

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА**  
**ФРАНКА**

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра інформаційних систем

**ДИПЛОМНА РОБОТА**

на тему:

**Числова схема розв'язання динамічних задач теорії**  
**пружності**

Виконав: студент групи ПМІ-42  
спеціальності 122 - комп'ютерні  
науки

Бордуляк М. А.

Науковий керівник:  
д.ф. – н.м., професор  
Шинкаренко Г. А.

Рецензент:  
к.ф.м. – н., професор  
Щербина Ю. М.

Львів 2023

## АНОТАЦІЯ

Дипломна робота Бордуляка Маркіяна Андрійовича на тему “ Числова схема розв’язання динамічних задач теорії пружності” містить 32 сторінок та 6 джерел.

Мета даної дипломної роботи полягає в розгляді та розв'язанні задач теорії пружності з використанням методу скінченних елементів.

На початку роботи було сформульовано початково-крайову задачу теорії пружності та запропоновано її варіаційне формулювання. За допомогою напівдискретизації Гальоркіна та напівдискретної задачі сформульовано однокрокову рекурентну схему. Програмне забезпечення написано мовою Python в середовищі Visual Studio Code. Проаналізовано збіжність норм та енергетичне рівняння.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ТА ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ .....	4
1.1 Початково-крайова задача.....	4
1.2 Формулювання варіаційної задачі.....	5
РОЗДІЛ 2. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА. НАПІВДИСКРЕТНА ЗАДАЧА .....	7
2.1 Напівдискретизація Гальоркіна .....	7
2.2 Напівдискретна задача.....	8
РОЗДІЛ 3. ОДНОКРОКОВА РЕКУРЕНТНА СХЕМА .....	10
РОЗДІЛ 4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ.....	13
РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРЕМЕНТИ .....	16
РОЗДІЛ 6. АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ .....	23
РОЗДІЛ 7. ЕНЕРГЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ.....	26
ВИСНОВКИ.....	31
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	32

## ВСТУП

Теорія пружності — розділ механіки суцільних середовищ, що вивчає деформації і напруження в тілах, котрі перебувають у спокої або рухаються під дією навантажень.[3].

Задачі теорії пружності є важливим і невід'ємним елементом дослідження та розв'язування проблем механіки континууму. Вони займають центральне місце у вивченні поведінки матеріалів та структур під дією зовнішніх навантажень.

Одним з основних інструментів для аналізу пружних тіл є метод скінченних елементів (МСЕ). Цей метод надає можливість чисельно моделювати складні просторові структури та визначати їх поведінку при різних умовах навантаження. Він широко використовується в інженерних дослідженнях, проектуванні та аналізі механічних систем.

Ціль даної дипломної роботи полягає в розгляді та розв'язанні задач теорії пружності з використанням методу скінченних елементів.

При розв'язуванні задач теорії пружності МСЕ надає можливість отримувати докладну інформацію про напруження та деформацію в структурах, що дозволяє оцінювати їх міцність, стійкість та прогнозувати їх поведінку при різних умовах.

Використання методу скінченних елементів у розв'язанні задач теорії пружності є актуальним напрямком досліджень, оскільки він поєднує в собі точність математичних моделей та чисельну ефективність розрахунків. Цей метод знайшов широке застосування в багатьох галузях, таких як будівництво, машинобудування, авіація, аерокосмічна промисловість та багато інших.

Дана дипломна робота пропонує детальний огляд та аналіз розв'язання задач. Вона ставить за мету виявити переваги та обмеження цього методу, а також навести приклади практичного застосування.

## РОЗДІЛ 1. ФОРМУЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ТА ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

За основу роботи було взято лінійну задачу теорії пружності матеріалів з короткочасною пам'яттю. Матеріали теоретичної частини розділу 1.1 та 1.2 було взято з [1].

### 1.1 Початково-крайова задача

Розглянемо пружне тіло, яке займає обмежену зв'язну область  $\Omega$  точок  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  евклідового простору  $R^d$  з неперервною за Ліпшицем межею  $\Gamma$ , та позначимо одиничний вектор зовнішньої нормалі до цієї межі через  $n = \{n_i\}_{i=1}^d$ ,  $n_i = \cos(n, x_i)$ .

Дослідження процесу деформування такого тіла на інтервалі часу  $[0, T]$  під дією вектора об'ємних сил  $f(x, t) = \{f_i(x, t)\}_{i=1}^d$  та вектора поверхневих зусиль  $p(x, t) = \{p_i(x, t)\}_{i=1}^d$  вимагає визначення вектора пружних переміщень  $u(x, t) = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$ , який задовольняє рівняння еластодинаміки [1]

$$\begin{cases} \rho(u_i'' - f_i) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}(u) + a_{ijkl} e_{kl}(u'), \\ e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{в } \Omega \in (0, T], \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u_i = 0 \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_u = \Gamma / \Gamma_u \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u|_{t=0} = u_0, u'|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega. \quad (1.3)$$

Групу рівнянь (1.1) називають рівняннями руху пружного тіла. Випадок анізотропного пружного тіла з урахуванням в'язкості і закону Гука узагальнено в 2-му рівнянні, співвідношення Коші, що зв'язують тензор деформації та тензор переміщення узагальнено в 3 рівнянні. Підставивши 2 останні рівняння в

перше дає можливість повного виключення тензора деформації та напруження з розгляду.

В рівнянні (1.1)  $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=0}^d$  функція, яку називають тензором напружень, а  $\{e_{ij}\}_{i,j=0}^d$  тензор деформації. Вони утворюють симетричні структури  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $e_{ij} = e_{ji}$ .

В цих рівняннях  $\rho = \rho(x) > 0$  – густина маси тіла. Властивості  $\rho$  описуються коефіцієнтами пружності та в'язкості з такими властивостями симетрії та еліптичності:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \\ c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq c_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad c_0 = \text{const} > 0 \\ a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq a_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad a_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in R. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

На просторі  $V = \{v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$ ,  $H = L^2(\Omega)^d$  зробимо припущення, що виконуються умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in L^\infty(\Omega), \quad u_0 \in V, \quad v_0 \in H \\ f \in L^2(0, T; H) \quad \rho \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_p)^d), \quad 0 < T < +\infty \end{array} \right. \quad (1.5)$$

## 1.2 Формулювання варіаційної задачі

Для формулювання варіаційної задачі, скалярно перемножимо перше рівняння з групи рівнянь (1.1) з  $\{v_i\}_{i=1}^d \in V$  – довільний вектор з множини  $V$  та зінтегруємо отримане рівняння на області  $\Omega$ . Враховуючи крайові умови (1.2) і другу групу рівнянь (1.1), отримуємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left\{ \rho(u_i''(t) - f_i(t))v_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \rho(u_i''(t) - f_i(t))v_i - \sigma_{ij} e_{ij}(v) \right\} dx - \int_{\Gamma_p} p_i(t) v_i dy \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$= \int_{\Omega} \{ \rho u_i''(t) v_i + [a_{ijklm} e_{km}(u'(t)) + c_{ijklm} e_{km} u] e_{ij}(v) \} dx - \\ - \int_{\Omega} \rho f_i(t) v_i dx - \int_{\Gamma_p} p_i(t) v_i d\gamma \quad \forall v \in V.$$

Після проведених обчислень сформулюємо варіаційну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } u_0 \in V, v_0 \in H, f \in L^2(0, T; H), p \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_p)^d); \\ \text{знайти вектор } u \in L^2(0, T; V) \text{ такий, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ c(u(0) - u_0, v) = 0, m(u'(0) - v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Згідно з [1, п. 3.3] варіаційна задача (1.7) сформульована коректно.

Позначення, уведені в формулі (1.7), пояснено нижче:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(u, v) = \int_{\Omega} p u_i v_i dx, \\ c(u, v) = \int_{\Omega} c_{ijklm} e_{ij}(v) e_{km}(v) dx, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijklm} e_{ij}(u) e_{km}(u) dx \end{array} \right. \quad \forall u, v \in V, \quad (1.8)$$

$$\langle l, v \rangle = m(f, v) + \int_{\Gamma_p} p_i v_i d\gamma \quad \forall v \in V. \quad (1.9)$$

## РОЗДІЛ 2. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА. НАПІВДИСКРЕТНА ЗАДАЧА

Матеріали теоретичної частини розділу 2.1 та 2.2 було взято з [1].

### 2.1 Напівдискретизація Гальоркіна

У методі Гальоркіна основна ідея полягає в тому, що розв'язок задачі шукається у підпросторі  $V_h$ , який є скінченновимірним підпростором вихідного простору  $V$ . Це означає, що шуканий розв'язок апроксимується функціями з підпростору  $V_h$ .

Для отримання напівдискретної апроксимації Гальоркіна спочатку розбиваємо вихідний простір  $V$  на скінченну систему базисних функцій, що утворюють підпростір  $V_h$ . Потім задача розв'язується у підпросторі  $V_h$  замість вихідного простору  $V$ . Це зводить варіаційну задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь, які можна вирішити чисельно.

Тому, з простору  $V$  візьмемо  $\{V_h\}$  – певну послідовність скінченновимірних просторів

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim V_h = N(h) \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0, \\ \text{для будь-якого } \varepsilon > 0 \text{ та довільну } v \in V \\ \text{знайдуться } h > 0 \text{ та } v_h \in V_h \text{ такі, що } \|v - v_h\| \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad (2.1)$$

і за просторовими змінними напишемо послідовність апроксимацій Гальоркіна з варіаційної задачі (1.7) розв'язку  $u(t) \in V$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } u_0 \in V, v_0 \in H, f \in L^2(0, T, H), p \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_p)^d); \\ \text{знайти вектор } u_h \in L^2(0, T, V_h) \text{ такий, що} \\ m(u_h''(t), v) + a(u_h'(t), v) + c(u_h(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ c(u_h(0) - u_0, v) = 0, m(u_h'(0) - v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right. \quad (2.2)$$



## 2.2 Напівдискретна задача

Напівдискретна задача - це проміжна форма варіаційної задачі, яка виникає в процесі застосування методу Гальоркіна для чисельного розв'язування диференціальних або інтегральних рівнянь.

Напівдискретна задача полягає в тому, що розв'язок варіаційної задачі апроксимується лише у деякому скінченновимірному підпросторі  $V_h$  оригінального простору функцій  $V$ . Отже, зафіксуємо певний базис простору  $V_h$ , до прикладу  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Тоді включення  $u_h \in L^2(0, T, V_h)$  дає змогу представити апроксимацію Гальоркіна  $u_{h(t)}$  із  $V_h$  у вигляді лінійної комбінації

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \varphi_j(x) \quad (2.3)$$

де  $U(t) = \{U_j(t)\}_{i=1}^N$  - невідомі функції часу. Для визначення функцій часу підставимо розвинення в ряд (2.3) у рівняння задачі (2.2) і послідовно покладемо  $v = \varphi_j$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В результаті підстановки отримаємо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти вектор } U(t) = \{U_j(t)\}_{i=1}^N \text{ такий, що} \\ \sum_{j=1}^N [m(\varphi_i, \varphi_j) U_j''(t) + a(\varphi_i, \varphi_j) U_j'(t) + c(\varphi_i, \varphi_j) U_j(t)] = \langle l(t), v \rangle, \forall t \in (0, T] \\ \sum_{j=1}^N c(\varphi_i, \varphi_j) U_j(0) = c(u_0, \varphi_j) \quad i = 1, \dots, N; \\ \sum_{j=1}^N m(\varphi_i, \varphi_j) U_j'(0) = m(v_0, \varphi_j) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Запишемо задачу Коші (2.4) у матричному виді:

$$\begin{cases} MU''(t) + AU'(t) + CU(t) = L(t) & \forall t \in (0, T] \\ CU(0) = P_0, MU'(0) = D_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Вартує зазначити, що  $M = \{m(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$ ,  $C = \{c(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$ ,  $A = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$ , додатньо визначені симетричні матриці.

Тому задача Коші (2.4) однозначно розв'язується відносно вектора  $U(t)$ . Підстановка останнього в (2.3) показує, що для кожного фіксованого  $h > 0$  у такий спосіб побудована напівдискретна апроксимація Гальоркіна  $U_h(t) \in V_h$  є єдиним розв'язком задачі (2.2).

### РОЗДІЛ 3. ОДНОКРОКОВА РЕКУРЕНТНА СХЕМА

Матеріали теоретичної частини розділу 3 було взято з [1].

Поділимо рівномірно часовий інтервал  $[0, T]$  на  $N_T$  підінтервалів вузлами  $t_j = j\Delta t, j = 0, \dots, N_T$ . На кожному відрізку  $[t_j, t_{j+1}]$  розв'язок  $u_h(t)$  задачі (2.2) будемо наближати поліномом другого порядку такого виду:

$$u_h(t) \approx u_{h\Delta t}(t) = u^j + \Delta t\omega(t)v^j + \frac{1}{2}[\Delta t\omega(t)]^2 v^{j+\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (3.1)$$

Зазначимо, що:

$$\omega(t) = \frac{t-t_j}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

$$v^j - \text{швидкість переміщення в момент часу } t_j, \quad (3.3)$$

$$v^{j+\frac{1}{2}} - \text{прискорення переміщення, яке є сталим на відрізку } [t_j, t_{j+1}] \quad (3.4)$$

Також зауважимо, що

$$\begin{aligned} u'_h(t) &\approx u'_{h\Delta t}(t) = v^j + \Delta t\omega(t)v^{j+\frac{1}{2}}, \\ u'_h(t_j) &\approx u'_{h\Delta t}(t_j) = v^j, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} u'_h(t_{j+1}) &\approx u'_{h\Delta t}(t_{j+1}) = v^j + \Delta tv^{j+\frac{1}{2}}, \\ u''_h(t) &\approx u''_{h\Delta t}(t) = v^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Підставимо (3.5) у варіаційне рівняння:

$$\begin{cases} (m(v^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(v^j + \Delta t\omega(t)v^{j+\frac{1}{2}}, v) \\ + c(u^j + \Delta t\omega v^j + \frac{1}{2}[\Delta t\omega(t)]^2 v^{j+\frac{1}{2}}, v)) = \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}, v) \rangle \\ \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad \forall v \in V_h \end{cases} \quad (3.6)$$

Виберемо таку функцію  $\xi(t)$ , що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) dt = 1 \quad (3.7)$$

і домножимо на неї рівняння (3.7) та зінтегруємо на відрізку  $[t_j, t_{j+1}]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) (m(v^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(v^j + \Delta t \omega(t) v^{j+\frac{1}{2}}, v) \\ + c(u^j + \Delta t \omega v^j + \frac{1}{2} [\Delta t \omega(t)]^2 v^{j+\frac{1}{2}}, v)) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}, v) \rangle dt \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Позначимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t) \xi(t) dt \\ \gamma = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega^2(t) \xi(t) dt \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Тоді з (3.9) отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(v^{j+\frac{1}{2}}, v) + \gamma \Delta t a(v^{j+\frac{1}{2}}, v) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta c(v^{j+\frac{1}{2}}, v) = \\ \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}, v) \rangle - a(v^j, v) - c(u^j + \Delta t \gamma v^j, v) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Враховуючи тепер напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними отримана повністю дискретизована задача (далі однокрокова рекурентна схема) записується у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } U^j, V^j, L_{j+\frac{1}{2}}, \gamma, \beta \in (0, 1), \Delta t > 0. \\ \text{Знайти таке } V^{j+\frac{1}{2}} \text{ що} \\ \left[ M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C \right] V^{j+\frac{1}{2}} = L_{j+\frac{1}{2}} - A V^j - C(U^j + \Delta t \gamma V^j) \\ \text{наступним кроком знайти } U^{j+1}, V^{j+1} \text{ за формулами:} \\ V^{j+1} = V^j + \Delta t V^{j+\frac{1}{2}} \\ U^{j+1} = U^j + \Delta t V^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 V^{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Теорема про безумовну стійкість побудованої ОРС.

При заданих  $u_0, v_0 \in V$  побудована однокрокова рекурентна схема безумовно, відносно вибору  $\Delta t$ , стійка в енергетичній нормі

$$\|u_h(t)\| = (\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_H^2)^{1/2}, \text{ якщо її параметри } \gamma \text{ та } \beta$$

задовольняють умову:

$$\gamma \geq \beta \geq \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Більше того, при

$$\gamma = \beta = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

для стійкості ОРС достатньо, щоб початкова швидкість належала лише простору  $H$ ,  $v_0 \in H_0$ .

Теорема про збіжність побудованої ОРС.

Побудована однокрокова рекурентна схема має другий порядок збіжності відносно енергетичної норми  $\|u_h(t)\| = (\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_H^2)^{1/2}$  при

$$\gamma = \beta = \frac{1}{2}, \quad (3.14)$$

та перший порядок збіжності при інших значеннях параметрів схем.

## РОЗДІЛ 4. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Для реалізації проекту я обрав мову програмування python. Python добре підходить для обчислювальних задач завдяки своїй простоті, багатству інструментів та великій кількості зручних бібліотек. Реалізована програма здатна розв'язати початково крайову задачу теорії пружності за допомогою методу скінченних елементів та однокрокової рекурентної схеми. Для реалізації програми було застосовано наступні бібліотеки:

- Matplotlib – використовується для візуалізації даних та побудови графіків;
- NumPy – забезпечує швидкі та ефективні обчислення з масивами;
- Math – надає доступ до математичних функцій.

За базисні функції в моїй задачі було обрано функції Куранта, реалізація яких зображена на рис. 4.1. та графічний вигляд для 3-ох скінченних елементів на рис 4.2. Також реалізовано квадратурну форму Гауса, для заповнення коефіцієнтів матриць. Наступними кроками роботи програми є заповнення матриць та обрахунок вектора  $L_{j+\frac{1}{2}}$ . Опісля, розв'язується однокрокова рекурентна схема та програма виводить розв'язки  $U^j$ ,  $V^j$  у вигляді векторів та графіків функцій. Після проведених дій, обраховуємо норми та порядок збіжності, також реалізовно енергетичне рівняння, для перевірки коректності розв'язків задачі та прослідковування зміни складових повної енергії в часі. Результати рівняння балансу демонструються у вигляді двох графіків.

З сторони користувача є можливість задавати всі вхідні дані: механічне напруження, густину, модуль Юнга, механічні внутрішні сили, кількість скінченних елементів та крок часу, які визначаються в розділі 5.

```

class CourantFunctions:

    def __init__(self, index = 0, elems_num = 10, length = 0.01):
        self.index = index
        self.elems_num = elems_num
        self.length = length

    def fi(self,x):
        h = self.length / self.elems_num

        if x < 0 or x > self.length:
            return 0
        else:
            if (self.index - 1) * h < x and x <= self.index * h:
                return (x - (self.index - 1) * h) / h

            if self.index * h < x and x <= (self.index + 1) * h:
                return ((self.index + 1) * h - x) / h

            else:
                return 0

```

Рис. 4.1. Реалізація функцій Куранта

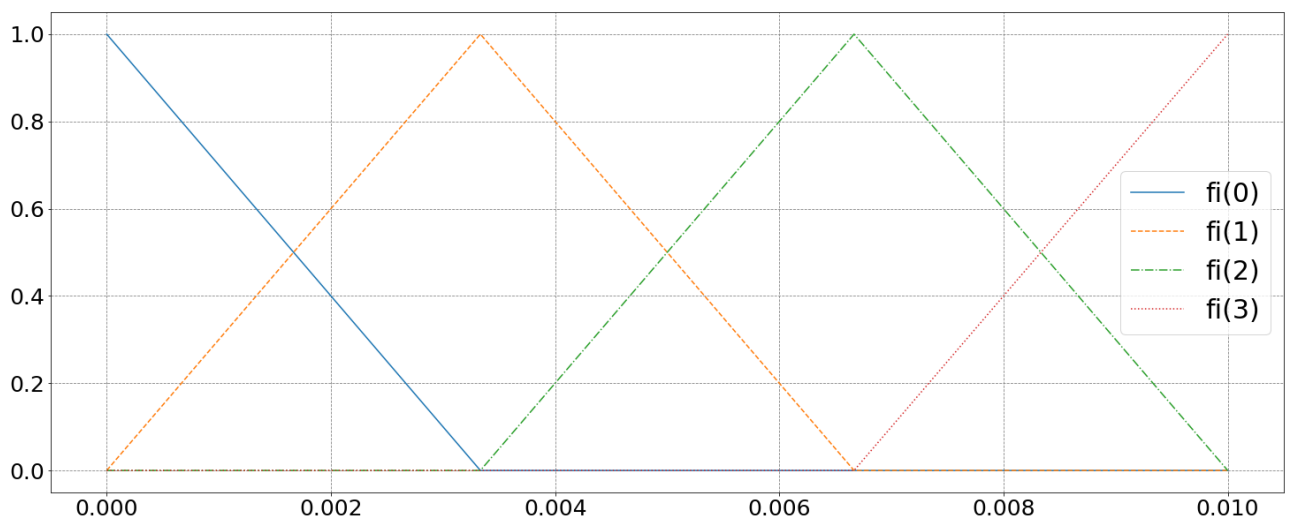


Рис. 4.2. Структура функцій куранта з 3 скінченними елементами( 4 вузли)

На рис. 4.3. продемонстровано реалізацію функції для заповнення матриці  $M$  та вивід заповненої тридіагональної матриці.

```

M_old = np.zeros((N+1, 3))

M_old[0][1] = Integrate(lambda x: (ro*fi[0](x)*fi[0](x)), xi[0], xi[1])
M_old[0][2] = Integrate(lambda x: (ro*fi[0](x)*fi[1](x)), xi[0], xi[1])

for i in range(1, N):

    M_old[i][0] = Integrate(lambda x: (ro*fi[i-1](x)*fi[i](x)), xi[i-1], xi[i])
    M_old[i][1] = Integrate(lambda x: (ro*fi[i](x)*fi[i](x)), xi[i-1], xi[i])
    M_old[i][1] += Integrate(lambda x: (ro*fi[i](x)*fi[i](x)), xi[i], xi[i+1])
    M_old[i][2] = Integrate(lambda x: (ro*fi[i](x)*fi[i+1](x)), xi[i], xi[i+1])

M_old[N][0] = Integrate(lambda x: (ro*fi[N-1](x)*fi[N](x)), xi[N-1], xi[N])
M_old[N][1] = Integrate(lambda x: (ro*fi[N](x)*fi[N](x)), xi[N-1], xi[N])

M = np.zeros((N+1, N+1))

for i in range(N+1):
    M[i][i] = M_old[i][1]
    if i > 0:
        M[i][i-1] = M_old[i][0]
    if i < N:
        M[i][i+1] = M_old[i][2]

print(M)

```

✓ 0.1s

```

[[0.390625  0.1953125  0.          ...  0.          0.          0.          ]
 [0.1953125  0.78125   0.1953125  ...  0.          0.          0.          ]
 [0.          0.1953125  0.78125   ...  0.          0.          0.          ]
 ...
 [0.          0.          0.          ...  0.78125   0.1953125  0.          ]
 [0.          0.          0.          ...  0.1953125  0.78125   0.1953125]
 [0.          0.          0.          ...  0.          0.1953125  0.390625 ]

```

Рис. 4.3. Заповнення матриці  $M$

```

V_j = np.zeros(N + 1)
U_j = np.zeros(N + 1)
t = 0
while t <= T :
    left_part = M + dt * gamma * A + 0.5 * (dt ** 2) * beta * C
    left_part[0,0] = 10**20
    right_part = L_j_plus_half - A.dot(V_j) - C.dot(U_j + dt*gamma*V_j)

    V_j_plus_gamma = np.linalg.solve(left_part, right_part)

    V_j_plus_one = V_j + dt* V_j_plus_gamma
    U_j_plus_one = U_j + dt *V_j + 0.5*(dt**2)* V_j_plus_gamma
    V_j, U_j = V_j_plus_one, U_j_plus_one

```



Рис. 4.4. Реалізація рекурентної схеми

## РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРЕМЕНТИ

Числові експерименти було проведено для наступної задачі:

$$\begin{cases} \rho(u'' - f) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ \sigma = ce(u) + ae(u'), \quad e(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{в } \Omega \times (0, T] \quad \Omega \in (0, L) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \sigma|_{x=L} = p \quad \forall t \in (0, T] \quad (5.2)$$

$$u|_{t=0} = 0, u'|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (5.3)$$

Для аналізу числових результатів було розглянуто стрижень з кераміки PZT-4 довжиною  $L = 0.01$  м. Спостереження проведено в періоді часу  $T = 75 \cdot 10^{-7}$  с. Потрібні властивості цього матеріалу характеризуються такими величинами:

$$\begin{aligned} \rho &= 7500 \text{ кг/м}^3, \\ c &= 13.9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, a(x) = 4 \text{ м}^2/\text{с}, f = 0 \text{ м/с}^2 \\ \beta &= \gamma = 0.5 \end{aligned}$$

Вважаємо, що лівий кінець стрижня жорстко закріплений, а до правого будемо подавати ненульове механічне навантаження  $p = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ . Оберемо рівномірну сітку  $N = 512$  скінченних елементів з кусково лінійними апроксимаціями розв'язку та  $N_t = 1200$  кроків інтегрування в часі. В такому разі виконується умова Куранта-Фрідрікса  $v\Delta t \leq \frac{1}{2}h$ , де  $v = \sqrt{c\rho^{-1}}$  – швидкість поширення хвилі збурень. Наведені результати одержано зі значеннями параметрів  $\beta = \gamma = 0.5$ , оскільки вони забезпечують другий порядок збіжності ОРС.

Швидкість поширення хвилі  $\approx 4305$  м/с, довжина стержня  $L = 0.01$  м. Щоб знайти момент часу, в який фронт хвилі досягне лівого кінця стержня необхідно поділити довжину стержня на швидкість поширення хвилі, звідки отримуємо  $\approx 23.22 * 10^{-7}$  с.

Наведені нижче два графіки в проміжку часу  $t = 23.85 * 10^{-7}$  с, при відбитті хвилі від лівого кінця стержня. На всіх наступних графіках на осі абсцис позначено довжину стержня  $L = 0,01$  с.

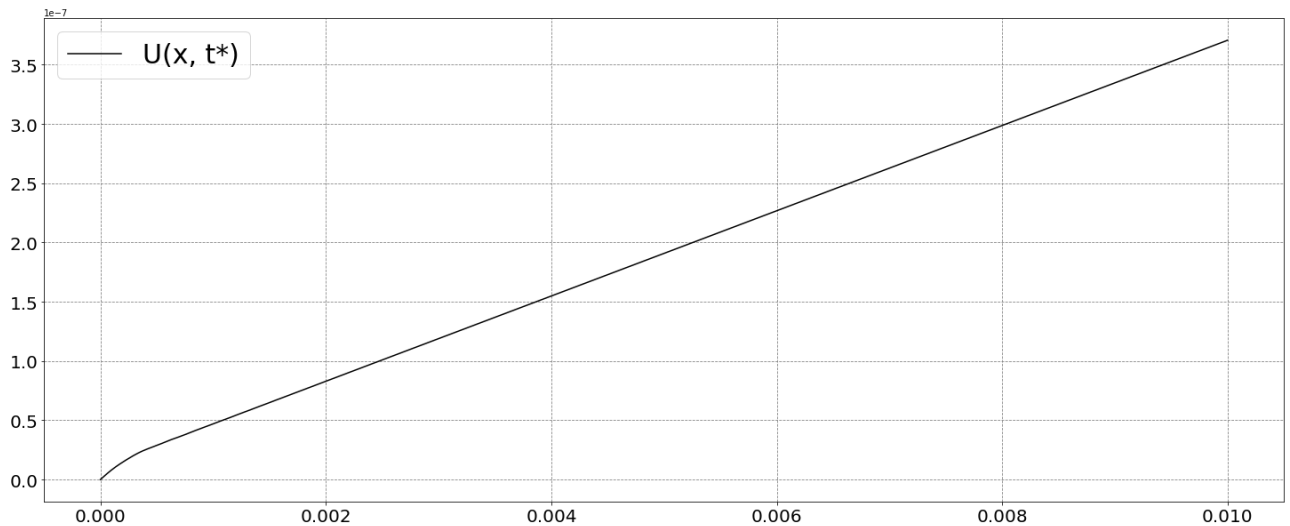


Рис. 5.1. Переміщення точок  $U(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 23.85 * 10^{-7}$  с.

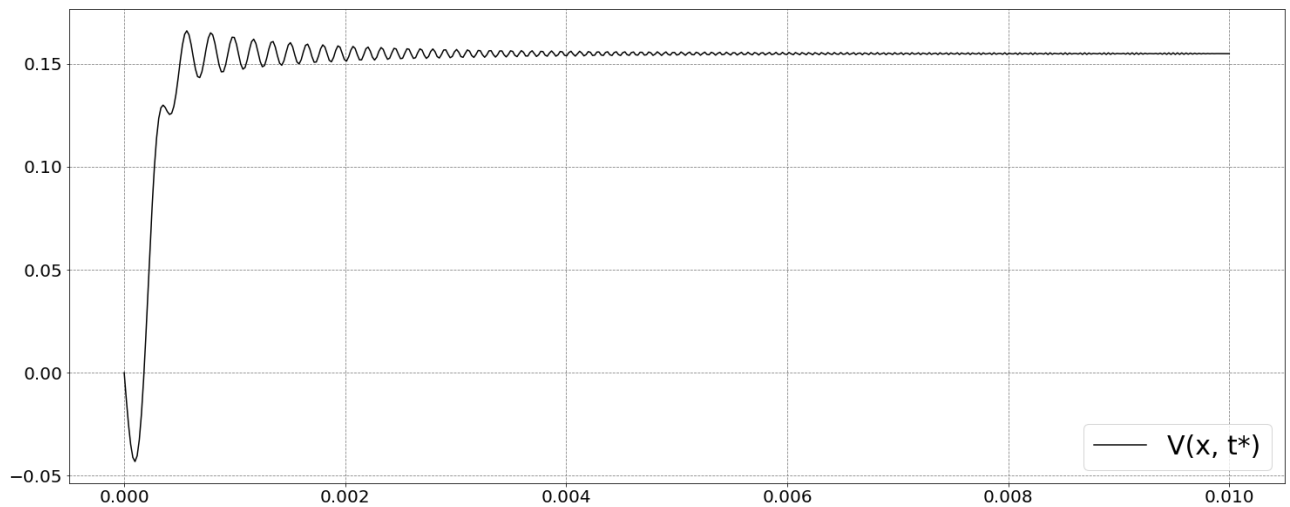


Рис. 5.2. Швидкість руху точок  $V(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 23.85 * 10^{-7}$  с.

Наступні графіки демонструють поведінку хвилі в момент часу  $t = 38.1 * 10^{-7}$ , хвиля відбилась від лівого кінця і прямує до правого.

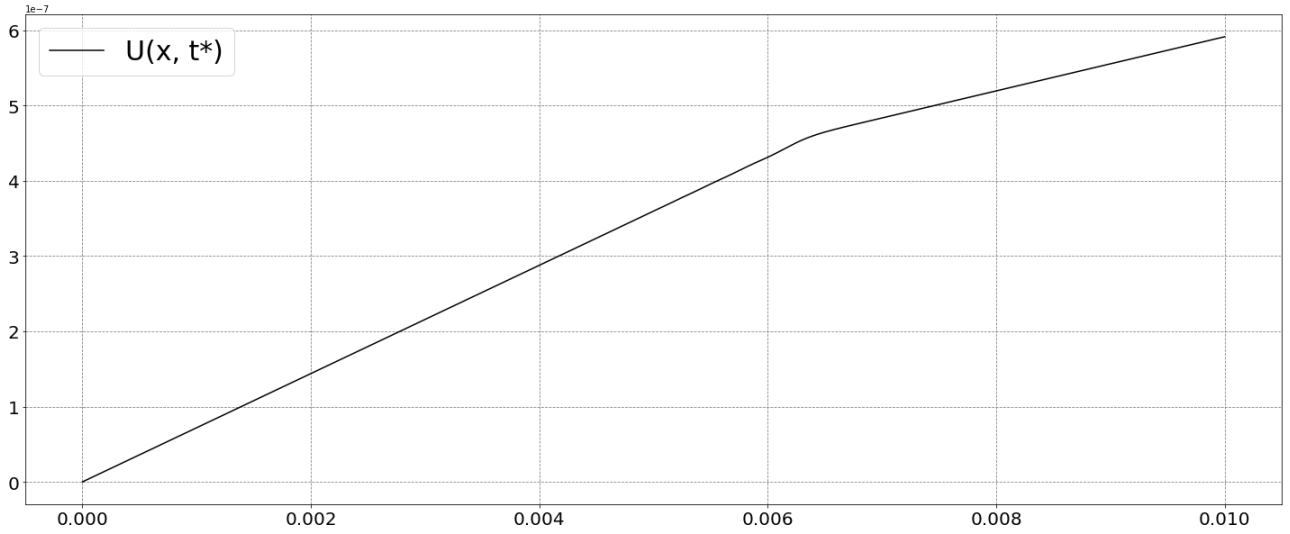


Рис. 5.3. Переміщення точок  $U(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 38.1 * 10^{-7}$   
 $N_t = 1200, N = 512$

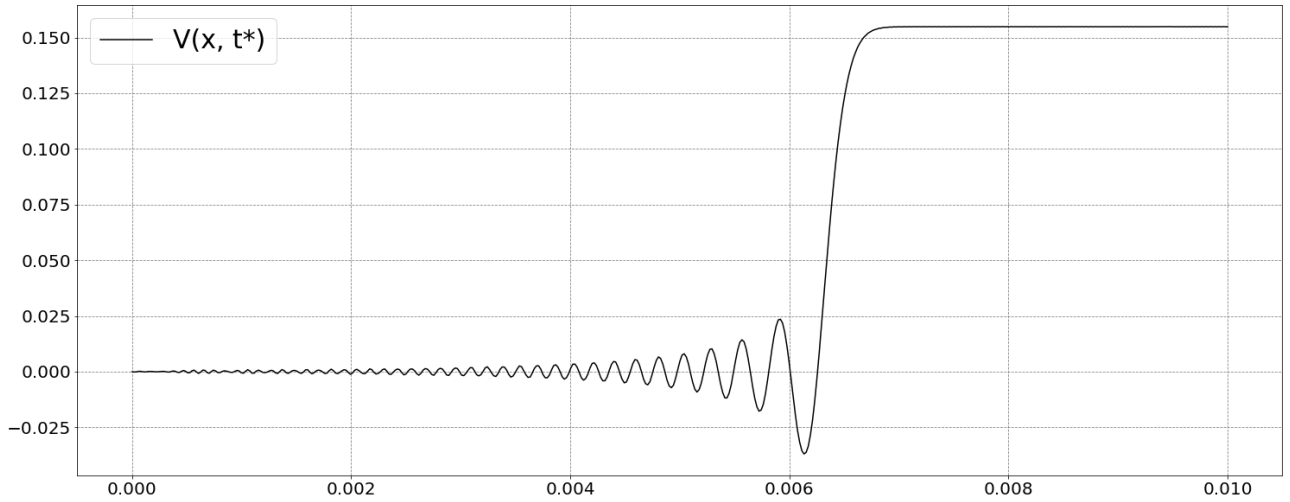


Рис. 5.4. Швидкість переміщення точок  $V(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 38.1 * 10^{-7}$   
 $N_t = 1200, N = 512$

Наступні два графіки демонструють момент часу  $t = 46.44 * 10^{-7}$ , коли хвиля знаходиться в правому кінці стержня.

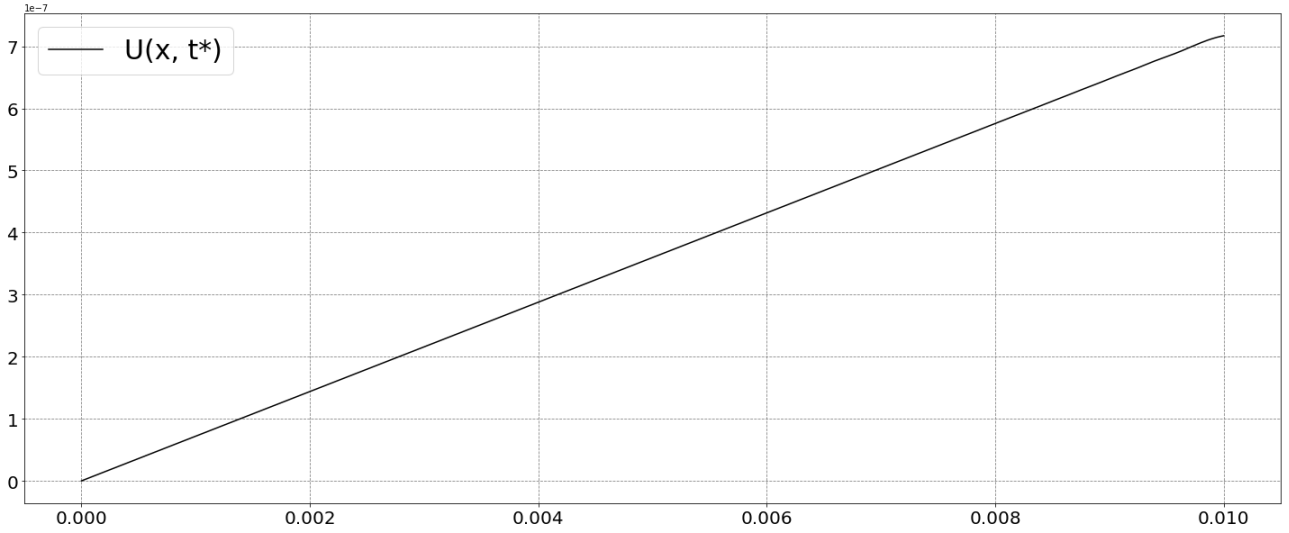


Рис. 5.5. Переміщення точок  $U(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 46.44 * 10^{-7}$

$$N_t = 1200, N = 512$$

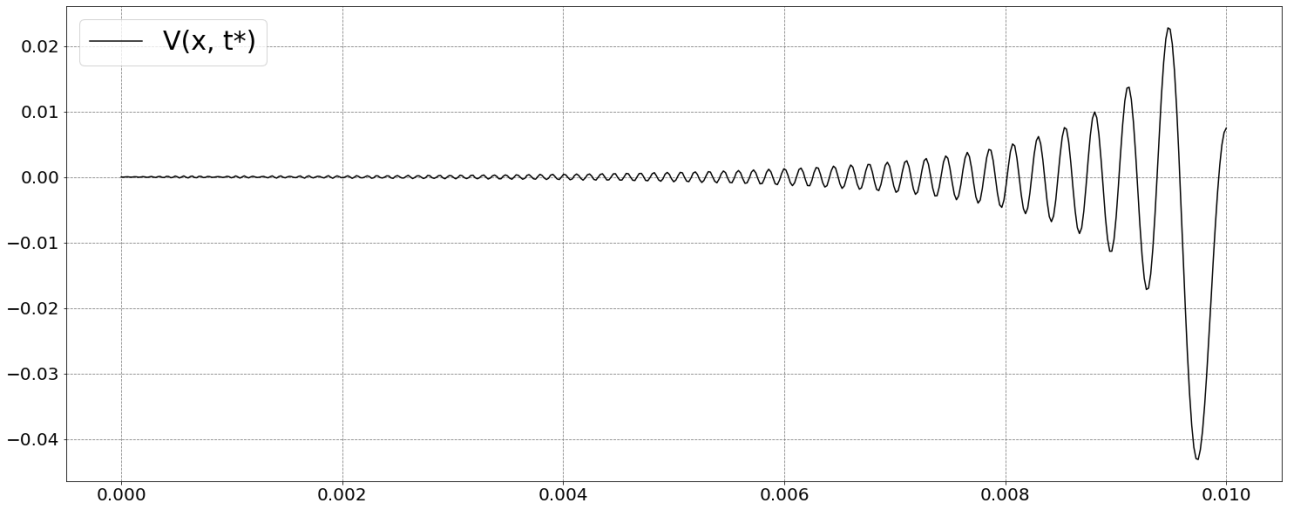


Рис. 5.6. Швидкість руху точок  $V(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 46.44 * 10^{-7} c$ .

$$N_t = 1200, N = 512$$

Наступні два графіки демонструють момент часу  $t = 52.95 \cdot 10^{-7}$ , коли хвиля відбилась від правого кінця стержня.

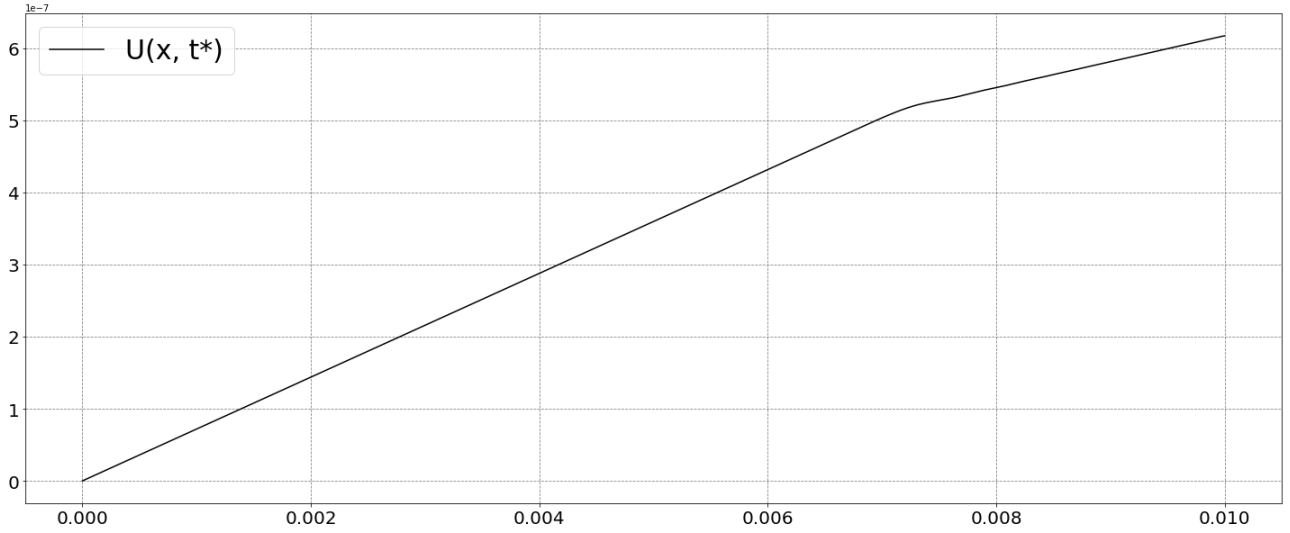


Рис. 5.7. Переміщення точок  $U(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 52.95 \cdot 10^{-7}$

$$N_t = 1200, N = 512$$

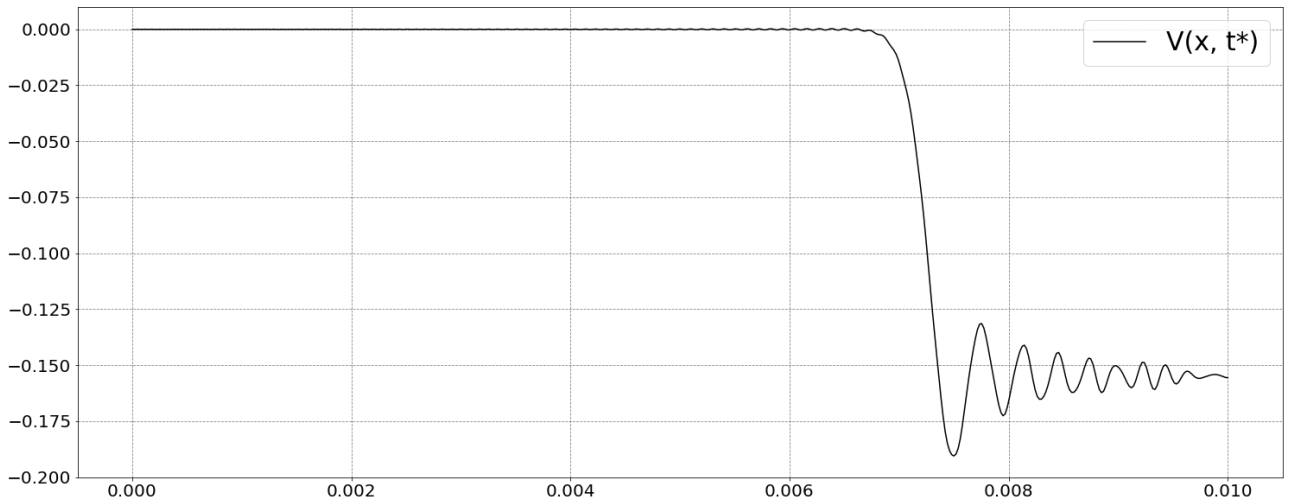


Рис. 5.8. Швидкість руху точок  $V(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 52.95 \cdot 10^{-7}$

$$N_t = 1200, N = 512$$

Два графіки демонструють переміщення точок та швидкість їх переміщення в кінцевий момент часу  $T = 75 \cdot 10^{-7}$  с.

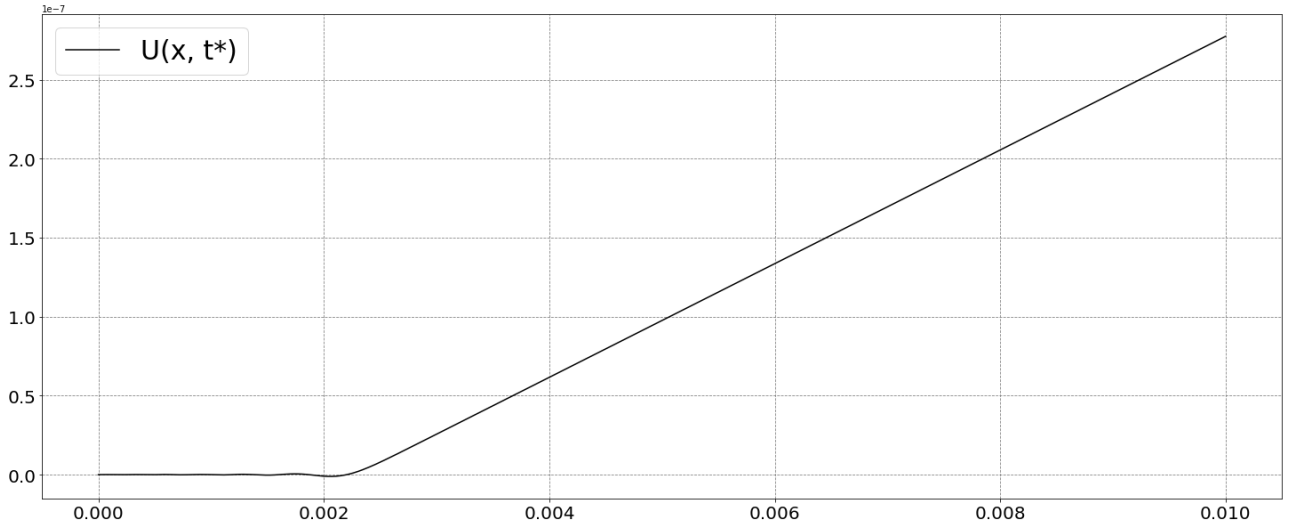


Рис. 5.9. Переміщення точок  $U(x, t^*)$  в момент часу  $t^* = 75 \cdot 10^{-7}$

$$N_t = 1200, N = 512$$

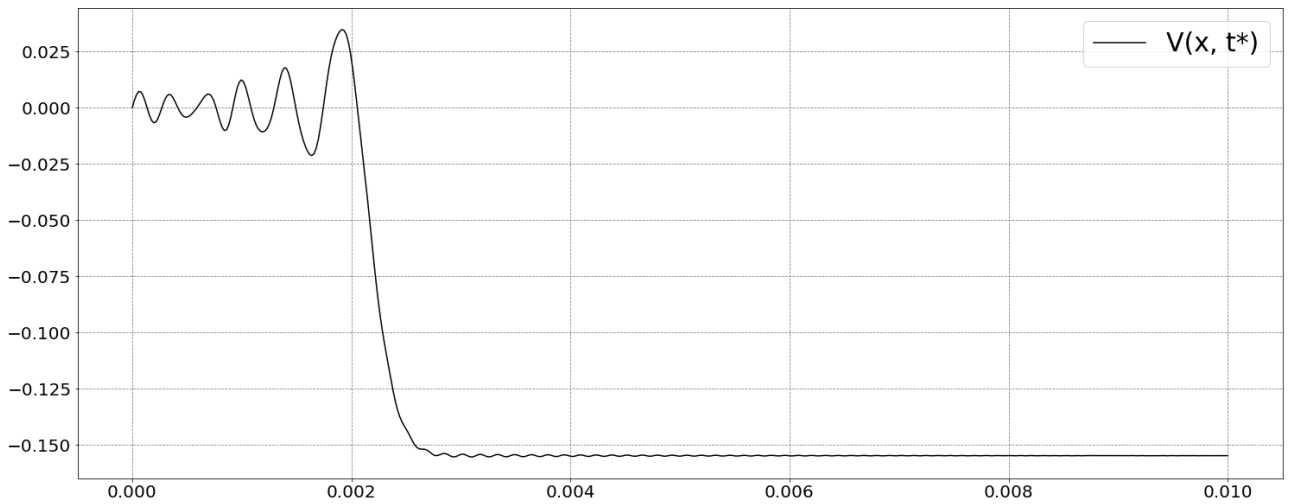


Рис. 5.10. Швидкість руху  $V(x, t^*)$  точок в момент часу  $t^* = 75 \cdot 10^{-7}$

$$N_t = 1200, N = 512$$

З аналізу графіків можна зробити наступні висновки:

Профілі переміщення та швидкість руху показують динаміку проходження хвилі вздовж стержня. При руху хвилі до лівого кінця стержня відбуваються перетворення в структурі хвиль.

В цілому, графіки демонструють залежність переміщення та швидкості переміщення відносно часу та координати в задачі проходження хвилі вздовж стержня. Вони показують деталі щодо динаміки та змін у структурі хвиль, що виникають при зіткненні з закріпленим та вільним кінцями стержня.

## РОЗДІЛ 6. АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ

Для перевірки збіжності розв'язків  $u(x, t)$  та  $v(x, t)$  потрібно обрахувати норми в просторі Лебега. Норми обчислюємо за формулами:

$$\|u(x, T)\|_{L^2} = \int_{\Omega} u(x, T)^2 dx \quad (6.1)$$

$$\|v(x, T)\|_{L^2} = \int_{\Omega} v(x, T)^2 dx \quad (6.2)$$

Запишемо таку систему:

$$\begin{aligned} z &= z_h + c_1(h)^p \\ z &= z_{\frac{h}{2}} + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p \\ z &= z_{\frac{h}{4}} + c_1\left(\frac{h}{4}\right)^p \end{aligned} \quad (6.3)$$

де  $z$  - норма точного розв'язку,  $z_h$  - норма апроксимального розв'язку з кроком  $h$ ,

$z_{\frac{h}{2}}$  - норма апроксимального розв'язку з кроком  $\frac{h}{2}$ ,

$z_{\frac{h}{4}}$  - норма апроксимального розв'язку з кроком  $\frac{h}{4}$ ,

$p$  - порядок збіжності.

Для знаходження порядку збіжності з системи рівнянь (6.3) віднімемо перше рівняння від другого (6.4) та від другого третє (6.5):

$$-c_1(h)^p + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p = z_h - z_{\frac{h}{2}} \quad (6.4)$$

$$-c_1\left(\frac{h}{2}\right)^p + c_1\left(\frac{h}{4}\right)^p = z_{\frac{h}{2}} - z_{\frac{h}{4}} \quad (6.5)$$

Поділивши рівняння (6.4) на рівняння (6.5) отримаємо:

$$\frac{z_h - z_{\frac{h}{2}}}{z_{\frac{h}{2}} - z_{\frac{h}{4}}} = 2^p \quad (6.6)$$



З рівняння (6.6) отримаємо  $p$  - порядок збіжності:

$$p = \log_2 \left| \frac{z_h - z_h}{\frac{z_h - z_h}{2} \frac{z_h - z_h}{4}} \right| \quad (6.7)$$

Результат обчислення норм наведено нижче:

$$\|u\|_{L^2} = 9.7349458e-07, N = 128,$$

$$\|u\|_{L^2} = 9.7349610e-07, N = 256,$$

$$\|u\|_{L^2} = 9.7349648e-07, N = 512.$$

Рис. 6.1. Норми в просторі  $L^2$  для  $U$  для  $N = 128, 256, 512$ .

$$\|v\|_{L^2} = 0.3888909, N = 128,$$

$$\|v\|_{L^2} = 0.3888345, N = 256,$$

$$\|v\|_{L^2} = 0.3888195, N = 512.$$

Рис. 6.2. Норми в просторі  $L^2$  для  $V$  для  $N = 128, 256, 512$ .

Обчислені норми наведено в табличному виді:

Таблиця 6.1. – Норми  $\|u\|_{L^2}$  та  $\|v\|_{L^2}$  для  $N = 128, 256, 512$ .  $T = 75 \cdot 10^{-7}$  с

N	$\ u\ _{L^2}$	$\ v\ _{L^2}$
128	9.7349458e-07	0.3888909
256	9.7349610e-07	0.3888345
512	9.7349648e-07	0.3888195

Підставимо обраховані норми в рівняння (6.7) та отримаємо порядки збіжності для розв'язків:

$$p_{u_{L^2}} \approx 1.9995$$

$$p_{v_{L^2}} \approx 1.9168$$

Наведені нижче норми є енергетичними нормами, як характеризують повну енергію пружного тіла та обраховуються за формулою:

$$||u_h(t)|| = (||u'_h(t)||_H^2 + ||u_h(t)||_H^2)^{1/2} \quad (6.8)$$

Обраховані з однаковою кількістю скінченних елементів  $N = 512$  та змінним кроком в часі та часовим проміжком спостереження  $(0, T)$ ,  $T = 75 \cdot 10^{-7} \text{с}$ .

$$||u_h(t)|| = 1.380888, \Delta t = T/600,$$

$$||u_h(t)|| = 1.380767, \Delta t = T/1200,$$

$$||u_h(t)|| = 1.380710, \Delta t = T/2400.$$

Рис. 6.3. Норми  $||u_h(t)||$  для  $\Delta t = T/600, T/1200, T/2400$

Таблиця 6.2. – Норми  $||u_h(t)||$  для  $N = 512, \Delta t = T/600, T/1200, T/2400$

$\Delta t$	$  u_h(t)  $
T/600	1.380888
T/1200	1.380767
T/2400	1.380710

Порядок збіжності норм повної енергії:

$$p_{||u_h(t)||} \approx 1.09387$$

## РОЗДІЛ 7. ЕНЕРГЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ

Матеріали теоретичної частини розділу 7 було взято з [5].

Щоб отримати рівняння балансу, покладемо у варіаційне рівняння задачі (1.7)  $v = u'_h(t)$  і отримаємо:

$$m(u''_h(t), u'_h(t)) + a(u'_h(t), u'_h(t)) + c(u_h(t), u'_h(t)) = \langle l(t), u'_h(t) \rangle \quad (7.1)$$

$$\forall t \in (0, T]$$

Врахуємо, що

$$m(u''(t), u'_h(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} m(u'_h(t), u'_h(t)) \quad (7.2)$$

$$c(u'_h(t), u_h(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} c(u_h(t), u_h(t)) \quad (7.3)$$

Та підставимо ці значення у рівняння енергетичного балансу:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [m(u'_h(t), u'_h(t)) + c(u_h(t), u_h(t))] + a(u'_h(t), u'_h(t)) = \langle l(t), u'_h(t) \rangle$$

$$\forall t \in (0, T] \quad (7.4)$$

Врахувавши означення введених раніше норм, отримаємо:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2] + |u_h(t)|^2 = \langle l(t), u'_h(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T]. \quad (7.5)$$

Проінтегруємо на проміжку  $[0, t]$  отримане рівняння:

$$\frac{1}{2} [\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2] + \int_0^t |u'_h(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} [\|u'_h(0)\|_H^2 + \|u_h(0)\|_V^2] + \int_0^t \langle l(\tau), u'_h(\tau) \rangle d\tau \quad \forall t \in (0, T]. \quad (7.6)$$

Фізичний зміст норм:

$\frac{1}{2} \|u'_h(t)\|_H^2$  – кінетична енергія пружного тіла

$\frac{1}{2} \|u_h(t)\|_V^2$  – потенціальна енергія пружного тіла (7.7)

$|u'_h(t)|^2$  – інтенсивність дисипації енергії

$\langle l(t), u'_h(t) \rangle$  – потужність зовнішніх джерел енергії, зумовлених об'ємними силами та поверхневими навантаженнями

$\|u_h(t)\| = (\|u'_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_H^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u_h(t), u'_h(t) \in V_h.$

$\frac{1}{2} \|u_h(t)\|^2$  – повна енергія пружного тіла.

Оскільки  $l \in L^2(0, T; V')$ , то виконується така нерівність:

$$|\langle l(t), u'_h(t) \rangle| \leq \sqrt{K} \|l(t)\|_* |u'_h(t)| \leq \frac{1}{2} |u'_h(t)|^2 + \frac{1}{2} K \|l(t)\|_*^2, \quad (7.8)$$

де  $K = \text{const} > 0$ . Підставимо (7.8) у енергетичне рівняння (7.6) і врахувавши початкові умови задачі та виконавши перетворення отримаємо:

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\|^2 + \int_0^t |u'_h(\tau)|^2 d\tau &\leq & (7.9) \\ &\leq \|u_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 + K \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau \quad \forall t \in (0, T], \forall h > 0. \end{aligned}$$

Нерівність (7.9) свідчить про стійкість напівдискретизації Гальоркіна.

Наведені нижче графіки описують результати обчислень енергій та рівняння балансу:

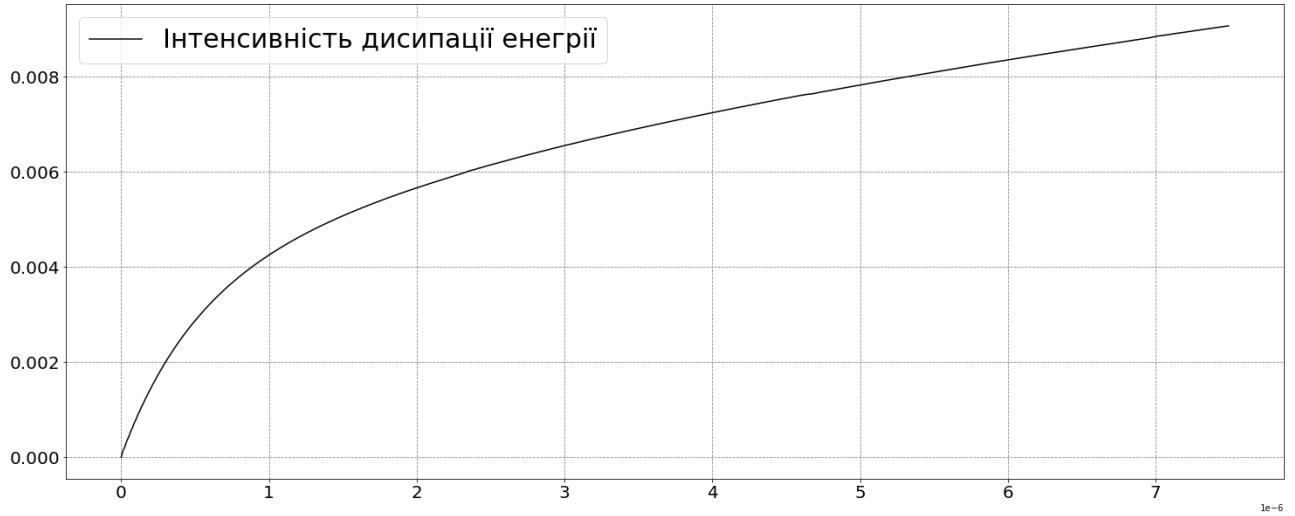


Рис. 7.1. Покрокова зміна інтенсивності дисипації енергії в часі.

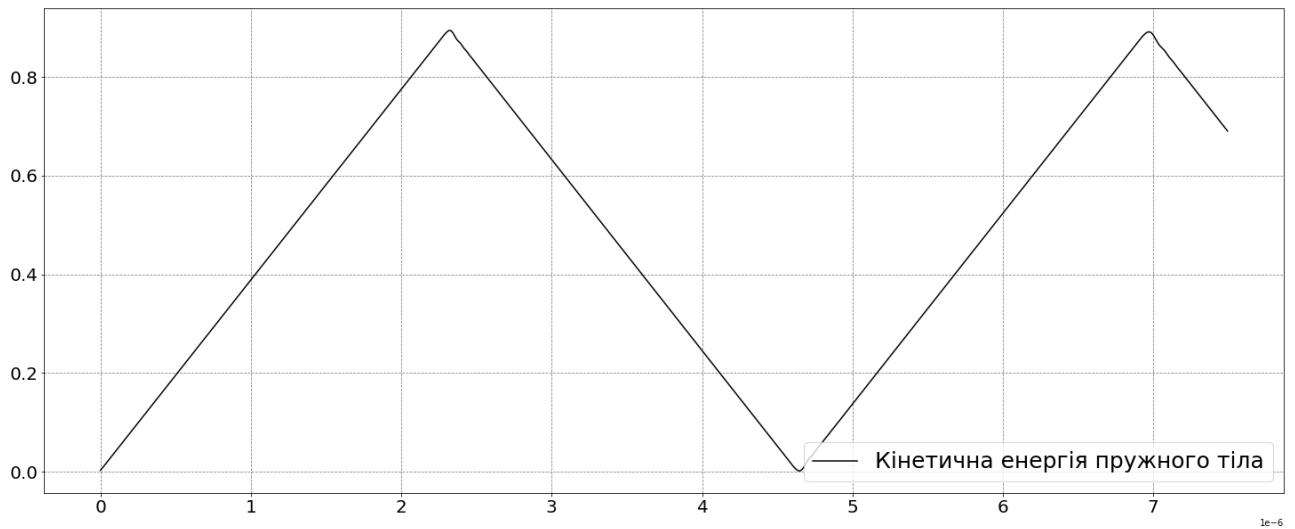


Рис. 7.2. Покрокова зміна в часі кінетичної енергії пружного тіла.



Рис. 7.3. Покрокова зміна потенціальної енергії пружного тіла в часі.

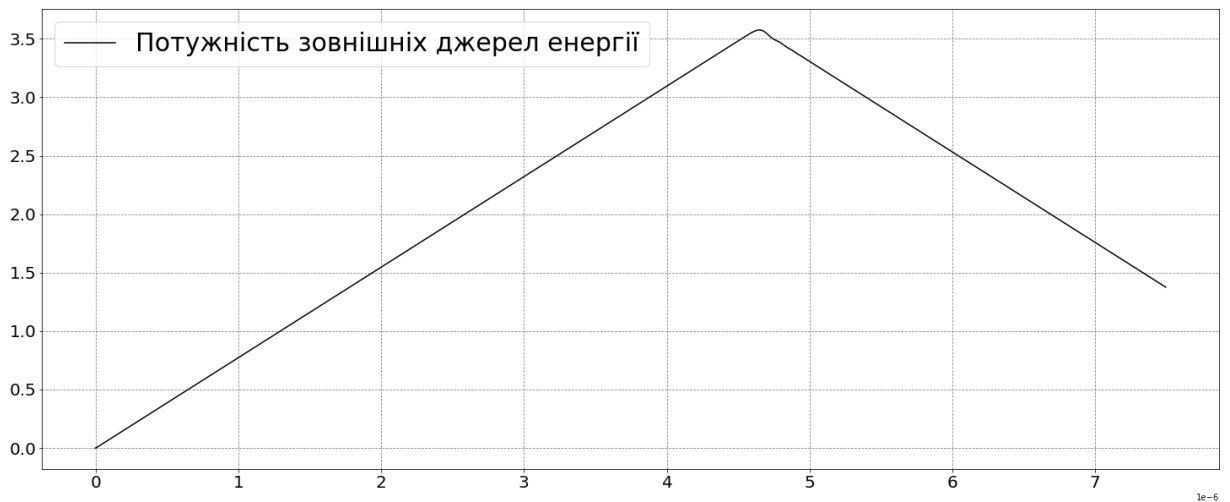


Рис. 7.4. Покрокова зміна потужності зовнішніх джерел енергії в часі.

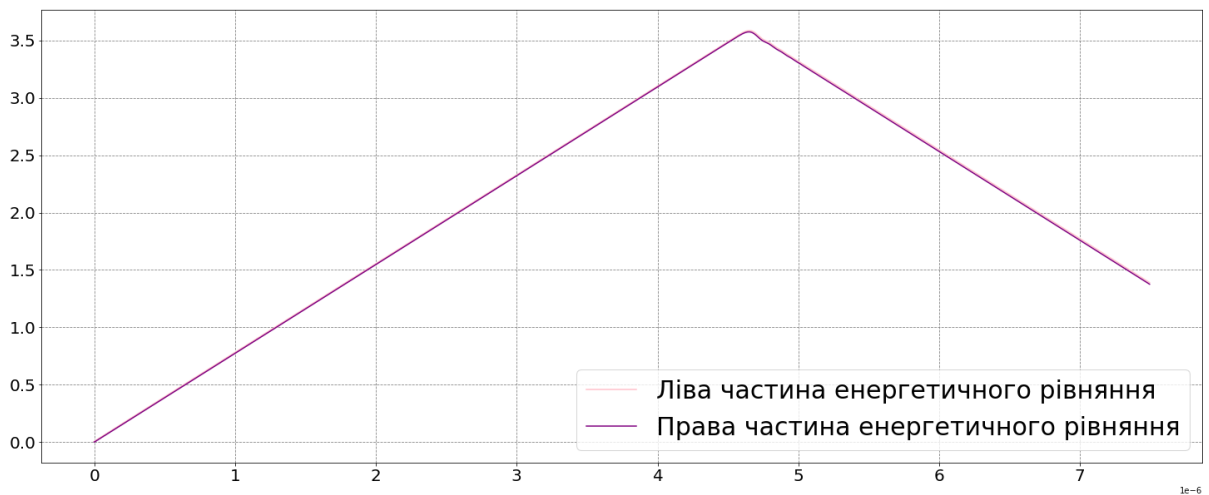


Рис. 7.5. Покрокова зміна лівої та правої частини енергетичного рівняння в часі.

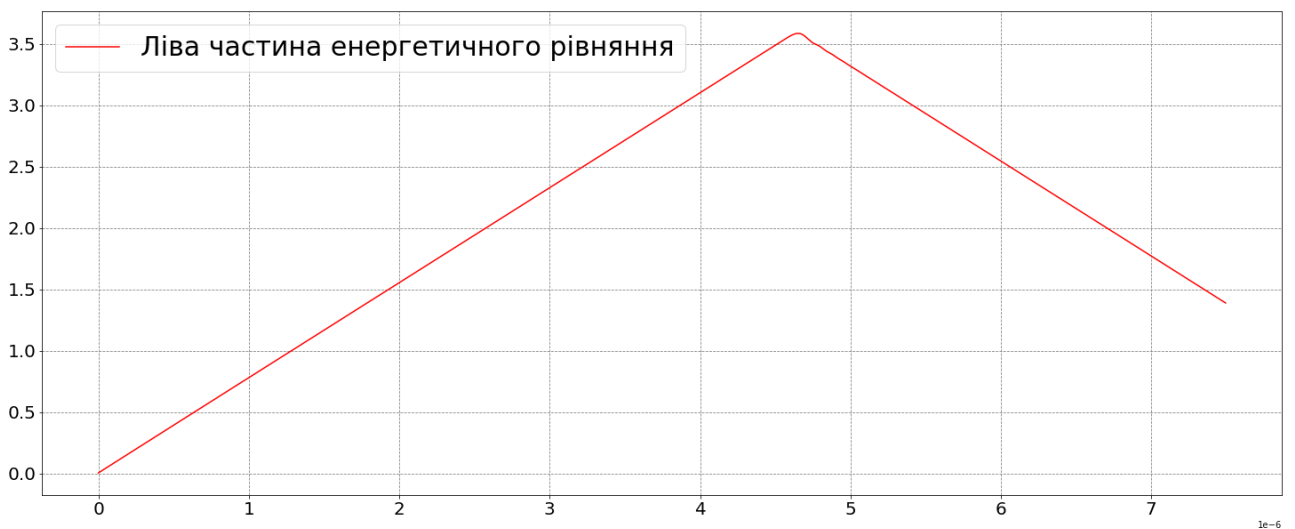


Рис. 7.6. Покрокова зміна лівої частини енергетичного рівняння в часі.



Рис. 7.7. Покрокова зміна правої частини енергетичного рівняння в часі.

Можемо побачити, що кінетична і потенціальна енергія зростають, до моменту проходження фронту хвилі до лівого кінця стержня.

Коли перетворення проходять на жорстко закріпленому кінці, кінетична енергія спочатку зростає, досягає свого максимуму, а потім спадає. Інтенсивність дисипації енергії змінює тільки швидкість свого зростання. Коли хвиля досягає правого кінця стержня, кінетична енергія спочатку спадає, досягає нуля, а потім зростає. При відбитті хвилі від правого кінця потенціальна енергія спочатку зростає, а потім спадає. Потужність зовнішніх джерел енергії зростають до моменту відбиття хвилі від правого кінця стержня, після чого спадає. Максимальне значення кінетичної енергії близько 0,9 Дж, максимальне значення потенціальної енергії близько 3,5 Дж.

Слід зазначити, що графіки лівої та правої частини енергетичного рівняння є ідентичними а отже рівняння енергетичної рівноваги задовольняється в будь який момент часу, отже можемо стверджувати про коректність розв'язку.

## ВИСНОВКИ

В ході дипломної роботи була розглянута початково- крайова задача теорії пружності. Початково-крайову задачу було зведено до варіаційного формулювання. За допомогою напівдискретизації Гальоркіна було записано однокрокову рекурентну схему та описано задачу як систему лінійних рівнянь. Отриману систему лінійних рівнянь було розв'язано методом Гауса. Опісля розв'язання задачі, було проведено спостереження поведінки стержня з кераміки PZT-4.

Розглянута задача була розв'язана за допомогою мови програмування Python та середовища розробки Visual Studio Code. Розроблене програмне забезпечення дає можливість користувачу змінювати вхідні дані (коефіцієнти рівняння). Програма має можливість демонстації чисельних результатів обчисленої задачі, графіки результатів, норми функцій апроксимації, обчислений порядок збіжності в просторі Соболева першого порядку, усі складові енергетичного рівняння та їх графіки. Згідно з отриманими результатами порядку збіжності норм та рівнянням балансу можна стверджувати, що програма працює коректно.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти та застосування – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014 – 394 с.
2. Вагін П. Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. /П.П. Вагін, Б.А. Остудін, Г.А. Шинкаренко. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2005. С. 19 – 27.
3. Теорія пружності [Wikipedia] – 2010. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F\\_%D0%BF%D1%80%D1%83%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D1%83%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96)
4. В. Горлач Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкості теплопровідної рідини І. Клименко, Г. Шинкаренко./ В. Горлач, І. Клименко, Г. Шинкаренко// Вісник Львів ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика – 2011, – Випуск 18, С. 1 - 19.
5. Стельмащук В. Побудова числової схеми для розв'язування варіаційної задачі теорії пружності. – Львів, ЛНУ імені Івана Франка, 2023.
6. Anders Logg. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells. 2012. – P. 11 – 27.