

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Факультет прикладної математики та інформатики**  
**Кафедра обчислювальної математики**

**Затверджено**

на засіданні  
кафедри обчислювальної математики  
факультету прикладної математики та  
інформатики  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 6 від 21 грудня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Роман ХАПКО

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**«Методи регуляризації для розв'язування обернених задач»,**  
**що викладається в межах ОПІ Прикладна математика**  
**другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів**  
**зі спеціальності 113 Прикладна математика**

Львів 2023 р.

<b>Назва дисципліни</b>	Методи регуляризації для розв'язування обернених задач
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	11 – математика та статистика 113 – прикладна математика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Хапко Роман Степанович, завідувач кафедри обчислювальної математики, професор; Бешлей Андрій Володимирович, к.ф.-м.н., асистент кафедри обчислювальної математики;
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:roman.chapko@lnu.edu.ua">roman.chapko@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/chapko">https://ami.lnu.edu.ua/employee/chapko</a> ; <a href="mailto:andriy.beshley@lnu.edu.ua">andriy.beshley@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/beshley">https://ami.lnu.edu.ua/employee/beshley</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://ami.lnu.edu.ua/course/metody-rehulyaryzatsiji-dlya-rozvyazuvannya-obernenyh-zadach-prykladna-matematyka">https://ami.lnu.edu.ua/course/metody-rehulyaryzatsiji-dlya-rozvyazuvannya-obernenyh-zadach-prykladna-matematyka</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Методи регуляризації для розв'язування обернених задач є нормативною дисципліною з циклу професійної та практичної підготовки магістрів зі спеціальності 113 – прикладна математика, яка викладається в 2-му семестрі (4,5 кредити ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	У даному курсі вдало поєднуються як глибоко теоретичні результати, так і алгоритмічні аспекти. Курс розроблено таким чином, щоб ознайомити студентів з ідеями побудови методів регуляризації як для лінійних, так і для нелінійних обернених задач, принципами обґрунтування їх збіжності та аналізу похибки, нюансами алгоритмів, що реалізують ці методи.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Даний курс має на меті ознайомити студентів з питаннями дослідження та наближеного розв'язування обернених задач математичної фізики. Основна увага приділяється оберненим задачам реконструкції граничних значень та реконструкції границі у теорії потенціалу. При цьому спершу розглядаються загальні проблеми розв'язування некоректних задач на операторному рівні. Далі вивчені методи застосовуються для розв'язування конкретних обернених задач теорії потенціалу.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	<b>Основна література</b> 1. Chapko R., Johansson B.T. Calculating heat and wave propagation from lateral Cauchy data // Український математичний журнал. – 2022. – Vol.74, №2 – P. 274-285. (DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6880). 2. Chapko R., Mindrinos L. On the numerical solution of a hyperbolic inverse boundary value problem in bounded domains // Mathematics. – 2022. – Vol.750, №10 – P. 1-11 (DOI: 10.3390/math10050750). 3. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. An inverse elastodynamic data reconstruction // Journal of Engineering Mathematics. – 2022. –

	<p>Vol.134, №3 – P. 1-13 (DOI: 10.1007/s10665-022-10219-6).</p> <p>4. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer Verlag, New York, 2nd ed., 2012.</p> <p>5. Rieder A. Keine Problem mit inversen Problemen.- Vieweg &amp; Sohn, Braunschweig, 2003.</p> <p><b>Додаткова література</b></p> <p>6. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems.- London: Kluwer, 1996.</p> <p>7. Burger M. Inverse Problems, Lecture notes, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Münster, 2021.</p> <p>8. Hohage T. Inverse Problems, Lecture notes, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, 2020.</p>
<p><b>Обсяг курсу</b></p>	<p>Загальний обсяг: 135 годин (аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 год. лабораторних; самостійної роботи: 87 год).</p>
<p><b>Очікувані результати навчання</b></p>	<p>Після завершення цього курсу студент буде <i>знати</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• основні методи регуляризації для лінійних та нелінійних обернених задач;</li> <li>• регуляризація Тіхонова;</li> <li>• метод Ландвебера;</li> <li>• метод усіченого сингулярного розкладу;</li> <li>• принцип нев'язки Морозова;</li> <li>• метод Гаусса-Ньютона;</li> <li>• метод Левенберга-Маквардта;</li> </ul> <p><i>вміти</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• застосовувати вивчені методи до конкретних прикладних задач;</li> <li>• здійснювати програмну реалізацію вивчених алгоритмів.</li> </ul> <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей:</p> <p><b>Загальні компетентності:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</li> </ul> <p><b>Фахові компетентності спеціальності:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• СК01. Знання принципів побудови та дослідження математичних моделей, а також чисельних методів їх розв'язування.</li> <li>• СК02. Здатність досліджувати математичні моделі та методи їх розв'язування.</li> <li>• СК03. Здатність лінеаризувати нелінійні моделі.</li> <li>• СК04. Здатність будувати дискретний аналог неперервної моделі.</li> <li>• СК05. Здатність програмної реалізації алгоритмів на одній з мов програмування.</li> <li>• СК07. Здатність відлагоджувати комп'ютерні програми зі складною логікою.</li> </ul> <p><b>та програмних результатів навчання:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ПРН01. Демонструвати знання й розуміння підходів до побудови та дослідження математичних моделей.</li> <li>• ПРН02. Застосовувати, модифікувати і досліджувати чисельні методи для розв'язування прикладних задач.</li> <li>• ПРН03. Розробляти та програмно реалізовувати алгоритми розв'язування прикладних задач.</li> <li>• ПРН04. Розв'язувати некоректні задачі з використанням регуляризуючих методів.</li> <li>• ПРН05. Зводити нелінійну задачу до послідовності лінійних задач.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>ПРН06. Визначати найбільш ефективний метод розв'язування задачі з точки зору обчислювальних затрат та точності отриманих результатів.</li> </ul>																																						
<b>Ключові слова</b>	Прямі та обернені задачі; коректність за Адамаром; компактні оператори; регуляризація; метод Тіхонова; метод Ландвебера; принцип нев'язки Морозова; усічений сингулярний розклад; задача Коші для рівняння Лапласа; нелінійна регуляризація Тіхонова; ітераційні регуляризуючі методи для нелінійних обернених задач; реконструкція межі області.																																						
<b>Формат курсу</b>	Очний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.																																						
<b>Теми</b>	Подано у таблиці нижче.																																						
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Екзамен																																						
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> <li>Математичного аналізу;</li> <li>Алгебри і геометрії;</li> <li>Диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики;</li> <li>Функціонального аналізу;</li> <li>Чисельних методів лінійної алгебри;</li> <li>Чисельних методів;</li> <li>Чисельних методів математичної фізики;</li> <li>Лінійних інтегральних рівнянь;</li> <li>Методів функціонального аналізу у прикладних наукових дослідженнях;</li> <li>Нелінійних задач математичної фізики та їх розв'язування.</li> </ul>																																						
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції Індивідуальні завдання																																						
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі.																																						
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Оцінка за шкалою ECTS</th> <th>Оцінка в балах</th> <th colspan="3">Оцінка за національною шкалою</th> </tr> <tr> <th colspan="2"></th> <th></th> <th colspan="2">Екзамен, диференційований залік</th> <th>залік</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>Відмінно</td> <td>100 - 90</td> <td>Відмінно</td> <td>5</td> <td rowspan="5">зараховано</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>Дуже добре</td> <td>81 - 89</td> <td rowspan="3">Добре</td> <td rowspan="3">4</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>Добре</td> <td>71 - 80</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>Задовільно</td> <td>61 - 70</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>Достатньо</td> <td>51 - 60</td> </tr> <tr> <td>FX (F)</td> <td>Незадовільно</td> <td>0 - 50</td> <td>Незадовільно</td> <td>2</td> <td>не зараховано</td> </tr> </tbody> </table> <p>Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p>	Оцінка за шкалою ECTS		Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою						Екзамен, диференційований залік		залік	A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5	зараховано	B	Дуже добре	81 - 89	Добре	4	C	Добре	71 - 80	D	Задовільно	61 - 70	E	Достатньо	51 - 60	FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано
Оцінка за шкалою ECTS		Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою																																				
			Екзамен, диференційований залік		залік																																		
A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5	зараховано																																		
B	Дуже добре	81 - 89	Добре	4																																			
C	Добре	71 - 80																																					
D	Задовільно	61 - 70																																					
E	Достатньо	51 - 60																																					
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано																																		

• індивідуальні завдання: максимальна кількість балів 30

• колоквиум: максимальна кількість балів 20

• екзамен: максимальна кількість балів 50

**Індивідуальні завдання.**

**№1.** Кожен студент отримує задачу, для розв'язування якої треба використати один із розглянутих на лекціях регуляризованих методів. Алгоритм необхідно запрограмувати на мові високого рівня, відлагодити програму і отримати результати тестових прикладів (10 балів).

**Критерії оцінювання завдання №1:**

**10 балів** - студент повністю виконав умови завдання, алгоритм реалізовано правильно, відповідає на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання, проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів, пропонує інші підходи до вирішення поставленого завдання;

**8-9 балів** - студент повністю виконав умови завдання, на деякі запитання, алгоритм реалізовано правильно, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями;

**6-7 балів** - студент виконав завдання з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач, на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з неточностями;

**4-5 бали** - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач, на запитання відповідає з помилками, проводить аналіз отриманих результатів з помилками;

**2-3 бали** - студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які самостійно не може виправити, переважно не відповідає на запитання;

**1 бал** - студент виконав завдання частково або з грубими помилками, які самостійно не може виправити, демонструє незнання матеріалу;

**0 балів** - студент не виконав завдання.

**№2.** Кожен студент отримує наукову публікацію з даної предметної області на англ. мові. Необхідно прореферувати її, підготувати презентацію у системі LaTeX (10 балів) і зробити публічну доповідь (10 балів).

**Критерії оцінювання завдання №2:**

**А) презентація**

**10 балів** - студент підготував презентацію в LaTeXу без жодних помилок;

**7-9 балів** - студент підготував презентація з незначними неточностями;

**4-6 балів** - студент підготував презентацію з великою кількістю помилок, скопійованих таблиць і малюнків з реферованої статті;

**1-3 бали** - студент пробував зробити презентацію;

**0 балів** - студент не підготував презентацію.

**Б) доповідь:**

**10 балів** – студент, повністю розкрив тему доповіді, схема доповіді логічна, впевнено відповідає на всі запитання, які пов'язані з тематикою доповіді та демонструє глибокі знання;

**7-9 балів** – студент повністю розкрив тему доповіді з незначними неточностями, схема доповіді логічна, відповідає на більшість запитань, які пов'язані з тематикою доповіді;

**4-6 балів** - студент розкрив тему доповіді і розуміє основні ідеї реферованої статті;

**1-3 бали** – студент в основному розкрив тему доповіді з незначними неточностями, демонструє слабкі знання, відповідає лише на окремі запитання, які пов'язані з тематикою доповіді;

**0 балів** – студент не підготував доповіді або тему доповіді не розкрито і під час захисту студент не може відповісти на жодне запитання за тематикою доповіді.

**Колоквіум.** Проводиться у письмовій формі у середині семестру (4 завдання по 5 балів кожне).

**Екзамен.** Проводиться у письмовій формі (5 завдань по 10 балів кожне). До здачі допускаються студенти, які отримали більше 10балів за роботу протягом семестру.

**Критерії оцінювання теоретичних/практичних завдань (колоквіум, екзамен):**

Колоквіум (5балів)	Екзамен (10балів)	Критерії оцінювання
5 балів	10 балів	студент правильно виконав практичне завдання; вільно володіє навчальним матеріалом, чітко розкриває зміст теоретичних питань;
4 бали	7-9 балів	студент виконав завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв'язування знає і вміє його застосовувати; добре володіє навчальним матеріалом, розкриває повністю зміст теоретичних питань з незначними неточностями;
3 бали	4-6 балів	студент виконав завдання з помилками, алгоритм виконання, в основному, знає; володіє навчальним матеріалом на достатньому рівні, розкриває зміст теоретичних питань невичерпно та з неточностями, виникають труднощі під час аналізу матеріалу;
1-2 бали	1-3 бали	студент виконав лише частину завдання або повністю, але зі значними помилками; частково знає теоретичний матеріал (основні поняття, твердження, нескладні алгоритми), розкриває зміст питань зі значними помилками;
0 балів		студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання.

**Академічна доброчесність:** Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності.

	<p>чесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідування занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали набрані при виконанні індивідуальних завдань, самостійній роботі, колоквиуму та бали за екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторні заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
<p><b>Питання до екзамену.</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Коректність задачі за Адамаром на мові операторів.</li> <li>2. Доведіть, що лінійне операторне рівняння з компактним оператором є некоректною задачею.</li> <li>3. Комп'ютерна томографія як приклад лінійної оберненої задачі.</li> <li>4. Електрична імпедансна томографія як приклад нелінійної оберненої задачі.</li> <li>5. Зворотня в часі теплопровідність як приклад лінійної оберненої задачі.</li> <li>6. Задача визначення товщини стінки домни як приклад нелінійної оберненої задачі.</li> <li>7. Чисельне диференціювання як некоректна задача.</li> <li>8. Регуляризація для лінійних задач. Функціонал Тіхонова і його мінімум.</li> <li>9. Регуляризація для лінійних задач. Метод Ландвебера.</li> <li>10. Загальна теорія регуляризації.</li> <li>11. Сингулярний розклад компактного оператора. Метод усіченого сингулярного розкладу.</li> <li>12. Сингулярний розклад компактного оператора. Регуляризація Тіхонова в цьому контексті.</li> <li>13. Сингулярний розклад компактного оператора. Метод Ландвебера в цьому контексті.</li> <li>14. Збіжність методу усіченого сингулярного розкладу.</li> <li>15. Збіжність методу регуляризації Тіхонова.</li> <li>16. Збіжність методу Ландвебера.</li> <li>17. Принцип нев'язки Морозова.</li> <li>18. Задача Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Зведення до системи інтегральних рівнянь.</li> <li>19. Регуляризація Тіхонова для некоректної системи IP задачі Коші для рівняння Лапласа.</li> <li>20. Метод Ландвебера для задачі Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області.</li> <li>21. Нелінійна регуляризація Тіхонова.</li> <li>22. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного</li> </ol>

	<p>рівняння. Метод Левенберга-Маквардта.</p> <p>23. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного рівняння. Метод Гаусса-Ньютона.</p> <p>24. Ітераційні регуляризуючі методи для нелінійного операторного рівняння. Метод Ньютона-Ландвебера.</p> <p>25. Загальна концепція ітераційних регуляризуючих методів для нелінійного операторного рівняння.</p> <p>26. Оборнена задача реконструкції межі області. Постановка задачі та теорема про ідентифіковність.</p> <p>27. Оборнена задача реконструкції межі області. Запис у формі операторного рівняння. Вигляд похідної Фреше.</p> <p>28. Оборнена задача реконструкції межі області. Запис у формі операторного рівняння. Вигляд оператора спряженого до похідної Фреше.</p> <p>29. Оборнена задача реконструкції межі області. Ін'єктивність оператора похідної Фреше у випадку зіркової області.</p> <p>30. Оборнена задача реконструкції межі області. Алгоритм методу Ньютона.</p> <p>31. Оборнена задача реконструкції межі області. Алгоритм методу Ландвебера.</p>
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

### Схема курсу

<b>Модуль 1. Регуляризація лінійних задач</b>				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Практ. (год)	Сам. р-та
1	Приклади лінійних обернених задач [1,2,3,5].	2	-	4
2	Загальна концепція регуляризації [4,5].	2	-	4
3	Регуляризація Тіхонова [1,4,5].	2	2	4
4	Метод Ландвебера. Принцип нев'язки Морозова і збіжність [2,4,5].	2	2	4
5	Сингулярний розклад компактних операторів [4,5,6].	2	2	4
6	Функції фільтри. Метод усіченого сингулярного розкладу [4,5,6].	2	-	4

<b>Модуль 2. Оборнені задачі реконструкції граничних значень.</b>				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Практ. (год)	Сам. р-та
1	Задача Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Існування та єдиність розв'язку. Відсутність стійкості за вхідними даними [1,4].	2	2	7



2	Метод граничних інтегральних рівнянь та регуляризація Тіхонова [1,2].	2	2	8
3	Застосування ітераційних регуляризуючих методів [1,4]. Колоквіум.	2	-	8

<b>Модуль 3. Методи регуляризації для нелінійних обернених задач</b>				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Практ. (год)	Сам. р-та
1	Приклади нелінійних обернених задач [2,4,5].	2	-	8
2	Нелінійна регуляризація Тіхонова [4,5].	2	-	8
3	Ітераційні регуляризуючі методи [4,5].	2	-	8

<b>Модуль 4. Обернені задачі реконструкції меж області</b>				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Практ. (год)	Сам. р-та
1	Задача реконструкції недоступної межі області за відомими даними Коші. Теорема про ідентифіковність [2,4,5]	2	-	10
2	Нелінійні оператори оберненої задачі та їх властивості [4,5].	2	2	10
3	Метод Ньютона [2,4,5].	2	2	10
4	Метод Ландвебера [4,5].	2	2	10

<b>Усього:</b>		32	16	87
----------------	--	----	----	----