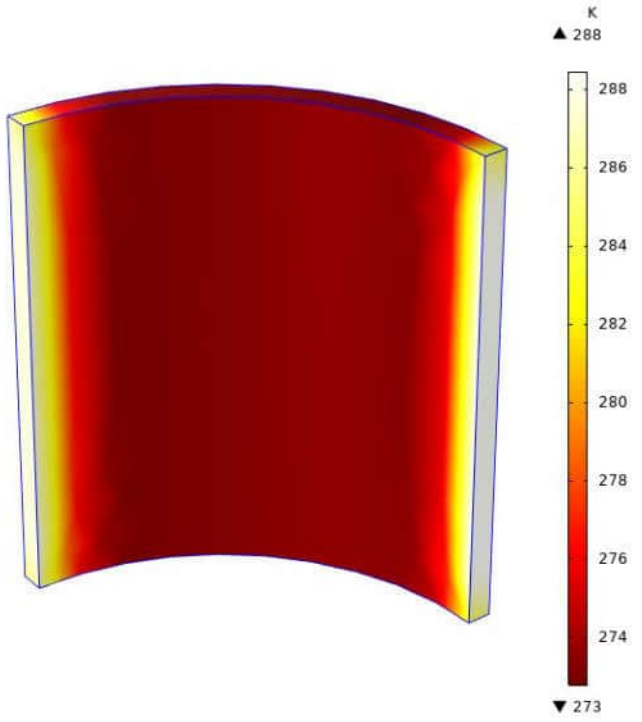

Рисунок 5.14 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 800 с

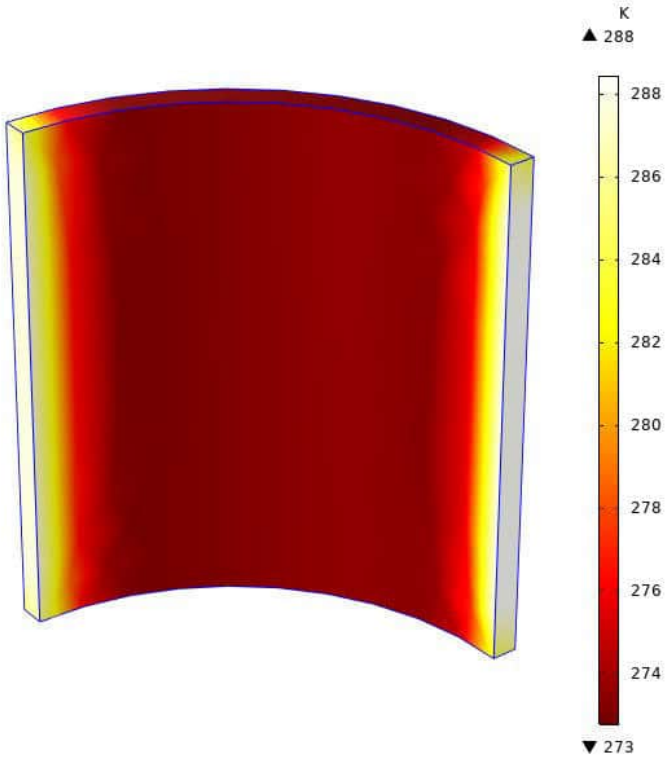

Рисунок 5.15 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 1200 с

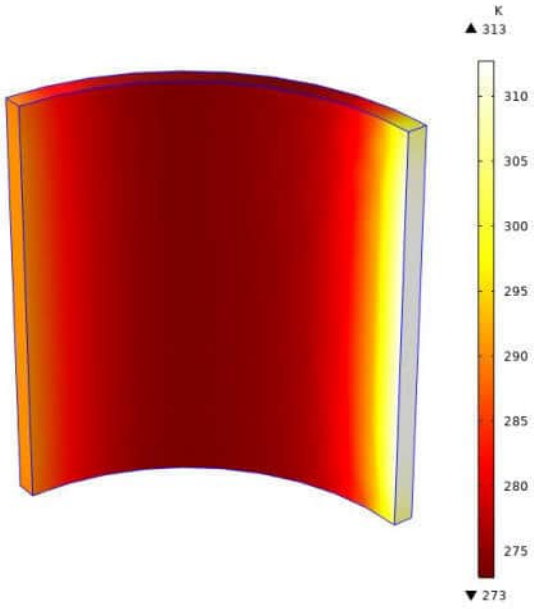

Рисунок 5.16 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 1600 с

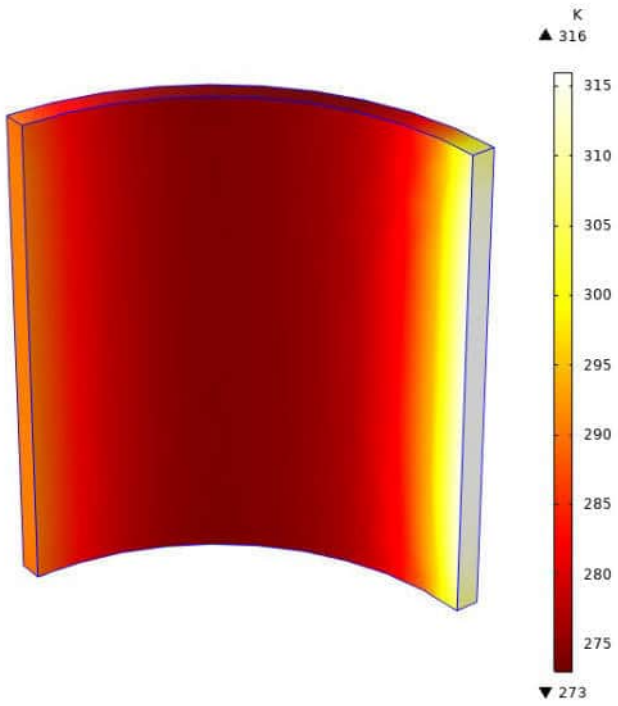

Рисунок 5.17 – Розподіл температурного поля в момент часу t = 1800 с

5.3 Результати чисельного експерименту для визначення термопружних напружень циліндричної панелі

Також отримано розподіл термонапружень та переміщень циліндричної панелі.

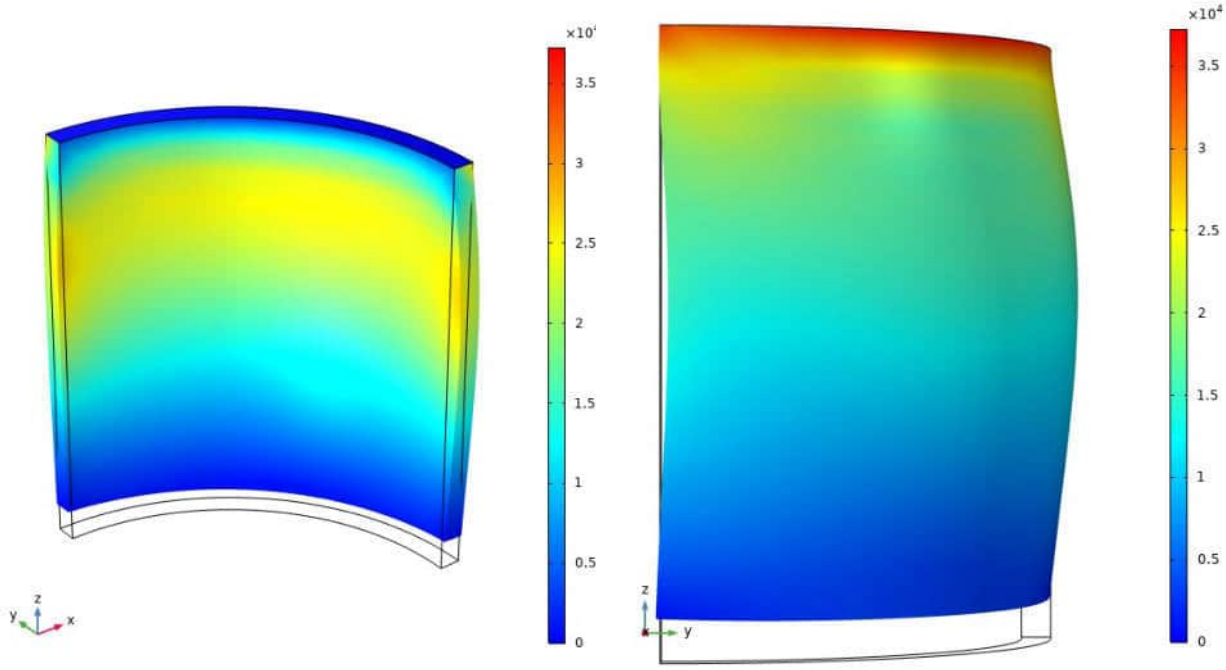

Рисунок 5.18 – Початкове значення термонапружень та переміщень

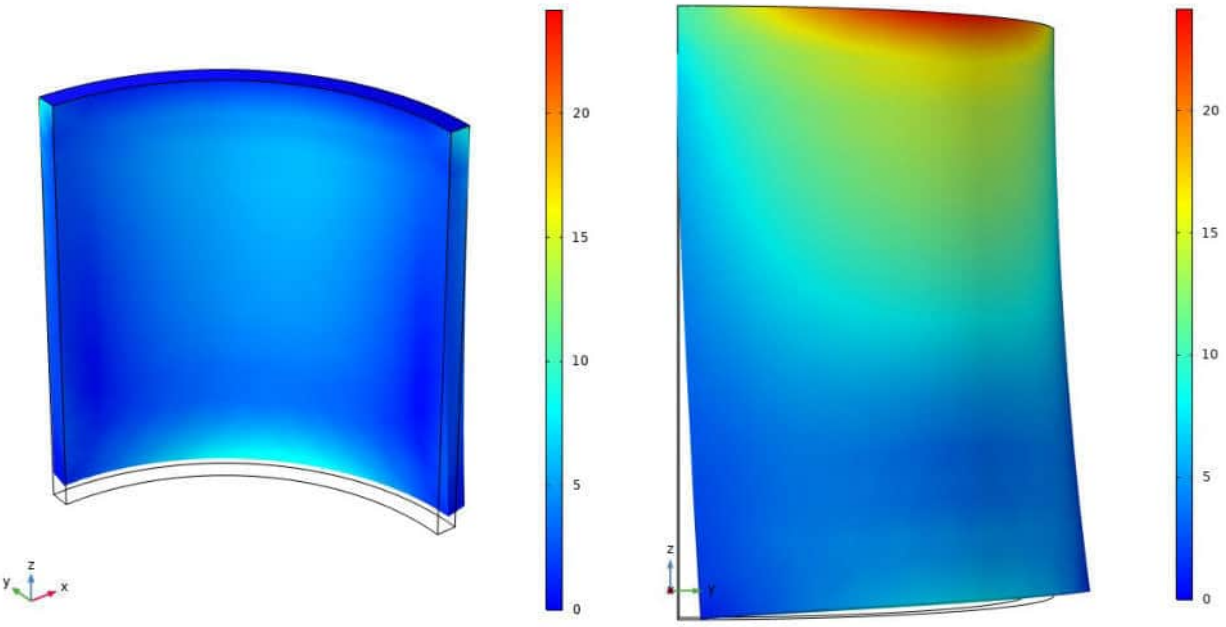

Рисунок 5.19 – Значення термонапружень та переміщень в момент часу t = 1c

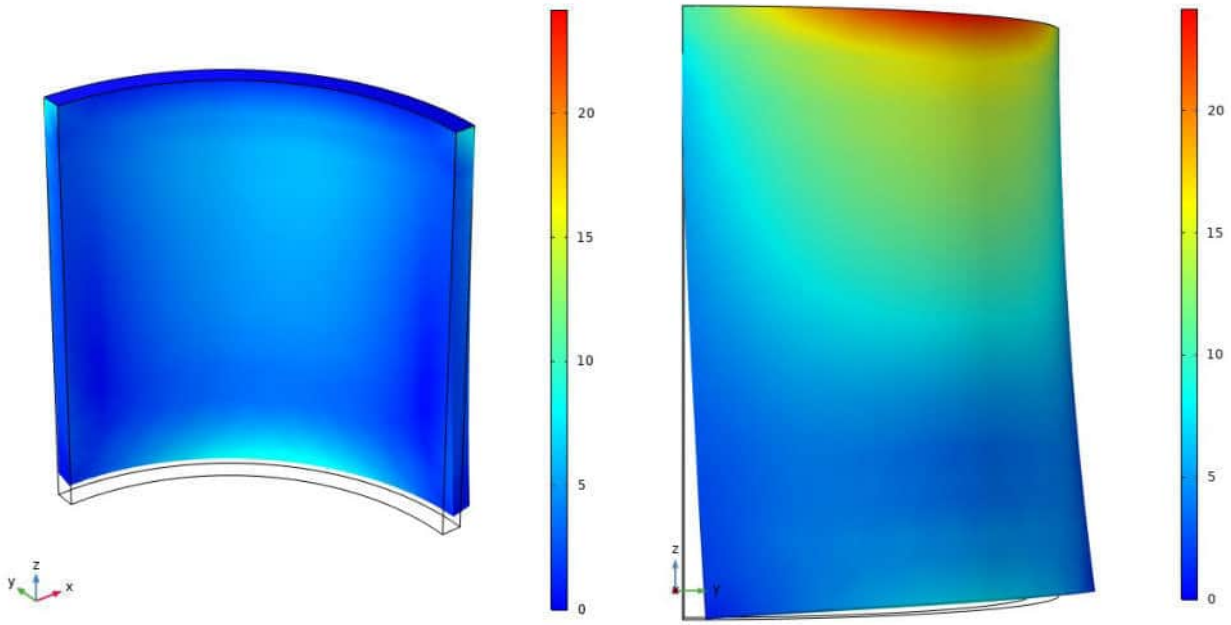

Рисунок 5.20 – Значення термонапружень та переміщень в момент часу t = 50 с

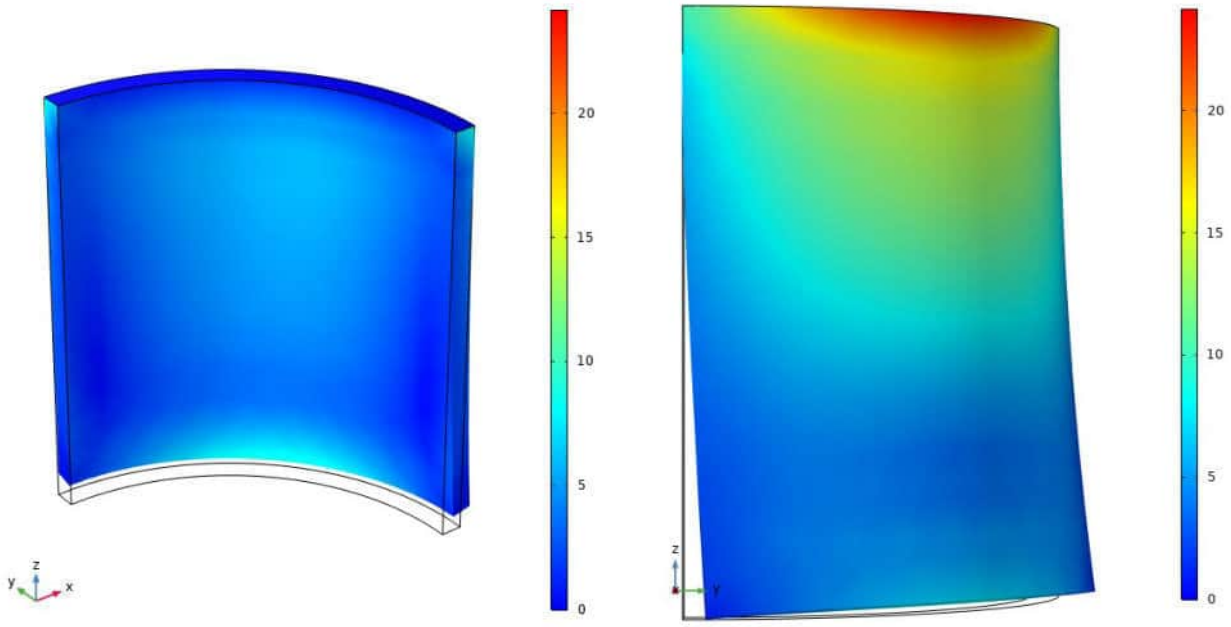

Рисунок 5.21 – Значення термонапружень та переміщень в момент часу t = 1800с

Результати дослідження показали, що зміни значеннь термонапружень та переміщень відбувалися тільки в часовому проміжку [0,1].

Висновок

Дана магістерській роботі присвячена дослідженню термопружних процесів в тонкостінних елементах, зумовлених впливом як силового так і температурного навантаження. Для проведення дослідження спочатку використано формулювання початково-крайової задачі для тривимірного тіла. Також побудована відповідна варіаційна задача. На основі спідвношень теорії оболонок Тимошенка-Міндліна вихідну варіаційну задачу приведено до двовимірноївідносно просторових змінних варіаційної задачі динамічної термопружності оболонок. Для розв`язування часткво дискретизованої вараційної задачі наведено схему методу скінченних елементів наприкладі задачі теплопровідності.

Проведемо числовий експеримент з використання програмного пакету COMSOL, який може моделювати різноманітні мультифізичні систем. У пакеті обрано модулі Shell та Heat Transfer in Shells, а також було задано геометричні параметри циліндричної панелі. Для дослідження динамічних процесів у розділі Study вибрано Time Dependent. Сітка будувалася з використання серендипових квадратичних ізопараметричних апроксимацій.

Відповідно до заданих початкових та крайових умов, отримано температурний розподіл в циліндричній панелі, а також значення термонапружень та переміщень. Зазначимо, що зміна значень термонапружень спостерігається протягом відрізку часу від 0 до 1 секунди.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що обраний програмний пакет COMSOL є хоршим інструментом для чисельного розв`язування таких комплексних задач, як динамічна термопружніть тонких оболонок.

Список використаної літератури

1. Горлач В. Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини / В. Горлач, І. Клименко, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту, сер. прикл. матем. та інф. – 2012. – Вип. 18. – С. 76–95.
2. Малець Р.Б. Моделювання процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі / Р.Б. Малець // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. –2009. – Вип. 1.– С. 240-250.
3. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.
4. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко. – Львів: Вища школа, 1976. – 80 с.
5. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко. – Київ: НМК ВО, 1991. – 88 с.
6. Naghdi P. M. The Theory of Shells and Plates / P. M. Naghdi // Handbuch der Physik Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1972. – Vol. VIa2. – P. 425–640.
7. Vahin P. P. Variational formulation of the problem of nonstationary thermo-elasticity for thin shells compliant to shears and compression /P. P. Vahin, R. B. Malets', H. A. Shynkarenko. // J. Math. Sci. – 2016. – 217, No. 3. – P. – 345–364.