## Практичні завдання з курсу «Чисельні методи»

**Завдання №1** (10 балів) Програмна реалізація методів простої ітерації, хорд і дотичних.

Створити програму для обчислення заданого рівняння методом простої ітерації, методом хорд і методом дотичних. До кожного методу вибрати рівняння, яке б задовольняло умовам збіжності (всі рівняння повинні бути досить складними і унікальними). На графіку повинен бути проілюстрований процес збіжності до точного розв'язку, окремо виведені значення послідовності наближень.

1. Метод простої ітерації

$x = \varphi(x)$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

2. Метод хорд

$f(x) = 0$

Якщо *f(b)*f''(x)>0* на *[a, b]*, то $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$ $(x_0=a)$

Якщо *f(a)*f''(x)>0* на *[a, b]*, то $x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$ $(x_0=b)$

3. Метод дотичних (метод Ньютона)

$f(x) = 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Якщо *f(a)*f''(x)>0* на *[a, b]*, то $(x_0=a)$.

Якщо *f(b)*f''(x)>0* на *[a, b]*, то $(x_0=b)$

**Завдання 2.** (10 балів) Програмна реалізація методу Ньютона та градієнтного методів.

Реалізувати програмне забезпечення для розв'язування системи нелінійних рівнянь методом Ньютона (5 балів) та градієнтним (5 балів) методом з заданою точністю для системи з 2-ох рівнянь. Ітераційний процес проілюструвати на графіку.

*Рекомендації: наглядні демонстраційні рівняння, а також початкові наближення при здачі завдання можна підібрати вже реалізувавши метод орієнтуючись по результатах на графіку.*

*Очевидно, що початкове наближення, точність обчислень повинні задаватись на формі програми, при цьому, задання самих функцій та їх похідних допускається в коді програми. Розв'язувати результуючу СЛАР на кожному кроці доцільно методом Гауса, зважаючи, що на діагоналі можуть виникати 0-лі.*

1) Метод Ньютона:

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - f_x^{-1}(x^{(m)})\, f(x^{(m)}), \quad f_x(x^{(m)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \end{bmatrix}$$

Розгорнутий варіант:

$$[x_1,\dots,x_n]^{(m+1)} = [x_1,\dots,x_n]^{(m)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \\ \vdots \\ f_n([x_1,\dots,x_n]^{(m)}) \end{bmatrix}$$

Після спрощень:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^{(m)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^{(m)}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^{(m)}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (x_1^{(m+1)} - x_1^{(m)}) \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x^{(m)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(m)}) \end{bmatrix}$$

2) Градієнтний метод:

Допоміжна функція: $\Phi(x) = \Phi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1,\dots,x_n)$

Вектор найшвидшого зростання: $grad\left(\Phi(x^{(k)})\right) = \left[\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_n}\right]$

Метод:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_i}\right)^2}\left[grad\left(\Phi(x^{(k)})\right)\right], \quad x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_i}\right)^2}\frac{\partial\Phi(x^{(k)})}{\partial x_j}$$

Умова закінчення іт. проц.: $\Phi(x^{(k)}) - \Phi(x^{(k+1)}) < \varepsilon$

**Завдання № 3** (10 балів) Програмна реалізація побудови інтерполяційних многочленів Ньютона для інтерполювання вперед для нерівновіддалених і рівновіддалених вузлів інтерполювання.

Створити застосування для інтерполювання функцій за заданими її значеннями у вузлах. Зобразити на графіку інтерполяцію на заданому відрізку з заданим кроком. Повинна бути можливість задавати вузли інтерполювання і їх кількість, а також відрізок інтерполювання.

Для випадку рівновіддалених вузлів – початкове значення, крок та кількість, для нерівновіддалених – можливість задання кожного значення окремо. Для довільної точки з відрізку інтерполювання забезпечити можливість отримання значення інтерполяційного многочлена.

Інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання вперед у разі нерівновіддалених вузлів інтерполювання:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \\ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$$

Розділені різниці:

$$\left[\begin{array}{l}
1)\quad \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1), \quad \ldots \quad , \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n); \\
2)\quad \dfrac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0; x_1; x_2), \quad \ldots \quad , \dfrac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) \\
\qquad \ldots \\
k)\quad \dfrac{f(x_1; x_2; \ldots; x_k) - f(x_0; x_1; \ldots; x_{k-1})}{x_k - x_0} = f(x_0; x_1; \ldots; x_k), \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \\
\qquad \dfrac{f(x_{n-k}; x_{n-(k-1)}; \ldots; x_n) - f(x_{n-(k+1)}; x_{n-k}; \ldots; x_{n-1})}{x_n - x_{n-(k+1)}} = f(x_{n-(k+1)}; x_{n-k}; \ldots; x_n)
\end{array}\right]$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання вперед у разі рівновіддалених вузлів інтерполювання:

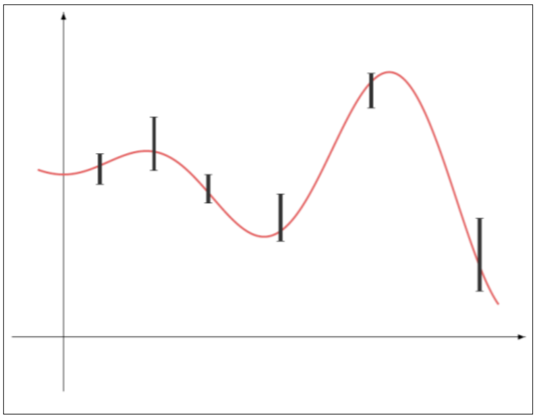
$$L_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!h} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2} \Delta^2 f(x_0) + \\ \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n f(x_0)$$

Скінченні різниці:

$$\left[\begin{array}{l}
1)\quad f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta f(x_i) \\
2)\quad \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = \Delta^2 f(x_i) \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k)\quad \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i) = \Delta^k f(x_i)
\end{array}\right]$$

**Завдання №4** (8-10 балів) Середньоквадратичні наближення функцій, заданих аналітично, алгебраїчними многочленами.

Написати програму для середньоквадратичного наближення функції, котра задається аналітично, наступними алгебраїчними многочленами 1) Лежандра (8 балів) 2) Чебишева 1-го роду (+1 бал) 3) Чебишева 2-го роду (+1 бал). Інтегрування виконувати методом Гауса з заданою точністю.



Кількість многочленів n, тип многочленів, відрізок [a; b], точність обчислення інтегралу повинна задаватись на формі.

Функція, її наближення, значення n базисних многочленів на [a; b] повинно зображуватись на графіках (рекомендується з автоформатуванням та вибором, який графік зображувати, бажано перевірити роботу методів на кількох аналітичних функціях, зокрема й на періодичних з різними періодами).

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i Q_i(x),\quad c_i=\frac{\int_a^b p(x)f(x)Q_i(l)dx}{\int_a^b p(x)Q_i^2(l)dx},$$

$$\text{де}\quad l=\frac{2x-b-a}{b-a},\ \text{якщо многочлен визначений на } [-1,1].$$

1)*Многочлени Лежандра*

$$[a,b]=[-1,1];\quad p(x)=1;\qquad L_0(x)=1;\quad L_1(x)=x;$$
$$L_i(x)=\tfrac{1}{i}((2i-1)L_{i-1}(x)-(i-1)L_{i-1}(x));$$

2)*Многочлени Чебишева 1-го роду*

$$[a,b]=[-1,1];\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad T_0(x)=1;\quad T_1(x)=x;$$
$$T_i(x)=2xT_{i-1}(x)-T_{i-1}(x);$$

3)*Многочлени Чебишева 2-го роду*

$$[a,b]=[-1,1];\quad p(x)=\sqrt{1-x^2};\qquad U_0(x)=1;\quad U_1(x)=2x;$$
$$U_i(x)=2xU_{i-1}(x)-U_{i-1}(x);$$

**Інтегрування:**

$$I=\int_a^b \sigma(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n} C_k\sigma(\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}(b-a)\overline{x}_k),$$

$$\text{де}\quad C_k-\text{коефіцієнти Гауса},\quad \overline{x}_k-\text{вузли Гауса},$$
$$k=\overline{1,n},\quad n-\text{кількість вузлів Гауса}.$$

$$I\approx I_h=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sigma(x)dx\approx I_{h,n}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n} C_k\sigma(\tfrac{1}{2}(x_i+x_{i+1})+\tfrac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\overline{x}_k),$$

$$\text{де}\quad x_i=a+ih;\quad h=\tfrac{1}{m}(b-a).$$

$$\text{Умова закінчення іт.процесу}:\ \left\| I_{h,n}-I_{\frac{h}{2},\frac{n}{2}} \right\|<\varepsilon$$

**Завдання №5** Чисельне інтегрування. Квадратурні формули Ньютона-Котеса.

Скласти програму для інтегрування функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ за формулою прямокутників, трапецій, Сімпсона із заданою точністю $\varepsilon$.

Формула прямокутників:

$$I_h = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{2i-1}{2}h), \quad n = \frac{b-a}{h}$$

Формула трапецій:

$$I_h = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left( f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right)$$

Формула Сімпсона:

$$I_h = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left( f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=2}^{m} f(a+(2i-2)h) + f(b) \right), \quad n = 2m$$

Закінчення ітераційного процесу:

$|I_h - I_{h/2}| < \varepsilon$

**Завдання №09 (5)+1** Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Скласти програму для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку методом /Ейлера, Рунге-Кутта – 2б./, /інтерполяційним та екстраполяційним методами Адамса – 2б./ на відрізку $[x_0, x_0 + nh]$.

$$?\ y = y(x), \quad x \in [x_0, x_0 + nh]$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Вибрати рівняння з відомим точний розв'язком. /Скласти таблицю для порівняння точності наближених розв'язків з точним – 2б/ використовуючи таку норму:

$$\|y_* - y_h\|^2 = \int_{x_0}^{x_0+nh} (y_* - y_h)^2 \, dx,$$

$$\text{де} \quad y_* - \text{точний розв'язок}, \; y_h - \text{наближений розв'язок}$$

Для інтегрування і отримання грубої оцінки похибки можна використати, наприклад, ***метод трапецій***. Графіки розв'язків; h, $y_0$, $x_0$, n, m (е. м. Адамса), $\varepsilon$ (і. м. Адамса) задавати на формі.

**Метод Ейлера:**

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

**Метод Рунге-Кутта:**

$$y_n = y_{n-1} + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$k_2 = hf(x_{n-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{n-1} + \tfrac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_{n-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{n-1} + \tfrac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_{n-1} + h, y_{n-1} + k_3)$$

**Екстраполяційний метод Адамса:**

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{s=0}^{m} \alpha_s \Delta^s f(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s})$$

$$\alpha_s = \tfrac{1}{s!}\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+(s-1))dt, \quad (\alpha_0 = 1),$$

де $\Delta^s f(x, y)$ - скінченні різниці. Значення $y_0, \ldots, y_s$ знайти методом Рунге-Кутта. Інтегрування виконувати з використанням ***квадратурних формул Гауса***, з кількістю вузлів, котра відповідає його алгебраїчній мірі точності.

**Інтерполяційний метод Адамса:**

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{s=0}^{m} \tilde{\alpha}_s \Delta^s f(x_{n-s}, y_{n-s})$$

$$\tilde{\alpha}_s = \tfrac{1}{s!}\int_0^1 (t-1)t(t+1)\ldots(t+(s-2))dt, \quad (\tilde{\alpha}_0 = 1).$$

Перепишемо:

$$y_n = hf(x_n, y_n) + \underbrace{y_{n-1} + h\sum_{s=1}^{m} \tilde{\alpha}_s \Delta^s f(x_{n-s}, y_{n-s})}_{\delta}$$

Застосуємо ***метод простої ітерації***:

$$y_n^{l+1} = hf(x_n, y_n^l) + \delta,$$

де $y_n^0$ - початкове наближення, наприклад, $y_n^0 = y_{n-1}$. Зупиняємо ітераційний процес, досягнувши потрібної точності $\varepsilon$.

**Завдання №10 (7б)**

**А.)** Чисельні методи розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Метод Рунге-Кутта (1б), екстраполяційний метод Адамса (1б),

Скласти програму для розв'язування задачі:

$$? \; y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in [x_0, x_0 + nh]$$

**Постановка задачі:** $\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{cases}$ $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

методом Рунге-Кутта 4-го порядку, та екстраполяційним методом Адамса. Для демонстрації та тестування роботи програми вибрати систему диф. рівнянь з відомим точним розв'язком.

Скласти таблицю для порівняння точності наближених розв'язків з точним (1б) використовуючи таку норму:

$$\left\| \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_h \right\|^2 = \int\limits_{x_0}^{x_0+nh} \sum_{i=1}^{2} \left( (u_*)_i - (u_h)_i \right)^2 dx,$$

$$\begin{aligned} \text{де} \qquad & \mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = (y(x), z(x)) \\ & \mathbf{u}_* - \textit{точний розв'язок}, \\ & \mathbf{u}_h - \textit{наближений розв'язок} \end{aligned}$$

для інтегрування можна використати ***метод трапецій***. Графіки розв'язків; h, $y_0$, $z_0$, $x_0$, n, m (е. м. Адамса) задавати на формі.

**Рунге-Кутта (4-го порядку):**

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_n = z_{n-1} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ k_2 = hf(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_1, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_1) \\ k_3 = hf(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_2, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_2) \\ k_4 = hf(x_{n-1} + h, y_{n-1} + k_3, z_{n-1} + l_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = hg(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ l_2 = hg(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_1, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_1) \\ l_3 = hg(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_2, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_2) \\ l_4 = hg(x_{n-1} + h, y_{n-1} + k_3, z_{n-1} + l_3) \end{cases}$$

**Екстраполяційний Адамса:**

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h\sum\limits_{s=0}^{m} \alpha_s \Delta^s f(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s}, z_{(n-1)-s}) \\ z_n = z_{n-1} + h\sum\limits_{s=0}^{m} \alpha_s \Delta^s g(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s}, z_{(n-1)-s}) \end{cases}$$

$$\alpha_s = \tfrac{1}{s!}\int\limits_0^1 t(t+1)...(t+(s-1))dt, \quad (\alpha_0 = 1)$$

**В.)** Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Метод Рунге-Кутта, екстраполяційні методи Адамса та Адамса-Штермера.

Скласти програму для розв'язування задачі:

$$? \; y = y(x), \quad x \in [x_0, x_0 + nh]$$

**Постановка задачі:** $y'' = f(x, y, y')$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Методом Рунге-Кутта (1б), екстраполяційними методами Адамса (1б) та Адамса-Штермера (1б). Для демонстрації та тестування роботи програми вибрати диф. рівняння другого порядку з відомим точним розв'язком.

Скласти таблицю (1б) для порівняння точності наближених розв'язків з точним використовуючи таку норму:

$$\|y_* - y_h\|^2 = \int_{x_0}^{x_0+nh} \left(y_* - y_h\right)^2 dx,$$

$$де \quad y_* - точний\ розв'язок,\ y_h - наближений\ розв'язок$$

для інтегрування можна використати ***метод трапецій***. Графіки розв'язків; h, $y_0, y_0', x_0$, n, m задавати на формі.

Зводимо до системи диф. рівнянь першого порядку наст. заміною:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_0' = z_0 \end{cases}$$

Тоді ми можемо застосувати метод Рунге-Кутта 4-го порядку, щоб знайти $y_0, \ldots, y_m$ та $z_0, \ldots, z_m$ необхідні, щоб почати ітераційні процеси методів Адамса та Адамса-Штермера.

**Метод Рунге-Кутта 4-го порядку:**

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_n = z_{n-1} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = hz_{n-1} \\ k_2 = h(z_{n-1} + \frac{1}{2}l_1) \\ k_3 = h(z_{n-1} + \frac{1}{2}l_2) \\ k_4 = h(z_{n-1} + l_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = hf(x_{n-1}, y_{n-1}, y_{n-1}) \\ l_2 = hf(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_1, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_1) \\ l_3 = hf(x_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}k_2, z_{n-1} + \frac{1}{2}l_2) \\ l_4 = hf(x_{n-1} + h, y_{n-1} + k_3, z_{n-1} + l_3) \end{cases}$$

**Екстраполяційний метод Адамса:**

$$\begin{cases} z_n = z_{n-1} + h\sum_{s=0}^{m} \alpha_s \Delta^s f(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s}, z_{(n-1)-s}) \\ y_n = y_{n-1} + hz_{n-1} + h^2 \sum_{s=0}^{m} \gamma_s \Delta^s f(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s}, z_{(n-1)-s}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_s = \frac{1}{s!}\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+(s-1))dt, \quad (\alpha_0 = 1) \\ \gamma_s = \frac{1}{s!}\int_0^1\int_0^t t(t+1)\ldots(t+(s-1))dtdt, \quad (\gamma_0 = 1) \end{cases}$$

**Екстраполяційний метод Адамса-Штермера:**

У постановці задачі виключаємо $y'$ з функції $f(x, y, y')$, в результаті до розв'язування отримуємо рівняння $y'' = f(x, y)$.

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{s=0}^{m} \alpha_s \Delta^s f(x_{(n-1)-s}, y_{(n-1)-s})$$

$$\alpha_s = \frac{1}{s!}\int_{-1}^{1} t(t+1)\ldots(t+(s-1))(1-|t|)dt, \quad (\alpha_0 = 1)$$

**Завдання №11 (5б)** Метод сіток розв’язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Скласти програму для розв’язування методом сіток задачі (4б):

Знайти $y = y(x), \quad x \in [a,b]$, що $y'' + py' + qy = f$, де $p = p(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$ - задані функції, виконуються наступні крайові умови $\alpha_1 y'(a) + \alpha_0 y(a) = A$, $\beta_1 y'(b) + \beta_0 y(b) = B$ і $\alpha_1^2 + \alpha_0^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_0^2 \neq 0$. Протестувати точність розв’язування на прикладі з відомим точним розв’язком, використовуючи норми як і в завданні 10.В.

Для розв’язування СЛАР з трьох діагональною матрицею використати метод різницевої прогонки (1б).

## Метод Сіток:

Вибираємо сітку:

$$\begin{aligned} &x_k a + kh, \quad h = \tfrac{1}{n}(b-a), \quad y_k = y(x_k), \\ &p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k), \quad k = \overline{0,n} \end{aligned}.$$

Застосовуємо різницеві співвідношення:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = y'(x_k) + O(h^2) \\ &\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = y''(x_k) + O(h^2) \end{aligned}.$$

Підставляємо різницеві співвідношення в рівняння і домножуємо на $h^2$:

$$\left[1 + \tfrac{h}{2} p_k\right] y_{k+1} + \left[h^2 q_k - 2\right] y_k + \left[1 - \tfrac{h}{2} p_k\right] y_{k-1} = h^2 f_k + O(h^4).$$

Переписуємо крайові умови:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1 + (h\alpha_0 - \alpha_1) y_0 = hA + O(h^2) \\ &(\beta_1 + h\beta_0) y_n - \beta_1 y_{n-1} = hB + O(h^2) \end{aligned}.$$

Матричний вигляд:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 h - \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - \frac{h}{2} p_1 & h^2 q_1 - 2 & 1 + \frac{h}{2} p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{h}{2} p_2 & h^2 q_2 - 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{h}{2} p_{n-1} & h^2 q_{n-1} - 2 & 1 + \frac{h}{2} p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & \beta_1 + h\beta_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = h^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{h} A \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_{n-1} \\ \frac{1}{h} B \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

$$\mathbf{Dy} = h^2 \mathbf{F}.$$

**Завдання №12 (5б)** Варіаційні методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Метод Рітца.

Скласти програму для розв'язування задачі

$$\begin{cases} \text{Знайти } y = y(x), \text{ що} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \\ \text{на проміжку } [a,b], \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{cases}$$

методом Рітца. Відрізок $[a,b]$, A, B, та точність задаються на формі.