Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

П. П. Вагін, Б. А. Остудін, Г. А. Шинкаренко

Основи функціонального аналізу

Курс лекцій
для студентів спеціальностей
прикладної математики та інформатики

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2005

УДК 517.98(042.4)
В – 12

Рецензенти:

О. Г. Сторож, доктор фіз.-мат. наук, професор
Львівського національного університету імені Івана Франка;

Р. В. Слоньовський, доктор фіз.-мат. наук, професор
Національного університету “Львівська політехніка”.

Рекомендовано до друку Вченою радою
факультету прикладної математики та інформатики
(Протокол № 1 від 20.04.2005)

Вагін П. П., Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А.
В – 12 Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 140 с.

Викладено традиційні теми курсу функціонального аналізу із застосуванням до таких питань обчислювальної математики: апроксимація, числове інтегрування, ітераційні методи лінійної алгебри, задача про найкраще наближення, дослідження та наближене розв’язування варіаційних задач та обернені оператори.

Для студентів і аспірантів факультету прикладної математики та інформатики.

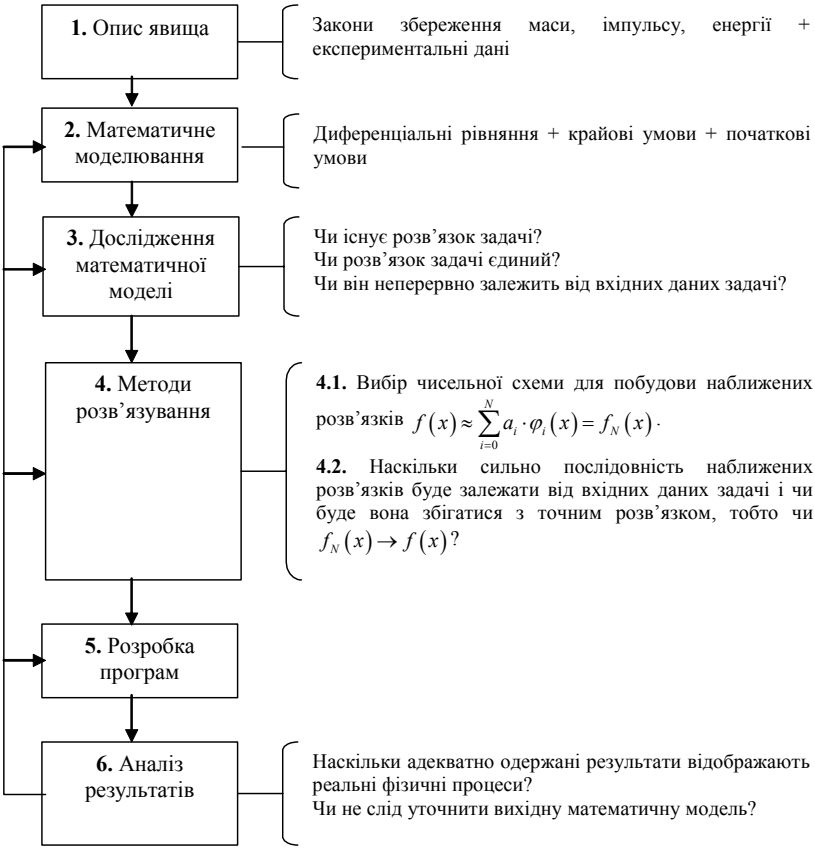
© Вагін П. П., Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А. 2005

1. Вступ

1.1. Місце функціонального аналізу в наукових дослідженнях

Центральним етапом наукового аналізу чи проектування довільної системи є побудова математичної моделі. Під словом "*модель*" ми будемо розуміти деякий опис, який відображає особливості процесу, що вивчається і цікавить дослідника. Якщо при описі моделі (явища) використовується мова математики, то говорять про математичні моделі. Вивчення математичних моделей завжди пов'язане з деякою "алгеброю" – правилами дій над об'єктами, що вивчаються, які відображають зв'язки між причинами та наслідками. Опис явища, побудова моделі – суттєво залежать від дослідника, його досвіду, таланту. Тому говорять, що процес моделювання має феноменологічну основу. Модель повинна достатньо правильно відображати явище, але цього недостатньо. Вона повинна бути зручною для використання. Для опису явища необхідно виділити реальні рухи з множини уявно допустимих і сформулювати принципи їх відбору. Термін "рух" вживається в широкому розумінні: зміна взагалі, довільна взаємодія матеріальних об'єктів. У різних галузях знань принципи класифікації рухів різні. У неживій матерії основними принципами відбору є *закони збереження маси, імпульсу, енергії і дані експерименту*. Але закони збереження не виокремлюють єдиного руху. Необхідно враховувати другий закон термодинаміки, принципи мінімуму дисипації енергії та стійкості. Принцип мінімуму дисипації енергії виділяє з множини можливих рухів, які підпорядковуються законам збереження, тільки такі, реалізація яких призведе до мінімального росту ентропії. Принцип стійкості дозволяє зосередити увагу дослідника на вивченні форм руху, характерний час існування яких достатньо великий.

Закони, справедливі для неживої матерії, зберігають свою силу і для живої матерії. Це твердження довгий час було дискусійним. Особливо багато труднощів викликав другий закон термодинаміки. Дане питання було вирішене Берталанфом у 30-х роках XX століття. Він показав, що живі істоти є відкритими системами. Це означає, що вони не можуть існувати без обміну речовиною та енергією з довкіллям. Цим і пояснюється зменшення в них ентропії. Нехай, наприклад, мова йде про деяку біологічну макросистему. Вперше динаміку таких систем почав вивчати італійський математик Вольтерра. Найхарактернішими для біосистем є процеси вживання їжі. Це означає, що закони збереження маси і енергії повинні бути з'ясовані в термінах трофічних зв'язків – хто кого з'їсть і в якій кількості.



Уявімо собі, що в деякому ареалі живуть популяції зайців та вовків, причому зайці не відчувають нестачі їжі упродовж свого життя. Нас цікавить, як будуть змінюватися з часом $t \in (0, T]$ популяції зайців $z(t)$ та вовків $v(t)$, якщо відомо, що в нульовий момент часу

$$z(0) = z_0, \; v(0) = v_0. \tag{1.1}$$

Єдиною їжею вовків можуть бути спіймані ними зайці. Щоб отримати рівняння, які наближено описують еволюцію цих популяцій, будемо вважати, що швидкість зростання кількості зайців $z'(t) = \dfrac{dz}{dt}$ пропорційна їх кількості без урахування взаємодії з вовками

$$z'(t) = \alpha \cdot z, \tag{1.2}$$

де α – коефіцієнт приросту популяції зайців, причому $\alpha = \alpha_b - \alpha_d$, де коефіцієнти α_b, α_d характеризують народжуваність та природну смертність зайців. Будемо вважати, що $\alpha = const > 0$. Тоді, внаслідок (1.2), (1.1), $z(t) = z_0 \cdot e^{\alpha t}$, і ми маємо справу із досить здоровим видом. Рівняння виду (1.2) мають сенс лише в тому випадку, коли кількість зайців досить велика і функцію $z(t)$ можна вважати неперервною.

Припустимо, що зустріч вовка із зайцем – смертельна для зайця, а ймовірність зустрічі пропорційна чисельності цих видів. Тоді рівняння еволюції популяції зайців буде мати вигляд

$$z'(t) = \alpha \cdot z - \gamma \cdot z \cdot v \quad \forall t \in (0, T], \tag{1.3}$$

де $\gamma = const > 0$. Подібним чином складемо рівняння для популяції вовків:

$$v'(t) = -\beta \cdot v + \gamma \cdot z \cdot v \quad \forall t \in (0, T], \tag{1.4}$$

де $\beta = const > 0$.

Задача Коші (1.3), (1.4), (1.1) відома як модель Лотке-Вольтерра для прогнозування взаємодії “жертв” із “хижаками”. Ми не будемо обговорювати фізичного, точніше біологічного, змісту цієї моделі. Вона, звичайно, досить умовна.

Наступним етапом наукового аналізу є *дослідження математичної моделі*, в процесі якого намагаються дати відповіді на такі запитання.

- Чи існує розв’язок задачі?
- Чи розв’язок задачі єдиний?
- Чи він неперервно залежить від вхідних даних задачі?

В нашому прикладі від $\alpha, \beta, \gamma, z_0, v_0$. Якщо так, то задача *коректно* поставлена.

Далі відбувається вибір чисельної схеми для побудови наближених розв’язків $f(x) \approx \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_i(x) = f_N(x)$. Тут виникає питання: наскільки суттєво послідовність наближених розв’язків залежить від

даних задачі і чи буде вона збігатися до точного розв'язку $f_N(x) \to f(x)$?

Наступні пункти – розробка програми та аналіз результатів. Останній етап повинен дати відповідь на запитання: наскільки адекватно отримані результати відображають реальні фізичні процеси і чи не слід уточнити вихідну математичну модель?

Методи функціонального аналізу дають змогу одержати відповіді на запитання пунктів **3** і **4.2**, причому конструктивні способи доведення існування розв'язків часто підказують саму чисельну схему знаходження розв'язків, тобто дають відповідь на запитання пункту **4.1**.

У прикладній математиці функціональний аналіз відіграє роль "18" верблюда з відомої східної притчі: "помираючи батько залишає 17 верблюдів і заповідає своїм трьом синам розділити їх між собою у відношенні $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ за старшинством".

1.2. Множини

Великими буквами латинського алфавіту будемо позначати множини, а малими – елементи множин. Спеціальні символи $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ резервуємо за множинами комплексних, дійсних та натуральних чисел відповідно. Якщо елемент x належить множині X, то це включення буде фіксувати так $x \in X$. Запис $H \subset B$ буде означати, що всі елементи множини H є одночасно елементами множини B.

1.2.1. Означення. *Множина V називається* ***прямим добутком*** *множин X та Y, якщо вона має таку структуру:* $V = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} = X \times Y$.

Очевидно, що $X \times Y \neq Y \times X$ – прямий добуток не є комутативним. Прямий добуток множини X самої на себе прийнято записувати як X^2. Зокрема, множина $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$ складається з елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_n) = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, де $x_i \in \mathbb{R}$.

1.2.2. Означення. *Дві множини X та Y називаються* ***еквівалентними*** ($X \sim Y$), *якщо між елементами цих множин можна встановити взаємно однозначну відповідність.*

1.2.3. Означення. *Множина називається* ***зліченною****, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.*

Якщо еквівалентні дві скінченні множини, то вони мають однакову кількість елементів. Якщо еквівалентні довільні дві множини, то говорять, що вони мають однакову потужність. *Потужність* це те спільне, що є у довільних еквівалентних множин. Для скінченних множин потужність – це кількість елементів. Потужність множини натуральних чисел позначається символом $\aleph_0$ (алєф нуль). Про множини, які еквівалентні множині всіх дійсних чисел відрізку $[0,1]$ говорять, що вони мають потужність континуума $\aleph$.

1.3. Оператор, функціонал, функція

Нехай відображення A діє з множини X у множину Y. Це будемо записувати як $A: X \to Y$. Через $D(A) \subset X$ позначимо область визначення цього відображення.

1.3.1. Означення. *Відображення* $A: X \to Y$ *називається* ***оператором*** *з* $D(A) \subset X$, *якщо* $\forall x \in D(A) \ \ \exists! y \in Y \ \ \big| \ y = A(x)$. *При цьому множину* $R(A) = \{ y \in Y \big| \ y = A(x), x \in D(A) \} \subset Y$ *прийнято називати* ***областю значень оператора*** A.

Тепер відображення $A: X \to Y$ можна записати так:

$$\forall x \in D(A) \subset X \to y = A(x) \in R(A) \subset Y,$$

де x – прообраз y в множині X, який позначатимемо як $A^{-1}(y)$, а y це образ x в множині Y.

1.3.2. Означення. *Відображення* $A: X \to Y$ *називається* ***функціоналом*** *з* $D(A) \subset X$, *якщо, по-перше,* A *– оператор і, по-друге,* $R(A) = \mathbb{C}$ або $R(A) = \mathbb{R}$.

Функціонал будемо записувати так:

$$\varphi: X \to \mathbb{C}, \text{ або } x \in X \to \varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle \in \mathbb{C}.$$

1.3.3. Означення. *Відображення* $A : X \to Y$ *називається* ***функцією****, якщо, по-перше,* A *– функціонал і, по-друге,* $D(A) \subset \mathbb{R}^n$.

У цьому випадку множина $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, а множина $Y \subset \mathbb{C}$. Функцію будемо позначати так:

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ або } x \in \Omega \to f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}.$$

1.1. Приклад. Розглянемо оператор $A : X \to Y$, де $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$, тобто $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, або

$$\forall x = \{x_i\}_{i=1}^n \in \Omega \subset \mathbb{C}^n \to y = \{y_i\}_{i=1}^m = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^m.$$

У скінченновимірних просторах лінійний оператор можна подати у вигляді матриці.

1.2. Приклад. Нехай на множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ визначено функцію $u : \Omega \to \mathbb{C}$, або, що еквівалентно, $u = u(x)$. Задаючись мультиіндексом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, зі значенням $|\alpha| \overset{def}{=} \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ і ввівши для часткової похідної α_i-го порядку функції u за змінною x_i позначення $\partial_i^{\alpha_i} \overset{def}{=} \dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, розглянемо оператор диференціювання

$$D^\alpha u \overset{def}{=} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

який визначає часткову похідну функції u порядку α.

Символ $C(\Omega)$ будемо надалі вживати для позначення *множини неперервних обмежених функцій*, визначених на Ω. Через

$$C^m(\Omega) \overset{def}{=} \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \middle| D^\alpha u \in C(\Omega) \ \forall |\alpha| \le m \in \mathbb{N} \right\}$$

позначимо множину, елементами якої є функції, що володіють неперервними обмеженими частковими похідними до m-го порядку включно. Вірогідно, що

$$C^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega) \subset \ldots \subset C^0(\Omega) = C(\Omega),$$

і якщо $D\left(D^m\right)=C^m\left(\Omega\right)$, то $R\left(D^m\right)=C\left(\Omega\right)$.

1.4. Інтегровані функції. Інтеграл Лебега

Поняття інтеграла і пов'язане з ним поняття інтегрованої функції є основними в математичному аналізі. У зв'язку з потребами прикладних наук, та й самої математики, ці поняття в процесі свого розвитку зазнавали значні зміни. Для розв'язування одних задач досить було вміти інтегрувати неперервні чи навіть аналітичні функції, для розв'язування інших – доводилося ці множини розширювати, а іноді розглядати і множину всіх функцій інтегрованих за Ріманом. Більше того, для математичного опису окремих явищ виявляється недостатньою навіть останнє. Природно, що ця множина недостатня і для потреб самої математики.

Зокрема, на практиці деякі процеси вдається наближено описати за допомогою послідовності функцій $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, про яку можна стверджувати лише збіжність у деякому інтегральному сенсі. Наприклад, послідовність $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ може володіти однією з таких властивостей: $\int\left|u_k-u_s\right|dx\to 0$ при $k,s\to\infty$ (фундаментальність послідовності в середньому), $\int\left(u_k-u_s\right)^2dx\to 0$ (фундаментальність у середньому квадратичному) або, у складніших випадках, прямують до нуля інтеграли, що містять похідні від функцій (фундаментальність за енергією). Ці властивості, зокрема фундаментальність у середньому квадратичному, самі по собі можуть не гарантувати збіжності в звичайному розумінні: послідовність може не збігатися в жодній точці. Проте, можна показати, що існує єдина функція, до якої розглянута послідовність збігається (у середньому квадратичному). Гранична функція, взагалі кажучи, неінтегрована за Ріманом, тому інтеграл в означенні збіжності доводиться розуміти в ширшому розумінні – за Лебегом. Останній побудував свою теорію інтегралу використавши поняття міри.

1.4.1. Означення. *Множина* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *називається* ***множиною*** *(n-мірної)* ***міри нуль****, якщо її можна покрити зліченною системою (n-мірних) відкритих кубів з як завгодно малою сумою об'ємів (сумарним об'ємом), тобто* $\forall\varepsilon>0$ *можна знайти таку зліченну систему кубів*

$K_1, K_2, \ldots$, *що* $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, *а сумарний об'єм цих кубів* $\sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$, *де* $|K_i|$ *– об'єм куба.*

Безпосередньо з означення випливає, що множина, яка складається зі зліченного числа точок, є множиною міри нуль. Перетин й об'єднання зліченної кількості множин міри нуль є множина міри нуль. Гладкі поверхні розмірності $k < n$ теж являють собою множини міри нуль.

1.4.2. Лема про множину міри нуль. *Множина* Ω *є множиною міри нуль тоді і лише тоді, коли існує таке її покриття зліченною системою кубів з конечним сумарним об'ємом, при якому кожна точка виявляється покритою безмежною множиною цих кубів.*

Доведення. Припустимо спочатку, що покриття, про яке йдеться в лемі, існує. Викидаючи з нього скінченну кількість кубів з максимальними об'ємами, можна домогтися, щоби сумарний об'єм покриття, яке залишилося, був як *завгодно малий.* Отже, Ω є множина міри нуль. Навпаки, якщо Ω – множина міри нуль, то її можна покрити зліченною кількістю кубів із сумарним об'ємом, меншим 2^{-k}, при будь-якому цілому $k \geq 1$. Потрібне нам покриття отримаємо після об'єднання за $k = 1, 2, \ldots$ цих покрить.■

1.4.3. Означення. *Якщо будь-яка властивість виконується для всіх точок* x *з деякої множини* X, *за винятком множини міри нуль, то говорять, що ця властивість виконується* ***для майже всіх точок*** $x \in X$***, майже скрізь у*** X***, майже усюди в*** X ***(*** $ess X$ ***).***

1.3. Приклад. Функція Діріхле $\chi(x)$, рівна одиниці для точок, у яких усі координати раціональні, і нулю у всіх інших точках, дорівнює нулю майже скрізь у $\mathbb{R}^n$.

Нехай Ω – деяка область простору $\mathbb{R}^n$. Поряд з функціями, визначеними всюди в Ω (тобто такими, що мають у кожній точці Ω скінченне значення), ми будемо розглядати і такі, що визначені майже скрізь у Ω, тобто функції, не визначені на множинах міри нуль. При цьому функції $u + v$, $u \cdot v$ (u і v визначені майже скрізь) визначені в тих точках, у яких визначені обидві функції u і v.

1.4.4. Означення. *Нехай* Ω *– обмежена зв'язна множина в* $\mathbb{R}^n$. *Послідовність визначених майже скрізь у* Ω *функцій* $\{u_n\}$ *називається* ***збіжною майже скрізь у*** Ω, *якщо для майже всіх* $x^0 \in \Omega$ *числова послідовність значень цих функцій у точці* x^0 *має* (*скінченну*) *границю. Функція* $u(x)$ *називається* ***границею майже скрізь збіжної послідовності*** $\{u_n\}$, $u_n(x) \to u(x)$ *майже скрізь у* Ω *при* $n \to \infty$, *якщо для майже всіх точок* $x^0 \in \Omega$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x^0) = u(x^0)$.

Вірогідно, що у випадку, коли функції u і v є границями деякої майже скрізь збіжної послідовності функцій, то вони співпадають майже скрізь, тобто вони є *тотожними*, або *еквівалентними*.

1.4.5. Означення. *Функція* u *називається* ***вимірною*** *в* Ω, *якщо вона є границею майже скрізь збіжної послідовності функцій з* $C(\overline{\Omega})$.

Відзначимо деякі вірогідні властивості вимірних функцій.

Із означення випливає, що функція u, яка належить $C(\overline{\Omega})$, вимірна. Дійсно, таку функцію можна подати у вигляді границі, до якої збігається в $\overline{\Omega}$ послідовність функцій з $C(\overline{\Omega})$.

Лінійна комбінація вимірних функцій є вимірною; для вимірних u і v функції $u \cdot v$ і u / v (остання при додатковому припущенні $ess v \neq 0$) також вимірні. Якщо u вимірна, то такою ж є функція $|u|$. Функції $\max\limits_{i\le k}(u_i(x))$ і $\min\limits_{i\le k}(u_i(x))$ вимірні, якщо вимірні $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Границя майже скрізь збіжної послідовності вимірних функцій є вимірною. Отже, функції $\sup\limits_k(u_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{i\le k}(u_i(x))$ і $\inf\limits_k(u_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_{i\le k}(u_i(x))$ вимірні, якщо вимірні $u_1, u_2, \ldots$.

Похідна вимірної функції, якщо вона існує майже скрізь, – вимірна функція.

Ми будемо розглядати монотонно неспадні (незростаючі) майже скрізь у Ω послідовності $\{u_n\}$ вимірних функцій, тобто такі

послідовності, для яких при всіх $k \geq 1$ майже скрізь у Ω мають місце нерівності $u_{k+1}(x) \geq u_k(x)$ ($u_{k+1}(x) \leq u_k(x)$). Якщо така послідовність функцій майже скрізь обмежена (тобто для майже кожної точки $x^0 \in \Omega$ числова послідовність $\{u_n\}$ обмежена), то вона збігається майже скрізь до деякої функції. *Позначимо через* $\Lambda(\Omega)$ *множину всіх функцій, що є границями майже скрізь збіжних монотонно неспадних послідовностей функцій із* $C(\overline{\Omega})$ *з обмеженими (зверху) послідовностями інтегралів (Рімана).* Нехай $u(x) \in \Lambda(\Omega)$, а $\{u_n\}$ – деяка монотонно неспадна послідовність неперервних у $\overline{\Omega}$ функцій з обмеженою послідовністю інтегралів, що майже скрізь збігається до $u(x)$.

1.4.6. Означення. *Точна верхня грань множини* $\left\{\int u_n(x)\,dx,\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ *називається* ***інтегралом Лебега*** *функції* $u(x) \in \Lambda(\Omega)$, *тобто*

$$(L)\int_\Omega u dx = \sup_n \int_\Omega u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\,dx.$$

Зауважимо, що інтеграл Лебега від функції $u(x) \in \Lambda(\Omega)$ не залежить від вибору апроксимуючої послідовності $\{u_n\}$.

▲ **Завдання 1.1.** Показати, що *коли функція* $u(x)$ *інтегрована за Ріманом, то вона інтегрована і за Лебегом та*

$$(L)\int_\Omega u dx = (R)\int_\Omega u dx.$$

Надалі значок L перед знаком інтеграла будемо опускати, маючи на увазі завжди інтеграл Лебега, а також розуміючи, що інтегрується функція з $\Lambda(\Omega)$. Множина обмежених функцій, що входять у $\Lambda(\Omega)$, ширше множини функцій, інтегрованих за Ріманом, оскільки, наприклад, функція Діріхле $\chi(x) \in \Lambda(\Omega)$ обмежена і неінтегрована за Ріманом.

У разі побудови інтеграла Лебега від функції $u(x)$ не передбачалася її обмеженість; наприклад, необмежена функція $|x|^{-\alpha}$ при $0<\alpha<n\in\mathbb{N}$ належить $\Lambda(|x|<1)$. У курсі математичного аналізу розглядається узагальнення інтеграла Рімана на необмежені функції (невласний інтеграл). Неважко показати, що абсолютно інтегрована за Ріманом (у невласному значенні) функція $u(x)$ належить $\Lambda(\Omega)$ і її інтеграл Лебега збігається з невласним інтегралом Рімана.

Відзначимо, що в областях розмірності 2 і вище, для всіх функцій, для яких існує невласний інтеграл Рімана, існує й абсолютно невласний інтеграл. Тому тільки в одновимірному випадку з існування невласного інтеграла Рімана від деякої функції може не випливати інтегрованість цієї функції за Лебегом. Прикладом такої функції є задана на $(0,1)$ функція $\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$.

1.4.7. Множина інтегрованих функцій. Нехай Ω – обмежена зв'язна множина з $\mathbb{R}^n$. Для $p\in\mathbb{N}$ визначимо множину класів еквівалентних функцій

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{C}\,\middle|\,\int_\Omega|u|^p\,dx<+\infty\right\},\ 1\le p<+\infty,$$

p-і степені модулів яких інтегровані за Лебегом на множині Ω.

Під символом

$$L^\infty(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{C}\,\middle|\,ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|<+\infty\right\},\ p=+\infty,$$

будемо розуміти множину функцій, модулі яких обмежені майже скрізь на множині Ω.

Цілком вірогідно, що $C(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ і разом з цим у множині $L^\infty(\Omega)$ існують розривні обмежені функції.

2. Лінійні простори

Якщо на деякій множині визначені ті чи інші операції над її елементами, то говорять, що множина наділена певними структурами, і таку множину прийнято називати простором.

Структури, навіяні звичайними алгебраїчними властивостями додавання векторів та множення їх на скаляр, приводять до поняття лінійного, або векторного, простору.

2.1. Ознака лінійного простору

Нехай X – непорожня множина і K – поле чисел, тобто $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$. Припустимо, що над її елементами визначено операції:

- додавання $+ : X^2 \to X$, тобто кожній парі $\{u, v\} \in X^2$ можна поставити у відповідність єдиний елемент $u + v \in X$;
- множення на скаляр $\cdot : K \times X \to X$, тобто кожній парі $\{\alpha, u\} \in K \times X$ можна поставити у відповідність єдиний елемент $\alpha \cdot u \in X$.

Ці дві операції не виводять нас з множини X.

2.1.1. Означення. *Непорожня множина X називається **лінійним**, або **векторним**, **простором**, якщо над її елементами визначено операції додавання та множення на скаляр так, що $\forall u, v, w \in X$, $\alpha, \beta \in K$ мають місце наступні аксіоми:*

- $u + v = v + u$ *– комутативність;*
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ *– асоціативність;*
- *існує єдиний специфічний елемент 0_X такий, що $u + 0_X = u$;*
- $\forall u \in X \quad \exists!(-u) \in X$ *(протилежний до u) такий, що*
  $$u + (-u) = 0_X; \tag{2.1}$$
- $\alpha(\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$;
- $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;

- $(\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u+\beta\cdot u$;
- $1\cdot u=u$.

Якщо $K=\mathbb{R}$, то X називають *лінійним простором над полем дійсних чисел,* або *дійсним лінійним простором*. Якщо $K=\mathbb{C}$, то X називають *комплексним лінійним простором*.

2.1.2. Означення. *Непорожня множина S елементів лінійного простору X називається* ***лінійним підпростором*** *в X, якщо вона сама є лінійним простором з тими самими операціями, що визначені в X.*

▲ **Завдання 2.1.** Використовуючи аксіоми лінійного простору, показати, що $\forall u\in X$, $\forall\alpha,\beta\in K$ мають місце такі твердження:

- $0\cdot u=0_X$;
- $(-1)\cdot u=-u$;
- $\alpha\cdot 0_X=0_X$;
- якщо $\forall u\in X$ $\alpha u=\beta u$, то $\alpha=\beta$.

Із завдання 2.1. випливає, що в лінійному просторі X визначена операція віднімання елементів згідно з правилом

$$u-v=u+(-v)\ \ \forall u,v\in X.$$

2.2. Приклади лінійних просторів

2.1. Приклад. Розглянемо множину впорядкованих наборів $x=(x_1,...,x_n)$, $x_i\in K$, $i=\overline{1,n}$, $K=\mathbb{R}$ або $K=\mathbb{C}$. Елементи $x\in K^n$ будемо називати *векторами*, або *точками*, а кожну компоненту x_i-i*-ю координатою вектора* або *точки* $x\in K^n$. На множині визначимо операції покомпонентного додавання

$$x+y\overset{def}{=}(x_1+y_1,...,x_n+y_n)\ \ \forall x,y\in K^n,$$

і множення на скаляр

$$\alpha\cdot x\overset{def}{=}(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)\ \ \forall x\in K^n,\ \forall\alpha\in K.$$

Тоді K^n буде лінійним простором.

2.2. Приклад. Розглянемо множину $C(\Omega)$ комплекснозначних неперервних обмежених функцій, які мають за область визначення множи-

ну $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для $\forall u, v \in C(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ визначимо (*поточково*) *нові функції* $u+v$ та αu за правилами

$$\begin{aligned} (u+v)(x) &\overset{def}{=} u(x)+v(x), \\ (\alpha u)(x) &\overset{def}{=} \alpha \cdot u(x) \end{aligned} \quad \forall x \in \Omega. \qquad (2.2)$$

Множина $C(\Omega)$ буде лінійним простором.

2.3. Приклад. Розглянемо множину $C^m(\Omega)$ комплекснозначних неперервних разом зі своїми всеможливими частковими похідними до *m*-го порядку включно обмежених функцій. Для $\forall u, v \in C^m(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ визначимо (*поточково*) *нові функції* $u+v$ та αu за правилами (2.2).Тоді множина $C^m(\Omega)$ також буде лінійним простором.

2.4. Приклад. Розглянемо множину l_2, елементами якої є послідовності $x = (x_1, x_2, ...) = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in K$, $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$ такі, що $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$. Визначимо на l_2 операції додавання $(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ та множення на скаляр $\alpha \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \overset{def}{=} \{\alpha x_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Тоді множина l_2 буде лінійним простором.

▲ **Завдання 2.2.** Показати, що для просторів, наведених у прикладах (2.1)-(2.4), виконуються аксіоми лінійного простору. Для прикладу (2.4) скористатися нерівністю $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.

2.3. Основні структури лінійних просторів

2.3.1. Означення. *Непорожня множина* $S \subset X$, *де* X *лінійний простір, називається* ***опуклою****, якщо* $\forall u, v \in S$ $\{\alpha u + (1-\alpha) v \mid \alpha \in [0,1]\} \in S$.

▲ **Завдання 2.3.** Нехай S опукла множина в X і $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ набір невід'ємних чисел таких, що $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Доведіть, що $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in S$ $\forall \{u_i\}_{i=1}^n \subset S$.

2.3.2. Означення. *Множина $S \subset X$, де X лінійний простір, називається* ***векторною сумою*** *лінійних підпросторів $U \subset X$ та $V \subset X$* (при цьому пишуть $S = U + V$) *тоді і лише тоді, коли $\forall x \in S$ $\exists \{u, v\} \in U \times V$ $|x = u + v$. Якщо ця пара $\{u, v\}$ єдина, то S називається* ***прямою сумою*** *і позначається $S = U \oplus V$.*

▲ **Завдання 2.4.** Нехай U та V опуклі множини. Показати, що $U + V$ теж опукла множина.

▲ **Завдання 2.5.** Нехай $S = U + V$. Тоді, для того, щоб $S = U \oplus V \Leftrightarrow U \bigcap V = 0_X$. Довести це.

2.5. Приклад. Розглянемо множину функцій $S = \{u \in C(\Omega) \,|\, |u| \le 1\}$. Покажемо, що ця множина опукла. Дійсно, якщо $u, v \in S$, то $|u| \le 1$, $|v| \le 1$, $w = \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \in C(\Omega)$ і $|w| = |\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v| \le |\alpha \cdot u| + |(1-\alpha) \cdot v| = \alpha \cdot |u| + (1-\alpha) \cdot |v| \le 1$. Отже, $w \in S$. Тому множина функцій S опукла.

2.3.4. Теорема. *Перетин довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай $S = \bigcap_i S_i$ і всі S_i – опуклі множини. Якщо $u, v \in S$, то $u, v \in S_i$. Оскільки S_i – опуклі множини, то $\alpha u + (1-\alpha) v \in S_i$. Отже, $\alpha u + (1-\alpha) v \in S$. Тому S – опукла множина.■

2.3.5. Означення. *Сукупність елементів $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset X$, де X лінійний простір,* ***лінійно залежна*** *в X тоді і лише тоді, коли*

$\exists \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ *такий, що* $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \neq 0$ *і* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0_X$. *Якщо остання рівність справджується лише при* $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, *то таку сукупність називають* ***лінійно незалежною***.

2.3.6. Означення. *Якщо в лінійному просторі* X *існує деяка сукупність* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *лінійно незалежних елементів, а будь-яка сукупність із* $n+1$ *елемента лінійно залежна, то ця сукупність є* ***базисом*** *цього так званого* ***скінченновимірного*** *простору, і його розмірність* $\dim X = n$.

2.3.7. Означення. *Якщо в лінійному просторі* X $\forall n \in \mathbb{N}$ *знайдеться* n *лінійно незалежних елементів, то простір* X *називають* ***нескінченновимірним*** *і пишуть* $\dim X = +\infty$.

2.3.8. Лема про єдиність розкладу за базисом. *Нехай* X *лінійний простір розмірності* $\dim X = n < +\infty$, *а сукупність* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *утворює його базис. Тоді* $\forall u \in X \ \exists! \{u_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{C} \ \Big| \ u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$.

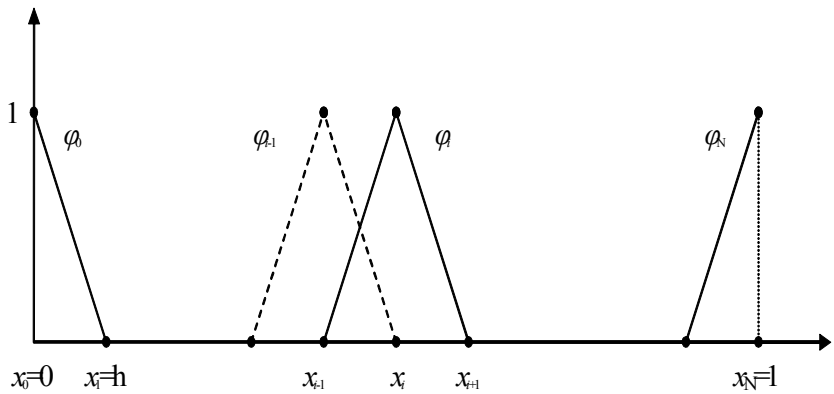
Доведення. Оскільки $\dim X = n$, то сукупність $u, \varphi_1, ..., \varphi_n$ лінійно залежна в X. Отже, знайдуться числа $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ такі, що $\alpha_0 u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0_X$. Причому $\alpha_0 \neq 0$. Звідси $u = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_0} \varphi_i$. Ввівши позначення $u_i = -\alpha_i \cdot \alpha_0^{-1}$, отримаємо $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$.

Лишається показати, що числа $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ знаходяться однозначно. Допустимо, що це не так. Тоді поряд із поданням $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$ можна знайти ще принаймні один набір чисел $\{v_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ такий, що

$u = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i$. Запишемо їх різницю $0_X = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - v_i\right) \varphi_i$. З огляду на лінійну незалежність сукупності $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n}$ остання рівність можлива лише за умови $u_i = v_i$, $i = \overline{1,n}$.■

▲ **Завдання 2.6.** Нехай $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Для заданого $N \in \mathbb{N}$ обчислимо $h = 1/N$ і покриємо відрізок $[0,1]$ сіткою вузлів $x_i = i \cdot h$, $i = \overline{0,N}$. Позначимо через $K([0,1])$ простір неперервних кусково-лінійних функцій, визначених на відрізку $[0,1]$. Задамо множину $\left\{\varphi_i\right\}_{i=0}^{N}$ функцій Куранта

$$\varphi_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0, \quad 0 \le x < x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, \; x_{i-1} < x \le x_i \end{array}\right\} i = N \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, \quad x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, \; x_{i+1} < x \le 1 \end{array}\right\} i = 0 \end{array} \right\} i = \overline{1, N-1}.$$



1). Довести, що *множина* $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N}$ *функцій Куранта лінійно незалежна в просторі* $K([0,1])$.

Доведення. Зауважимо, що $\varphi_i(x_k) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N}$ лінійно залежна. Не обмежуючи загальності, маємо $\varphi_0(x) = -\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x)$, за припущенням, що $\alpha_0 \neq 0$. Нехай $x = 0$, тоді $1 = 0$. Отримана суперечність доводить наше твердження.

2). Показати, що *множина* $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N}$ *функцій Куранта утворює базис у просторі* $K([0,1])$. Для такого простору використаємо уточнене позначення $K_h([0,1])$.

3). Показати, що $\dim K_h([0,1]) = N + 1$.

Припустимо, що нам задана функція $f = f(x)$, $x \in [0,1]$. Побудуємо $f_I(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\varphi_i(x)$.

4). Намалювати графіки функцій $f_I(x)$, $f_I'(x)$.

5). Обчислити $\int_0^1 f_I(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f_I(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\varphi_i(x)dx = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\int_0^1 \varphi_i(x)\,dx =$$

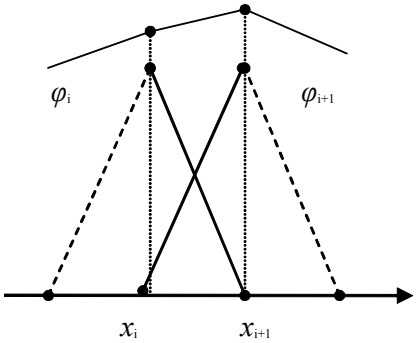
$$= f(x_0)\frac{h}{2} + f(x_1)h + \ldots + f(x_{N-1})h + f(x_N)\frac{h}{2} =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_N)\right) + h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h.$$

Ми отримали так звану квадратурну формулу трапеції.

6). Обчислити $\int_0^1 f_I^2(x)\,dx$.



Зауважимо, що при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\varphi_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{h} \overset{def}{=} t$. Тоді $dt = \frac{dx}{h}$ і

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}^2(x)\,dx = \int_0^1 t^2 h dt = \frac{h}{3} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2(x)\,dx,$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\,dx = h\int_0^1 (1-t)t dt = \frac{h}{6}.$$ Далі,

$$\int_0^1 f_I^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i)\varphi_i(x) + f(x_{i+1})\varphi_{i+1}(x)\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(f^2(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2(x)\,dx + \right.$$

$$+2f\left(x_i\right)f\left(x_{i+1}\right)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i\left(x\right)\varphi_{i+1}\left(x\right)dx+$$

$$\left.+f^2\left(x_{i+1}\right)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_{i+1}^2\left(x\right)dx\right).$$

Для спрощення записів введемо позначення $f\left(x_i\right)=f_i$, тоді

$$\int\limits_0^1 f_I^2\left(x\right)dx=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f_i^2+f_if_{i+1}+f_{i+1}^2\right)=$$

$$=\sum_{i,j=0}^{N}f_ia_{ij}f_j=\sum_{i=0}^{N}f_i\sum_{j=0}^{N}a_{ij}f_j=\left(q^T,Aq\right).$$

Тут $q=\begin{pmatrix}f_0\\ \vdots\\ f_N\end{pmatrix}$,

$$A=\begin{vmatrix}a_{00} & \cdots & a_{0N}\\ & \ddots & \vdots\\ & & a_{NN}\end{vmatrix}=\frac{h}{3}\begin{vmatrix}1 & 0,5 & & & & \\ 0,5 & 2 & 0,5 & & & \\ & 0,5 & 2 & 0,5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0,5 & 2 & 0,5\\ & & & & 0,5 & 1\end{vmatrix}.$$

Покажемо, що матриця A додатньо визначена. Нагадаємо, що матриця A додатньо визначена тоді і лише тоді, коли $\exists\alpha=const>0$ така, що $\left(Aq,q\right)\geq\alpha\sum_{i=0}^{N}q_i^2$. Справді,

$$\left(Aq,q\right)=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\left(f_{i+1}+\frac{1}{2}f_i\right)^2+\frac{3}{4}f_i^2\right)>0.$$

7). Обчислити інтеграл $\int_0^1 \left(f_I'(x)\right)^2 dx$ та подати його у вигляді $\left(Pq, q\right)$. Якими властивостями володіє матриця P, зокрема, чи дорівнюють нулю визначники матриць P і A ?

8). Обчислити $\int_0^1 f_I'(x) f_I(x) dx$. Обчислення:

$$\int_0^1 f_I'(x) f_I(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(f_I(x)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(f_I^2(1) - f_I^2(0)\right).$$

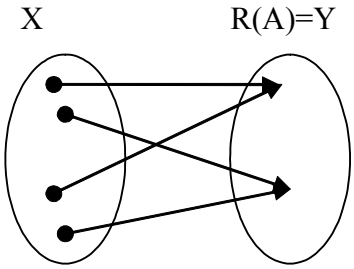
2.3.9. Означення. *Нехай X та Y лінійні простори. Тоді оператор $A: X \to Y$ називається* ***лінійним оператором****, якщо він володіє такими властивостями:*

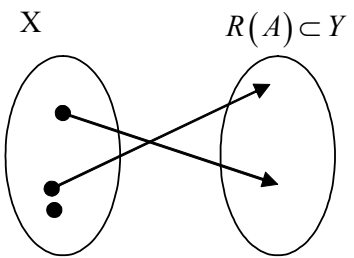
- $A(u+v) = Au + Av$, $\forall u, v \in X$ *– адитивність;*
- $A(\alpha u) = \alpha Au$ $\forall u \in X$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *– однорідність.*

▲ **Завдання 2.7.** Показати, що якщо $A: X \to Y$ лінійний оператор, то $D(A)$ і $R(A)$ лінійні підпростори в просторах X і Y відповідно.

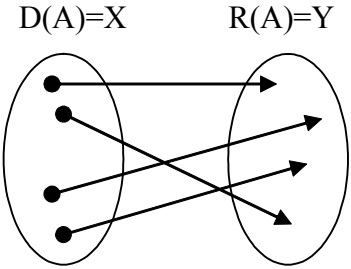
▲ **Завдання 2.8.** Нехай маємо множину $\{A_i\}$ лінійних операторів $A_i: X \to Y$. Вважаємо, що $D(A_i) = X$, $R(A_i) = Y$. Показати, що множина $\{A_i\}$ утворює лінійний простір.

2.3.10. Означення. *Довільний оператор $A: X \to Y$ називається* ***сюр'єктивним****, якщо* $\forall y \in R(A) = Y$ $\exists x \in X$ $\big| A(x) = y$, *тобто кожен $y \in Y$ є образом деякого елемента з X.*





2.3.11. Означення. *Довільний оператор* $A: X \to Y$ *називається* ***ін'єктивним*** *(або взаємно однозначним з* X *в* Y*), якщо* $\forall y \in R(A) \subset Y \ \exists! x \in X \ \big| \ A(x) = y$.



2.3.12. Означення. *Довільний оператор* $A: X \to Y$ *називається* ***бієктивним****, якщо він є сюр'єктивним та ін'єктивним одночасно.*

2.3.13. Означення. *Оператор* $A: X \to Y$ *називають* ***ізоморфізмом****, а самі простори* X *та* Y ***ізоморфними****, якщо він є лінійним та бієктивним одночасно.*

Іншими словами, якщо задані лінійні простори X, Y та існує лінійний оператор $A: X \to Y$, який взаємно однозначним чином відображає простір X на Y, то цей оператор називають ізоморфізмом, а простори ізоморфними.

Однозначне подання кожного елемента скінченновимірного простору у вигляді лінійної комбінації $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i$ називають його ***розкладом за базисом***. Це приводить до встановлення важливої властивості скінченновимірних лінійних просторів.

2.3.14. Лема про ізоморфізм скінченновимірних просторів. *Будь-які скінченновимірні простори однієї розмірності ізоморфні. Або, інакше кажучи, якщо* X *лінійний простір розмірності* $n\left(\dim X = n < +\infty\right)$*, то* X *ізоморфний* $\mathbb{C}^n$.

Доведення. Нехай $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ довільний базис простору X. Тоді, у відповідності з лемою про єдиність розкладу за базисом, розглянемо оператор $A: X \to \mathbb{C}^n$, який діє за правилом $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i \in X \to Au = \left(u_1 \ldots u_n\right) \in \mathbb{C}^n$. Оскільки коефіцієнти роз-

кладу $\{u_i\}_{i=1}^n$ однозначно характеризують елемент $u \in X$, то оператор A є бієктивним. Перевіримо його лінійність. Дійсно, якщо деякий елемент $v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \in X$, то $\alpha u + \beta v = \sum_{i=1}^n (\alpha u_i + \beta v_i)\varphi_i$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і, отже,

$$A(\alpha u + \beta v) = (\alpha u_1 + \beta v_1, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) =$$
$$= \alpha (u_1, \ldots u_n) + \beta (v_1, \ldots, v_n) = \alpha Au + \beta Av, \ \forall u, v \in X. \blacksquare$$

2.3.14. Означення. *Нехай X лінійний простір. Тоді функціонал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ називається* ***лінійним функціоналом****, якщо він володіє такими властивостями:*

- $\langle \varphi, u + v \rangle = \langle \varphi, u \rangle + \langle \varphi, v \rangle$, $\forall u, v \in X$ *– адитивність;*
- $\langle \varphi, \alpha u \rangle = \alpha \langle \varphi, u \rangle$, $\forall u \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *– однорідність.*

2.3.15. Означення. *Нехай X лінійний простір. Тоді функціонал $\varphi : X \to \mathbb{C}$ називається* ***спряжено-однорідним функціоналом****, якщо $\langle \varphi, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle \varphi, u \rangle$, де $\overline{\alpha}$ комплексно-спряжене до $\alpha \in \mathbb{C}$.*

2.3.16. Означення. *Адитивний спряжено-однорідний функціонал називається* ***спряжено-лінійним функціоналом****.*

2.6. Приклад. Наведемо приклади лінійних функціоналів.

- Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$. Тоді $\langle \varphi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i$ лінійний функціонал в $\mathbb{R}^n$.
- Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$. Тоді $\langle \varphi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_i \overline{x}_i$ спряжено-лінійний функціонал в $\mathbb{C}^n$.
- Нехай $f(x) \in C(\Omega)$ деяка фіксована функція і $x \in \Omega$. Тоді $u \in C(\Omega) \to \langle \varphi, u \rangle = \int_\Omega f(x) u(x) dx$ лінійний функціонал

в $C(\Omega)$. Лінійність цього функціоналу випливає з основних властивостей операції інтегрування.

- Нехай $f(x) \in C(\Omega)$ деяка фіксована функція і $x \in \Omega = \mathbb{R}^1$. Тоді

$$f(x) \in C(\Omega) \to \langle \varphi, f \rangle = f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\,dx$$

лінійний функціонал в $C(\Omega)$. Цей функціонал є прикладом узагальненої функції – так званої дельта-функції Дірака ($\delta(x)$).

3. Лінійні нормовані простори

3.1. Абстрактні операторні задачі

Сформулюємо задачу для абстрактного операторного рівняння.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A: X \to Y \text{ та } f \in Y. \\ \text{Знайти} \quad u \in X \,\big|\, Au = f. \end{cases} \tag{3.1}$$

Якщо $f \notin R(A)$ то розв'язок задачі не існує. Якщо оператор A сюр'єктивний (кожен $f \in R(A) = Y$ є образом деякого елемента з X), то задача (3.1) має щонайменше один розв'язок; якщо оператор A ін'єктивний ($\forall f \in R(A) \subset Y \quad \exists! u \in X \,\big|\, Au = f$) і $f \in R(A)$, то задача має один розв'язок. Якщо ж оператор A бієктивний, то задача завжди має один розв'язок для $\forall f \in Y$.

Розглянемо окремі випадки, з якими будемо мати справу в майбутньому.

● **Задача про нерухому точку оператора** A.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A: X \to X. \\ \text{Знайти} \quad u \in X \,\big|\, Au = u. \end{cases}$$

● **Задача про знаходження нулів оператора** A.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A: X \to Y. \\ \text{Знайти} \quad u \in X \,\big|\, Au = 0_Y. \end{cases}$$

● **Задача про власні значення оператора** A.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A: X \to X. \\ \text{Знайти} \quad (u, \lambda) \in X \times \mathbb{C} \,\big|\, Au = \lambda u. \end{cases}$$

Як вам вже відомо, у скінченновимірних просторах лінійний оператор можна подати у вигляді матриці (див. приклад 1.1.). Тоді відшукання власних значень оператора A зводиться до розв'язування рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$.

▲ **Завдання 3.1.** Показати, що власні числа симетричної матриці дійсні.

3.2. Метрика

Під час розв'язування операторного рівняння (3.1) ми не можемо сказати, наскільки близько до 0_Y стає нев'язка рівняння $Au_* - f$ для певним чином вибраного елемента u_* з X. Вірогідно, що в подібних випадках без такого геометричного поняття як відстань не обійтися.

3.2.1. Означення. *Нехай на множині* V *визначено функціонал* $\rho(\bullet,\bullet): V \times V \to \mathbb{R}$ *з такими властивостями: для* $\forall u, v, w \in V$

- $\rho(u,v) \geq 0$;
- $\rho(u,v) = 0$ *тоді й лише тоді, коли* $u = v$;
- $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;
- $\rho(u,v) \leq \rho(u,w) + \rho(w,v)$.

Цей функціонал $\rho(\bullet,\bullet)$ *будемо називати* ***метрикою на*** V, *а саму множину* V ***метричним простором***.

Зауважимо, що визначення метричного простору не передбачає ніякої алгебраїчної структури на множині V, проте дійсне число $\rho(\bullet,\bullet)$ завжди можна інтерпретувати як відстань між елементами цієї множини.

▲ **Завдання 3.2.** Нехай $\rho(\bullet,\bullet)$ метрика на множині $\mathbb{R}$. Показати, що $\widetilde{\rho}(\bullet,\bullet) = \ln(1 + \rho(\bullet,\bullet))$ також є метрикою на множині $\mathbb{R}$.

3.3. Норма

Якщо множина є лінійним простором, то наділити її геометричними структурами дозволяє

3.3.1. Означення. *Нехай* V *– лінійний простір. Функціонал* $\|\bullet\|_V : V \to \mathbb{R}$ *називається* ***нормою на просторі*** V *тоді й лише тоді, коли він задовольняє наступні аксіоми:*

- $\|u\|_V \geq 0 \quad \forall u \in V$ *(невід'ємність норми);*
- $\|u\|_V = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$ *(невиродженість норми);*
- $\|\alpha u\|_V = |\alpha| \|u\|_V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ *(однорідність норми);*
- $\|u+v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V$ *(нерівність трикутника).*

У цьому випадку простір V називають ***лінійним нормованим простором***. З означення норми випливає, що норма є нелінійним функціоналом.

3.1. Приклад. Нехай $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. У просторі $\mathbb{C}^n$ норму можна ввести таким чином:

- $\|u\|_{\mathbb{C}^n}^{(1)} \overset{def}{=} \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i|$ – показує, наскільки далеко u відхиляємося від нульового вектора;
- $\|u\|_{\mathbb{C}^n}^{(2)} \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|^2}$ – тут звернемо увагу на те, що $|u_i|^2 = u_i \cdot \overline{u}_i$.

3.2. Приклад. Нехай $u \in C(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. У просторі $C(\Omega)$ норму можна ввести так:

- $\|u\|_{C(\Omega)}^{(1)} \overset{def}{=} \|u\|_\infty \overset{def}{=} \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$ – норма Чебишева;
- $\|u\|_{C(\Omega)}^{(2)} \overset{def}{=} \sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, dx}$.

3.3. Приклад. Нехай $u \in C^m(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. У просторі $C^m(\Omega)$ норму подамо так:

- $\|u\|_{C^m(\Omega)}^{(1)} \overset{def}{=} \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{C(\Omega)}$;

- $\|u\|_{C^m(\Omega)}^{(2)} \overset{def}{=} \sqrt{\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} \left|D^\alpha u\right|^2 dx}$.

З наведених прикладів випливає, що один і той самий лінійний простір можна наділити різними нормами. Внаслідок один лінійний простір породжує різні нормовані. Однак між ними залишається зв'язок, який виражається таким чином.

3.3.2. Означення. *Нехай у лінійному просторі* V *визначено дві норми* $\|\bullet\|_V$ *та* $|\bullet|_V$. *Говорять, що* ***норма*** $|\bullet|_V$ ***підпорядкована нормі*** $\|\bullet\|_V$ (*або* ***норма*** $|\bullet|_V$ ***слабкіша за норму*** $\|\bullet\|_V$), *якщо* $\exists \alpha > 0$ *така, що* $\alpha |u|_V \le \|u\|_V \quad \forall u \in V$.

3.3.3. Означення. *Нехай у лінійному просторі* V *визначено дві норми* $\|\bullet\|_V$ *та* $|\bullet|_V$. *Говорять, що* ***норма*** $|\bullet|_V$ ***еквівалентна нормі*** $\|\bullet\|_V$, *якщо* $\exists \alpha, \beta > 0$ *такі, що* $\alpha |u|_V \le \|u\|_V \le \beta |u|_V \quad \forall u \in V$.

Вірогідно, що дві норми в лінійному просторі еквівалентні тоді й лише тоді, коли кожна з них підпорядковується іншій. Для еквівалентних норм часто використовують позначення $\|u\|_V \sim |u|_V$.

▲ **Завдання 3.3.** Показати, що лінійний нормований простір V стає метричним, якщо його наділити метрикою $\rho(u,v) = \|u - v\|_V$ $\forall u, v \in V$.

▲ **Завдання 3.4.** Показати так звану ***опуклість норми***, що виражається нерівністю

$$\left| \|u\|_V - \|v\|_V \right| \le \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V . \tag{3.2}$$

▲ **Завдання 3.5.** Показати, що наведені означення в прикладах 3.1, 3.2, 3.3. задають норми у відповідних просторах та з'ясувати їх еквівалентність.

Вірогідно, що еквівалентних норм не так багато.

3.3.4. Теорема про еквівалентність норм у скінченновимірному лінійному просторі. *Нехай* V *скінченновимірний лінійний простір (*$\dim V = n < +\infty$*). Задамо в* V *дві довільні норми:* $\|\bullet\|_V : V \to \mathbb{R}$ *та*

$\left|\bullet\right|_V : V \to \mathbb{R}$. *Тоді* $\left\|\bullet\right\|_V \sim \left|\bullet\right|_V$. *Іншими словами, в кожному скінченновимірному лінійному просторі всі норми еквівалентні.*

Доведення. Нехай V скінченновимірний лінійний простір з базисом $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^n$ та довільним чином визначеною нормою $\left\|\bullet\right\|_V$. Оскільки $\forall u \in V \quad \exists!\left\{u_i\right\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C} \left| u = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i \right.$, то в просторі V розглянемо ще одну норму $\left|u\right|_V = \left(\sum_{i=1}^n \left|u_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Покажемо, що норма $\left\|\bullet\right\|_V$ підпорядковується нормі $\left|\bullet\right|_V$. Неважко переконатися в тому, що

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|_V &= \left\|\sum_{i=1}^n u_i \cdot \varphi_i\right\|_V \le \begin{pmatrix} \textit{нерівність} \\ \textit{трикутника} \end{pmatrix} \le \sum_{i=1}^n \left\|u_i \cdot \varphi_i\right\|_V = \\
&= \begin{pmatrix} \textit{однорідність} \\ \textit{норми} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \left|u_i\right| \cdot \left\|\varphi_i\right\|_V \le \\
&\le \begin{pmatrix} \textit{нерівність} \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \textit{КБШ} \quad (a,b)_{\mathbb{R}^n} \le \left\|a\right\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \left\|b\right\|_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix} \le \qquad (3.3) \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n \left|u_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \left\|\varphi_i\right\|_V^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\beta > 0} = \left(\sum_{i=1}^n \left|u_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \beta = \beta \cdot \left|u\right|_V .
\end{aligned}$$

Отже, норма $\left\|\bullet\right\|_V$ підпорядковується нормі $\left|\bullet\right|_V$. Покажемо, що норма $\left|\bullet\right|_V$ також підпорядковується $\left\|\bullet\right\|_V$. Для цього розглянемо функціонал $\left\|\bullet\right\|_V : V \to \mathbb{R}$ на сфері $\left|u\right|_V = 1$ (див. п. 3.4). Із опуклості норми (3.2) та нерівності (3.3) випливає, що $\left|\left\|u\right\|_V - \left\|v\right\|_V\right| \le \left\|u - v\right\|_V \le \left|u - v\right|_V$. Останнє означає неперервність функціоналу, або функції $\left\|\bullet\right\|_V$ на V (*чому?*). Із курсу математичного аналізу відомо, що функція, непере-

рвна на замкненій обмеженій множині в V, обмежена на ній та досягає на ній своїх точних верхньої та нижньої граней. Отже, $\exists u_0 \big| \alpha = \|u_0\|_V = \inf\limits_{|u|_V=1} \|u\|_V$. Вірогідно, що $\alpha > 0$, оскільки $u_0 \neq 0$.

Звідси $\alpha \leq \left\| \dfrac{u}{|u|_V} \right\|_V$, або $\alpha \cdot |u|_V \leq \|u\|_V$. Таким чином, $\|\bullet\|_V \sim |\bullet|_V$.■

3.4. Геометричні поняття та структури

У попередньому пункті ми вже розглянули одну геометричну структуру. Корисним є вивчення інших.

3.4.1. Означення. *Нехай* $\mathbb{R} \ni r > 0$. *Множину елементів з лінійного нормованого простору* V $S(u,r) \overset{def}{=} \left\{ v \in V \big| \|u-v\|_V < r \right\}$ *будемо називати* ***відкритою кулею*** *радіуса* r *з центром у точці* $u \in V$.

3.4.2. Означення. *Нехай* $\mathbb{R} \ni r > 0$. *Множину елементів з лінійного нормованого простору* V $\overline{S}(u,r) \overset{def}{=} \left\{ v \in V \big| \|u-v\|_V \leq r \right\}$ *будемо називати* ***замкненою кулею*** *радіуса* r *з центром у точці* $u \in V$.

3.4.3. Означення. *Нехай* $\mathbb{R} \ni r > 0$. *Множину елементів з лінійного нормованого простору* V $\Sigma(u,r) \overset{def}{=} \left\{ v \in V \big| \|u-v\|_V = r \right\}$ *будемо називати* ***сферою*** *радіуса* r *з центром у точці* $u \in V$.

Вірогідно, що $\overline{S}(u,r) = S(u,r) \bigcup \Sigma(u,r)$.

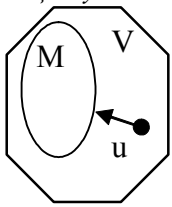
3.4.4. Означення. *Множина* M *обмежена в лінійному нормованому просторі* V, *якщо існує дійсне число* r *з проміжку* $(0,+\infty)$ *таке, що має місце включення* $M \subset S(0_V, r)$.

3.4.5. Означення. *Відкриту кулю* $S(u,r)$ *прийнято називати* ***околом точки*** u *радіуса* r *у лінійному нормованому просторі* V.

3.4.6. Означення. *Множина* M *називається* ***відкритою*** *в лінійному нормованому просторі* V, *якщо* $\forall u \in M \quad \exists S(u,r) \big| S(u,r) \subset M$.

Точки u *в даному випадку називаються* ***внутрішніми точками*** *множини* M *. Множину внутрішніх точок будемо називати* ***внутрішністю множини*** M *.*

3.4.7. Означення. *Елемент* $u \in V$ *називається* ***граничною точкою*** *множини* M *з лінійного нормованого простору* V *, якщо будь-який окіл* $S(u,r)$ *містить, як елементи множини* M *, так і елементи її алгебраїчного доповнення* $V \setminus M$ *, тобто* $S(u,r) \bigcap M \neq \varnothing \quad \forall r > 0$ *. Множину граничних точок будемо називати* ***границею множини*** M *і позначати символом* ∂M *.*



3.4.8. Означення. ***Діаметром*** *множини* M *з лінійного нормованого простору* V *, називається величина* $\operatorname{diam} M \overset{def}{=} \sup\limits_{u,v \in M} \|u - v\|_V$ *, а* ***відстанню*** *точки* $u \in V$ *до множини* M *прийнято називати величину* $\operatorname{dist}(u, M) \overset{def}{=} \inf\limits_{v \in M} \|u - v\|_V$ *.*

3.5. Простір лінійних обмежених операторів

3.5.1. Означення. *Нехай* U *,* V *– лінійні нормовані простори. Говорять, що оператор* $A : U \to V$ ***обмежений****, якщо*

$$\exists M = const > 0 \quad \left\| \|Au\|_V \leq M \|u\|_U \right. \quad \forall u \in D(A). \tag{3.4}$$

Введемо множину лінійних обмежених операторів

$$\mathfrak{L}(U,V) \overset{def}{=} \left\{ A : U \to V \left| \|Au\|_V \leq M \|u\|_U \right. \forall u \in U, \mathbb{R} \ni M > 0 \right\}. \tag{3.5}$$

Визначаючи поточкові операції додавання та множення на скаляр за правилами

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)u &= A_1 u + A_2 u, \\ (\alpha A)u &= \alpha \cdot Au \end{aligned} \quad \forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A_1, A_2, A \in \mathfrak{L}(U,V), \tag{3.6}$$

ми перетворюємо множину $\mathfrak{L}(U,V)$ в лінійний простір. Нерівність (3.4), що характеризує обмеженість оператора, можна переписати у ви-

гляді $\dfrac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} \le M \quad \forall 0_U \ne u \in D(A)$. Природно, що існує точна верхня грань лівої частини, для якої зберігається нерівність $\sup\limits_{0_U \ne u \in D(A)} \dfrac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} \le M$. Ця точна верхня грань збігається з найменшим значенням M та характеризує оператор A.

3.5.2. Означення. *Функціонал* $\|\bullet\| : \mathfrak{L}(U,V) \to \mathbb{R}$, *який обчислюється за формулою* $\|A\| \overset{def}{=} \sup\limits_{0_U \ne u \in D(A)} \dfrac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}$, *називається* ***нормою оператора*** A *в просторі лінійних обмежених операторів* $\mathfrak{L}(U,V)$.

▲ **Завдання 3.6.** Показати, що норму оператора в просторі $\mathfrak{L}(U,V)$ можна ввести за правилом $\|A\| \overset{def}{=} \sup\limits_{u \in \Sigma(0_U,1)} \|Au\|_V$.

3.6. Простір лінійних обмежених функціоналів

Якщо в попередньому пункті у співвідношеннях (3.4), (3.5) замість лінійно нормованого простору V прийняти поле комплексних чисел $\mathbb{C}$, то отримаємо множину лінійних обмежених функціоналів

$$\mathfrak{L}(U,\mathbb{C}) \overset{def}{=} \left\{ \varphi : U \to \mathbb{C} \,\middle|\, |\langle \varphi, u \rangle| \le M \|u\|_U \ \forall u \in U, \mathbb{R} \ni M > 0 \right\}.$$

Якщо аналогічно до (3.6) ввести поточкові операції додавання та множення на скаляр, то множина лінійних обмежених функціоналів перетвориться в простір лінійних обмежених функціоналів $\mathfrak{L}(U,\mathbb{C})$.

3.6.1. Означення. *Функціонал* $\|\bullet\|_* : \mathfrak{L}(U,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, *який обчислюється за формулою* $\|\varphi\|_* \overset{def}{=} \sup\limits_{0_U \ne u \in U} \dfrac{|\langle \varphi, u \rangle|}{\|u\|_U}$, *називається* ***нормою функціонала*** φ *в просторі лінійних обмежених функціоналів* $\mathfrak{L}(U,\mathbb{C})$.

3.6.2. Означення. *Простір лінійних обмежених функціоналів* $\mathfrak{L}(U,\mathbb{C})$ *називається* ***спряженим****, або* ***двоїстим, простором до лінійно нормованого простору*** U *і позначається* $U' \overset{def}{=} \mathfrak{L}(U,\mathbb{C})$.

Тобто $\{\varphi,u\} \in U' \times U \to \langle \varphi,u \rangle \in \mathbb{C}$.

3.7. Простори Лебега

Поняття інтеграла Рімана, як відомо, можна застосовувати тільки до функцій, які неперервні або мають не „надто багато” точок розриву. До необмежених функцій, або функцій, розривних майже скрізь, де вони визначені, або функцій, які взагалі задані на абстрактній множині, рімановська конструкцій інтегралу стає непридатною. Для таких функцій існує поняття інтеграла, введене Лебегом.

Основна ідея інтеграла Лебега полягає в тому, що точки інтегрування (точки x) групуються за принципом близькості значень функції у цих точках. Основна ідея інтеграла Рімана полягає в тому, що точки x групуються за близькістю розташування на осі X.

Лебег побудував свою теорію інтеграла використовуючи поняття міри. У просторі $\mathbb{R}^1$ не мають міри точки. У просторі $\mathbb{R}^2$ не мають міри точки і криві. У просторі $\mathbb{R}^3$ не мають міри точки, криві і поверхні. Крім того, інтеграл Лебега визначається однаково для функцій, визначених на довільному просторі з заданою мірою, водночас, інтеграл Рімана визначається спочатку для функцій однієї змінної, а потім з відповідними уточненнями узагальнюється на випадок багатьох змінних. Для функцій визначених на абстрактному просторі з заданою мірою інтеграл Рімана взагалі не має сенсу.

Нехай u – деяка вимірна функція, що приймає значення $u_1,\ldots,u_n$, $u_i \neq u_j$, при $i \neq j$, визначена на множині $D(u)=\Omega$ з заданою мірою $\mu(\Omega)$. Природно, що міра є невід’ємна $\mu(\Omega) \geq 0$ та адитивна, тобто $\mu(\Omega)=\sum_{k=1}^{n}\mu(\Omega_k)$, $\Omega=\bigcup_{k=1}^{n}\Omega_k$, $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$.

Тоді інтеграл Лебега від функції u по множині Ω визначається рівністю $\int_{\Omega} u d\mu(\Omega)=\sum_{k=1}^{n}u_k\mu(\Omega_k)$, де

$\Omega_k = \left\{ x \,\middle|\, x \in \Omega = D(u), u(x) = u_k \right\}$, за умови, що ряд справа збігається при $n \to \infty$.

Якщо на множинах $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty \right\}$, $1 \le p < +\infty$, та $L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty \right\}$, $p = +\infty$, ввести поточкові функції згідно (2.2), то ці множини будуть ***просторами Лебега***, які можна наділити нормами

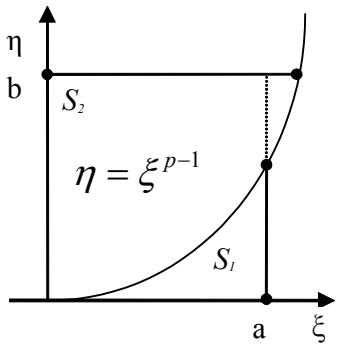
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p \overset{def}{=} \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in L^p(\Omega),\ 1 \le p < +\infty, \tag{3.7}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty \overset{def}{=} ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega). \tag{3.8}$$

▲ **Завдання 3.7.** Нехай задано простори $C([0,1])$ і $L^p([0,1])$, $2 \le p < +\infty$, та множину $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ функцій Куранта. Вірогідно, що $C([0,1]) \subset L^\infty([0,1])$. Показати, що $\|\varphi_i\|_\infty = 1$, $\left\| \frac{d\varphi_i}{dx} \right\|_\infty = \frac{1}{h}$, $\|\varphi_i\|_2 = \sqrt{\frac{2h}{3}}$, $\left\| \frac{d\varphi_i}{dx} \right\|_2 = \sqrt{\frac{2}{h}}$.

Для обґрунтування того факту, що введені нами вирази (3.7), (3.8) дійсно визначають норми, необхідно скористатися нерівностями Гьольдера та Мінковського.

3.7.1. Означення. *Числа* $p, q \in [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ *будемо називати* ***спряженими індексами****, якщо вони задовольняють умову* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *причому, якщо* $p = 1$, *приймемо* $q = +\infty$.



Вірогідно, що $q = \frac{p}{p-1}$,

$(1-p)(1-q)=1$. Спряжені індекси використовують у *нерівності Юнга*

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a,b \in (0,+\infty).$$

Доведемо її. Для цього розглянемо в площині (ξ,η) функцію

$$\eta = \xi^{p-1}, \quad \xi > 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \eta^{q-1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p},$$

$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}$. Отже, $ab \le S_1 + S_2 = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. ■

3.7.2. Теорема про нерівності Гьольдера та Мінковського. *Нехай p, q спряжені індекси. Тоді має місце нерівність Гьольдера*[1]

$$\|u \cdot v\|_1 \le \|u\|_p \cdot \|v\|_q \quad \forall u \in L^p(\Omega),\ \forall v \in L^q(\Omega)$$

та нерівність Мінковського[2]

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p \quad \forall u,v \in L^p(\Omega).$$

Доведення. Розпочнемо з нерівності Гьольдера для випадку, коли $p=1$, тоді $q=+\infty$, і нам треба переконатися, що $\|u \cdot v\|_1 \le \|u\|_1 \cdot \|v\|_\infty \quad \forall u \in L^1(\Omega),\ \forall v \in L^\infty(\Omega)$. Дійсно, $\|u \cdot v\|_1 =$

$$= \int_\Omega |u \cdot v|\, dx = \int_\Omega |u| \cdot |v|\, dx \le ess \sup_{x \in \Omega} |v(x)| \cdot \int_\Omega |u|\, dx = \|v\|_\infty \cdot \|u\|_1.$$

Нехай $p>1$. Для $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ покладемо $a \overset{def}{=} \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$, $b \overset{def}{=} \frac{|v(x)|}{\|v\|_q}$. Скористаємося нерівністю Юнга

---

[1] Нерівність Гьольдера показує, що норми $\|u\|_p$ і $\|v\|_q$ скінченні, а добуток функцій u і v інтегрований за Лебегом у просторі $L^1(\Omega)$.

[2] На перший погляд це нерівність трикутника. Мінковський показав, що кожен простір $L^p(\Omega)$ є лінійним.

$$ab = \frac{\left|u(x)\cdot v(x)\right|}{\|u\|_p \cdot \|v\|_q} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{\left|u(x)\right|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\left|v(x)\right|^q}{\|v\|_q^q} \quad \forall x \in \Omega.$$ Проінтегруємо отриману нерівність за Лебегом

$$\int_\Omega \frac{\left|u(x)\cdot v(x)\right|}{\|u\|_p \cdot \|v\|_q} dx = \frac{\|u\cdot v\|_1}{\|u\|_p \cdot \|v\|_q} \le$$

$$\le \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega \left|u(x)\right|^p dx}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_\Omega \left|v(x)\right|^q dx}{\|v\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \|u\cdot v\|_1 \le \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Тепер перейдемо до нерівності Мінковського

$$\|u+v\|_p^p = \int_\Omega |u+v|^p dx = \int_\Omega |u+v|\cdot|u+v|^{p-1} dx \le$$

$$\le \int_\Omega |u|\cdot|u+v|^{p-1} dx + \int_\Omega |v|\cdot|u+v|^{p-1} dx \le \begin{pmatrix} \textit{нерівність} \\ \textit{Гьольдера} \end{pmatrix} \le$$

$$\le \|u\|_p \cdot \left(\int_\Omega |u+v|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} + \|v\|_p \cdot \left(\int_\Omega |u+v|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)\cdot\left(\int_\Omega |u+v|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)\cdot\|u+v\|_p^{p-1} \quad \Rightarrow \quad \|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p. \blacksquare$$

Довівши нерівність Мінковського, ми фактично переконалися у правильності нерівності трикутника для означення норм (3.7), (3.8). Тепер неважко показати, що простори Лебега лінійні.

3.7.3. Теорема про простори Лебега. *Нехай* Ω *обмежена область у* $\mathbb{R}^n$. *Тоді простори* $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, *є лінійними нормованими просторами.*

Зауваження. При $p = q = 2$ нерівність Юнга перетворюється в елементарну нерівність $a\cdot b \le \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, а нерівність Гьо-

льдера в нерівність Коші-Буняковського-Шварца (КБШ) $\int_\Omega |u\cdot v|\,dx \le \sqrt{\int_\Omega |u|^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_\Omega |v|^2\,dx}$.

3.8. Простори Соболєва

С. Л. Соболєв ввів поняття узагальненої похідної, яка може бути інтегрована за Лебегом. Простором Соболєва прийнято називати множину функцій

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{def}{=} \left\{ u:\Omega\to\mathbb{C} \,\middle|\, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \le m \in \mathbb{N} \right\},$$

модулі p-х степенів яких разом зі своїми всіма можливими похідними до m-го порядку є інтегровані за Лебегом в області Ω. Вірогідно, що

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m-1,p}(\Omega) \subset \ldots \subset W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

3.8.1. Теорема про простори Соболєва. *Нехай Ω обмежена область у $\mathbb{R}^n$. Тоді простір $W^{m,p}(\Omega)$, $m \ge 0$, $1 \le p \le +\infty$ є лінійним нормованим простором, якщо норму визначити згідно з правилом*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} \overset{def}{=} \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty .$$

▲ **Завдання 3.8.** Довести теорему про простори Соболєва.

З огляду на важливість просторів Соболєва з $p=2$ будемо використовувати позначення $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Це гільбертів простір.

▲ **Завдання 3.9.** Нехай $\Omega = (a,b)$, $\infty < a < b < +\infty$. У просторі $V(\Omega) \overset{def}{=} \left\{ v \in H^1((a,b)) \,\middle|\, v(a) = 0 \right\}$ визначимо норми $\|v\|_V \overset{def}{=} \left(\int_a^b \left(|v|^2 + \left|\frac{dv}{dx}\right|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $|v|_V \overset{def}{=} \left(\int_a^b \left(\left|\frac{dv}{dx}\right|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Показати, що $\|v\|_V \sim |v|_V$.

Для доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца $v(x) = v(a) + \int_a^x \frac{dv}{dt} dt$. Наслідком буде так звана нерівність Фрідріхса $\int_a^b v^2 dx \le \frac{b-a}{2} \int_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$.

4. Послідовності. Поняття щільності

4.1. Послідовності в лінійному нормованому просторі

4.1.1. Означення. *Послідовність елементів з лінійного нормованого простору* $\{u_n\} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ *називається* ***фундаментальною****, або* ***послідовністю Коші****, тоді й лише тоді, коли* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_V = 0$.

4.1.2. Означення. *Послідовність елементів з лінійного нормованого простору* $\{u_n\} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ *називається* ***збіжною*** *тоді й лише тоді, коли* $\exists u \in V \,\Big|\, \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_V = 0$

Далі будемо говорити, що u ***границя послідовності*** *й записувати* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ *або* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$.

▲ **Завдання 4.1.** Нехай послідовність елементів лінійного нормованого простору збіжна, тобто $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ Показати, що

- послідовність $\{u_n\} \subset V$ обмежена в просторі, тобто утворює обмежену множину;
- $\|u_n\|_V \to \|u\|_V$ ($\{\|u_n\|_V\}$ числова послідовність);
- послідовність $\{u_n\} \subset V$ фундаментальна.

▲ **Завдання 4.2.** Нехай лінійний простір $C([-1;1])$ наділено нормою $\|u\|_2 \overset{def}{=} \left(\int\limits_{-1}^{1} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Показати, що послідовність функцій $u_n(x) = \begin{cases} -1, -1 \le x < -1/n, \\ nx, |x| \le 1/n, \\ 1, 1/n < x \le 1, \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в цьому просторі, але не збіжна в ньому.

4.2. Щільні та замкнені множини

4.2.1. Означення. *Множина* $S \subset V$ ***щільна*** *в лінійному нормованому просторі* V *тоді й лише тоді, коли* $\forall u \in V$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v \in S \left| \|u - v\|_V < \varepsilon \right.$.

Якщо глянути на це означення з погляду апроксимації, то воно стверджує, що будь-який елемент простору V можна, як завгодно добре наблизити елементом з його щільної множини. Як приклад розглянемо ***теорему Вейєрштрасса***. *Нехай на замкненій обмеженій кулі* $\overline{S} \subset \mathbb{R}^n$ *радіуса* $\mathbb{R} \ni r > 0$ *задано простір неперервних та обмежених функцій* $C\left(\overline{S}\right)$ *з нормою* $\|u\|_\infty \overset{def}{=} \sup\limits_{x \in \overline{S}} \left|u(x)\right|$ *і множину всіляких поліномів з дійсними коефіцієнтами* $P\left(\overline{S}\right) \subset C\left(\overline{S}\right)$. *Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall u \in C\left(\overline{S}\right)\ \exists p \in P\left(\overline{S}\right) \left| \|u - p\|_\infty \le \varepsilon \right..$$

Цей приклад пояснює структуру щільної множини.

4.2.2. Лема про щільну множину. *Нехай* $S \subset V$ *щільна в лінійному нормованому просторі* V. *Тоді* $\forall u \in V$ *знайдеться фундаментальна послідовність* $\{u_n\} \subset S$ *така, що* $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u$.

Доведення. Оскільки S щільна у V, то $\forall u \in V$ та $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists u_n \in S$ таке, що $\|u - u_n\|_V \le \dfrac{1}{n}$. З нерівності трикутника випливає, що $\|u_n - u_m\|_V \le \|u - u_n\|_V + \|u - u_m\|_V \le \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \Rightarrow \{u_n\} \subset V$ фундаментальна.■

4.2.3. Означення. *Множина* $\overline{S}$ *називається* ***замиканням*** *множини* $S \subset V$ *у лінійному нормованому просторі* V, *якщо* $\forall u \in \overline{S}$ $\exists \{u_n\} \subset S$ (u_n *необов'язково різні*) *така, що* $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u$.

4.2.4. Означення. *Множина* $S \subset V$ *називається* ***замкненою*** *у лінійному нормованому просторі* V, *якщо вона збігається зі своїм замиканням, тобто* $S = \overline{S}$.

4.3. Щільність простору неперервних кусково-лінійних функцій

Нагадаємо, що через $K\left(\left[0,1\right]\right)$ ми позначили простір неперервних кусково-лінійних функцій, визначених на відрізку $\left[0,1\right]$, а через $K_h\left(\left[0,1\right]\right)$ – множину функцій Куранта. Природно, що $K_h\left(\left[0,1\right]\right) \subset K\left(\left[0,1\right]\right)$.

4.3.1. Теорема про щільність $K\left(\left[0,1\right]\right)$ в $C\left(\left[0,1\right]\right)$. *Простір неперервних кусково-лінійних функцій $K\left(\left[0,1\right]\right)$ утворює щільну множину в просторі $C\left(\left[0,1\right]\right)$ з нормою $\|u\| \overset{def}{=} \|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} \left|u\left(x\right)\right|$, і $\forall u \in C\left(\left[0,1\right]\right) \quad \exists u_h \in K_h\left(\left[0,1\right]\right) \quad \left\|u - u_h\right\| \le Ch^2$, де $C = const > 0$, яка не залежить від вибору u_h чи h, але може залежати від функції u.*

Доведення. Спочатку покажемо, що $\forall u \in C\left(\left[0,1\right]\right)$, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in K\left(\left[0,1\right]\right) \quad \left\|u - v\right\| \le \varepsilon$. За теоремою Вейєрштрасса, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in C\left(\left[0,1\right]\right) \quad \exists p = p\left(x\right) \in P\left(\left[0,1\right]\right) \quad \left\|u - p\right\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$. Тоді $\left\|u - v\right\| = \left\|u - p + p - v\right\| \le \left\|u - p\right\| + \left\|p - v\right\| \le \frac{1}{2}\varepsilon + \left\|p - v\right\|$. Залишилося показати, що $\left\|p - v\right\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$. Виберемо $K\left(\left[0,1\right]\right) \ni v = u_h = \sum\limits_{i=0}^{N} p\left(x_i\right)\varphi_i\left(x\right) \in K_h\left(\left[0,1\right]\right)$. Оскільки $\left\{\varphi_i\right\}$ – базис простору $K_h\left(\left[0,1\right]\right)$, то $u_h\left(x_j\right) = p\left(x_j\right)$, $j = \overline{0,N}$. Позначимо через $e_h\left(x\right) = p\left(x\right) - u_h\left(x\right)$ похибку апроксимації, тобто похибку наближення полінома $p\left(x\right)$ до функції $u_h\left(x\right)$. Похибка володіє такими властивостями:

- $e_h(x_i) = 0 = e_h(x_{i+1})$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$;
- функція $e_h(x)$ неперервна, тому, за теоремою Ролля, $\exists z \in (x_i, x_{i+1}) \left| \frac{d}{dx} e_h(z) = 0 \right.$;
- $\frac{d^2}{dx^2} e_h(x) = p''(x) \ \ \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$.

На відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ скористаємося формулою Ньютона – Лейбніця:

$e_h'(x) = e_h'(z) + \int_z^x e_h''(t)\,dt = \int_z^x p''(t)\,dt \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$. Звідси маємо оцінку

$$\left|e_h'(x)\right| \le \int_z^x \left|p''(t)\right| dt \le \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left|p''(x)\right| \int_z^x dt \le h \cdot \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left|p''(x)\right|$$

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$. Знову скористаємося формулою Ньютона – Лейбніця:

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad e_h(x) = e_h(x_i) + \int_{x_i}^x e_h'(t)\,dt = \int_{x_i}^x e_h'(t)\,dt$. Звідки

$\left|e_h(x)\right| \le \int_{x_i}^x \left|e_h'(t)\right| dt \le h \cdot \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left|e_h'(x)\right|$. Далі, в останній нерівності перейдемо до точної верхньої межі по $x \in [x_i, x_{i+1}]$, унаслідок $\|e_h\| \le h \cdot \|e_h'\| \le h^2 \cdot \|p''\|$. Отже, ми показали, що $\|p - u_h\| \le h^2 \cdot \|p''\|$, а потрібно було $\|p - u_h\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$. Вірогідно, що для заданого ε необхідно підібрати таке h, щоб $\frac{1}{2}\varepsilon = h^2 \cdot \|p''\|$.■

▲ **Завдання 4.3.** Показати, що $\forall u \in H^2\left(\left[0,1\right]\right) = W^{2,2}\left(\left[0,1\right]\right)$ $\exists u_h \in K_h\left(\left[0,1\right]\right)$ $\left\|u - u_h\right\|_m \le h^{2-m}\left\|\dfrac{d^2u}{dx^2}\right\|_0$, $m = 0,1$. *Вказівка.* Необхідно видозмінити доведення теореми таким чином: достатньо взяти $u_h = \sum_{i=0}^{N} u\left(x_i\right)\varphi_i\left(x\right)$ і норму Чебишева замінити нормою інтегрованих з квадратом функцій.

4.1. Приклад. Розглянемо послідовність функцій $u_n\left(x\right) = \dfrac{nx}{\sqrt{1+n^2}}$. Чи буде вона збіжною в просторах $C\left(\left[0,1\right]\right)$ та $L^2\left(\left[0,1\right]\right)$? Легко бачити, що границя послідовності $u = x \in C\left(\left[0,1\right]\right)$. Справді,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n - u\right\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{\sqrt{1+n^2}} - x\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|x\left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1\right)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|x\right|\cdot\left|\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1\right| = 0.$$

Аналогічно, границя $u = x \in L^2\left(\left[0,1\right]\right)$. Справді,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n - u\right\|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\left|x\left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1\right| = 0.$$

▲ **Завдання 4.4.** Знайти помилку в міркуваннях, якщо вона є. Нехай $u \in H^1\left(\left[a,b\right]\right) \Rightarrow u \in C\left(\left[a,b\right]\right)$. Справді,

$$u \in H^1\left(\left[a,b\right]\right) \Rightarrow \begin{cases} u \in L^2\left(\left[a,b\right]\right) \Rightarrow \int\limits_a^b |u|^2\, dx = M_1 < +\infty, \\ \dfrac{du}{dx} \in L^2\left(\left[a,b\right]\right) \Rightarrow \int\limits_a^b \left|\dfrac{du}{dx}\right|^2 dx = M_2 < +\infty \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{du}{dx}\right| < M_3 < +\infty \;\Rightarrow\; \left|\frac{du}{dx}\right| \textit{обмежена} \;\Rightarrow\; \forall x_0 \in \left[a,b\right] \forall \varepsilon > 0$$

$\exists \delta > 0 \;\; \left|\forall x \in \left[a,b\right] \left|x - x_0\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|u\left(x\right) - u\left(x_0\right)\right| < \delta$, що і доводить неперервність функції.

4.2. Приклад. Перевірити лінійність та обчислити норму функціонала $u \in C\left(\left[0,1\right]\right) \to \left\langle l,u\right\rangle = u\left(0\right)$.

Спочатку покажемо лінійність функціонала:

$$\left\langle l,u+v\right\rangle = \left(u+v\right)\left(0\right) = u\left(0\right) + v\left(0\right) = \left\langle l,u\right\rangle + \left\langle l,v\right\rangle,$$

$$\left\langle l,\alpha u\right\rangle = \left(\alpha u\right)\left(0\right) = \alpha u\left(0\right) = \alpha \left\langle l,u\right\rangle.$$

Далі, обчислимо норму функціонала

$$\left\|l\right\|_* = \sup_{\substack{u \in C([0,1]) \\ u \neq 0_C}} \frac{\left|\left\langle l,u\right\rangle\right|}{\left\|u\right\|_\infty} = \sup_{\substack{u \in C([0,1]) \\ u \neq 0_C}} \frac{\left|u\left(0\right)\right|}{\sup\limits_{x \in [0,1]} \left|u\left(x\right)\right|} = 1.$$

4.3. Приклад. Обчислити норму функції $L^p\left(\left[0,1\right]\right) \ni u\left(x\right) = x^{-2}$.

Обчислення:

$$\left\|u\right\|_p = \left(\int\limits_0^1 x^{-2p} dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(x^{1-2p}\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{1-2p}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{x^{2p}}\Bigg|_0\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{1-2p}} = \left(1-\infty\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{1-2p}} = \infty,$$

причому не для всіх p. Для $p = \infty$

$$\left\|u\right\|_\infty = ess \sup_{x \in [0,1]} x^{-2} = \infty.$$

Отже, норму обчислити неможливо.

▲ **Завдання 4.5.** Нехай V лінійний нормований простір.

1). Показати, що $\|u\|_V \le \max\left\{\|u-v\|_V, \|u+v\|_V\right\} \ \forall u,v \in V$.

2). Показати, якщо $u_n \to u$ і $v_n \to v$ в V, то $\|u_n - v_n\|_V \to \|u-v\|_V$.

3). Чи збіжна послідовність $V = L^2\left(\left(0,1\right)\right) \ni u_n\left(x\right) = x^n\left(1-x\right)$?

4). Нехай $V = C^1\left(\left[0,1\right]\right)$. Розглянемо функціонали

$$l_1\left(u\right) = \|u\|_\infty,$$
$$l_2\left(u\right) = \|u'\|_\infty,$$
$$l_3\left(u\right) = \left|u\left(1\right) - u\left(0\right)\right| + l_2\left(u\right),$$
$$l_4\left(u\right) = \|u\|_1 + l_2\left(u\right).$$

Чи можна вважати хоча б один з цих функціоналів нормою в просторі $C^1\left(\left[0,1\right]\right)$?

5). Перевірити лінійність та обчислити норму функціонала $u \in L^2\left(\left(0,1\right)\right) \to \left\langle l,u\right\rangle = \int\limits_0^1 \frac{u\left(t\right)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$.

6). Показати, якщо $\left\{u_n\right\} \subset C\left(\left[0,1\right]\right)$ збіжна, то вона збіжна і в $L^p\left(\left[0,1\right]\right)$.

7). Чи є збіжною в просторі $L^2\left(\left[0,1\right]\right)$ послідовність $u_n\left(x\right) = n^2 x e^{-nx}$?

5. Неперервність операторів та функціоналів

Нехай U, V лінійні нормовані простори з нормами $\|\bullet\|_U$ та $\|\bullet\|_V$ відповідно.

5.1. Означення. *Оператор* $A:U\to V$ *називається* ***неперервним в точці*** $u\in D(A)\subset U$ *тоді й лише тоді, коли справедливе одне з рівнозначних тверджень:*

(I) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \|Au-Av\|_V<\varepsilon$

$\forall v\in S(u,\delta)\bigcap D(A)$;

(II) $\forall\{u_n\}\ \ |u_n\to u\in D(A)\ \ (\textit{тобто}\|u_n-u\|_U\to 0)$ *послідовність образів* $Au_n\to Au\in V$

$(\textit{тобто}\|Au_n-Au\|_V\to 0)$.

5.2. Означення. *Якщо оператор* $A:U\to V$ *неперервний в кожній точці області визначення* $D(A)$*, то він називається* ***неперервним***.

Таке означення неперервності є загальним. Воно стосується, як лінійних, так і нелінійних операторів.

5.1. Приклад. Нехай оператор – це функціонал норми, тобто $A\overset{def}{=}\|\bullet\|_U:U\to V=\mathbb{R}$. Покажемо, що він неперервний в U. Справді, нехай ми маємо збіжну послідовність $u_n\to u\in D(A)$ тобто $\|u_n-u\|_U\to 0$. Тоді

$$\|Au_n-Au\|_V=\big|\|u_n\|_U-\|u\|_U\big|\le\begin{pmatrix}\textit{опуклість}\\ \textit{норми}\end{pmatrix}\le\|u_n-u\|_U.$$

Отже, згідно означення **5.1.(II)**, *норма неперервний функціонал* (або оператор) у лінійному нормованому просторі U.

▲ **Завдання 5.1.** Нехай U лінійний нормований простір. **Показати**, що оператор $A:U^2\to U$, тобто

$\varphi = \{u, v\} \in U \times U \to A\varphi = u + v \in U$, неперервний у лінійному нормованому просторі U^2.

5.3. Теорема про лінійний неперервний оператор. *Нехай оператор* $A : U \to V$ *лінійний і хоча б в одній точці* $u \in D(A) \subset U$ *неперервний. Тоді оператор* $A : U \to V$ *неперервний на* $D(A)$.

Доведення. Виберемо послідовність $\{u_n\} \subset D(A)$ $|u_n \to u \in D(A)$, і припустимо, що u є точкою неперервності оператора. Тоді послідовність образів $Au_n \to Au \in V$. Виберемо довільну точку $v \in D(A)$ і послідовність $\{v_n\} \subset D(A) | v_n \to v \in D(A)$. Покажемо, що $Av_n \to Av \in V$. Розглянемо послідовність $\{v_n - v + u\} \subset D(A)$. Вірогідно, що $v_n - v + u \xrightarrow[n\to\infty]{} u$. Але в точці u оператор неперервний. Отже, $A(v_n - v + u) \xrightarrow[n\to\infty]{} Au$. Користуючись лінійністю оператора, отримаємо $Av_n - Av + Au \xrightarrow[n\to\infty]{} Au \Rightarrow Av_n \to Av \ \ \forall v \in D(A)$.■

З теореми випливає така властивість лінійних операторів у нормованих просторах: *для дослідження неперервності оператора* $A : U \to V$ *достатньо перевірити неперервність оператора в точці* 0_U, *тобто показати, що* $Au_n \to 0_V$, *коли* $u_n \to 0_U$.

Нагадаємо, що ми визначили простір лінійних обмежених операторів як

$\mathfrak{L}(U, V) \overset{def}{=} \left\{ A : U \to V \,\middle|\, \|Au\|_V \le \|A\| \cdot \|u\|_U \ \forall u \in D(A) \subset U \right\}$ з нормою $\|A\| \overset{def}{=} \sup\limits_{\substack{u \in D(A) \\ u \ne 0_U}} \dfrac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}$.

5.4. Теорема про ознаку лінійного обмеженого оператора. *Нехай* U, V *лінійні нормовані простори. Для того, щоб* $A \in \mathfrak{L}(U, V)$, *необхідно і досить, щоб він був неперервним*[3].

---

[3] У лінійних операторів поняття обмеженості еквівалентне поняттю неперервності.

Доведення. *Необхідність*. Припустимо, що оператор $A \in \mathfrak{L}(U,V)$, тобто він лінійний та обмежений. Треба довести, що він неперервний. Для цього візьмемо послідовність $\{u_n\} \subset U \,|\, u_n \to 0_U$. Тоді послідовність образів $Au_n \to 0_V$. Дійсно, внаслідок обмеженості оператора $\|Au_n\|_V \le \|A\| \cdot \|u_n\|_U \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, або $\|Au_n - A0_U\|_V \le \|A\| \cdot \|u_n - 0_U\|_U \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отже, оператор неперервний в 0_U і тому він неперервний на цілому просторі U.

Достатність. Доведення здійснимо міркуванням від супротивного. Нехай оператор *неперервний* та <u>*необмежений*</u>, тоді можна побудувати послідовність $\{u_n\} \subset U$ таку, що $u_n \to u \in D(A)$ і $\|Au_n\|_V \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Розглянемо числову послідовність $a_n = \dfrac{\|Au_n\|_V}{\|u_n\|_U} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ і послідовність $U \ni v_n = \dfrac{u_n}{a_n \|u_n\|_U} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_U$, тому що $\|v_n\| = \dfrac{1}{a_n}$. Тоді, внаслідок неперервності оператора, послідовність $Av_n \to 0_V$. З іншого боку, $\|Av_n\|_V = \left\| A \dfrac{u_n}{a_n \|u_n\|_U} \right\|_V = \dfrac{1}{a_n} \left\| \dfrac{Au_n}{\|u_n\|_U} \right\|_V = 1$. Це і є шукане протиріччя.■

5.2. Приклад. Інтегральний оператор. Покладемо $U = V = C([0,1])$. Тоді $\|u\|_U = \|u\|_V = \|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Розглянемо задачу про інтегральне рівняння.

$$\begin{cases} \text{Задано} \quad k(x,y) \in C([0,1]\times[0,1]) \text{ та } f \in U. \\ \text{Знайти} \quad u \in U \,\Big|\, \displaystyle\int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy = f(x) \;\forall x \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.1}$$

Покажемо, що інтегральне рівняння (5.1) можна розглядати як операторне рівняння $Ku = f$ і $K \in \mathfrak{L}(U, U)$. Введемо оператор

$$U \ni u \to (Ku)(x) = \int_0^1 k(x, y) u(y) dy \in U .$$

Вірогідно, що $K(\alpha u + \beta v) = \alpha Ku + \beta Kv$ – отже, введений оператор лінійний. Залишилося показати, що він обмежений. Подивимося на ядро цього оператора. Оскільки $k(x, y) \in C([0,1] \times [0,1])$, то $\|k\|_\infty \le M < +\infty$. Оцінимо спочатку модуль функції $(Ku)(x)$:

$$|(Ku)(x)| = \left| \int_0^1 k(x, y) u(y) dy \right| \le \int_0^1 |k(x, y)| \cdot |u(y)| dy \le$$

$$\le \sup_{x, y \in [0,1]} |k(x, y)| \cdot \int_0^1 |u(y)| dy =$$

$$= \|k\|_\infty \cdot \int_0^1 |u(y)| dy \le \|k\|_\infty \cdot \|u\|_\infty \cdot \int_0^1 dy = \|k\|_\infty \cdot \|u\|_\infty .$$

Ми встановили, що

$$\|Ku\|_\infty = \sup_{x, y \in [0,1]} |(Ku)(x)| \le \|k\|_\infty \cdot \|u\|_\infty .$$

Тому оператор обмежений $\|K\| \le \|k\|_\infty \le M < +\infty$, а внаслідок лінійності, ще і неперервний.

▲ **Завдання 5.2.** Нехай задано оператор $A : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ такий, що $D(A) = C^1([0,1]) \ni u \to Au = \dfrac{d}{dx} u \in C([0,1])$, і норма в $C^1([0,1])$ задається виразом $\|u\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |u(x)|$. **Показати**, що таким чином введений оператор є лінійним і необмеженим. Дійсно, розглянемо послідовність функцій $u_n = e^{-nx} \in C^1([0,1])$. Легко бачити,

що $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-1\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|e^{-nx}-1\right|=0$, тобто $u_n\to u\equiv 1$ і $\dfrac{d}{dx}u=0$. У той час, як,

$$\lim_{n\to\infty}\|Au_n-Au\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}\left|-ne^{-nx}\right|=\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0.$$

6. Рівномірна збіжність в C(Ω). Рівномірна неперервність оператора

6.1. Рівномірна збіжність в C(Ω). Замкненість C(Ω).

6.1.1. Означення. *Розглянемо послідовність відображень* $u_n : X \to V$, *де* X *– довільна множина,* V *– простір із заданою метрикою. Послідовність* $\{u_n\}$ *називається* ***рівномірно збіжною до*** $u : X \to V$, *якщо* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \left| \forall n > n_\varepsilon \quad \rho\left(u_n - u\right) < \varepsilon \right.$ $\forall x \in X$.

Це означення еквівалентне такому: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} \left(\rho\left(u_n - u\right)\right) = 0$.

Послідовність $\{u_n\}$ *рівномірно збігається на множині* X *до* $u : X \to V$ *тоді й лише тоді, коли існує числова послідовність* $\{\alpha_n\}$ *така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, і $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *такий, що* $\forall n > n_0 \quad \forall x \in X$ $\rho\left(u_n - u\right) < \alpha_n$.

6.1. Приклад. Послідовність $u_n = x^n$ рівномірно збігається на $\left[0, a\right]$, $0 < a < 1$, і не збігається рівномірно на $\left[0,1\right]$.

6.2. Приклад. Розглянемо послідовність $\{u_n\} \subset C\left(\Omega\right)$, яка збігається до $u \subset C\left(\Omega\right)$, тобто

$$\left\| u_n - u \right\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \left| u_n - u \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (6.1)$$

Оскільки в просторі $C\left(\Omega\right)$ ми оперуємо поточковим додаванням функцій, то (6.1) означає, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \left| \forall n > n_\varepsilon \right.$ $\left| u_n - u \right| < \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$. Отже, збіжність у просторі $C\left(\Omega\right)$ рівномірна. Такий самий характер збіжності у просторах $C^m\left(\Omega\right)$ з нормами, введеними у прикладі 3.3.

6.1.2. Теорема про замкненість $C(\Omega)$. *Множина $C(\Omega)$ є замкненим лінійним підпростором у просторі $L^{\infty}(\Omega)$.*

Доведення. Нам потрібно показати, що $C(\Omega)=\overline{C(\Omega)}$. Ця рівність, зокрема, означає, що $\forall u\in\overline{C(\Omega)}$ і $\forall\varepsilon>0\ \ \exists v\in C(\Omega)$ $\Big|\ \|u-v\|_{\infty}<\varepsilon$. Покажемо, що $\overline{C(\Omega)}$ містить лише обмежені та неперервні функції. Розпочнемо з обмеженості. Дійсно, $\forall u\in\overline{C(\Omega)}$ $\forall\varepsilon>0$ підберемо $v\in C(\Omega)$ таку, що

$$\|u\|_{\infty}=\|u-v+v\|_{\infty}\le\|u-v\|_{\infty}+\|v\|_{\infty}\le\varepsilon+\|v\|_{\infty}<+\infty.$$

Перший доданок менше за ε внаслідок означення замикання, а другий внаслідок обмеженості норми $\|\bullet\|_{\infty}$ для кожної функції з $C(\Omega)$. Інакше кажучи, $\overline{C(\Omega)}\subset L^{\infty}(\Omega)$.

Тепер покажемо неперервність. Нехай $u\in\overline{C(\Omega)}$. Тоді знову для $\forall\varepsilon>0$ виберемо функцію $v\in C(\Omega)$ таку, що $\forall x_0\in\Omega$ виконується

$$\begin{aligned}\left|u(x)-u(x_0)\right|&=\left|u(x)-v(x)+v(x)-v(x_0)+v(x_0)-u(x_0)\right|\le\\&\le\left|u(x)-v(x)\right|+\left|v(x)-v(x_0)\right|+\left|v(x_0)-u(x_0)\right|\le\\&\le 2\varepsilon+\left|v(x)-v(x_0)\right|\xrightarrow[x\to x_0]{\varepsilon\to 0}0.\end{aligned}$$

Перший та третій доданок у правій частині нерівності менше ε завдяки щільності $C(\Omega)$ в $\overline{C(\Omega)}$, а середній доданок прямує до нуля внаслідок поточкового характеру збіжності неперервних функцій.■

6.2. Рівномірна неперервність оператора

6.2.1. Означення. *Оператор* $A:U\to V$ *називається* ***рівномірно неперервним на*** U *якщо* $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad \left\|Au-Av\right\|_V\le\varepsilon$ $\forall u,v\in U$ *таких, що* $\left\|u-v\right\|_U\le\delta$.

6.2.2. Теорема про достатню ознаку рівномірної неперервності оператора. *Оператор* $A:U\to V$ *рівномірно неперервний на* U, *якщо* $\exists C=const>0$ *така, що виконується умова Ліпшиця*

$$\left\|Au-Av\right\|_V\le C\cdot\left\|u-v\right\|_U\quad\forall u,v\in U\,. \tag{6.2}$$

Доведення вірогідне.■

Тут C – стала Ліпшиця.

▲ **Завдання 6.1.** Показати, що оператор $\{u,v\}\in V^2\to A(u,v)=u+v\in V$ рівномірно неперервний на V^2.

▲ **Завдання 6.2.** Нехай X обмежена в $\mathbb{C}$, тобто $X\subset\mathbb{C}$, $diamX<+\infty$. Показати, що оператор $\{u,\lambda\}\in V\times X\to A(u,\lambda)=\lambda\cdot u\in V$ рівномірно неперервний на V.

▲ **Завдання 6.3.** Показати, якщо оператор $A:U\to V$ рівномірно неперервний на U, то він неперервний.

7. Простори зі скалярним добутком

7.1. Структура унітарного простору

7.1.1. Означення. *Нехай* U *– лінійний простір, на якому визначено функціонал* $(\bullet,\bullet):U^2 \to \mathbb{C}$ *з такими властивостями:*

- $(u,u) \geq 0 \;\; \forall u \in U$,
- $(u,u) = 0$ *означає, що* $u = 0_U$,
- $(u, v+w) = (u,v) + (u,w) \;\; \forall u,v,w \in U$,
- $(u,v) = \overline{(v,u)}$,
- $(\alpha u, v) = \alpha (u,v) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Тоді функціонал $(\bullet,\bullet):U^2 \to \mathbb{C}$ *називають* ***скалярним добутком на*** U, *а сам простір* ***унітарним***. *Якщо функціонал* $(\bullet,\bullet):U^2 \to \mathbb{R}$, *то простір називають* ***евклідовим***, *причому* $(u,v) = (v,u)$.

Поняття скалярного добутку природним чином узагальнює поняття скалярного добутку векторів. Скалярний добуток це лінійна операція по кожному із аргументів. У загальному випадку простір зі скалярним добутком називають ***передгільбертовим*** простором.

7.1.2. Означення. *Нехай* U *– передгільбертів простір, на якому визначено функціонал* $\|\bullet\|_U : U \to \mathbb{R}$. *Цей функціонал будемо вважати нормою на* U, *якщо* $\forall u \in U \;\; \|u\|_U = (u,u)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$, *і така норма називається* ***асоційованою***.

7.1.3. Теорема про структуру унітарного простору. *Нехай* U *– унітарний простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet):U^2 \to \mathbb{C}$. *Тоді має місце нерівність КБШ* $|(u,v)| \leq \|u\|_U \cdot \|v\|_U \;\; \forall u,v \in U$, *і простір* U *є*

лінійним нормованим простором з нормою $\|u\|_U = (u,u)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ $\forall u \in U$.

Доведення. Розпочнемо з нерівності КБШ. Для випадку, коли $u = 0_U = v$ – нерівність вірогідна. Нехай $u \neq 0_U \neq v$. Розглянемо одиничну сферу $U \supset \Sigma(0_U,1) = \{u \in U \mid \|u\|_U = 1\}$. Тоді $\forall u,v \in \Sigma(0_U,1)$ $|(u,v)| \leq 1$. Дійсно,

$$0 \leq \|u-(u,v)v\|_U^2 = (u-(u,v)v, u-(u,v)v) =$$
$$= (u,u)-(u,v)(v,u)-\overline{(u,v)}(u,v)+(u,v)\overline{(u,v)}(v,v) =$$
$$= 1-(u,v)\overline{(u,v)} = 1-|(u,v)|^2 \Rightarrow |(u,v)| \leq 1.$$

Далі, $\forall 0_U \neq u,v \in U$ маємо $\frac{u}{\|u\|_U}, \frac{v}{\|v\|_U} \in \Sigma(0_U,1)$. Тому $\left|\left(\frac{u}{\|u\|_U}, \frac{v}{\|v\|_U}\right)\right| = \frac{|(u,v)|}{\|u\|_U \cdot \|v\|_U} \leq 1 \Rightarrow$ *КБШ*. Для того, щоб вираз $\|u\|_U = (u,u)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ був нормою, достатньо показати, що виконується нерівність трикутника $\|u+v\|_U \leq \|u\|_U + \|v\|_U$ $\forall u,v \in U$. Дійсно,

$$\|u+v\|_U^2 = (u+v, u+v) = \|u\|_U^2 + (u,v) + \overline{(u,v)} + \|v\|_U^2 =$$
$$= \|u\|_U^2 + 2\Re(u,v) + \|v\|_U^2 \leq$$
$$\leq \|u\|_U^2 + 2\|u\|_U \|v\|_U + \|v\|_U^2 = (\|u\|_U + \|v\|_U)^2. \blacksquare$$

7.2. Властивості скалярного добутку

Розглянемо основні властивості скалярного добутку.

7.2.1. Лема про рівномірну неперервність скалярного добутку. *Нехай* U *– унітарний простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet): U^2 \to \mathbb{C}$ *і множина* $S \subset U$ *обмежена в* U*, тобто*

$\exists r = const > 0$ *така, що* $S \subset S\left(0_U, r\right)$. *Тоді функціонал* $\left(\bullet,\bullet\right): U^2 \to \mathbb{C}$ *рівномірно неперервний на* S.

Доведення. Нехай пара $\left\{u,v\right\} \in U^2$. Визначимо на просторі U^2 норму за правилом $\left\{u,v\right\} \in U^2 \to \left\|\left\{u,v\right\}\right\|_{U^2} = \sqrt{\left\|u\right\|_U^2 + \left\|v\right\|_U^2}$. Згідно теореми про рівномірно неперервний оператор нам необхідно встановити існування константи Ліпшиця $C > 0$, для якої виконується умова Ліпшиця (6.2), тобто

$\forall \left\{u,v\right\}, \left\{p,q\right\} \in S^2$ норма в $\mathbb{C}$

$$\left|\left(u,v\right) - \left(p,q\right)\right| \le C \cdot \left\|\left\{u-p, v-q\right\}\right\|_{U^2} = C \cdot \left(\left\|u-p\right\|_U^2 + \left\|v-q\right\|_U^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Справді,

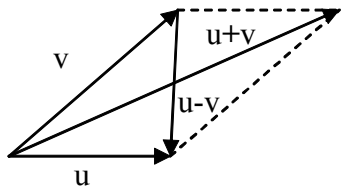
$$\begin{aligned}
\left|\left(u,v\right) - \left(p,q\right)\right| &= \left|\left(u,v\right) - \left(p,v\right) + \left(p,v\right) - \left(p,q\right)\right| = \\
&= \left|\left(u-p,v\right) - \left(p,q-v\right)\right| \le \\
&\le \left|\left(u-p,v\right)\right| + \left|\left(p,q-v\right)\right| \le \\
&\le (КБШ) \le \left\|u-p\right\|_U \left\|v\right\|_U + \left\|p\right\|_U \left\|q-v\right\|_U \le \\
&\le \left(\left\|v\right\|_U^2 + \left\|p\right\|_U^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left\|u-p\right\|_U^2 + \left\|q-v\right\|_U^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \left(2r^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left\|u-p\right\|_U^2 + \left\|q-v\right\|_U^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{2}r \cdot \left\|\left\{u-p, v-q\right\}\right\|_{U^2}.
\end{aligned}$$

Тут стала Ліпшиця $C = \sqrt{2}r$. ■

7.2.2. Рівність паралелограма. *У довільному просторі зі скалярним добутком має місце така рівність*

$$\left\|u+v\right\|_U^2 + \left\|u-v\right\|_U^2 = 2\left(\left\|u\right\|_U^2 + \left\|v\right\|_U^2\right)$$

$\forall u, v \in U$, *яку можна трактувати як відому в геометрії властивість паралелограма (сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх його сторін).*



Дійсно,

$$\|u+v\|_U^2+\|u-v\|_U^2=(u+v,u+v)+(u-v,u-v)=$$
$$=(u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)+(u,u)-(u,v)-(v,u)+(v,v)=$$
$$=2\left(\|u\|_U^2+\|v\|_U^2\right).\blacksquare$$

Зауваження. У нормованих просторах рівність паралелограма, взагалі кажучи, не виконується. Для прикладу розглянемо множину функцій розподілу з простору $L^1(\mathbb{R})$, тобто функцій, для яких $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|\,dx=\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}<+\infty$. Якщо $u,v\in L^1(\mathbb{R})$ є неперервними функціями з носіями, що не перетинаються (тобто $\forall x\in\mathbb{R}$ або $u(x)=0$, або $v(x)=0$), то зрозуміло, що $\|u\pm v\|_{L^1(\mathbb{R})}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|\,dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|v(x)|\,dx=\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|v\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Отже, $\|u+v\|_{L^1(\mathbb{R})}^2+\|u-v\|_{L^1(\mathbb{R})}^2=2\left(\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|v\|_{L^1(\mathbb{R})}\right)^2$, і рівність паралелограма не виконується.

7.2.3. Формула поляризації. *Йордан і фон Нейман у 1935 році довели, що коли* $\forall u,v$ *з лінійного нормованого простору* U *виконується правило паралелограма, то скалярний добуток можна виразити через норму* $(u,v)=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{\alpha=\pm1,\pm i}\alpha\|u+\alpha v\|_U^2$, *де* $i^2=-1$.

Справді,

$$\alpha\|u+\alpha v\|_U^2=\alpha(u+\alpha v,u+\alpha v)=$$
$$=\alpha(u,u)+|\alpha|^2(u,v)+\alpha^2(v,u)+\alpha|\alpha|^2(v,v).$$

Залишилося просумувати ці вирази по α і врахувати, що $\sum\limits_{\alpha=\pm1,\pm i}|\alpha|^2=4$, $\sum\limits_{\alpha=\pm1,\pm i}\alpha=\sum\limits_{\alpha=\pm1,\pm i}\alpha|\alpha|^2=\sum\limits_{\alpha=\pm1,\pm i}\alpha^2=0$.$\blacksquare$

7.3. Приклади просторів зі скалярним добутком

7.1. Приклад. Розглянемо такі функціонали:

$$(\bullet,\bullet):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}\ (u,v)=\sum_{i=1}^{n}u_i\overline{v_i}\ \forall u,v\in\mathbb{C}^n;$$

$$(\bullet,\bullet):L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\to\mathbb{C}\ (u,v)=\int_\Omega u\overline{v}d\Omega\ \forall u,v\in L^2(\Omega);$$

$$(\bullet,\bullet):l_2(\mathbb{R})\times l_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\ (u,v)=\sum_{i=1}^{\infty}u_iv_i\ \forall u,v\in l_2(\mathbb{R})=$$

$$=\left\{u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2<+\infty,\ u_i\in\mathbb{R}\right.\right\}.$$

▲ **Завдання 7.1.** Показати, що визначені функціонали є скалярними добутками на відповідних просторах.

7.2. Приклад. Нехай $q(x)\in L^\infty(\Omega)$, причому $q(x)\ge q_0>0$. Покажемо, що лінійний функціонал $(u,v)=\int_\Omega qu\overline{v}dx\quad\forall u,v\in L^2(\Omega)$ визначає скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Для цього треба перевірити, чи виконуються аксіоми скалярного добутку.

I. $(u,u)=\int_\Omega q(x)u(x)\overline{u(x)}dx=\int_\Omega q(x)|u(x)|^2dx\ge 0$ тому, що $q(x)\ge q_0>0$.

II. $(u,u)=\int_\Omega q(x)|u(x)|^2dx=0\Rightarrow|u(x)|=0\Rightarrow u(x)\equiv 0$ тому, що $q(x)>0$.

III. $(u,v+w)=\int_\Omega qu\overline{(v+w)}dx=\int_\Omega qu\overline{v}dx+\int_\Omega qu\overline{w}dx=$
$=(u,v)+(u,w)$.

IV. $(u,v)=\int_\Omega q(x)u(x)\overline{v(x)}dx=\int_\Omega\overline{q(x)\overline{u(x)}v(x)}dx=\overline{(v,u)}$.

V. $(\alpha u, v) = \int\limits_{\Omega} q(x)\alpha u(x)\overline{v(x)}dx = \alpha \int\limits_{\Omega} q(x)u(x)\overline{v(x)}dx =$

$= \alpha(u, v)$.

Отже, визначений функціонал є скалярним добутком в $L^2(\Omega)$. Покажемо, що асоційована норма $|u|_{L^2(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}} \sim \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Дійсно,

$$|u|_{L^2(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{\Omega} q(x)u(x)\overline{u(x)}dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\Omega} q(x)|u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(q_0 \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q_0}\,\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Далі, $q(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ і $q(x) \geq q_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}_+$ $\left| ess \sup\limits_{x\in\Omega} q(x) = M \right.$. Таким чином,

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} q(x)|u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(M \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{M}\,\|u\|_{L^2(\Omega)}. \blacksquare$$

▲ **Завдання 7.2.** Нехай U унітарний простір, множина $S \subset S(0_U, r) \subset U$, $0 < r < +\infty$, і послідовності $\{u_n\}$, $\{v_n\} \subset S$ збіжні в U, тобто $u_n \to u$, $v_n \to v$. Показати, що числові послідовності скалярних добутків $\{(u_n, v_n)\}$, $\{(u_n, w)\}$ збіжні, причому $(u_n, v_n) \to (u, v)$ і $(u_n, w) \to (u, w)$ $\forall w \in U$.

7.3. Приклад. Розглянемо простір неперервних та обмежених функцій $C\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Нехай $u(x)=\sin(x)$, $v(x)=\cos(x)$. Вірогідно, що $u,v\in C\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Тоді $\|u\|_{C([0,\pi/2])}=\|v\|_{C([0,\pi/2])}=1$, причому

$$\|u+v\|_{C([0,\pi/2])}=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|\sin x+\cos x|=\sqrt{2},$$

$$\|u-v\|_{C([0,\pi/2])}=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|=1.$$

Легко бачити, що

$\|u+v\|^2_{C([0,\pi/2])}+\|u-v\|^2_{C([0,\pi/2])}\neq 2\left(\|u\|^2_{C([0,\pi/2])}+\|v\|^2_{C([0,\pi/2])}\right)$. Таким чином, норму в просторі $C\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ не можна визначити через скалярний добуток. Отже, цей простір не є евклідовим.

▲ **Завдання 7.3.** Показати, що $C(\Omega)$, де $\Omega=[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ не є евклідовим простором.

▲ **Завдання 7.4.** Розглянемо лінійний простір $\mathbb{R}^n$ з нормою $\|u\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Показати, що при $p\ge 1$ цей простір буде нормованим, але евклідовим лише при $p=2$. *Вказівка.* Достатньо розглянути два вектори з $\mathbb{R}^n$, а саме, $u=(1,1,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ та $v=(1,-1,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$.

8. Скінченновимірні підпростори унітарного простору

8.1. Ознака лінійної незалежності в унітарному просторі

Нехай простір $\mathbb{C}^n$ наділено скалярним добутком $(u,v)=\sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$ та евклідовою нормою $\|u\|_{\mathbb{C}^n}=|u|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$. Припустимо, що оператор $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ задається матрицею $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ так, що

$$u=\{u_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{C}^n \to Au=\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j\right\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{C}^n.$$

8.1.1. Означення. *Матриця A називається* ***ермітовою*** *якщо* $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

При цьому, якщо $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, то A – симетрична.

8.1.2. Означення. *Матриця A називається* ***додатно визначеною,*** *якщо* $\exists \alpha>0 \left| (Au,u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_j\overline{u_i} \ge \alpha |u|^2 \quad \forall u \in \mathbb{C}^n \right.$.

▲ **Завдання 8.1.** Нехай задано ермітову додатно визначену матрицю A та функціонал $\langle \bullet,\bullet \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\langle u,v \rangle = (Au,v)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_i\overline{v_i} \in \mathbb{C}$. Показати, що

- функціонал $\langle \bullet,\bullet \rangle$ визначає скалярний добуток в $\mathbb{C}^n$;
- норма, яку породжує цей скалярний добуток $\|u\|=\langle u,u \rangle^{\frac{1}{2}}$, еквівалентна евклідовій нормі;
- $\det A \ne 0$.

8.1.3. Означення. *Матриця* $G=\left\{G_{ij}\right\}_{i,j}^{n}$ *називається* ***матрицею Грама*** *системи елементів* $\left\{\varphi_i\right\}_i^n \subset U$ *з унітарного простору зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet)$, *якщо її коефіцієнти обчислюються за формулою* $G_{ij}=\left(\varphi_i,\varphi_j\right)$.

8.1.4. Теорема про ознаку лінійної незалежності елементів в унітарному просторі. *Нехай* U *– унітарний простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet):U^2\to\mathbb{C}$. *Послідовність* $\left\{\varphi_i\right\}_i^n \subset U$ *лінійно незалежна тоді й лише тоді, коли* $\det G\neq 0$.

Доведення. Необхідність доведемо міркуванням від супротивного. Припустимо, що послідовність $\left\{\varphi_i\right\}_i^n \subset U$ лінійно незалежна і $\det G=0$. Те що $\det G=0$ означає, що $\exists\, 0\neq u\in\mathbb{C}^n \,\big|\, Gu=0$. Тоді

$$0=(Gu,u)=\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}\sum_{j=1}^{n}G_{ij}u_j=\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_i,\varphi_j\right)u_j=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}\varphi_i,\sum_{j=1}^{n}\overline{u_j}\varphi_j\right)=\left\|\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}\varphi_i\right\|_U^2.$$

Отже, ми знайшли набір ненульових коефіцієнтів $0\neq\overline{u}=\left\{\overline{u_i}\right\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{C}^n$, такий, що $\sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}\varphi_i=0_U$. Ця рівність означає, що послідовність $\left\{\varphi_i\right\}_i^n \subset U$ лінійно залежна. Отримали суперечність.

Для доведення достатності необхідно повторити міркування у зворотному порядку.■

З теореми випливає, що для лінійно незалежної системи елементів $\left\{\varphi_i\right\}_i^n \subset U$ з унітарного простору матриця Грама ермітова і додатно визначена.

▲ **Завдання 8.2.** Показати, що послідовність функцій Куранта $\left\{\varphi_i\right\}_{i=0}^{N}\subset K_h\left([0,1]\right)$ лінійно незалежна в просторі $L^2\left([0,1]\right)$.

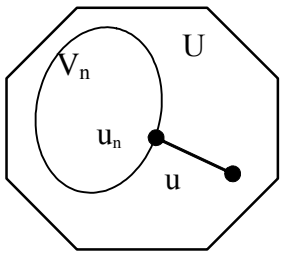
▲ **Завдання 8.3.** Показати, що послідовність функцій Куранта $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N} \subset K_h([0,1])$ лінійно незалежна в просторі $V = \{v \in H^1([0,1]) | v(0) = 0\}$ зі скалярним добутком $(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \quad \forall u,v \in V$.

8.2. Задача про найкраще наближення

$$\begin{cases} \text{Задано } u \in U - \text{унітарний простір} \\ \text{та підпростір } V_n \subset U, \dim V_n = n < +\infty. \\ \text{Знайти } u_n \in V_n \left\| u - u_n \right\|_U \le \left\| u - v \right\|_U \ \forall v \in V_n. \end{cases} \tag{8.1}$$

8.2.1. Теорема про розв'язок задачі про найкраще наближення. *У просторі* V_n $\exists! u_n \in V_n$ $\left\| u - u_n \right\|_U = dist(u, V_n)$.

Доведення. Будемо вважати, що U евклідів простір зі скалярним добутком $(\bullet,\bullet): U^2 \to \mathbb{R}$. Визначимо функціонал $f: V_n \to \mathbb{R}$ такий, що $v \in V_n \to f(v) = \left\| u - v \right\|_U^2 =$ $= \left\| u \right\|_U^2 - 2(u,v) + \left\| v \right\|_U^2 \in \mathbb{R}$. Задача полягає у знаходженні мінімуму цього функціоналу, тобто $\min_{v \in V_n} f(v) = f(u_n)$.



Нехай система елементів $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ утворює базис простору V_n. Це означає, що $\forall v \in V_n$ однозначно подається лінійною комбінацією $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i$. Тоді

$$f(v)=f\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i\right)=\left\|u-\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i\right\|_U^2=$$

$$=\|u\|_U^2-2\left(u,\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i\right)+\left\|\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i\right\|_U^2=$$

$$=\|u\|_U^2-2\sum_{i=1}^{n}(u,\varphi_i)v_i+\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i,\sum_{j=1}^{n}v_j\varphi_j\right)=$$

$$=\|u\|_U^2-2\sum_{i=1}^{n}(u,\varphi_i)v_i+\sum_{i,j=1}^{n}G_{ij}v_iv_j=F(v_1,\ldots,v_n).$$

Ця квадратична форма може змінювати значення лише при виборі v_i. Знайдемо екстремальні точки цієї форми

$$\frac{\partial F}{\partial v_i}=2\left(\sum_{j=1}^{n}G_{ij}v_j-(u,\varphi_i)\right)=0,\ i=\overline{1,n}.$$

Оскільки $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ базис в V_n, то $\det G\neq 0$. $\Rightarrow$ $\exists!\{v_i\}_{i=1}^{n}$ розв'язок системи. Таким чином, існує єдина точка $v=(v_1,\ldots,v_n)$ підозріла на екстремум. Крім того, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_i\partial v_j}=G_{ij}>0$. Отже, v точка мінімуму.■

▲ **Завдання 8.4.** Нехай $u_n\in V_n$ розв'язок задачі про найкраще наближення. Показати, що

- $(u,v)=(u_n,v)$ $\forall v\in V_n\subset U$ та заданого $u\in U$;
- $\|u_n\|_U\le\|u\|_U$.

9. Ортогональність і біортогональність

9.1. Ортогональність

9.1.1. Означення. *Нехай* U *евклідів простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet):U^2 \to \mathbb{R}$. *Тоді* ***кут*** *між елементами* $u,v \in U$ *визначається формулою* $\cos\widehat{uv} = \dfrac{(u,v)}{\|u\|_U \cdot \|v\|_U}$.

З нерівності КБШ випливає, що це означення породжує деякий кут φ, який змінюється в межах $0 \le \varphi \le \pi$. Якщо $(u,v)=0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, і в цьому випадку елементи називають ортогональними: $u \perp v$.

Нехай послідовність $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset U$ ортогональна в евклідовому просторі. Покажемо, що її елементи лінійно незалежні. Розглянемо $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0_U$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$ тому, що U евклідів простір). Оскільки $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset U$ ортогональна послідовність, то $(\varphi_i, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n) = \alpha_i(\varphi_i,\varphi_i) = 0$, але $(\varphi_i,\varphi_i) \ne 0$. Отже, $\alpha_i = 0$, що є справедливим для всіх *i*. Це доводить лінійну незалежність послідовності $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset U$.

Поняття кута між елементами в унітарному просторі зазвичай не вводять, тому, що комплексна величина $\dfrac{(u,v)}{\|u\|_U \cdot \|v\|_U} \in \mathbb{C}$ не може бути косинусом будь-якого дійсного кута. Але поняття ортогональності зберігається.

9.1.2. Означення. *Два елементи* $u,v \in U$ *з унітарного простору називають* ***ортогональними****, якщо* $(u,v)=0$.

▲ **Завдання 9.1.** Довести, що послідовність $\{\varphi_i\}_i^n \subset U$ лінійно незалежна в унітарному просторі, якщо її елементи ортогональні один одному.

9.1.3. Лема про критерій ортогональності в унітарному просторі. *Нехай* U *– унітарний простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet): U^2 \to \mathbb{C}$. *Елементи* $u, v \in U$ *ортогональні тоді й лише тоді, коли* $\|u \pm v\|_U^2 = \|u\|_U^2 + \|v\|_U^2$.

▲ **Завдання 9.2.** Довести лему про критерій ортогональності в унітарному просторі.

9.2. Процес ортогоналізації Соніна-Шмідта

Лема про процес ортогоналізації Соніна-Шмідта. *Нехай* U *– унітарний простір зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet): U^2 \to \mathbb{C}$. *Із кожної лінійно незалежної послідовності* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset U$ *можна отримати ортогональну послідовність* $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Доведення. Маємо елемент φ_1. Покладемо $e_1 = \varphi_1$. Розглянемо елемент φ_2. Він лінійно незалежний від φ_1; покладемо $e_2 = \varphi_2 - \alpha_{21} e_1$ і α_{21} виберемо так, щоб $(e_2, e_1) = 0$, тобто $(e_2, e_1) = (\varphi_2 - \alpha_{21} e_1, e_1) = 0$, $\alpha_{21} = \dfrac{(\varphi_2, e_1)}{\|e_1\|_U^2}$. Припустимо, що ми вже маємо $k-1$ елемент ортогональної системи. Тоді знайдемо k-й елемент у вигляді лінійної комбінації $e_k = \varphi_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e_j$. Коефіцієнти α_{kj} визначатимемо з умов $(e_k, e_j) = 0$, $j = \overline{1, k-1}$. Внаслідок ортогональності, ці умови приводять до того, що $\alpha_{kj} = \dfrac{(\varphi_k, e_j)}{\|e_j\|_U^2}$. ■

9.3. Ортонормованість та біортогональність

9.3.1. Означення. *Послідовність елементів* $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset U$ *з унітарного простору називається* ***ортонормованою****, якщо вона ортогональна і* $\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Із означення випливає, що для ортонормованої послідовності $\|e_i\|_U^2 = 1$. Для того, щоб ортогональну послідовність перетворити в ортонормовану, зокрема, послідовність отриману, в процесі ортогоналізації Соніна-Шмідта, треба покласти $e_i^* = \dfrac{e_i}{\|e_i\|_U}$.

9.3.2. Означення. *Послідовність елементів* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset U$ *з унітарного простору називається* ***лінійно незалежною****, якщо* $\forall n \in \mathbb{N}$ *послідовність* $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ *лінійно незалежна.*

Вірогідно, що за допомогою процесу Соніна-Шмідта таку лінійно незалежну послідовність можна перетворити в ортогональну чи ортонормовану. На жаль, під час реалізації процесу ортогоналізації на комп'ютері можливе неконтрольоване збільшення похибок заокруглення, що значно обмежує поле його практичного використання. Тобто він є чисельно нестійким. Для підтвердження цього спробуйте апріорі виявити результат виконання такої програми, а потім перевірте з допомогою комп'ютера його справедливість.

```
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
  void main()
  {
    float x,y,e,f,h=1./2.;
    x=2./3.-h;
    y=3./5.-h;
    e=(x+x+x)-h;
    f=(y+y+y+y+y)-h;
    cout <<"e/f="<<e/f<<"\n";
    while ( !kbhit() );
    }
```

9.3.3. Означення. *Системи елементів* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{n} \subset U$ *з унітарного простору називають* ***біортогональними****, якщо* $\left(\varphi_i, \psi_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}$.

▲ **Завдання 9.3.** Нехай у лінійному просторі $C\left(\left[-\pi, \pi\right]\right)$ задано скалярний добуток $\left(u, v\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} uvdx$. Показати, що тригонометрична система $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ ортогональна в цьому просторі. Побудувати ортонормовану систему.

▲ **Завдання 9.4.** Нехай в $L^2\left(\left[-1, 1\right]\right)$ задано скалярний добуток $\left(u, v\right) = \int\limits_{-1}^{1} uvdx$. Розглянемо послідовність елементів $L^2\left(\left[-1, 1\right]\right) \supset \{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty} = x^i$, тобто $1, x, x^2, \ldots, x^i, \ldots$. Здійснюючи процес її ортогоналізації, отримаємо ортогональну систему $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Переконатися, що $f_0\left(x\right) = 1$, $f_1\left(x\right) = x$, $f_2\left(x\right) = x^2 - \dfrac{1}{3}$, $f_3\left(x\right) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$.

Многочлени $f_i\left(x\right)$ були запроваджені Лежандром. На практиці часто використовують ортогональну систему многочленів $p_i\left(x\right) = \dfrac{1}{2^i i!} \dfrac{d^i\left(x^2 - 1\right)^i}{dx^i}$, їх називають многочленами Лежандра. Для них виконується така рівність $\int\limits_{-1}^{1} p_n\left(x\right) p_m\left(x\right) dx = \begin{cases} 0 \quad, n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, n = m. \end{cases}$ Многочлени $p_i\left(x\right)$ відрізняю-

ться від $f_i(x)$ тільки числовими множниками: $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $p_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$, $p_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$. Многочлени Лежандра фігурують у багатьох задачах математичної фізики.

▲ **Завдання 9.5.** Нехай $\{e_n\}_{i=1}^n$ ортонормований базис підпростору $V_n \subset U$ унітарного простору. Показати, що

- $u=\sum_{i=1}^n (u,e_i)e_i \quad \forall u \in V_n \subset U$;
- $\|u\|_U^2=\sum_{i=1}^n |(u,e_i)|^2$.

▲ **Завдання 9.6.** Нехай $\{e_i\}_{i=1}^n$ базис підпростору $V_n \subset U$ унітарного простору і $\{\psi_i\}_{i=1}^n \subset U$ відповідна біортогональна система елементів. Показати, що

- $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ лінійно незалежна в U;
- $u=\sum_{i=1}^n (u,\psi_i)e_i=\sum_{i=1}^n (u,e_i)\psi_i \quad \forall u \in V_n$.

10. Банахові простори

10.1. Ознака повної множини в банаховому просторі

10.1.1. Означення. *Множина* $S \subset V$ *з лінійного нормованого простору* ***повна*** *в* V *тоді й лише тоді, коли для довільної фундаментальної послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ *існує елемент* $u \in S$ *такий, що* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

10.1.2. Означення. *Лінійний нормований простір називається* ***банаховим****, якщо він є повним.*

Банаховий простір будемо позначати літерою ***B*** – повний лінійний нормований простір.

▲ **Завдання 10.1.** Показати, що кожен скінченновимірний лінійний нормований простір банахів.

▲ **Завдання 10.2.** Показати, що лінійний простір $C([-1,1])$, наділений нормою $\|u\|_1 = \int\limits_{-1}^{1} |u|\,dx$, не є банахів. <u>*Вказівка.*</u> Достатньо розглянути послідовність функцій $u_n(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x \le 0; \\ 1 - nx, \quad 0 < x \le \dfrac{1}{n}; \\ 0, \quad \dfrac{1}{n} < x \le 1; \end{cases}$ показати її фундаментальність і продемонструвати її незбіжність у $C([-1,1])$.

10.1.3. Теорема про ознаку повної множини в банаховому просторі. *Для того, щоб множина* $S \subset B$ *з банахового простору була повною, необхідно і досить, щоб вона була замкненою, тобто* $S = \overline{S}$.[4]

---

[4] У банахових просторах поняття фундаментальності еквівалентне поняттю збіжності, а поняття повноти поняттю замкненості.

▲ **Завдання 10.3.** Довести теорему про ознаку повної множини в банаховому просторі.

10.2. Повнота простору C(Ω)

10.2.1. Теорема про повноту простору $C(\Omega)$. *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *і* $C(\Omega)$ *наділений нормою* $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$. *Тоді простір* $C(\Omega)$ *банахів.*

Доведення. Нагадаємо, що $C(\Omega)$ це простір неперервних обмежених функцій, а $L^\infty(\Omega)$ простір функцій, модулі яких обмежені майже скрізь. У $L^\infty(\Omega)$ можна знайти розривні обмежені функції, тому $C(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Використовуючи теорему про ознаку повної множини в банаховому просторі, нам необхідно довести такі твердження:

- простір $L^\infty(\Omega)$ банахів;
- множина $C(\Omega)$ замкнена в $L^\infty(\Omega)$, тобто $\overline{C(\Omega)} = C(\Omega)$.

Покажемо спочатку, що $L^\infty(\Omega)$ банахів. Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L^\infty(\Omega)$, тоді майже скрізь в Ω

$$|u_n(x) - u_m(x)| \le \|u_n(x) - u_m(x)\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Зафіксуємо $x \in \Omega$ і розглянемо числову послідовність $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$. Вона фундаментальна в $\mathbb{C}$ і, отже, збіжна внаслідок його повноти. Це, зокрема, означає, що $\exists u(x) \in \mathbb{C}$ $\left|\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)\right.$. Останню рівність можна трактувати як поточкове визначення функції $u(x)$:

$$u(x) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} u_n(x) \quad ess\, x \in \Omega. \tag{10.1}$$

Покажемо тепер, що поточково визначена в (10.1) функція є границею послідовності $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^{\infty}(\Omega)$. Дійсно, оскільки $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна за допущенням, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\|u_n(x) - u_m(x)\|_{\infty} < \varepsilon \ \ \forall n, m \geq N .$$

Звідси

$$\begin{aligned}\|u(x) - u_n(x)\|_{\infty} &= ess \sup_{x\in\Omega} |u(x) - u_n(x)| \leq \\ &\leq ess \sup_{x\in\Omega} \sup_{m>N} |u_m(x) - u_n(x)| = \\ &= \sup_{m>N} ess \sup_{x\in\Omega} |u_m(x) - u_n(x)| = \\ &= \sup_{m>N} \|u_m(x) - u_n(x)\|_{\infty} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Тоді $\|u\|_{\infty} = \|u - u_n + u_n\|_{\infty} \leq \|u - u_n\|_{\infty} + \|u_n\|_{\infty} < \varepsilon + M$, бо $\|u_n\|_{\infty} < M$, оскільки $u_n \in C(\Omega)$. Таким чином, функція, визначена формулою (10.1), є обмеженою майже скрізь в Ω і тому належить $L^{\infty}(\Omega)$.

Доведена раніше нами теорема 6.1.2 про замкненість $C(\Omega)$ стверджує, що множина $C(\Omega)$ замкнена $L^{\infty}(\Omega)$.■

З теореми можна зробити такі *висновки*:

- простір $L^{\infty}(\Omega)$ банахів;
- простір $C^k(\Omega)$ при $k \geq 1$ банахів відносно норми $\|u\|_{C^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha} u\|_{\infty}$.

10.2.2. Теорема Рісса-Фішера про повноту простору $L^p(\Omega)$. *Нехай Ω обмежена область з $\mathbb{R}^n$, тобто $\Omega \subset S(0,r) \subset \mathbb{R}^n$, $0 < r < +\infty$. Тоді $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, банахів простір.*

Цією теоремою можна скористатися у разі доведення того, що простори Соболєва $W^{m,p}(\Omega)$ – банахові.

10.3. Повнота простору $\mathfrak{L}(U,B)$

Нехай U і V лінійні нормовані простори, а $A:U\to V$ лінійний неперервний (обмежений) оператор з нормою $\|A\| = \sup\limits_{0_U \neq u \in D(A)} \dfrac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}$.

10.3.1. Теорема про повноту простору $\mathfrak{L}(U,B)$. *Якщо нормований простір V банахів $(V=B)$, то і простір $\mathfrak{L}(U,B)$ теж банахів.*

Доведення. Покажемо, що для довільної фундаментальної послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U,B)$ $\exists A \in \mathfrak{L}(U,B)$ $\Big| A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, тобто $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U,B)$ фундаментальна. Зафіксуємо елемент $u \in U$ і розглянемо послідовність $\{A_n u\}_{n=1}^{\infty} \subset B$. Тоді

$$\|A_n u - A_m u\|_B = \begin{pmatrix} \textit{простір } \mathfrak{L}(U,B) \\ \textit{лінійний} \end{pmatrix} = \|(A_n - A_m)u\|_B \le$$

$$\le \|A_n - A_m\| \cdot \|u\|_U \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Отже, послідовність $\{A_n u\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ фундаментальна. Це означає, що $\exists\, Au \in B \;\Big|\; \lim\limits_{n\to\infty} A_n u = Au$. Останню рівність можна трактувати як поточкове визначення оператора A:

$$Au \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} A_n u \quad \forall u \in U. \tag{10.2}$$

Покажемо, що оператор $A \in \mathfrak{L}(U,B)$. Лінійність вірогідна:

$$A(u+v) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} A_n(u+v) = (A_n \text{ - лінійний}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} A_n u + \lim_{n\to\infty} A_n v = Au + Av \quad \forall u, v \in U.$$

Для доведення обмеженості зауважимо, що

$$\left|\|A_n\| - \|A_m\|\right| \le \begin{pmatrix} \text{опуклість} \\ \text{норми} \end{pmatrix} \le \|A_n - A_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Це означає, що числова послідовність $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ фундаментальна, тому $\exists M \left| \sup_n \|A_n\| \le M < +\infty \right.$. Далі,

$$\|Au\|_B = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n u\right\|_B = \lim_{n\to\infty} \|A_n u\|_B \le \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|u\|_U \le M \cdot \|u\|_U$$

$\forall u \in U$. Звідки $\|A\| \le M$.

Нарешті, покажемо, що $A_n \to A$, тобто побудований нами оператор є границею фундаментальної послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U, B)$, а саме, $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Дійсно, $\|A_n u - Au\|_B \le \sup_{m>n} \|A_n u - A_m u\|_B \le \sup_{m>n} \|A_n - A_m\| \cdot \|u\|_U$ $\forall u \in U$.

Тоді $\|A_n - A\| = \sup_{0_U \ne u \in U} \dfrac{\|A_n u - A_m u\|_B}{\|u\|_U} \le \sup_{m>n} \|A_n - A_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. ■

При доведенні теореми ми оперували двома видами збіжності:

- $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ за операторною нормою;
- $\|A_n u - A_m u\|_B \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ у просторі образів.

10.3.2. Означення. *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U, B)$ ***рівномірно*** (*або* ***за нормою простору*** $\mathfrak{L}(U, B)$) ***збігається*** *до оператора* $A \subset \mathfrak{L}(U, B)$, *якщо* $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

10.3.3. Означення. *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U,B)$ ***сильно*** *(або* ***поточково) збігається*** *до оператора* $A \subset \mathfrak{L}(U,B)$*, якщо* $\|A_n u - Au\|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \ \forall u \in U$.

▲ **Завдання 10.4.** Показати: якщо послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U,B)$ рівномірно збіжна, то вона і сильно збіжна.

Зауваження. Обернене твердження взагалі кажучи невірне.

▲ **Завдання 10.5.** Нехай U, B – *скінченновимірні банахові* простори і $D(A_n) = U$. Якщо послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}(U,B)$ сильно збіжна, то вона і рівномірно збіжна. Довести це.

10.4. Продовження лінійного неперервного оператора

Для глибшого вивчення збіжності в просторах лінійних обмежених операторів корисна

Теорема про продовження лінійного неперервного оператора. *Нехай* B *і* C *банахові простори, а лінійний неперервний (обмежений) оператор* $A: B \to C$*, визначений на щільній множині простору* B*, тобто* $D(A) \subset B$ *і* $\overline{D(A)} = B$*. Тоді* $\exists! \widehat{A} \in \mathfrak{L}(B,C)$ *такий, що*

- $D(\widehat{A}) = B$;
- $\widehat{A}u = Au \ \ \forall u \in D(A)$;
- $\|\widehat{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Оскільки $D(A) \subset B$ щільна, то $\forall u \in B$ $\exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ $\|u_n - u\|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Розглянемо послідовність $\{Au_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$. Оскільки

$\|Au_n - Au_m\|_C = \|A(u_n - u_m)\|_C \le \|A\| \cdot \|u_n - u_m\|_B \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, то послідовність $\{Au_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ фундаментальна, а враховуючи, що простір C банахів, ця послідовність ще й збіжна. Це означає, що

$\exists \widehat{A}u \in C \;\Big|\; \lim\limits_{n\to\infty} Au_n = \widehat{A}u$. Останню рівність можна трактувати як поточкове визначення оператора $\widehat{A}$:

$$\widehat{A}u \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} Au_n \quad \forall u \in B, \tag{10.3}$$

де $\widehat{A} : B \to C$ з $D\left(\widehat{A}\right) = B$, звідки безпосередньо випливає лінійність і обмеженість $\widehat{A}$. Вірогідно, що $\widehat{A}u = Au \quad \forall u \in D(A)$. Покажемо, що означення оператора (10.3) $\widehat{A}$ коректне, тобто не залежить від вибору послідовності, яка прямує до u. Для цього розглянемо ще одну послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ таку, що $v_n \to u$. Нехай $\exists a, b \in C \;\Big|\; \lim\limits_{n\to\infty} Au_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} Av_n = b$. Покажемо, що $a = b$. Дійсно,

$$\|a-b\|_C = \|(a - Au_n) - (b - Av_n) + (Au_n - Av_n)\|_C \le$$
$$\le \|(a - Au_n)\|_C + \|(b - Av_n)\|_C + \|A\| \cdot \|u_n - v_n\|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Залишилося показати, що $\left\|\widehat{A}\right\| = \|A\|$. Із означення оператора $\widehat{A}$ випливає

$$\left\|\widehat{A}u\right\|_C = \left\|\lim_{n\to\infty} Au_n\right\|_C \le \lim_{n\to\infty} \|A\| \cdot \|u_n\|_B \le \begin{pmatrix} \textit{опуклість} \\ \textit{норми} \end{pmatrix} \le \|A\| \cdot \|u\|_B,$$ тобто

$\left\|\widehat{A}\right\| \le \|A\|$. Навпаки, візьмемо $\forall u \in D(A)$, тоді $\|Au\|_C = \left\|\widehat{A}u\right\|_C \le \left\|\widehat{A}\right\| \cdot \|u\|_B$. Отже, $\left\|\widehat{A}\right\| \ge \|A\|$. ■

10.5. Обмежені послідовності в $\mathfrak{L}(B, C)$

10.5.1. Означення. *Нехай X лінійний простір і множина $S \subset X$. Множина скінченних лінійних комбінацій з S називається* ***лінійною оболонкою множини*** *S і позначається символом $[S]$.*

10.5.2. Теорема про обмежену послідовність в $\mathfrak{L}(B,C)$ (Банаха-Штейнгауза). *Нехай послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в просторі $\mathfrak{L}(B,C)$ і для $\forall u \in S \subset B$, $\overline{S} = B$, послідовність $\{A_n u\}_{n=1}^{\infty}$ збіжна. Тоді послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно збіжна в просторі $\mathfrak{L}(B,C)$, тобто $\exists! A \in \mathfrak{L}(B,C)$ $\Big| A_n u \xrightarrow[n\to\infty]{} Au \ \ \forall u \in B$.*

Доведення. За умовою теореми послідовність $\{A_n u\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ збіжна $\forall u \in [S]$. Це означає, що $\exists\, Au \in C$ $\Big| \lim\limits_{n\to\infty} A_n u = Au$. На останню рівність можна дивитися як на визначення оператора A:

$$Au \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} A_n u \ \ \forall u \in D(A) = [S]. \qquad (10.4)$$

Оператор $A : B \to C$ з $D(A) = [S]$ лінійний (це вірогідно) і обмежений:

$\|Au\|_C = \left\|\lim\limits_{n\to\infty} A_n u\right\|_C \le \sup\limits_n \|A_n\| \cdot \|u\|_B \qquad \forall u \in [S]$, тому $\|A\| \le \sup\limits_n \|A_n\| < +\infty$, оскільки послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена. Внаслідок щільності S в B, за теоремою про продовження лінійного оператора за неперервністю, його можна однозначно й зі збереженням норми довизначити на весь простір B. Отже, $A \in \mathfrak{L}(B,C)$. Залишилося показати, що

$$Au = \lim_{n\to\infty} A_n u \ \ \forall u \in B \setminus [S].$$

Внаслідок щільності множини S $\forall u \in B$ $\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$ $\Big| u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} u$. Тоді

$$\begin{aligned}\|Au - A_n u\|_C &= \|(A - A_n)u\|_C = \\ &= \|(A - A_n)(u - u_m + u_m)\|_C \le \\ &\le \|(A - A_n)(u - u_m)\|_C + \|(A - A_n)u_m\|_C \le \\ &\le \|A - A_n\| \cdot \|u - u_m\|_B + \|Au_m - A_n u_m\|_C \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Останній доданок прямує до нуля внаслідок сильної збіжності послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ до A на множині S.■

10.6. Простір $B' = \mathfrak{L}(B, \mathbb{C})$

Простір $B' = \mathfrak{L}(B, \mathbb{C})$ називають, як нам вже відомо, спряженим, або двоїстим, простором до банахового простору B. Це простір лінійних обмежених функціоналів $l : B \to \mathbb{C}$, норма яких обчислюється за формулою $\|l\|_* = \sup\limits_{0_B \ne u \in B} \dfrac{|\langle l, u\rangle|}{\|u\|_B}$. Оскільки, множина комплексних чисел є банаховим простором, то все, що було доведене для простору $\mathfrak{L}(B, C)$ переноситься і на спряжені простори.

▲ **Завдання 10.6.** Нехай B – банаховий простір. Показати, що

- $B' = \mathfrak{L}(B, \mathbb{C})$ банахів простір;
- виконується нерівність $|\langle l, u\rangle| \le \|l\|_* \cdot \|u\|_B \quad \forall u \in B,\ \forall l \in B'$;
- кожен лінійний неперервний функціонал $l : B \to \mathbb{C}$, визначений на щільній множині $S \subset B$ однозначно зі збереженням норми довизначається до функціоналу $\hat{l} \in B'$.

10.6.1. Означення. *Послідовність функціоналів* $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B'$ *називають* ***сильно збіжною*** *до функціонала* $l \in B'$, *якщо* $\|l_n - l\|_* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

10.6.2. Означення. *Послідовність функціоналів* $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B'$ *називають* ***(зірково) * –слабко збіжною*** *до функціонала* $l \in B'$ *, якщо різниця функціоналів* $\langle l_n - l, u \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \ \forall u \in B$.

Зауваження. З сильної збіжності функціоналів випливає зірково-слабка збіжність функціоналів.

10.7. Квадратурні формули

Нехай задано простір $B = L^1([0,1])$. Визначимо на ньому функціонал $u \in B \to \langle l, u \rangle = \int_0^1 u(x)\,dx$. Внаслідок адитивності інтегралу функціонал l лінійний і

$\left|\langle l, u \rangle\right| = \left|\int_0^1 u(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |u(x)|\,dx = \|u\|_1 \ \ \Rightarrow \|l\|_* \le 1 \ \ \Rightarrow l$ – обмежений. Отже, $l \in B' = \mathfrak{L}(B, \mathbb{C})$. Для наближеного обчислення інтегралу від заданої функції на комп'ютері використовують квадратурні формули. Для цього визначається послідовність функціоналів $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \in B'$:

$$u \in B \to \langle l_n, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} w_j^n u\left(x_j^n\right),$$

де n – порядок квадратурної формули;

$w_j^n \in \mathbb{C}$ – відомі коефіцієнти, або ваги;

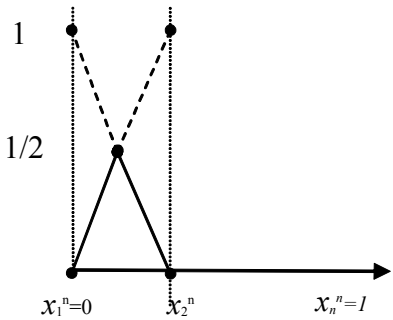
$x_j^n \in [0,1]$ – відомі вузли квадратурної формули n -го порядку.

Отже, $\langle l, u \rangle = \int_0^1 u(x)\,dx \approx \langle l_n, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} w_j^n u\left(x_j^n\right)$.

<u>*Виникає питання*</u>. За яких умов послідовність $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in B'$, який характер збіжності: сильний чи *- слабкий?

Розглянемо послідовність функцій $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ виду

$$u_n(x)=\begin{cases}4\dfrac{x-x_1^n}{\left(x_2^n-x_1^n\right)^2}, & x_1^n\le x\le\dfrac{1}{2}\left(x_2^n+x_1^n\right);\\ 4\dfrac{x_2^n-x}{\left(x_2^n-x_1^n\right)^2}, & \dfrac{1}{2}\left(x_2^n+x_1^n\right)<x\le x_2^n;\\ 0, & x_2^n<x\le 1.\end{cases}$$



Тоді, за побудовою, $\langle l,u_n\rangle=1=\|u_n\|_1$, $\langle l_n,u_n\rangle=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Отже, сильної збіжності немає, оскільки $1=\left|\langle l_n,u_n\rangle-\langle l,u_n\rangle\right|=$ $=\left|\langle l_n-l,u_n\rangle\right|\le\|l_n-l\|_*\cdot\|u_n\|_B$.

Лема про квадратурні формули. *Нехай квадратура* $\langle l_n,u\rangle=\sum_{j=1}^{n}w_j^n u\left(x_j^n\right)$ *побудована таким чином, що*

- $\sum_{j=1}^{n}\left|w_j^n\right|\le M<+\infty\ \ \forall n\in\mathbb{N}$,
- $\langle l_n,u\rangle\xrightarrow[n\to\infty]{}\langle l,u\rangle\ \ \forall u\in S$, $\overline{S}=B=L^1\left([0,1]\right)$.

Тоді послідовність $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}\in B'$ **- слабко збіжна до* $l\in B'$, тобто $\langle l_n,u\rangle\xrightarrow[n\to\infty]{}\langle l,u\rangle\ \ \forall u\in B$.

Доведення.

$$\left|\langle l_n,u\rangle\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}w_j^n u\left(x_j^n\right)\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left|w_j^n\right|\cdot\left|u\left(x_j^n\right)\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left|w_j^n\right|\cdot\|u\|_\infty\le M\|u\|_\infty.$$

Отже, $\|l_n\|_*\le M$, тобто послідовність функціоналів обмежена в спря-

женому просторі B'. Згідно теореми про обмежену послідовність, $\langle l_n, u\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle l, u\rangle$.■

Щільною множиною в $L^1([0,1])$ є множина $C([0,1])$, а щільною множиною в $C([0,1])$ є множина всіляких поліномів з дійсними коефіцієнтами, або множина всіляких кусково-лінійних функцій.

10.8. Слабка збіжність у банаховому просторі

10.8.1. Означення. *Послідовність елементів* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ *називають* ***слабко збіжною*** *до елемента* $u \in B$, якщо $\langle l, u_n - u\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall l \in B'$, *і позначають* $u_n \xrightarrow[w]{} u$.

▲ **Завдання 10.7.** Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ слабко збіжна в B. Показати, що

- послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ обмежена в B;
- слабка границя єдина;
- кожна збіжна послідовність банахового простору одночасно є слабко збіжною в ньому (коли ці два види збіжності еквівалентні?).

10.8.2. Теорема про критерій слабкої збіжності. *Для того, щоб послідовність* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ *була слабко збіжною до елемента* $u \in B$, *необхідно і досить, щоб*

(I) *послідовність норм* $\{\|u_n\|_B\}_{n=1}^{\infty}$ *була обмежена в* $\mathbb{R}$;

(II) $\langle l, u_n - u\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *(для довільного функціоналу зі щільної в* B' *множини)* $\forall l \in S$, $\overline{S} = B'$.

Доведення. Необхідність вірогідна. Доведемо достатність. Послідовність $\{\|u_n\|_B\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена: $\exists M = const > 0$ $\|u_n\| < M < +\infty$. Умова (II) означає, що $\forall \varepsilon > 0$, $\forall l \in B'$ $\exists \varphi \in S$ $\|l - \varphi\|_* < \varepsilon$. Тепер побудуємо ланцюжок оцінок

$$\left|\langle l,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|=\left|\langle l,u_n\rangle-\langle\varphi,u_n\rangle+\langle\varphi,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|\le$$
$$\le\left|\langle l-\varphi,u_n\rangle\right|+\left|\langle\varphi,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|\le$$
$$\le\|l-\varphi\|_*\cdot\|u_n\|_B+\left|\langle\varphi,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|\le$$
$$\le\varepsilon\cdot M+\left|\langle\varphi,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|$$

і перейдемо до границі при $n\to\infty$. Внаслідок отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\langle l,u_n\rangle-\langle l,u\rangle\right|\le\varepsilon M+\left|\langle\varphi,u\rangle-\langle l,u\rangle\right|=\varepsilon M+\left|\langle\varphi-l,u\rangle\right|\le$$
$$\le\varepsilon M+\|\varphi-l\|_*\cdot\|u\|_B\le 2\varepsilon M.$$

Таким чином, $\left|\langle l,u_n-u\rangle\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.■

10.8.3. Означення. *Нормований простір U називається* ***сепарабельним,*** *якщо в ньому існує зліченна щільна множина.*

10.1. Приклад. Простір $\mathbb{R}$ сепарабельний, тому що сукупність раціональних чисел є зліченною (раціональні числа можна занумерувати в послідовність) і щільною множиною в $\mathbb{R}$ (в довільному околі дійсного числа знайдеться раціональне число).

10.2. Приклад. Довільний скінченновимірний простір – сепарабельний. Достатньо зафіксувати в ньому базис і розглянути множину з раціональними координатами.

10.3. Приклад. Простір $C([a,b])$, $-\infty<a<b<+\infty$, сепарабельний, оскільки в ньому щільна множина многочленів з раціональними коефіцієнтами.

▲ **Завдання 10.8.** Показати, що банахів простір зі зліченним базисом сепарабельний.

10.9. Продовження лінійного неперервного функціоналу

10.9.1. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного неперервного функціоналу. *Нехай $M\subset B$ лінійний підпростір (не обов'язково щільний) в банаховому просторі й на ньому задано функціонал $l\in\mathfrak{L}(M,\mathbb{C})$. Тоді існує хоча б один функціонал $L\in B'=\mathfrak{L}(B,\mathbb{C})$ такий, що*

- $\langle L,u\rangle = \langle l,u\rangle \ \ \forall u \in M$;
- $\|L\|_* = \|l\|_*$.

Доведення. Якщо $\overline{M} = B$, то дана теорема повністю збігається з теоремою про продовження лінійного неперервного оператора 10.4.

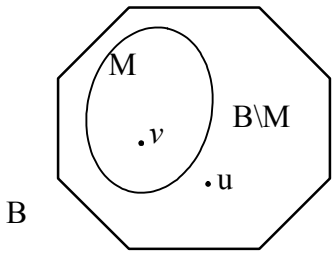
Нехай $\overline{M} \neq B$. Доведення наведемо лише для часткового випадку, коли B <u>*дійсний сепарабельний банахів простір*</u>. Виберемо довільний елемент $u \in B \setminus M$. Нехай $[u] = \{v \in B \mid v = \alpha u \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ – лінійна оболонка елемента u. На підпросторі $M_1 = M \oplus [u]$ визначимо функціонал $l_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ за правилом

$$v_1 = v + \alpha u \in M_1 = M \oplus [u] \to \langle l_1, v_1\rangle = \langle l, v\rangle + \alpha \cdot a \in \mathbb{R} \ .(10.5)$$

Тут $a = const \in \mathbb{R}$ і виберемо її так, щоб функціонал $l_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ був неперервним. З означення функціоналу (10.5) випливає, що

$$\langle l_1, v\rangle = \langle l, v\rangle \ \ \forall v \in M \ ,$$

$$a = \langle l_1, u\rangle \ \ \forall u \in B \setminus M \ .$$



Вірогідно, що функціонал l_1 лінійний.

Покажемо, що існує $a = const \in \mathbb{R}$ така, що виконується нерівність

$$\left|\langle l_1, v + \alpha u\rangle\right| \le \|l\|_* \|v + \alpha u\|_B \ \ \forall v \in M, \forall u \in B \setminus M, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ .(10.6)$$

Нехай $v = \alpha \cdot w \in M$, тоді

$$\langle l_1, v + \alpha u\rangle = \langle l_1, \alpha w + \alpha u\rangle = \langle l_1, \alpha (w + u)\rangle = \alpha \langle l_1, w + u\rangle =$$

$$= \alpha (\langle l_1, w\rangle + a) = \alpha (\langle l, w\rangle + a).$$

Отже, нерівність (10.6) можна переписати $\left|\langle l, w\rangle + a\right| \le \|l\|_* \cdot \|w + u\|_B$ $\forall w \in M$, або

$$-\|l\|_* \cdot \|w + u\|_B - \langle l, w\rangle \le a \le \|l\|_* \cdot \|w + u\|_B - \langle l, w\rangle \ \ \forall w \in M \ .$$

Покажемо, що має місце і така нерівність

$$-\|l\|_* \|w_1+u\|_B - \langle l, w_1\rangle \le a \le \|l\|_* \|w_2+u\|_B - \langle l, w_2\rangle$$

$\forall w_1, w_2 \in M$.

Дійсно,

$$\begin{aligned}\langle l, w_2 - w_1\rangle &\le \|l\|_* \cdot \|(w_2+u)-(w_1+u)\|_B \le \\ &\le \|l\|_* \cdot \left(\|w_2+u\|_B + \|w_1+u\|_B\right)\end{aligned} \quad \forall w_1, w_2 \in M \Rightarrow$$

$$-\langle l, w_1\rangle - \|l\|_* \|w_1+u\|_B \le -\langle l, w_2\rangle + \|l\|_* \|w_2+u\|_B \quad \forall w_1, w_2 \in M .$$

Обчислимо

$$a_1 = \sup_{w\in M}\left(-\langle l, w\rangle - \|l\|_* \cdot \|w+u\|_B\right),$$

$$a_2 = \inf_{w\in M}\left(-\langle l, w\rangle + \|l\|_* \cdot \|w+u\|_B\right).$$

Таким чином, $a \in [a_1, a_2]$, і функціонал l_1 буде шуканим продовженням функціоналу l на M_1 без збільшення норми.

Простір B сепарабельний, тому знайдеться зліченна щільна множина елементів $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$. Приймемо $M_0 = M$, $l_0 = l$ і на підпросторі $M_1 = M_0 \oplus [u_1]$ визначимо функціонал $l_1 \in \mathfrak{L}(M_1, \mathbb{R})$ так, як ми вибирали $\langle l_1, v_1\rangle = \langle l_0, v\rangle + \alpha \cdot a$. Повторюючи цей процес на просторі $M_{n+1} = M_n \oplus [u_{n+1}]$, визначимо функціонал $l_{n+1} \in \mathfrak{L}(M_{n+1}, \mathbb{R})$ такий, що $\begin{cases}\langle l_{n+1}, u\rangle = \langle l_n, u\rangle \ \forall u \in M_n, \\ \|l_{n+1}\|_* = \|l_n\|_*, \quad n = 0,1,\ldots\end{cases}$. Розглянемо простір $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, за побудовою $\overline{V} = B$. Побудуємо функціонал $l_\infty \in \mathfrak{L}(V, \mathbb{R})$ у такий спосіб, що $\langle l_\infty, u\rangle = \langle l_n, u\rangle \quad \forall u \in M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Згідно теореми про продовження лінійного неперервного оператора (10.4), функціонал l_∞ можна однозначно і зі збереженням норми довизначити до функціонала $L \in B'$ так, щоб $\|L\|_* = \|l\|_*$. ■

Теорема Гана-Банаха має різноманітні застосування в питаннях апроксимації, відокремлення, існування розв'язків. Розглянемо коротко деякі з них.

10.9.2. Наслідок I. *Нехай* $M \subset V$ *замкнений підпростір лінійного нормованого простору і* $u \in V \setminus M$. *Тоді знайдеться функціонал* $l \in V'$ *такий, що*

- $\langle l, v \rangle = 0 \quad \forall v \in M$;
- $\langle l, u \rangle = 1$;
- $\|l\|_* = \dfrac{1}{dist(u, M)}$.

Доведення. На підпросторі $M_1 = M \oplus [u]$, де $[u] = \{v \in V \mid v = \alpha u \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$, визначимо функціонал $l : M_1 \to \mathbb{R}$ за правилом $\underbrace{v}_{M} + \underbrace{\alpha u}_{[u]} \in M_1 \to \langle l, v + \alpha u \rangle \overset{def}{=} \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in M$. Із означення функціонала l випливає, що $\langle l, v \rangle = 0 \quad \forall v \in M$ і $\langle l, v \rangle = 1$, якщо $u \in V \setminus M$. Обчислимо норму функціонала

$$\left|\langle l, v + \alpha u \rangle\right| = |\alpha| = |\alpha| \cdot \frac{\|v + \alpha u\|_V}{\|v + \alpha u\|_V} = \frac{\|v + \alpha u\|_V}{\left\|u - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) v\right\|_V} =$$

$$= \left(w \overset{def}{=} -\tfrac{1}{\alpha} v \in M \right) =$$

$$= \frac{\|v + \alpha u\|_V}{\|u - w\|_V} \le \frac{\|v + \alpha u\|_V}{\inf\limits_{w \in M} \|u - w\|_V} = \frac{\|v + \alpha u\|_V}{dist(u, M)}.$$

Отже, $\|l\|_* \le \dfrac{1}{dist(u, M)}$. Легко перевірити справедливість протилежної нерівності. Розглянемо послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \; \|v_n - u\|_V \xrightarrow[n \to \infty]{} dist(u, M)$. Існування такої нерівності випливає з означення точної нижньої грані. Далі, $1 = \langle l, u - v_n \rangle \le \|l\|_* \cdot \|u - v_n\|_V$, і

$\|l\|_* \geq \dfrac{1}{\|u - v_n\|_V} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{dist(u, M)}$. Нарешті, залишається застосувати теорему Гана-Банаха.■

10.9.3. Наслідок II. *Нехай задано ненульовий елемент* $0_V \neq u \in V$ *з лінійного нормованого простору. Тоді знайдеться функціонал* $l \in V'$ *такий, що*

- $\langle l, u \rangle = \|u\|_V$,
- $\|l\|_* = 1$.

Доведення. Визначимо функціонал l на лінійному підпросторі M наступним чином $\alpha u \in M = [u] \to \langle l, \alpha u \rangle = \alpha \cdot \|u\|_V$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. На основі теореми Гана-Банаха цей функціонал можна продовжити на весь простір V.■

10.9.4. Наслідок III (про відношення двоїстості). *Нехай задано елемент* $u \in V$ *з лінійного нормованого простору такий, що* $\langle l, u \rangle = 0$ $\forall l \in V'$. *Тоді*

(I) $u = 0_V$,

(II) $\|u\|_V = \sup\limits_{0_{V'} \neq l \in V'} \dfrac{|\langle l, u \rangle|}{\|l\|_*}$ $\forall u \in V$.

Доведення. Нехай $u \neq 0_V$. Припустимо, що $\langle l, u \rangle = 0$ $\forall l \in V'$. Згідно **наслідку II**, $\exists l \in V'$ такий, що $0 = \langle l, u \rangle = \|u\|_V \neq 0$. Отримали протиріччя.

Покажемо, що виконується **(II)**. Згідно **наслідку II**, $\forall u \in V$ $\exists l \in V'$ $|\langle l, u \rangle = \|u\|_V$.■

10.9.5. Наслідок IV (про задачі відокремлення). *Нехай задано елементи* $u, v \in V$, $u \neq v$, *з лінійного нормованого простору. Тоді* $\exists l \in V'$ $|\langle l, u \rangle \neq \langle l, v \rangle$.

Доведення. Згідно **наслідку II**, для елемента $w = u - v \neq 0_V$ $\exists l \in V'$ такий, що $\|u - v\|_V = \langle l, u - v \rangle = \langle l, u \rangle - \langle l, v \rangle \neq 0$ $\forall u, v \in V$ $u \neq v$.■

10.10. Ряди в банахових просторах

Нехай V – лінійний нормований простір, у якому задана послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$. *Рядом* називається сума $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

10.10.1. Означення. *Нескінченна сума* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *називається* ***абсолютно збіжним рядом*** (*або* ***збіжним за нормою***) *елементів* $u_n \in V$ *, якщо числова послідовність скінченних сум норм цих елементів збігається до скінченної границі:* $S_n = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_V \to S = \lim_{n\to\infty} S_n < +\infty$.

10.10.2. Означення. *Нескінченна сума* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *називається* ***збіжним рядом*** *елементів* $u_n \in V$ *, якщо послідовність скінченних сум цих елементів* $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \to \sigma$ (*збігається до деякого елемента* $\sigma \in V$). *Тобто,* $\exists \sigma \in V$ $\left| \sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma \right.$. *У такому випадку записують* $\sigma \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

▲ **Завдання 10.9.** Покажіть, що коли підпослідовність фундаментальної послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ з нормованого простору збігається до $u \in U$, то і сама послідовність збігається до $u \in U$.

10.10.3. Теорема про ознаку банахового простору. *Для того, щоб лінійний нормований простір* B *був банаховим, необхідно і достатньо,*

щоб кожен абсолютно збіжний ряд його елементів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *був збіжним.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжний, тобто $S_n = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_B \to S \in \mathbb{R}$. Покажемо, що збіжною буде послідовність σ_n: $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \to \sigma \in B$. Легко бачити, що

$$\|\sigma_{n+m} - \sigma_n\|_B = \left\| \sum_{k=1}^{m} u_{n+k} \right\|_B \le \sum_{k=1}^{m} \|u_{n+k}\|_B = |S_{n+m} - S_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тому що послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Отже, $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна у B, тому $\exists B \ni \sigma = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

Достатність. Нехай кожен абсолютно збіжний ряд елементів $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ збіжний в просторі B. Покажемо, що тоді простір B банахів.

Нехай послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в B. Покажемо, що вона збіжна до $\sigma \in B$. Оскільки $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то з неї за даних припущень можна вибрати збіжну підпослідовність $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Дійсно, побудуємо числову послідовність $a_n = \sup_{m>n} \|u_n - u_m\|_B$. Внаслідок фундаментальності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ у B $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Виберемо підпослідовність $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ так, щоб $\|u_{n_1}\|_B < \frac{1}{2}$, і для всіх $k \ge 2$ $\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_B < \frac{1}{2^k}$. Тепер розглянемо ряд $u_{n_1} + (u_{n_2} - u_{n_1}) + \ldots + (u_{n_k} - u_{n_{k-1}}) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k} - u_{n_{k-1}})$ (поклавши

$u_{n_0} = 0$). Зрозуміло, що цей ряд абсолютно збіжний, оскільки $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \right\|_B \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Тому, згідно допущення теореми, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \right)$ збіжний у B. Отже, $\exists B \ni \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \right)$. Але часткові суми цього ряду обчислюються згідно правила

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} \left(u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \right) = \left(u_{n_1} - u_{n_0} \right) + \left(u_{n_2} - u_{n_1} \right) + \ldots + \left(u_{n_m} - u_{n_{m-1}} \right) =$$

$$= u_{n_m} - u_{n_0}.$$

Тому $\sigma_m = u_{n_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} \sigma$. Ми отримали, що підпослідовність фундаментальної послідовності збігається до σ. Отже, і сама послідовність $\{u_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sigma$. Ми довели, що довільна фундаментальна послідовність у просторі B є збіжною, тому простір банахів.■

11. Принцип стискуючих відображень

11.1. Теорема про стискуюче відображення

Нехай B – банахів простір, і задано оператор $A: B \to B$, взагалі кажучи, нелінійний $A(u)$, з областю визначення $D(A) = B$.

11.1.1. Означення. *Оператор* $A: B \to B$ *здійснює* ***стискуюче відображення****, якщо* $\exists \alpha \in (0;1)$ $\left\| A(u) - A(v) \right\|_B \le \alpha \left\| u - v \right\|_B$ $\forall u, v \in B$.

11.1.2. Означення. *Елемент* $u \in B$ *є* ***нерухомою точкою*** *оператора* $A: B \to B$, *якщо* $A(u) = u$.

Згадаємо задачу про нерухому точку оператора A.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A: B \to B. \\ \text{Знайти } \quad u \in B \,\big|\, A(u) = u. \end{cases}$$

11.1. Приклад. Нехай $A(u) = \dfrac{du}{dx}$. Для такого оператора нерухомою точкою буде функція $u = e^x$. Вона ж буде нерухомою точкою і для оператора інтегрування $A(u) = 1 + \int\limits_0^x u(t)\,dt$.

11.1.3. Теорема Банаха про стискуюче відображення (або принцип стискуючих відображень, як назвав сам Банах). *Нехай оператор* $A: B \to B$ *здійснює стискуюче відображення. Тоді задача про нерухому точку має єдиний розв'язок, тобто* $\exists! u \in B \,\big|\, A(u) = u$.

Доведення. Розглянемо довільний елемент $u_0 \in B$ з банахового простору. Побудуємо послідовність: $u_n = A(u_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$. Переконаємося, що отримана послідовність збіжна в B. Для цього оцінимо

$$\left\|u_{n+1}-u_n\right\|_B=\left\|A\left(u_n\right)-A\left(u_{n-1}\right)\right\|_B\le\begin{pmatrix}A-\text{стискуюче}\\ \text{відображення}\end{pmatrix}\le$$

$$\le\alpha\left\|u_n-u_{n-1}\right\|_B\le\alpha^n\left\|u_1-u_0\right\|_B.$$

Далі,

$$\left\|u_{n+m}-u_n\right\|_B=$$

$$=\left\|\left(u_{n+m}-u_{n+m-1}\right)+\left(u_{n+m-1}-u_{n+m-2}\right)+\ldots+\left(u_{n+1}-u_n\right)\right\|_B\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{m-1}\left\|u_{n+1+k}-u_{n+k}\right\|_B\le\left\|u_1-u_0\right\|_B\cdot\alpha^n\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\alpha^k\le$$

$$\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left\|u_1-u_0\right\|_B\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Отже, послідовність $\left\{u_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна в банаховому просторі, тому $\exists B\ni u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. Покажемо, що знайдена границя є нерухомою точкою оператора $A\left(u\right)$. Оскільки вираз $\left\|A\left(u\right)-u_{n+1}\right\|_B=\left\|A\left(u\right)-A\left(u_n\right)\right\|_B\le\alpha\left\|u-u_n\right\|_B\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то $A\left(u\right)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. Залишилося показати, що знайдена нерухома точка єдина. Нехай $u\ne v$ і $A\left(u\right)=u$ та $A\left(v\right)=v$. Тоді $\left\|u-v\right\|_B=\left\|A\left(u\right)-A\left(v\right)\right\|_B\le\alpha\left\|u-v\right\|_B\quad\Rightarrow\quad\left(1-\alpha\right)\left\|u-v\right\|_B\le0$ $\Rightarrow\ u=v$.■

11.2. Застосування принципу стискуючих відображень до розв'язування абстрактного операторного рівняння

Нагадаємо постановку задачі для абстрактного операторного рівняння.

$$\begin{cases}\text{Задано оператор } A:B\to B \text{ та } f\in B.\\ \text{Знайти}\quad u\in B\,\big|\,Au=f.\end{cases}\tag{11.1}$$

Сформулюємо задачу для абстрактного операторного рівняння в термінах задачі про нерухому точку. Розглянемо оператор $N_\rho : B \to B$ такий, що $B \ni v \to N_\rho(v) = v - \rho(Av - f) \in B$, де $\rho = const$. Легко бачити, що для довільного розв'язку u задачі (11.1) $N_\rho(u) = u$ за довільного ρ. Якщо ми покажемо, що внаслідок вибору параметра ρ можна одержати *оператор стиску* $N_\rho(u)$, то задача (11.1) матиме єдиний розв'язок. Дійсно,

$$\begin{aligned}\left\|N_\rho(u) - N_\rho(v)\right\|_B &= \left\|u - \rho(Au - f) - v + \rho(Av - f)\right\|_B = \\ &= \left\|(u - v) - \rho(Au - Av)\right\|_B = \\ &= \left\|(I - \rho A)(u - v)\right\|_B \le \left\|I - \rho A\right\| \cdot \left\|u - v\right\|_B .\end{aligned}$$

Отже, якщо $\left\|I - \rho A\right\| = \alpha(\rho) < 1$, то $N_\rho(u)$ оператор стиску, і ми маємо ітераційну процедуру розв'язку задачі (11.1)

$$\Delta_{n+1} = Au_n - f,$$
$$u_{n+1} = u_n - \rho \cdot \Delta_{n+1}.$$

Ітераційний процес завершується, коли $\left\|\Delta_{n+1}\right\|_B \le \varepsilon = const > 0$, де ε наперед задане достатньо мале число.

11.3. Застосування принципу стискуючих відображень до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

Нехай $\Omega = [0, T] \times [a, b]$, де $0 < T < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$; припустимо, що функція $f \in C(\Omega)$ задовольняє умову Ліпшиця (6.2)

$$\left|f(t, u) - f(t, v)\right| \le M \cdot \left|u - v\right|$$
$$\forall t \in [0, T], \forall u, v \in [a, b], M = const > 0.$$

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння.

$$\begin{cases} \text{Задано } u_0 \in [a,b] \text{ та } f \in C(\Omega), \\ \text{для якої виконується умова Ліпшиця.} \\ \text{Знайти } u \in C^1([0,T]) \left| \begin{array}{l} \dot{u} = \dfrac{du}{dt} = f(t,u(t)) \ \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Відомо, що ця задача еквівалентна задачі про інтегральне рівняння.

$$\begin{cases} \text{Задано } u_0 \in [a,b] \text{ та } f \in C(\Omega), \\ \text{для якої виконується умова Ліпшиця.} \\ \text{Знайти } u \in C^1([0,T]) \left| u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau,u(\tau))\,d\tau \ \forall t \in [0,T]. \right. \end{cases}$$

Для аналізу останньої розглянемо банахів простір $B = C([0,T])$ і задамо в ньому оператор $A : B \to B$ таким чином: $u \in B \to A(u) = u_0 + \int_0^t f(\tau,u(\tau))\,d\tau \quad \forall t \in [0,T]$. Тоді задача про інтегральне рівняння зводиться до задачі про нерухому точку $A(u) = u$. Згідно теореми Банаха, задача Коші для звичайного диференціального рівняння має єдиний розв’язок, якщо оператор $A(u)$ здійснює стискуюче відображення простору B у себе. З’ясуємо умову, за якої оператор $A(u)$ є оператором стиску.

$$\left\|A(u)-A(v)\right\|_B = \sup_{t\in[0,T]}\left|A(u)-A(v)\right| =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \Big(f(\tau,u(\tau))-f(\tau,v(\tau))\Big)d\tau\right| \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \left|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,v(\tau))\right|d\tau \le$$

$$\le M\cdot\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \left|u(\tau)-v(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le M\cdot\left\|u-v\right\|_B \sup_{t\in[0,T]}\int_0^t d\tau \le M\cdot T\cdot\left\|u-v\right\|_B .$$

Отже, такою умовою є $M\cdot T<1$. Більше того, задача Коші володіє єдиним розв'язком. Якщо T недостатньо мале, то вибираючи послідовність точок $\{t_k\}_{k=0}^n$ поділу відрізка $[0,T]$ так, щоб $M\cdot(t_{k+1}-t_k)<1$ зведемо розв'язування задачі Коші на відрізку $[0,T]$ до знаходження послідовності $u_{k+1}(t)$ розв'язків однотипних задач на відрізках $[t_k,t_{k+1}]$ з початковими умовами $u_{k+1}(t_k)=u_k(t_k)$, $k=0,1,\ldots$.

11.4. Застосування принципу стискуючих відображень у лінійній алгебрі

Розглянемо задачу лінійної алгебри.

$$\begin{cases} \text{Задано вектор } f\in B=\mathbb{R}^n \text{ та } A=\left\{a_{ij}\right\}_{ij=1}^n \\ \text{симетричну додатно визначену матрицю.} \\ \text{Знайти} \quad u\in B\,\big|\,Au=f. \end{cases} \tag{11.2}$$

Конструктивне доведення принципу стискуючих відображень наводить на думку, що для побудови розв'язку цієї задачі слід використовувати ітераційні процедури.

$$\begin{cases} \text{Задано вектор} \quad f \in B = \mathbb{R}^n, \quad \Delta = const > 0 \\ \text{та } M = \left\{ m_{ij} \right\}_{ij=1}^{n} \text{ симетричну додатно визначену матрицю.} \\ \text{Знайти } u_{n+1} \in B \left| M \dfrac{1}{\Delta}\left(u_{n+1} - u_n\right) + Au_n = f, n = 0,1,\ldots, \right. \end{cases}$$

або

$$Mu_{n+1} = Mu_n + \Delta\left(f - Au_n\right). \qquad (11.3)$$

Вибираючи належним чином M і Δ дістаємо відомі ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Наприклад,

- поклавши $M = I$ одиничній матриці перетворюємо процедуру (11.3) у *метод простої ітерації*;
- подаючи $A = L + S + U$, де відповідні матриці мають таку структуру $l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, j < i, \\ 0, j \geq i, \end{cases}$ $s_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$ $u_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, j > i, \\ 0, j \leq i, \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \ddots & & U \\ & S & \\ L & & \ddots \end{pmatrix}$, а матриця $M = L + S$ і $\Delta = 1$, дістаємо *метод Гаусса-Зейделя*;
- покладаючи $M = \Delta \cdot L + S$, $\Delta \in \left(1, 2\right)$, приходимо до *методу верхньої релаксації.*

11.4.1. Теорема про збіжність ітераційного процесу. *Нехай матриця* M *і параметр* Δ *ітераційного процесу (11.3) вибрані таким чином, що матриця* $D = M - \dfrac{\Delta}{2} A$ *додатно визначена. Тоді послідовність* $\left\{ u_n \right\}_{n=0}^{\infty}$ *збігається до розв'язку задачі (11.2)* $u \in B$.

Доведення. Подамо

$Au_n = A\left(\frac{1}{2}\left(u_{n+1}+u_n\right)-\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-u_n\right)\cdot\Delta\cdot\frac{1}{\Delta}\right)$. Розглянемо послідовність похибок $\left\{e_n\right\}_{n=0}^{\infty}$: $e_n = u_n - u$. Тоді

$$u_{n+1}-u_n = \left(u_{n+1}-u\right)-\left(u_n-u\right) = e_{n+1}-e_n,$$

$$u_{n+1}+u_n = \left(u_{n+1}-u\right)+\left(u_n-u\right)+2u = e_{n+1}+e_n+2u.$$

Враховуючи останнє, (11.3) набуває вигляду:

$$\underbrace{\left(M-\frac{\Delta}{2}A\right)}_{D}\frac{1}{\Delta}\left(e_{n+1}-e_n\right)+\frac{1}{2}A\left(e_{n+1}+e_n\right) = f - Au = 0.$$

Допустимо, що матриця M і параметр Δ вибрані таким чином, що матриця D додатно визначена, що дозволяє запровадити дві еквівалентні норми $|u|^2 = \left(Du,u\right) \sim \|u\|^2 = \left(Au,u\right)$ $\forall u \in B = \mathbb{R}^n$. Помножимо вище наведену рівність скалярно на $e_{n+1}-e_n$, внаслідок чого

$$0 = \left(D\frac{1}{\Delta}\left(e_{n+1}-e_n\right), e_{n+1}-e_n\right)+\left(\frac{1}{2}A\left(e_{n+1}+e_n\right), e_{n+1}-e_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left|e_{n+1}-e_n\right|^2+\frac{1}{2}\left(\|e_{n+1}\|^2-\|e_n\|^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|e_{n+1}\|^2-\|e_n\|^2 \le 0 \Rightarrow \|e_{n+1}\| \le \|e_n\| \le \ldots \|e_0\| = \|u_0-u\|,$$

тобто послідовність норм похибок $\left\{e_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ є незростаючою та обмеженою. Отже,

$$\exists e = \lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|. \qquad (11.4)$$

Крім того, з попередньої рівності випливає, що $\left|e_{n+1}-e_n\right|^2 = \frac{\Delta}{2}\left(\|e_n\|^2-\|e_{n+1}\|^2\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Отже, $\left|u_{n+1}-u_n\right|^2 = \left|e_{n+1}-e_n\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тому послідовність розв’язків $\left\{u_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна в банаховому просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\exists u^* \in \mathbb{R}^n \left| \lim_{n\to\infty} \left\| u_n - u^* \right\| = 0 \right. . \qquad (11.5)$$

Оскільки збіжна послідовність має єдину границю, то, порівнюючи (11.4) з (11.5), приходимо до висновку, що $u^* = u$.■

Поки що ми не обмовилися про стискуюче відображення. Повернемося до ітераційного процесу (11.3) і подамо його у вигляді

$$u_{n+1} = u_n - \Delta \cdot M^{-1}\left(Au_n - f\right) = \left(I - \Delta \cdot M^{-1} \cdot A\right)u_n + \Delta \cdot M^{-1} f .$$

Зауважимо, що матриця $M^{-1}A$ додатно визначена, тобто $\left(M^{-1}Au, u\right) \geq \mu \left\| u \right\|_B^2$. Розглянемо оператор $u \in B \to N_\Delta\left(u\right) = u - \Delta \cdot M^{-1}\left(Au - f\right) \in B$. Покажемо, що цей оператор здійснює стискуюче відображення. Дійсно,

$$\left\| N_\Delta\left(u\right) - N_\Delta\left(v\right) \right\|_B^2 = \left\| \left(I - \Delta \cdot M^{-1}A\right)\left(u - v\right) \right\|_B^2 =$$

$$= \left(\left(I - \Delta \cdot M^{-1}A\right)\left(u - v\right), \left(I - \Delta \cdot M^{-1}A\right)\left(u - v\right)\right) =$$

$$= \left\| u - v \right\|_B^2 - 2\left(\Delta \cdot M^{-1}A\left(u - v\right), u - v\right) + \Delta^2 \left\| M^{-1}A\left(u - v\right) \right\|_B^2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\left(1 - 2\Delta\mu + \Delta^2 \left\| M^{-1}A \right\|_B^2\right)}_{\alpha(\Delta)} \cdot \left\| \left(u - v\right) \right\|_B^2 .$$

Таким чином, за умови $0 < \alpha\left(\Delta\right) < 1$ відображення $N_\Delta : B \to B$ стискуюче, а сам ітераційний процес $u_{n+1} = N_\Delta\left(u_n\right)$ збіжний до розв'язку задачі (11.2), незалежно від вибору нульового наближення $u_0 \in B$.

▲ **Завдання 11.1.** Нехай $B = \mathbb{R}$, і задано оператор $B \ni u \to A\left(u\right) = \dfrac{\pi}{2} + u - arctgu \in B$. Показати, що, $\exists \alpha \in \left(0;1\right)$ $\left| \left\| A\left(u\right) - A\left(v\right) \right\|_B \leq \alpha \left\| u - v \right\|_B \quad \forall u, v \in B$.

12. Гільбертові простори (Hilbert)

Означення. *Унітарний простір* U *зі скалярним добутком* $(\bullet,\bullet)$ *називається* ***гільбертовим простором****, якщо він повний відносно норми* $\|u\|_U = (u,u)^{\frac{1}{2}} \ \ \forall u \in U$.

Кожна фундаментальна послідовність у гільбертовому просторі є збіжною і цей простір є замкнений.

12.1. Основна теорема гільбертових просторів

12.1. Теорема. *Нехай* V *замкнений підпростір* $V \subset H$ *гільбертового простору, і нехай задано деякий елемент* $u_* \in H$. *Тоді* $\exists! u \in V \left| \|u - u_*\|_H = dist(u_*, V) = \inf\limits_{v \in V} \|v - u_*\|_H = d \right.$.

Доведення. Розглянемо послідовність $\{u_n\}$ $\left| \|u_n - u_*\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} d \right.$. Покажемо, що послідовність $\{u_n\}$ фундаментальна, і, внаслідок замкненості простору H, її границя належить цьому простору.

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = \|(u_n - u_*) - (u_m - u_*)\|_H^2 =$$

$$= ((u_n - u_*) - (u_m - u_*), (u_n - u_*) - (u_m - u_*)) =$$

$$= \left(\textit{використаємо те, що } (a-b, a-b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\Re(a,b)\right) =$$

$$= \|u_n - u_*\|_H^2 + \|u_m - u_*\|_H^2 - 2\Re(u_n - u_*, u_m - u_*).$$

Оцінимо скалярний добуток

$$\left(u_n - u_*, u_m - u_*\right) =$$

$$= \left(\frac{u_n + u_m}{2} + \frac{u_n - u_m}{2} - u_*, \frac{u_n + u_m}{2} - \frac{u_n - u_m}{2} - u_*\right) =$$

$$= \left(\textit{використаємо те, що } \left(a+b, a-b\right) = \|a\|^2 - \|b\|^2 - 2i\Im\left(a,b\right)\right) =$$

$$= \left\|\frac{u_n + u_m}{2} - u_*\right\|_H^2 - \frac{1}{4}\|u_n - u_m\|_H^2 - 2i\Im\left(\frac{u_n + u_m}{2} - u_*, \frac{u_n - u_m}{2}\right).$$

Внаслідок

$$\|u_n - u_m\|_H^2 =$$

$$= \|u_n - u_*\|_H^2 + \|u_m - u_*\|_H^2 - 2\left(\left\|\frac{u_n + u_m}{2} - u_*\right\|_H^2 - \frac{1}{4}\|u_n - u_m\|_H^2\right) \Rightarrow$$

$$\|u_n - u_m\|_H^2 =$$

$$= 2\left(\underbrace{\|u_n - u_*\|_H^2}_{d^2} + \underbrace{\|u_m - u_*\|_H^2}_{d^2}\right) - 4\left\|\frac{u_n + u_m}{2} - u_*\right\|_H^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Отже, $\exists V \ni u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n - u_*\|_H = \|u - u_*\|_H = d$. Покажемо єдиність такого елемента. Нехай $\exists u, v \in V$ $\left|\|u - u_*\|_H = d = \|v - u_*\|_H\right.$, $u \neq v$. Тоді

$$\|u - v\|_H^2 = \|(u - u_*) - (v - u_*)\|_H^2 = \begin{pmatrix} \textit{аналогічно до} \\ \textit{попереднього} \end{pmatrix} =$$

$$= 4\left(d^2 - \underbrace{\left\|\frac{u+v}{2} - u_*\right\|_H^2}_{\geq d^2}\right) \leq 0 \Rightarrow u = v. \blacksquare$$

▲ **Завдання 12.1.** Показати, що основна теорема гільбертових просторів залишається вірною, якщо під V розуміти замкнену опуклу множину.

12.2. Варіаційні нерівності

Нагадаємо задачу про найкраще наближення (8.1).

$$\begin{cases} \text{Задано } u_* \in H - \text{гільбертів простір} \\ \text{та замкнений підпростір } V = \overline{V} \subset H. \\ \text{Знайти } u \in V \left| \|u - u_*\|_H \le \|v - u_*\|_H \ \forall v \in V. \right. \end{cases}$$

Наслідок з основної теореми гільбертових просторів: *задача про найкраще наближення має єдиний розв'язок.*

Визначимо функціонал $v \in V \to I(v) = \|v - u_*\|_H^2$. Тоді задачу про найкраще наближення можна сформулювати наступним чином.

$$\begin{cases} \text{Задано } u_* \in H - \text{гільбертів простір} \\ \text{та замкнений підпростір } V = \overline{V} \subset H. \\ \text{Знайти } u \in V \left| I(u) \le I(v) \ \forall v \in V. \right. \end{cases}$$

Задача про найкраще наближення еквівалентна задачі мінімізації квадратичного функціоналу.

$$\begin{cases} \text{Задано } u_* \in H - \text{гільбертів простір} \\ \text{та замкнений підпростір } V = \overline{V} \subset H. \\ \text{Знайти } u \in V \left| F(u) \le F(v) \ \forall v \in V, \right. \\ \text{де} \quad F(v) = \|v\|_H^2 - 2\Re(u_*, v). \end{cases}$$

Такі задачі виникають з варіаційних принципів механіки суцільного середовища. Сформулюємо задачу про варіаційну нерівність.

$$\begin{cases} \text{Задано } u_* \in H - \text{гільбертів простір} \\ \text{та замкнену опуклу множину } V \subset H. \\ \text{Знайти } u \in V \left| \Re(u, u - v) \le \Re(u_*, u - v) \ \forall v \in V. \right. \end{cases} \tag{12.1}$$

12.2. Теорема про варіаційну нерівність. *Нехай V замкнена опукла множина $V \subset H$ гільбертового простору. Тоді для того, щоб $u \in V$ був розв'язком задачі (12.1), необхідно і достатньо, щоб $\|u - u_*\|_H = \inf\limits_{v \in V} \|v - u_*\|_H$. Розв'язок задачі єдиний.*

Доведення. *Необхідність*. Розглянемо норми $\|v-u_*\|_H$ і $\|u-u_*\|_H$. Тоді $\forall v \in V$ виконується

$$\|v-u_*\|_H^2 - \|u-u_*\|_H^2 =$$
$$= \left(v-u+u-u_*, v-u+u-u_*\right) - \left(u-u_*, u-u_*\right) =$$
$$= \|v-u\|_H^2 + 2\Re\left(u-u_*, v-u\right) \geq \Re\left(u-u_*, v-u\right) \geq 0,$$

бо u є розв'язком задачі (12.1).

Достатність. Нехай має місце рівність $\|u-u_*\|_H = \inf\limits_{v\in V}\|v-u_*\|_H$. Оскільки V опукла, то $\left(1-\alpha\right)u + \alpha v = u + \alpha\left(v-u\right) \in V \quad \forall \alpha \in \left[0,1\right]$. Тоді

$$\|u-u_*\|_H^2 \leq \left\|\alpha\left(v-u\right)+u-u_*\right\|_H^2 \leq$$
$$\leq \alpha^2\|v-u\|_H^2 + 2\alpha\cdot\Re\left(u-u_*, v-u\right) + \|u-u_*\|_H^2 \Rightarrow$$
$$0 \leq \alpha^2\|v-u\|_H^2 + 2\alpha\cdot\Re\left(u-u_*, v-u\right) \Rightarrow \Re\left(u-u_*, v-u\right) \geq 0.$$

Отже, u є розв'язком задачі (12.1). Згідно ▲ **12.1.** задача має єдиний розв'язок.■

12.3. Ортогональні проекції

12.3.1. Означення. *Нехай* $V = \overline{V} \subset H$ *замкнений підпростір гільбертового простору зі скалярним добутком* $\left(\bullet,\bullet\right)$. *Елемент* $u \in V$ *є* ***ортогональною проекцією*** $u_* \in H$ *на* V, *якщо* $\left(u-u_*, v\right) = 0$ $\forall v \in V$ *і позначається* $u = \mathrm{pr}_V u_*$.

12.3.2. Теорема про ортогональну проекцію. *Нехай* $V = \overline{V} \subset H$ *замкнений підпростір гільбертового простору і* $u_* \in H$. *Тоді* $\exists! u \in V \,\big|\, u = \mathrm{pr}_V u_*$, *і має місце теорема Піфагора* $\|u_*\|_H^2 = \|u\|_H^2 + \|u-u_*\|_H^2$.

Доведення. За умов даної теореми ми можемо посилатися на основну теорему гільбертових просторів:

$\exists! u \in V \left| \left\| u - u_* \right\|_H = dist\left(u_*, V\right) \right.$. Тоді $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ виконується умова

$$\left\| u - u_* \right\|_H^2 \le \left\| \left(u - u_*\right) + \alpha v \right\|_H^2 .$$

Здійснюючи перетворення, такі як у теоремі про варіаційну нерівність, отримаємо

$$0 \le \alpha^2 \left\| v \right\|_H^2 + 2\alpha \cdot \Re\left(u - u_*, v\right).$$

Ця нерівність можлива $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ тільки за умови $\Re\left(u - u_*, v\right) = 0$ $\forall v \in V$. Покажемо, що і $\Im\left(u - u_*, v\right) = 0$. Покладемо $v = iw$, $w \in V$. Тоді

$$0 = \Re\left(u - u_*, iw\right) = -\Re\left(i\left(u - u_*, w\right)\right) = -\Im\left(u - u_*, w\right).$$

Отже, $\left(u - u_*, v\right) = 0$. Для доведення теореми Піфагора скористаємося рівністю

$$\left\| u_* \right\|_H^2 = \left\| u - \left(u - u_*\right) \right\|_H^2 = \left\| u \right\|_H^2 + \left\| u - u_* \right\|_H^2 - 2\Re\left(u - u_*, u\right). \blacksquare$$

▲ **Завдання 12.2.** Нехай $V = \overline{V} \subset H$ замкнений підпростір гільбертового простору, і нехай задано оператор $P : H \to V$ такий, що $u \in H \to Pu = \mathrm{pr}_V u \in V$. Такий оператор називається ***оператором проектування***, або ***ортопроектором***, гільбертового простору H на підпростір V. Показати, що $\left(Pu - u, v\right) = 0$ $\forall v \in V$ і $P \in \mathfrak{L}\left(H, V\right)$ та $\left\| P \right\| = 1$.

12.4. Ортогональне доповнення

12.4.1. Означення. *Нехай $S \subset H$ довільна множина з гільбертового простору. Множина $S^\perp = \left\{ u \in H \left| \left(u, v\right) = 0 \ \forall v \in S \right. \right\}$ називається* ***ортогональним доповненням*** *множини S в просторі H.*

12.4.2. Теорема про ортогональне доповнення. *Нехай $V = \overline{V} \subset H$ замкнений підпростір гільбертового простору. Тоді*

(I) $V^\perp = \overline{V^\perp} \subset H$ (*ортогональне доповнення – замкнений підпростір гільбертового простору*);

(II) $H = V \oplus V^{\perp}$;

(III) *кожен елемент* $u \in H$ *єдиним чином подається у вигляді* $u = \mathrm{pr}_V u + \mathrm{pr}_{V^{\perp}} u$.

Доведення. (**I**) Покажемо, що ортогональне доповнення $V^{\perp}$ є лінійним підпростором простору H. Нехай множина $\{w_i\} \subset V^{\perp}$, тобто $(w_i, v) = 0 \quad \forall v \in V$. Тоді $0 = \sum_i \alpha_i (w_i, v) = \left(\sum_i \alpha_i w_i, v \right)$ $\Rightarrow \sum_i \alpha_i w_i \in V^{\perp} \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C}$. Отже, лінійна комбінація елементів з ортогонального доповнення до простору теж належить ортогональному доповненню. Покажемо, що $V^{\perp}$ замкнена множина в просторі H, тобто вона збігається зі своїм замиканням $V^{\perp} = \overline{V^{\perp}}$. Для цього розглянемо фундаментальну послідовність $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V^{\perp}$. Тоді $\exists H \ni w = \lim_{i \to \infty} w_i$ внаслідок повноти гільбертового простору. Далі, внаслідок неперервності скалярного добутку $0 = (w_i, v) \xrightarrow[i \to \infty]{} (w, v) \quad \forall v \in V$, тому границя $w \in V^{\perp}$. Отже, $V^{\perp}$ замкнена множина.

(**II**) доводимо від супротивного. Припустимо, що $\exists w \neq 0_H \,\big|\, w \in V \wedge w \in V^{\perp}$, тобто $w \in V \bigcap V^{\perp}$. Отже, $(w, v) = 0$ $\forall v \in V$. Покладемо $w = v$. Тоді $\|w\|_H^2 = 0 \Rightarrow w = 0_H$.

(**III**). Це наслідок (**II**).■

▲ **Завдання 12.3.** Нехай $V = \overline{V} \subset H$ замкнений підпростір гільбертового простору. Показати, що $\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$.

12.5. Щільність у гільбертовому просторі

12.5.1. Означення. *Множина* $S \subset X$ *лінійного простору називається* ***лінійним многовидом****, якщо* $\forall u, v \in S$ *і* $\forall \alpha, \beta \in K$*, де* K *числове поле, лінійна комбінація* $\alpha u + \beta v \in S$.

12.5.2. Теорема про критерій щільності в гільбертовому просторі. *Нехай* H *гільбертів простір. Лінійний многовид* S *щільний у* H *тоді й лише тоді, коли* $S^{\perp} = \{0_H\}$*, тобто ортогональне доповнення до* S *містить лише нульовий елемент.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай S щільний у H. Тоді $\forall u \in H \quad \exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S \ \Big| \ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$. Нехай $w = S^{\perp}$. Тоді, приймаючи до уваги неперервність скалярного добутку, отримаємо $0 = (w, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (w, u) = 0$. Покладаючи $u = w$, отримаємо $(w, w) = 0 \ \Rightarrow \ w = 0_H$.

Достатність доведемо міркуванням від супротивного. Нехай $S^{\perp} = \{0_H\}$ і S нещільний у H. Тоді $\exists u \in H \wedge u \notin \overline{S} = V$. Згідно теореми про ортогональне доповнення, $u = \mathrm{pr}_V u + \mathrm{pr}_{V^{\perp}} u$, $u \notin V$, $0_H \neq \mathrm{pr}_{V^{\perp}} u \in V^{\perp} = S^{\perp} = \{0_H\}$. Отримали протиріччя.■

12.6. Структура спряженого простору

12.6.1. Означення. *Нехай функціонал* $l \in H' = \mathfrak{L}(H, \mathbb{C})$. *Множина* $N(l) = \{v \in H \,|\, \langle l, v \rangle = 0\}$ *називається* ***нуль-простором,*** *або* ***ядром,*** *функціонала* l.

12.6.2. Теорема Рісса про структуру спряженого простору. *Нехай* H *– гільбертів простір. Для будь-якого лінійного обмеженого функціоналу* l*, визначеного всюди в* H *існує єдиний елемент* $u \in H$ *такий, що виконується рівність* $\langle l, v \rangle = (u, v) \quad \forall v \in H$. *Крім цього,* $\|u\|_H = \|l\|_*$.

Доведення. Розглянемо нуль-простір ненульового функціоналу l. Внаслідок неперервності l, $N(l) = \overline{N(l)}$. Тоді, згідно теореми про ортогональне доповнення, $H = N(l) \oplus N^{\perp}(l)$, $N^{\perp}(l) \neq H$. Виберемо $0_H \neq u_* \in N^{\perp}(l)$. Тоді $\langle l, u_* \rangle = \alpha \neq 0$, і ми можемо по-

будувати елемент $H \ni z = v - \alpha^{-1}\langle l, v\rangle \cdot u_*$ $\forall v \in H$. Легко бачити, що $\langle l, z\rangle = \langle l, v\rangle - \alpha^{-1}\langle l, v\rangle \cdot \langle l, u_*\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad z \in N(l)$. Тому $0 = (\underbrace{u_*}_{N^{\perp}(l)}, \underbrace{z}_{N(l)}) = (u_*, v) - \alpha^{-1}\langle l, v\rangle \cdot \|u_*\|_H^2 \Rightarrow$

$\langle l, v\rangle = \dfrac{(u_*, v)\alpha}{\|u_*\|_H^2} = \left(\dfrac{\alpha u_*}{\|u_*\|_H^2}, v\right)$. Таким чином, шуканий елемент $u = \dfrac{\langle l, u_*\rangle u_*}{\|u_*\|_H^2} \in N^{\perp}(l) \Rightarrow \|u\|_H = \left|\left\langle l, \dfrac{u_*}{\|u_*\|_H}\right\rangle\right| \le \|l\|_*$. З іншого боку, $\langle l, v\rangle = (u, v)$ (це ми вже показали), тоді з нерівності КБШ випливає, що $|\langle l, v\rangle| = |(u, v)| \le \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall v \in H \quad \Rightarrow \quad \|l\|_* \le \|u\|_H$. Отже, $\|l\|_* = \|u\|_H$.

Єдиність побудованого елемента покажемо міркуваннями від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in H \quad u_1 \ne u_2 \quad |\langle l, v\rangle = (u_1, v) = (u_2, v)$ $\forall v \in H \quad \Rightarrow (u_1 - u_2, v) = 0$. Покладаючи $v = u_1 - u_2$, отримаємо $\|u_1 - u_2\|_H^2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. Отримали протиріччя.■

12.6.3. Наслідок. *Нехай оператор* $A : H \to H'$ *діє за правилом* $u \in H \to Au = l \in H'$. *Тоді оператор* $A \in \mathfrak{L}(H, H')$ *здійснює ізоморфізм* H *і* H'.

Доведення. Бієктивність оператора A є наслідком теореми Рісса. Покажемо лінійність. Нехай $\{u_i\} \subset H \quad |Au_i = l_i$. Тоді $\langle Au_i, v\rangle = \langle l_i, v\rangle = (u_i, v) \quad \forall v \in H$. Отже, $\forall \{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}$

$$\left\langle \sum_i \alpha_i Au_i, v\right\rangle = \sum_i \alpha_i \langle Au_i, v\rangle = \sum_i \alpha_i (u_i, v) = \left(\sum_i \alpha_i u_i, v\right) =$$

$$= \left\langle A\sum_i \alpha_i u_i, v\right\rangle \Rightarrow \sum_i \alpha_i Au_i = A\sum_i \alpha_i u_i. \blacksquare$$

Гільбертів простір H самоспряжений, оскільки $H = H'$ з точністю до відображення A.

13. Ряди Фур'є

Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормована система елементів гільбертового простору H та $u \in H$.

13.1. Означення. *Числову послідовність* $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *називають* ***коефіцієнтами Фур'є*** *елемента* u *відносно системи* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, *якщо* $U_n = (u, e_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *У разі цього ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n$ *називають* ***ортогональним рядом Фур'є*** *елемента* $u \in H$.

13.2. Теорема про ряд Фур'є. *Нехай задано ортонормовану систему* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *елементів гільбертового простору* H *і* $V = \overline{[E]}$. *Тоді* $\forall u \in H$ *його ряд Фур'є* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n$ *збігається в* H *і у випадку цього мають місце такі твердження:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^2 \le \|u\|_H^2$ [5] $\forall u \in H$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n = pr_V u$ $\forall u \in H$.

Доведення. Позначимо через V_n лінійний підпростір з H, що має елементи $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ за свій базис. Тоді лінійна комбінація $u_n = \sum_{j=1}^{n} U_j e_j$ є елементом з підпростору V_n. Крім цього, обчислення показують, що

$$(u_n - u, e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} U_j e_j, e_i \right) - (u, e_i) = U_i - (u, e_i) = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

[5] В теорії рядів Фур'є ця нерівність відома під назвою нерівність Бесселя.

Отже, елемент $u_n - u$ ортогональний до замкненого підпростору V_n і тому, згідно з теоремою про ортогональну проекцію, елемент $u_n \in V_n$ характеризується рівностями

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} U_j e_j = pr_{V_n} u ,$$

$$\|u\|_H^2 = \|u_n\|_H^2 + \|u_n - u\|_H^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|U_j\right|^2 + \|u_n - u\|_H^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Зокрема, з останньої рівності випливає:

$$0 \le \sigma_n \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \left|U_j\right|^2 \le \|u\|_H^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Таким чином, маємо справу з обмеженою числовою послідовністю $\sigma_n \subset \mathbb{R}$. Відомо з курсу математичного аналізу, що така послідовність збіжна, і

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left|U_j\right|^2 \le \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H .$$

Більше того,

$$\|u_n - u_{n+m}\|_H^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+m} U_j e_j \right\|_H^2 = \qquad \forall m \in \mathbb{N} ,$$

$$= \sum_{j=n+1}^{n+m} \left|U_j\right|^2 = \left|\sigma_n - \sigma_{n+m}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

тому ряд Фур'є $\sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n$ збіжний у просторі H .■

Безпосередньо з доведення теореми випливають такі наслідки.

13.3. Наслідок про мінімізуючі властивості коефіцієнтів Фур'є. *Нехай виконані умови теореми про ряд Фур'є. Тоді* $\forall u \in H$ *мають місце такі оцінки:*

- $\left\| u - \sum_{j=0}^{n} U_j e_j \right\|_H \le \left\| u - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j \right\|_H \quad \forall \left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{C}$;

- $\|u-u_n\|_H \le \|u-u_m\|_H \quad \forall n \ge m$.

13.4. Наслідок про суму ряду Фур'є. *Нехай* u *– довільний елемент сепарабельного гільбертового простору* H *і* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n$ *його ряд Фур'є,* $U_n = (u, e_n)$. *Для того, щоб* $u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n e_n \quad \forall u \in H$ *необхідно і достатньо, щоб система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *була повною в просторі* H.

Нехай виконані умови наслідку про суму ряду Фур'є.

▲ **Завдання 13.1.** Переконайтеся, що в цьому випадку справедлива *рівність Парсеваля*

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^2 \quad \forall u \in H.$$

▲ **Завдання 13.2.** Нехай ортонормована система $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ є базисом простору $V_n \subset H$ і послідовність операторів $P_n : H \to V_n$ визначається так: $u \in H \to P_n u \overset{def}{=} pr_{V_n} u = \sum_{j=1}^{n} U_j e_j$. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty} \|P_n u - u\|_H = 0 \quad \forall u \in H$. Останнє означає, що послідовність P_n сильно збігається до тотожного оператора $I \in \mathfrak{L}(H)$. Покажіть, що ця збіжність нерівномірна.

▲ **Завдання 13.3.** Нехай ортонормована система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ є базисом сепарабельного гільбертового простору H. Покажіть, що $U_n = (u, e_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall u \in H$.

Зауваження про слабку збіжність. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормований базис сепарабельного гільбертового простору H. Виходячи з означення слабкої збіжності та ▲ **13.3**, встановлюємо, що $e_n \xrightarrow[w]{} 0_H$ в просторі H. Разом з цим, рівності $\|e_n\|_H = 1$,

$\|e_n - e_m\|_H^2 = \|e_n\|_H^2 + \|e_m\|_H^2 = 2 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ показують, що ця слабко збіжна послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не фундаментальна в H.

Зауваження про * - слабку збіжність. У гільбертовому просторі H поняття слабкої збіжності та * - слабкої збіжності в спряженому до нього просторі H' є еквівалентними внаслідок ізоморфності просторів H та H'.

14. Обернений оператор

Розглянемо задачу про операторне рівняння.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A : B \to C, \text{ елемент } f \in C, \\ B, C \text{ - банахові простори.} \\ \text{Знайти} \quad u \in B \,\big|\, Au = f. \end{cases} \tag{14.1}$$

Згадаємо, що оператор $A : B \to C$ називається *ін'єктивним*, якщо $\forall f \in R(A) \subset C \;\; \exists! u \in D(A) \,\big|\, Au = f$.

Означення. *Множина* $N(A) = \{u \in D(A) \,\big|\, Au = 0_C\}$ *називається* ***нуль-простором****, або* ***ядром****, оператора* A.

14.1. Ознака ін'єктивності лінійного оператора

14.1. Теорема про ознаку ін'єктивності лінійного оператора. *Для того, щоб лінійний оператор* $A : B \to C$ *був ін'єктивним, необхідно і достатньо, щоб* $N(A) = \{0_B\}$.

Доведення. *Необхідність*. Застосуємо міркування від супротивного. Нехай оператор A ін'єктивний, але $N(A) \neq \{0_B\}$. Тоді $\exists 0_B \neq z \in N(A)$ такий, що $Az = 0_C$. Згідно означення ін'єктивності, $\forall f \in R(A) \subset C \;\; \exists! u \in D(A) \,\big|\, Au = f$. Водночас з лінійності оператора випливає, що $Au + Az = A(u + z) = f$. Отже, елемент $f \in R(A)$ має два різні прообрази u та $u + z$, що суперечить ін'єктивності.

Достатність. Нехай оператор A не ін'єктивний, але $N(A) = \{0_B\}$. Тоді для $\forall f \in R(A)$ знайдуться щонайменше два елементи $u, v \in D(A)$, $u \neq v$ $\left| \begin{array}{l} Au = f, \\ Av = f \end{array} \right.$ $\Rightarrow$

$$Au - Av = A(u - v) = 0_C \Rightarrow \begin{cases} u - v \in N(A), \\ u - v \neq 0_B \end{cases} \Rightarrow N(A) \neq \{0_B\},$$

що суперечить нашому припущенню.■

14.2. Ознака обмеженого оберненого оператора

14.2.1. Означення. *Нехай оператор* $A : B \to C$ *ін'єктивний. Визначимо оператор* $A^{-1} : C \to B$ *такий, що*

- $D(A^{-1}) = R(A)$;
- $R(A^{-1}) = D(A)$;
- $\forall \{u, f\} \in D(A) \times R(A) \,|\, Au = f$ *виконується умова* $A^{-1} f = u$.

Такий оператор A^{-1} *називають* ***оберненим*** *до* A.

У випадку бієктивного оператора $A : B \to C$ задача (14.1) допускає єдиний розв'язок для $\forall f \in C$, причому він знаходиться за правилом $u = A^{-1} f$.

▲ **Завдання 14.1.** Нехай $A : B \to C$ лінійний ін'єктивний оператор. Показати, що $A^{-1} : C \to B$ також лінійний та ін'єктивний.

▲ **Завдання 14.2.** Нехай $A : B \to C$ лінійний ін'єктивний оператор. Показати, що

оператор $E : B \to B$, визначений за правилом $u \in B \to Eu = A^{-1}(Au) \in B$, та

оператор $I : C \to C$, визначений за правилом $f \in C \to If = A(A^{-1} f) \in C$, є одиничними (тотожними) операторами в просторах B і C, відповідно.

▲ **Завдання 14.3.** Нехай $B = C^1([0,1])$, $C = C([0,1])$, і оператор $A : B \to C$ визначений за правилом

$u \in D(A) = \{u \in B \,|\, u(0) = 0\} \to Au = \dfrac{du}{dx} \in C$. Побудувати обернений до A оператор.

14.2.2. Означення. *Задача (14.1) називається* ***коректно поставленою****, якщо*

- *існує розв'язок задачі* $u \in B$ *за будь-якого* $f \in C$*;*
- *розв'язок єдиний* $u = A^{-1} f$ *;*
- *розв'язок* u *неперервно залежить від даних задачі, тобто* $\|u\|_B \le \|A^{-1}\| \cdot \|f\|_C$.

Це, зокрема, означає: якщо змінити незначно норми $\|A^{-1}\|$ і $\|f\|_C$, то норма $\|u\|_B$ також зміниться незначно.

14.1. Приклад. Нехай потрібно розв'язати задачу (14.1) з лінійним бієктивним оператором $A : B \to C$, замінивши у разі цього достатньо складне $f \in C$ в деякому значенні близьким і зручним для обчислень, наприклад, інтерполяційним поліномом $f_h \in C$. Тоді ми знайдемо розв'язок $u_h \in B \to Au_h = f_h$. Внаслідок лінійності оператора A, отримуємо $A(u_h - u) = f_h - f$, а, внаслідок бієктивності, $u_h - u = A^{-1}(f_h - f)$. Остаточно, $\|u_h - u\|_B \le \|A^{-1}\| \cdot \|f_h - f\|_C$. Отже, якщо $\|A^{-1}\|$ дуже велика, то задача є некоректною.

14.2.3. Теорема Банаха про ознаку обмеженого оберненого оператора. *Для того, щоб лінійний оператор* $A : B \to C$ *мав обмежений обернений оператор, необхідно і достатньо, щоб* $\exists \alpha = const > 0 \,\big|\, \|Au\|_C \ge \alpha \|u\|_B$ [6] $\forall u \in D(A)$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(C, B)$. Оскільки A^{-1} ін'єктивний, то $\forall f \in R(A) \subset C \quad \exists! u \in D(A) \,|\, Au = f$. Тоді $\|u\|_B = \|A^{-1} f\|_B \le \|A^{-1}\| \cdot \|f\|_C = \|A^{-1}\| \cdot \|Au\|_C \Rightarrow$

[6] Ця нерівність виражає обмеженість оператора знизу.

$\|Au\|_C \geq \|u\|_B \cdot \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} = \|u\|_B \cdot \alpha$, де $\alpha = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Достатність. Нехай $\exists \alpha > 0 \,\Big|\, \|Au\|_C \geq \alpha \|u\|_B$. Припустимо, що $u \in N(A)$. Тоді $0 = \|Au\|_C \geq \alpha \|u\|_B \Rightarrow u = 0_B$ $\Rightarrow N(A) = \{0_B\}$. Таким чином, оператор ін'єктивний. Отже, $\exists A^{-1} : C \to B$. Тепер покажемо обмеженість A^{-1}. Нехай пара $\{u, f\} \in D(A) \times R(A) \,\Big|\, u = A^{-1} f$. Тоді $\|u\|_B = \|A^{-1} f\|_B \leq \dfrac{1}{\alpha} \|Au\|_C = \dfrac{1}{\alpha} \|f\|_C \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$. Отже, $A^{-1} \in \mathfrak{L}(C, B)$.■

▲ **Завдання 14.4.** Нехай оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ визначений за правилом $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \to Au = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, що дана квадратна матриця додатно визначена. Показати, що існує обернена матриця, яка також додатно визначена.

14.3. Двосторонні оцінки похибок наближеного розв'язку операторного рівняння

14.3.1. Означення. *Нехай оператор* $A \in \mathfrak{L}(B, C)$ *має* $A^{-1} \in \mathfrak{L}(C, B)$. *Параметр* $k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ *називається* ***числом обумовленості*** *оператора* A.

Повернемося до задачі про операторне рівняння (14.1). На практиці, зазвичай, розв'язують задачу.

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A : B \to C, \text{ елемент } f_h \in C, \\ B, C \text{ - банахові простори.} \\ \text{Знайти } \quad u_h \in B \,\Big|\, Au_h = f_h. \end{cases} \tag{14.2}$$

14.3.2. Теорема про двосторонні оцінки відносної похибки. *Нехай* $A \in \mathfrak{L}(B,C)$, $A^{-1} \in \mathfrak{L}(C,B)$, *і* u *розв'язок задачі (14.1), а* u_h *розв'язок (14.2). Тоді має місце така оцінка відносної похибки* $\frac{1}{k}\frac{\|f-f_h\|_C}{\|f\|_C} \le \frac{\|u-u_h\|_B}{\|u\|_B} \le k\frac{\|f-f_h\|_C}{\|f\|_C}$, $k \ge 1$.

Доведення. Позначимо через $e_h = u - u_h$ похибку апроксимації розв'язку задачі (14.1), а через $r_h = f - f_h = Au - Au_h = Ae_h$ похибку апроксимації правої частини задачі (14.1). Дана теорема показує, що верхня і нижня межа відносної похибки апроксимації розв'язку задачі залежить як від відносної похибки даних задачі, так і від числа обумовленості оператора цієї задачі. Грубо кажучи, якщо число обумовленості велике, то гіршими отримуються її наближені розв'язки. Враховуючи умови теореми, а також вищенаведені позначення, легко одержуємо такі нерівності: $\|r_h\|_C = \|Ae_h\|_C \le \|A\|\cdot\|e_h\|_B$, $\|e_h\|_B \le \|A^{-1}\|\cdot\|r_h\|_C$, $\|f\|_C \le \|A\|\cdot\|u\|_B$. Розглянемо $\frac{\|e_h\|_B}{\|f\|_C}$. Якщо збільшити знаменник і чисельник, то $\frac{\|e_h\|_B}{\|A\|\cdot\|u\|_B} \le \frac{\|e_h\|_B}{\|f\|_C} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|r_h\|_C}{\|f\|_C}$ $\Rightarrow \frac{\|e_h\|_B}{\|u\|_B} \le \underbrace{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}_{k}\frac{\|r_h\|_C}{\|f\|_C}$. Подібним чином можна отримати ліву частину нерівності $\frac{\|r_h\|_B}{\|A^{-1}\|\cdot\|f\|_C} \le \frac{\|r_h\|_B}{\|u\|_B} \le \frac{\|A\|\cdot\|e_h\|_B}{\|u\|_B}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{k}\frac{\|r_h\|_B}{\|f\|_C} \le \frac{\|e_h\|_B}{\|u\|_B}$. ■

14.4. Побудова оберненого оператора. Збіжність ряду Неймана

Припустимо, що нам потрібно розв'язати операторне рівняння (14.1). Оскільки розв'язок $u = A^{-1}f$, то оператор A^{-1} будемо шукати

за допомогою такої ітераційної процедури. Розглянемо, насамперед, тотожний оператор $E : B \to B$. Побудуємо оператор $M = E - A$. Тоді $u = (E - A)u + f = Mu + f$. Зафіксуємо $u_0 = f$ і покладемо

$$u_n = Mu_{n-1} + f = M\left(Mu_{n-2} + f\right) + f = \sum_{j=0}^{n} M^j f =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} M^j\right) f, M^j = \underbrace{M \ldots M}_{j}.$$

Внаслідок отримаємо послідовність $\{u_n\} \subset B$. Будемо сподіватися, що вона збіжна, тобто що $\exists u_* \in B \left| u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_* = \sum_{j=0}^{\infty} M^j f \right.$, а це означає, що $u_* = A^{-1} f$ розв'язок задачі (14.1), і $A^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} M^j = \sum_{j=0}^{\infty} (E - A)^j$.

14.4.1. Означення. *Нехай оператор* $A \in \mathfrak{L}(B, B) = \mathfrak{L}(B)$. *Величина* $r(A) = \lim_{n\to\infty} \left\| A^n \right\|^{\frac{1}{n}}$ *називається* ***спектральним радіусом*** *оператора* A.

Природно, що $r(A) = \inf_{n>1} \left\| A^n \right\|^{\frac{1}{n}}$. Операторні ряди типу $\sum_{n=0}^{\infty} (E - A)^n$ називаються *рядами Неймана*. Це степеневі ряди.

14.4.2. Теорема про збіжність ряду Неймана. *Нехай* $A \in \mathfrak{L}(B)$ *і* $r(A) \le \|A\| < 1$. *Тоді*

- *існує обернений оператор* $(E - A)^{-1} \in \mathfrak{L}(B)$;
- $(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$;

- $\left\|(E-A)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}$.

Доведення. Враховуючи умови теореми, $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n = \dfrac{1}{1-\|A\|}$. Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ є абсолютно збіжним в банаховому просторі $\mathfrak{L}(B)$. Тоді, згідно теореми про ознаку банахового простору, цей ряд збіжний. Тому $\exists \mathfrak{L}(B) \ni T = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Лишається показати, що $T = (E-A)^{-1}$. Подіємо оператором $I - A$ на оператор T. Внаслідок

$$(E-A)\cdot T = (E-A)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = A^0 = E.$$

З іншого боку, $T\cdot(E-A) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)\cdot(E-A) = E$. Отже, $T = (E-A)^{-1}$.■

14.4.3. Наслідок про коректність операторної задачі (14.1). *Нехай* $A \in \mathfrak{L}(B)$ *і* $M = I - A$ *задовольняють умови теореми про ряд Неймана. Тоді* $\forall f \in B \quad \exists! u \in B \quad \big| Au = f$ *і* $u = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(E-A)^n\right) f$, причому $\|u\|_B \le \dfrac{1}{1-\|E-A\|}\|f\|_B$.

15. Поповнення нормованих просторів та просторів зі скалярним добутком

Означення. *Дві фундаментальні послідовності* $\{u_n\}$ *і* $\{v_n\}$ *з нормованого простору* V *будемо називати* ***еквівалентними*** $\left(\{u_n\} \sim \{v_n\}\right)$, *якщо* $\|u_n - v_n\|_V \to 0$, $n \to \infty$.

15.1. Поповнення нормованого простору

15.1. Теорема про поповнення нормованого простору. *Будь-який нормований простір* V *можна трактувати як лінійний многовид, щільний у деякому банаховому просторі* B. *Простір* B *у разі цього будемо називати поповненням простору* V.

Доведення. Розглянемо всілякі фундаментальні послідовності $\{u_n\}$ простору V. Множину всіх цих послідовностей розіб'ємо на класи, що не перетинаються: дві такі послідовності $\{u_n\}$ і $\{u'_n\}$ віднесемо до одного класу тоді й лише тоді, коли $\{u_n\} \sim \{u'_n\}$. Множину всіх класів позначимо через B, а самі класи – через $\widehat{u}, \widehat{v}, \ldots$. Якщо $\{u_n\}$ належить до класу $\widehat{u}$, будемо писати $\{u_n\} \in \widehat{u}$ і називати представником класу $\widehat{u}$.

Перетворимо B у нормований простір. Операцію *додавання класів* $\widehat{u}$ і $\widehat{v}$ визначимо так: якщо $\{u_n\} \in \widehat{u}$ і $\{v_n\} \in \widehat{v}$, то сумою $\widehat{u} + \widehat{v}$ називатимемо клас, який містить $\{u_n + v_n\}$. Наше означення $\widehat{u} + \widehat{v}$ не залежить від вибору представників класів $\widehat{u}$ і $\widehat{v}$. Якщо $\{u'_n\} \in \widehat{u}$, $\{v'_n\} \in \widehat{v}$, то $\{u_n + v_n\} \sim \{u'_n + v'_n\}$, і тому $\{u'_n + v'_n\} \in \widehat{u} + \widehat{v}$. Розглянемо також у B операцію *множення класу на скаляр*: класом $\lambda\widehat{u}$ називатимемо клас, що містить $\{\lambda u_n\}$, якщо $\{u_n\} \in \widehat{u}$. Вірогідно, що визначення класу $\lambda\widehat{u}$ не залежить від вибору представника класу $\widehat{u}$.

Оскільки наше визначення операцій у B зводиться до операцій над елементами з лінійного простору V, то B також є лінійним простором. У ролі нульового елемента виступає клас $\widehat{0}$ з представником $\{0_V\}$.

Визначимо тепер у B норму. Нехай $\{u_n\} \in \widehat{u}$. Покладемо $\|\widehat{u}\|_B \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V$. Зауважимо, що ця границя існує, оскільки $\{\|u_n\|_V\}$ фундаментальна. Дійсно, $\left|\|u_n\|_V - \|u_m\|_V\right| \le \|u_n - u_m\|_V$. Тому послідовність $\{\|u_n\|_V\}$ збіжна, внаслідок критерію Коші для числових послідовностей. Крім цього, границя не залежить від вибору представника класу $\widehat{u}$. Якщо також $\{u_n'\} \in \widehat{u}$, то $\left|\|u_n\|_V - \|u_n'\|_V\right| \le \|u_n - u_n'\|_V \to 0$, $n \to \infty$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n'\|_V$. Легко перевірити аксіоми норми у B. Таким чином, B – нормований простір.

Покажемо, що V *можна ототожнити з деяким лінійним многовидом у* B. Елемент $u \in V$ ототожнимо з класом, який містить стаціонарну послідовність $\{u\}$, тобто $u, u, u, \ldots$. Такий клас будемо позначати через u. Ясно, що λu – це клас, який містить $\{\lambda u\}$, а $u + v$ – клас, який містить $\{u + v\}$. Таким чином, множина всіх класів, які містять стаціонарні послідовності, є лінійним многовидом у B. Для цього лінійного многовиду збережемо позначення V.

Покажемо, що V *щільна в* B. Нехай клас $u \in V$, тоді $\|u\|_B = \|u\|_V$, як границя сталої. Нехай $\widehat{u} \in B$. Покажемо, що існує $\{u_n\} \subset V$ така, що $\|u_n - \widehat{u}\|_B \to 0$, $n \to \infty$. Нехай $\{u_n\} \in \widehat{u}$. Із фундаментальності $\{u_n\}$ випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, що для $\forall n, m > N \quad \|u_n - u_m\|_V < \varepsilon$. Фіксуємо $n > N$ і зауважимо, що $\lim\limits_{m\to\infty} \|u_n - u_m\|_V = \|u_n - \widehat{u}\|_B$, де $\{u_n\} \in \widehat{u}$ як стаціонарна послідовність. Перейшовши в нерівності $\|u_n - u_m\|_V < \varepsilon$ до границі при

$m \to \infty$ та, використовуючи попереднє зауваження, отримаємо $\|u_n - \widehat{u}\|_B \le \varepsilon$. Це і означає, що $u_n \to \widehat{u}$, $n \to \infty$.

І нарешті, доведемо, що B – *банахів простір*. Нехай послідовність $\{\widehat{u}_n\}$ – фундаментальна в B. Враховуючи те, що V щільна в B, знайдемо $\{u_n\} \subset V$ таку, що $\|u_n - \widehat{u}_n\|_B < \dfrac{1}{n}$. Покажемо, що $\{u_n\}$ фундаментальна. Це випливає із нерівності

$$\|u_n - u_m\|_B \le \|u_n - \widehat{u}_n\|_B + \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_m\|_B + \|\widehat{u}_m - u_m\|_B <$$

$$< \frac{1}{n} + \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_m\|_B + \frac{1}{m}, \quad n, m \to \infty.$$

Тоді існує клас $\widehat{u}$, який містить $\{u_n\}$. Покажемо, що $\widehat{u}_n \to \widehat{u}$, $n \to \infty$. Дійсно,

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}\|_B \le \|\widehat{u}_n - u_n\|_B + \|u_n - \widehat{u}\|_B < \frac{1}{n} + \|u_n - \widehat{u}\|_B \to 0,\ n \to \infty. \blacksquare$$

Нехай тепер простір V є простором зі скалярним добутком (u, v). Поповнюючи V як нормований простір з нормою $\|u\|_V = (u, u)^{1/2}$, ми отримаємо банахів простір H, елементами якого є класи $\widehat{u}$ фундаментальних послідовностей $\{u_n\}$. Покажемо, що H – простір зі скалярним добутком, і, внаслідок своєї повноти, є гільбертовим. Нехай $\widehat{u}, \widehat{v} \in H$, а $\{u_n\}$ і $\{v_n\}$ – представники цих класів. Визначимо в H скалярний добуток $(\widehat{u}, \widehat{v}) \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(u_n, v_n)$. У разі цього виявляється, що $(\widehat{u}, \widehat{u}) = \lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_V^2 = \|\widehat{u}\|_H^2$.

15.2. Простір Лебега з погляду теореми про поповнення

Визначимо банахів простір $L(a,b)$ як поповнення нормованого простору $\tilde{L}^1([a,b])$. Нагадаємо, що елементами $\tilde{L}^1([a,b])$ є неперервні на $[a,b]$ функції $u(t)$ з нормою $\|u\| = \int_a^b |u(t)|\,dt$.

15.2.1. Означення. *Нехай* $\{u_n(t)\}$ *і* $\{u_n'(t)\}$ *– дві послідовності неперервних на* $[a,b]$ *функцій. Якщо послідовність* $\{u_n(t) - u_n'(t)\}$ *є нескінченно малою в* $\tilde{L}^1([a,b])$, *тобто при* $n \to \infty$ $\|u_n - u_n'\| = \int_a^b |u_n(t) - u_n'(t)|\,dt \to 0$, *то послідовності* $\{u_n(t)\}$ *і* $\{u_n'(t)\}$ *будемо називати* ***еквівалентними в*** $\tilde{L}^1([a,b])$, *або* ***еквівалентними в середньому***.

15.2.2. Означення. *Послідовність* $\{u_n(t)\}$ *неперервних на* $[a,b]$ *функцій будемо називати* ***фундаментальною в*** $\tilde{L}^1([a,b])$, *або* ***фундаментальною в середньому***, *якщо* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$, *що для* $\forall n > N$ *і* $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|u_{n+p} - u_n\| = \int_a^b |u_{n+p}(t) - u_n(t)|\,dt < \varepsilon$.

Згідно з теоремою про поповнення, простір Лебега $L(a,b)$ складається з елементів $\hat{u}(t)$, які є класами еквівалентних у середньому і фундаментальних у середньому послідовностей неперервних функцій. Дві фундаментальні в середньому послідовності $\{u_n(t)\}$ і $\{u_n'(t)\}$ є представниками одного класу тоді й лише тоді, коли вони еквівалентні в середньому. Якщо $\{u_n(t)\} \in \hat{u}(t)$, то, за означенням,

$$\|\hat{u}\|_{L(a,b)} \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b |u_n(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\tilde{L}^1([a,b])}. \qquad (15.1)$$

Проведемо аналогію з ірраціональними числами. Їх можна трактувати як деякі ідеальні елементи, скільки завгодно добрі наближення до яких отримують за допомогою раціональних чисел. Так і елементи простору $L(a,b)$ ми можемо розглядати як деякі ідеальні функції, наблизитись до яких практично завжди можна за допомогою неперервних функцій. Більше того, будемо називати інтегралом Лебега від функції $\left|\widehat{u}(t)\right|$, де $\widehat{u}(t) \in L(a,b)$, вираз (15.1), тобто за означенням

$$\int_a^b \left|\widehat{u}(t)\right| dt \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left|u_n(t)\right| dt$$

(зліва – інтеграл Лебега, справа – інтеграл Рімана).

Виявляється, що ідеальні елементи (класи) простору $L(a,b)$ можна ототожнити з деякими конкретними розривними функціями.

У першу чергу зауважимо, що, згідно з теоремою про поповнення, простір $L(a,b)$ містить усі неперервні на $[a,b]$ функції. Розуміти це треба так. Розглянемо клас, представником якого є стаціонарна послідовність $\{u(t)\}$ де $u(t)$ неперервна на $[a,b]$. Цей клас ми ототожнимо з функцією $u(t)$ і позначаємо також $u(t)$. Крім функції $u(t)$ клас $u(t)$ містить також розривні функції, які, наприклад, відрізняються від функції $u(t)$ в скінченній кількості точок.

Цю ідею можна розвивати далі: деякі розривні функції можна трактувати як границі в метриці $\tilde{L}^1([a,b])$ фундаментальних послідовностей неперервних функцій. Кожну таку розривну функцію можна ототожнити з деяким класом з $L(a,b)$.

Нехай функція $u(t)$ неперервна на $[a,b]$, за виключенням скінченної кількості точок розриву першого роду. Покажемо, що тоді існує фундаментальна в середньому послідовність неперервних на $[a,b]$ функцій $\{u_n(t)\}$, яка збігається до $u(t)$ в середньому.

Нехай $u(t)$ має точки розриву $a < t_1 < \ldots < t_l < b$, причому $u(t_k) = \frac{1}{2}\left[u_+(t_k) + u_-(t_k)\right]$, де $u_+(t_k)$ і $u_-(t_k)$ – границі $u(t)$ в точці t_k, відповідно справа і зліва.

Оточимо кожну точку розриву t_k околом $(t_k - \delta, t_k + \delta)$, де δ вибираємо настільки малим, щоб $a < t_k - \delta$, $t_k + \delta < b$, а самі околи не перетиналися. Визначимо послідовність неперервних функцій

$$u_n(t) = \begin{cases} u(t), t \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{l} (t_k - \delta/n, t_k + \delta/n), \\ \left(1 - \frac{n}{2\delta}\left(t - t_k + \frac{\delta}{n}\right)\right) u\left(t_k - \frac{\delta}{n}\right) + \\ \qquad + \frac{n}{2\delta}\left(t - t_k + \frac{\delta}{n}\right) u\left(t_k + \frac{\delta}{n}\right), \\ t \in (t_k - \delta/n, t_k + \delta/n), k = \overline{1,l}. \end{cases}$$

Доведемо, що $\{u_n(t)\}$ фундаментальна в $\tilde{L}^1([a,b])$. Нехай $M \overset{def}{=} \sup\limits_{t \in [a,b]} |u(t)|$. Тоді $\sup\limits_{t \in [a,b]} |u_n(t)| \le M$,

$$\|u_{n+p} - u_n\| = \int_a^b |u_{n+p}(t) - u_n(t)| dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \int_{t_k - \delta/n}^{t_k + \delta/n} |u_{n+p}(t) - u_n(t)| dt \le 2Ml \cdot 2\frac{\delta}{n} \to 0,$$

$n \to \infty$. Таким чином, $\{u_n(t)\}$ фундаментальна. Аналогічно можна показати, що в цій самій нормі $u_n(t) \to u(t)$, $n \to \infty$. Тому клас, представником якого є $\{u_n(t)\}$ можна ототожнити з розривною функцією $u(t)$.

15.1. Приклад. Покажемо, що $\frac{1}{\sqrt{t}} \in L(0,2)$. Для цього розглянемо послідовність функцій $u_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, t \in \left[\frac{1}{n}, 2\right], \\ \sqrt{n}, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$ Маємо

$$\left\|u_{n+p} - u_n\right\| = \int_0^2 \left|u_{n+p}(t) - u_n(t)\right| dt =$$

$$= \int_0^{(n+p)^{-1}} \left(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right) dt + \int_{(n+p)^{-1}}^{1/n} \left(\sqrt{1/t} - \sqrt{n}\right) dt \le$$

$$\le \frac{\sqrt{n+p} - \sqrt{n}}{n+p} + \int_0^{1/n} \left(\sqrt{1/t} - \sqrt{n}\right) dt =$$

$$= \frac{p}{(n+p)\left(\sqrt{n+p} + \sqrt{n}\right)} + \left(2\sqrt{t} - t\sqrt{n}\right)\Big|_0^{1/n} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}},$$

тобто $\{u_n(t)\}$ фундаментальна. Крім цього, $\int_0^2 u_n(t)\,dt \to \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$, де інтеграл справа слід розуміти як невласний.

15.2.3. Простори Лебега $L^p(\Omega)$, $p \ge 1$. Нехай Ω обмежена область в $\mathbb{R}^n$, а $\overline{\Omega}$ – її замикання. Простір Лебега $L^p(\Omega)$ є, за означенням, поповненням простору $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$. Елементами простору $L^p(\Omega)$ є деякі „функції”, наблизитися до яких як завгодно добре (в середньому) мож-

на за допомогою неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій, оскільки $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$ щільна в $L^p\left(\Omega\right)$.

Послідовність неперервних функцій $\left\{u_n\left(x\right)\right\}$, $x \in \overline{\Omega}$, є фундаментальною в $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$, або фундаментальною в середньому на $\overline{\Omega}$ з показником p, якщо

$$\left\|u_n - u_m\right\|^p_{\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)} = \int\limits_{\overline{\Omega}} \left|u_n\left(x\right) - u_m\left(x\right)\right|^p dx \to 0\,,\ n, m \to \infty\,,$$

причому $\left\{u_n\left(x\right)\right\} \sim \left\{u_n^*\left(x\right)\right\}$ означає, що

$$\left\|u_n - u_n^*\right\|^p_{\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)} = \int\limits_{\overline{\Omega}} \left|u_n\left(x\right) - u_n^*\left(x\right)\right|^p dx \to 0\,,\ n \to \infty\,.$$

У цих формулах маємо на увазі *n*-кратні інтеграли Рімана по області $\overline{\Omega}$.

Згідно з теоремою про поповнення, елементи $L^p\left(\Omega\right)$ – це класи $\widehat{u}\left(x\right)$ фундаментальних у середньому послідовностей. Дві такі послідовності відносяться до одного класу тоді й лише тоді, коли вони еквівалентні в середньому.

Як і раніше, всі неперервні та деякі розривні на $\overline{\Omega}$ функції можна ототожнити з деякими класами в $L^p\left(\Omega\right)$.

Зауважимо, що всі простори $L^p\left(\Omega\right)$ є сепарабельними. Дійсно, будь-яку функцію з $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$ можна наблизити в метриці $C\left(\overline{\Omega}\right)$ і тим більше в метриці $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$ множиною многочленів з раціональними коефіцієнтами. Внаслідок щільності $\tilde{L}^p\left(\overline{\Omega}\right)$ ця множина многочленів буде щільною і в $L^p\left(\Omega\right)$.

Виділимо окремо простір $L^2\left(\Omega\right)$ – поповнення простору із скалярним добутком $\tilde{L}^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Відповідно до попереднього, $L^2\left(\Omega\right)$ –

гільбертів простір. Скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ визначається як границя

$$(u,v) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{\overline{\Omega}} u_n(x)\overline{v_n(x)}dx,$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – класи, а $\{u_n(x)\}$ і $\{v_n(x)\}$ – їх представники, тобто фундаментальні в середньому послідовності неперервних функцій.

Приймемо за

15.2.4. Означення. *Для* $u, v \in L^2(\Omega)$ *будемо називати* (u,v) *n-кратним інтегралом Лебега від добутку* $u\overline{v}$ *по області* Ω, *тобто* $\int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\overline{\Omega}} u_n(x)\overline{v_n(x)}dx$.

Вибираючи, зокрема, $v(x) \equiv 1$ – клас, представником якого є послідовність $\{1\}$, $x \in \overline{\Omega}$, отримаємо для $u \in L^2(\Omega)$ $\int_{\Omega} u(x)dx \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\overline{\Omega}} u_n(x)dx$. Ми визначили для всіх класів $u \in L^2(\Omega)$ інтеграл Лебега як границю рімановських інтегралів від представників. Неважко переконатися в тому, що визначений інтеграл Лебега володіє певними властивостями інтеграла Рімана.

15.3. Ізоморфізм, ізометрія та вкладання нормованих і банахових просторів

15.3.1. Означення. *Нормовані простори* V *і* Y *називаються* ***ізоморфними***, *якщо всюди на* V *визначена лінійна функція* $y = I(v)$ *із значеннями в* Y, *яка здійснює ізоморфізм* V *і* Y *як лінійних просторів і така, що існують константи* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$ *такі, що нерівність* $\alpha\|v\|_V \le \|I(v)\|_Y \le \beta\|v\|_V$ *виконується* $\forall v \in V$. *Якщо* $\|I(v)\|_Y = \|v\|_V$, *то* V *і* Y *будемо називати лінійно* ***ізометричними***.

Наприклад, будь-який n-вимірний дійсний нормований простір ізоморфний $\mathbb{C}^n$.Отже, всі такі простори ізоморфні між собою.

Більш загальним поняттям, порівняно з ізоморфізмом, є поняття вкладання нормованих просторів, із яких один чи обидва можуть бути банаховими.

15.3.2. Означення. *Будемо говорити, що нормований простір* V ***вкладається*** *в нормований простір* Y *, якщо скрізь на* V *задана лінійна функція* $I(v)$ *, причому існує константа* $\beta > 0$ *така, що нерівність* $\|I(v)\|_Y \le \beta \|v\|_V$ *виконується* $\forall v \in V$ *. Якщо* $\|I(v)\|_Y = \|v\|_V$ *, то будемо говорити, що вкладання* V *і* Y ***ізометричне****.*

15.2. Приклад. Наведемо приклади вкладання просторів.

- Простір $\mathbb{C}^k$ вкладається в $\mathbb{C}^n$ при $k \le n$.
- Простір $l_2^{(m)}$ вкладається в l_2. Дійсно, можна покласти $I\left(\{v_i\}_{i=1}^m\right) \overset{def}{=} \{y_i\}_{i=1}^\infty$, причому $y_i = \begin{cases} v_i, i \le m, \\ 0, i > m. \end{cases}$
- Згідно з теоремою про поповнення, будь-який (неповний) нормований простір може бути ізометрично і щільно вкладений у банахів простір – своє поповнення.
- Простір $C([a,b])$ вкладається в $\tilde{L}^p([a,b])$.

15.4. Простір Соболєва з погляду теореми про поповнення

Розглянемо на $[a,b]$ простір $\tilde{H}^1([a,b])$, який складається із функцій $u(x)$, неперервно диференційованих на $[a,b]$, зі скалярним добутком

$$(u,v) \overset{def}{=} \int_a^b u(x)v(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \qquad (15.2)$$

і відповідно до цього скалярного добутку нормою

$$\|u\|_{\tilde{H}^1([a,b])} \overset{def}{=} \left(\int_a^b \left(u^2(x) + \left(u'(x)\right)^2 \right) dx \right)^{1/2}. \qquad (15.3)$$

Простір $H^1(a,b)$ є поповненням $\tilde{H}^1([a,b])$ в цій нормі. Елементами $H^1(a,b)$, згідно з теоремою про поповнення, є класи, які складаються з послідовностей $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^1([a,b])$ фундаментальних у $\tilde{H}^1([a,b])$ в середньому, тобто таких, що $\int_a^b \left(|u_n(x) - u_m(x)|^2 + |u_n'(x) - u_m'(x)|^2 \right) dx \to 0$, $n, m \to \infty$. Дві такі послідовності $\{u_n(x)\}$ і $\{\hat{u}_n(x)\}$ належать до одного класу, якщо $\{u_n(x) - \hat{u}_n(x)\}$ є нескінченно малою в метриці $\tilde{H}^1([a,b])$, тобто якщо $\int_a^b \left(|u_n - \hat{u}_n|^2 + |u_n' - \hat{u}_n'|^2 \right) dx \to 0$, $n \to \infty$. Із фундаментальності в середньому $\{u_n(x)\}$ в $\tilde{H}^1([a,b])$ випливає, що окремо при $n, m \to \infty$ $\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 \, dx \to 0$, $\int_a^b |u_n'(x) - u_m'(x)|^2 \, dx \to 0$. Подібним чином із умови еквівалентності $\{u_n(x)\}$ і $\{\hat{u}_n(x)\}$ в метриці $\tilde{H}^1([a,b])$ випливає: $\int_a^b |u_n - \hat{u}_n|^2 \, dx \to 0$, $\int_a^b |u_n' - \hat{u}_n'|^2 \, dx \to 0$.

Відповідно до означення простору $L^2(a,b)$, існують функції $u \in L^2(a,b)$ і $w \in L^2(a,b)$ такі, що при $n \to \infty$, $u_n \to u$, а $u_n' \to w$ в середньому.

15.4.1. Означення. *Нехай* $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^1([a,b])$. *Тоді в* $L^2(a,b)$ *визначені елемент* u *з представником* $\{u_n\}$ *і елемент* w *з предста-*

вником $\{u_n'\}$. *Елемент* w *називається* ***узагальненою похідною*** *(в сенсі Соболєва) від функції* u, *при цьому пишуть* $w(x) = u'(x)$.

Наведемо деякі властивості узагальненої похідної: якщо $u_1, u_2 \in H^1(a,b)$, то $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H^1(a,b)$ і $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)'(x) = \lambda_1 u_1'(x) + \lambda_2 u_2'(x)$.

Із означення узагальненої похідної видно, що вона визначається не локально, в окремих точках, а глобально – одразу на всьому $[a,b]$. Нехай $u_n, v_n \in \tilde{H}^1([a,b])$, $n = 1, 2, \ldots$, так, що $\{u_n\} \in u \in H^1(a,b)$, $\{v_n\} \in v \in H^1(a,b)$. Перейдемо до границі при $n \to \infty$ в рівностях

$$(u_n, v_n) = \int_a^b u_n(x) v_n(x)\,dx + \int_a^b u_n'(x) v_n'(x)\,dx, \qquad (15.4)$$

$$\|u_n\|_{\tilde{H}^1([a,b])} = \left(\int_a^b \left(u_n^2(x) + (u_n'(x))^2 \right) dx \right)^{1/2} \qquad (15.5)$$

і, згідно з теоремою про поповнення і означенням інтеграла Лебега, прийдемо до формул (15.2), (15.3), де тепер похідні розуміємо в узагальненому сенсі, а інтеграл – в сенсі Лебега. Для конкретних обчислень можна використати формули (15.4) і (15.5), беручи досить велике *n*, тобто, замість ідеальних елементів u, v, u' і v', узяти їх гладкі наближення u_n, v_n, u_n' та v_n'.

Розглянемо ще одне означення узагальненої похідної. Нехай $\overset{0}{C}{}^1([a,b])$ – множина всіх неперервно диференційованих на $[a,b]$ фінітних функцій $v(x)$. Якщо тепер $u(x)$ неперервно диференційована на $[a,b]$, то $\forall v(x) \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int_a^b u(x) v'(x)\,dx = -\int_a^b u'(x) v(x)\,dx, \qquad (15.6)$$

яка перевіряється інтегруванням частинами. Цією тотожністю похідна u' повністю визначається. Припустимо також, що $\forall v(x) \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$ і деякої неперервної на $[a,b]$ функції w

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = -\int_a^b w(x)v(x)\,dx. \qquad (15.7)$$

Віднімаючи ці тотожності, отримаємо $\forall v(x) \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$

$$\int_a^b \left(u'(x) - w(x)\right)v(x)\,dx = 0.$$

Звідки, внаслідок щільності $\overset{0}{C}{}^1([a,b])$ в $\tilde{L}^2([a,b])$, $w = u'$ на $[a,b]$. Виявляється, що інтегральну тотожність (6.7) можна прийняти за означення узагальненої похідної. Передусім справедливі такі леми.

15.4.2. Лема. *Якщо* $u \in H^1(a,b)$, *то* $\forall v(x) \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$ *справедлива тотожність (15.6).*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \in u$, тоді $\forall v(x) \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$ маємо (15.6):

$$\int_a^b u_n(x)v'(x)\,dx = -\int_a^b u_n'(x)v(x)\,dx.$$

Внаслідок неперервності скалярного добутку, в останній рівності можна перейти до границі при $n \to \infty$. Внаслідок отримаємо тотожність (15.6) для $\forall u \in H^1(a,b)$.■

15.4.3. Лема. *Нехай* $u \in H^1(a,b)$, $w \in L^2(a,b)$ *такі, що* $\forall v \in \overset{0}{C}{}^1([a,b])$ *справедлива тотожність (15.7). Тоді* $w = u'$ *(узагальнена похідна).*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \in u$, а $\{w_n\} \in w$. Тоді

$$\int_a^b \left(u_n(x)v'(x)+w_n(x)v(x)\right)dx=\int_a^b \left(w_n(x)-u_n'(x)\right)v(x)\,dx\to 0,$$

$n\to\infty$, $\forall v\in \overset{0}{C}{}^1\left(\left[a,b\right]\right)$.

Нехай $z\in L^2\left(\left[a,b\right]\right)$ – клас, представником якого є $\left\{w_n-v_n'\right\}$. Тоді $\int_a^b z(x)v(x)\,dx=0\ \ \forall v\in \overset{0}{C}{}^1\left(\left[a,b\right]\right)$. Тому $z(x)\equiv 0$.■

15.4.4. Теорема про вкладання. $H^1(a,b)$ *вкладається в* $C\left(\left[a,b\right]\right)$.

Доведення. Нехай $u(x)$ неперервно диференційована на $\left[a,b\right]$. Згідно з теоремою про середнє, внаслідок неперервності $u(x)$, знайдеться точка $\xi\in\left[a,b\right]$ така, що $u(\xi)=(b-a)^{-1}\int_a^b u(t)\,dt$. Тому на $\left[a,b\right]$ справедлива тотожність

$$u(x)=\int_\xi^x u'(t)\,dt+(b-a)^{-1}\int_a^b u(t)\,dt.$$

За допомогою нерівності КБШ маємо

$$\left|u(x)\right|\le\int_a^b\left|u'(t)\right|dt+(b-a)^{-1}\int_a^b\left|u(t)\right|dt\le$$

$$\le\sqrt{b-a}\left(\int_a^b\left(u'(x)\right)^2dx\right)^{1/2}+\sqrt{(b-a)^{-1}}\left(\int_a^b u^2(x)\,dx\right)^{1/2}\le$$

$$\le K\left\|u\right\|_{\tilde{H}^1([a,b])},$$

де $K=2\max\left\{\sqrt{b-a},\sqrt{(b-a)^{-1}}\right\}$. Отже, для довільної неперервно диференційованої на $\left[a,b\right]$ функції справедлива нерівність $\left\|u\right\|_{C([a,b])}\le K\left\|u\right\|_{\tilde{H}^1([a,b])}$, $K=const>0$.

Нехай тепер послідовність $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^1([a,b])$ фундаментальна в метриці $\tilde{H}^1([a,b])$. Тоді $\|u_n - u_m\|_{C([a,b])} \le K\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^1([a,b])} \to 0$, $n,m \to \infty$. Отже, $\{u_n(x)\}$ –фундаментальна в розумінні рівномірної збіжності й за критерієм Коші рівномірної збіжності збігається до $u \in C([a,b])$. Тим більше, $u_n \to u$, $n \to \infty$, у середньому. Таким чином, у класі з $L^2(a,b)$, що містить $\{u_n\}$ представником, міститься неперервна функція $u(x)$, і тому цей клас можна ототожнити з $u(x)$. Ототожнимо елементи з $H^1(a,b)$ з неперервними функціями. Нехай $\{u_n\} \in u$. Перейшовши в нерівності $\|u\|_{C([a,b])} \le K\|u\|_{\tilde{H}^1([a,b])}$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо те, що потрібно.■

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Банах С.* Курс функціонального аналізу. – Київ: Рад. школа, 1948. – 216 с.
3. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Київ: Вища школа, 1990. – 600 с.
4. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. – М.: Мир, 1974. – 128 с.
5. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. – М.: Наука, 1969. – 746 с.
6. *Горстко А. Б.* Познакомьтесь с математическим моделированием. – М.: Знание, 1991. – 160 с.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Г.* Линейные операторы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1974. – 661 с.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750 с.
11. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 447 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
13. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 218 с.
14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
16. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
17. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. – 520 с.
18. *Лянце В. Э.* Лекции по функциональному анализу. – Львов: Вища школа, 1975. – 111 с.
19. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

20. *Морен К.* Методы гильбертового пространства. – М.; Мир, 1965. – 572 с.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
22. *Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці. – Львів: Світ поліграфія, 1998. – 184 с.
23. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 389 с.
24. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
25. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
26. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
27. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
28. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.
29. *Треногин В. А., Писаревский В. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
30. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
31. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теория операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.
32. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

Зміст

1. Вступ 3
1.1. Місце функціонального аналізу в наукових дослідженнях 3
1.2. Множини 6
1.3. Оператор, функціонал, функція 7
1.4. Інтегровані функції. Інтеграл Лебега.....9
2. Лінійні простори 14
2.1. Ознака лінійного простору 14
2.2. Приклади лінійних просторів.....15
2.3. Основні структури лінійних просторів.....16
3. Лінійні нормовані простори 27
3.1. Абстрактні операторні задачі 27
3.2. Метрика 28
3.3. Норма.....28
3.4. Геометричні поняття та структури 32
3.5. Простір лінійних обмежених операторів 33
3.6. Простір лінійних обмежених функціоналів 34
3.7. Простори Лебега.....35
3.8. Простори Соболєва 39
4. Послідовності. Поняття щільності 41
4.1. Послідовності в лінійному нормованому просторі 41
4.2. Щільні та замкнені множини.....42
4.3. Щільність простору неперервних кусково-лінійних функцій 43
5. Неперервність операторів та функціоналів 48
6. Рівномірна збіжність в C(Ω). Рівномірна неперервність оператора 53
6.1. Рівномірна збіжність в C(Ω). Замкненість C(Ω). 53
6.2. Рівномірна неперервність оператора 55
7. Простори зі скалярним добутком 56
7.1. Структура унітарного простору 56
7.2. Властивості скалярного добутку.....57
7.3. Приклади просторів зі скалярним добутком.....60
8. Скінченновимірні підпростори унітарного простору 63
8.1. Ознака лінійної незалежності в унітарному просторі 63
8.2. Задача про найкраще наближення 65
9. Ортогональність і біортогональність 67
9.1. Ортогональність 67
9.2. Процес ортогоналізації Соніна-Шмідта 68
9.3. Ортонормованість та біортогональність 69
10. Банахові простори 72
10.1. Ознака повної множини в банаховому просторі 72

10.2. Повнота простору C(Ω) 73
10.3. Повнота простору $\mathfrak{L}(U,B)$ 75
10.4. Продовження лінійного неперервного оператора 77
10.5. Обмежені послідовності в $\mathfrak{L}(B,C)$ 78
10.6. Простір $B' = \mathfrak{L}(B,\mathbb{C})$ 80
10.7. Квадратурні формули 81
10.8. Слабка збіжність у банаховому просторі 83
10.9. Продовження лінійного неперервного функціоналу 84
10.10. Ряди в банахових просторах 89
11. Принцип стискуючих відображень 92
11.1. Теорема про стискуюче відображення 92
11.2. Застосування принципу стискуючих відображень до розв'язування абстрактного операторного рівняння 93
11.3. Застосування принципу стискуючих відображень до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння 94
11.4. Застосування принципу стискуючих відображень у лінійній алгебрі 96
12. Гільбертові простори (Hilbert) 100
12.1. Основна теорема гільбертових просторів 100
12.2. Варіаційні нерівності 102
12.3. Ортогональні проекції 103
12.4. Ортогональне доповнення 104
12.5. Щільність у гільбертовому просторі 105
12.6. Структура спряженого простору 106
13. Ряди Фур'є 109
14. Обернений оператор 113
14.1. Ознака ін'єктивності лінійного оператора 113
14.2. Ознака обмеженого оберненого оператора 114
14.3. Двосторонні оцінки похибок наближеного розв'язку операторного рівняння 116
14.4. Побудова оберненого оператора. Збіжність ряду Неймана ... 117
15. Поповнення нормованих просторів та просторів зі скалярним добутком 120
15.1. Поповнення нормованого простору 120
15.2. Простір Лебега з погляду теореми про поповнення 123
15.3. Ізоморфізм, ізометрія та вкладання нормованих і банахових просторів 128
15.4. Простір Соболєва з погляду теореми про поповнення 129
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 135

Навчальне видання

Вагін Петро Петрович,
Остудін Борис Анатолійович,
Шинкаренко Георгій Андрійович

Основи функціонального аналізу

Курс лекцій

Редактор *Марія Ревега*
Технічний редактор *Світлана Сеник*
Коректор *Руслана Спринь*
Комп'ютерний набір і верстка *Петро Вагін*

Підп. до друку 31.08.2005. Формат 60×84/16. Папір друк.
Друк на різогр. Гарнітура Times New Roman. Умовн. друк. арк. 5,5.
Обл.-вид. арк. 5,6. Тираж 100 прим. Зам.

Видавничий центр
Львівського національного університету імені Івана Франка.
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.