Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

А. М. Недашковська, О. В. Ільницька

Вступ до функціонального аналізу

Навчальний посібник для студентів
факультету прикладної математики та інформатики

Львів

ПАІС
Видавництво Львів

2024

УДК 517.981(076.1)
Н 42

Рекомендовано Вченою радою Львівського університету імені Івана Франка (протокол № 9 від 16 жовтня 2024 р.)

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Каленюк**
(Національний університет «Львівська політехніка»)

д-р. фіз.-мат. наук, пров. наук. співроб. **О. В. Попов**
(Інститут кібернетики НАН України)

д-р. фіз.-мат. наук, проф. **О. П. Нечуйвітер**
(Українська інженерно-педагогічна академія)

Недашковська А. М., Ільницька О. В.
Н 42 Вступ до функціонального аналізу: Навч. посіб. – Львів: ПАІС, 2024. – 128 с.
ISBN 978-617-7694-71-6

Навчальний посібник містить основні відомості про лінійні, нормовані, банахові простори, простори зі скалярним добутком, гільбертові простори, лінійні, обернені та спряжені оператори, містить дев'ять розділів, у кожному з яких наведено теоретичні відомості, приклади та зразки розв'язування типових задач.

У посібнику також наведено приклади екзаменаційних білетів для самоперевірки студентів розуміння викладеного матеріалу.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають функціональний аналіз, аспірантів та наукових працівників.

УДК 517.981(076.1)

© Недашковська А. М.,
Ільницька О. В., 2024

ISBN 978-617-7694-71-6

© Видавництво ПАІС, 2024

Зміст

Вступ **6**

1 Лінійні простори. Приклади лінійних просторів. Ізоморфні лінійні простори **7**
1.1 Лінійні простори 7
1.2 Приклади лінійних просторів 9
1.3 Лінійна залежність і лінійна незалежність елементів 10
1.4 Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори 11
1.5 Лінійні многовиди 13
1.6 Ізоморфізм лінійних просторів 14
1.7 Опуклі множини в лінійних просторах 15

2 Нормовані простори **19**
2.1 Означення метричного простору 19
2.2 Деякі приклади метричних просторів 20
2.3 Елементарні властивості метрики 25
2.4 Означення нормованого простору 26
2.5 Елементи аналізу в нормованих просторах. Еквівалентність норм у скінченновимірних просторах 29
2.6 Нерівність Ґольдера і Мінковського для сум 32
2.7 Приклади нормованих просторів 34
2.7.1 Відкриті та замкнені множини 44
2.8 Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах 47
2.9 Про елемент найкращого наближення в нормованому просторі 51
2.10 Наближення елементами простору 53
2.11 Лінійні многовиди щільні в нормованому просторі . . 55

3 Банахові простори **58**
3.1 Фундаментальні послідовності 58
3.2 Означення банахового простору 60
3.3 Приклад неповного нормованого простору 62
3.4 Банахові простори $C^k(\overline{G})$, $k \geq 1$ 63

4 Простори зі скалярним добутком **65**
4.1 Евклідові простори 65
4.2 Унітарні простори 67
4.3 Приклади просторів зі скалярним добутком 68
4.4 Процес ортогоналізації Шмідта 71
4.5 Деякі властивості скалярного добутку 73

5 Гільбертові простори **76**
5.1 Означення гільбертового простору 76
5.2 Ортогональне доповнення 79

6 Лінійні оператори **83**
6.1 Загальне означення оператора 83
6.2 Взаємно однозначні (ін'єктивні) оператори 87
6.3 Суперпозиція операторів 88
6.4 Означення лінійного оператора 89
6.5 Неперервні лінійні оператори 91
6.6 Обмежені лінійні оператори 92
6.7 Лінійні функціонали 95

7 Простір лінійних обмежених операторів **99**
7.1 Нормований простір $\mathcal{L}(X, Y)$ 99
7.2 Поняття збіжності послідовності операторів 100

8 Обернені оператори **104**
8.1 Обернені оператори. Умови існування обернених операторів 104
8.2 Лівий і правий обернений оператори 109

9 Спряжені простори та спряжені оператори **112**
9.1 Спряжені простори 112
9.2 Спряжені і самоспряжені оператори 114

Зразки екзаменаційних білетів **118**

Предметний показчик **122**

Вступ

Функціональний аналіз є одним із найважливіших розділів сучасної математики. Сьогодні мову функціонального аналізу та його методи широко застосовують у різних напрямах математичної освіти.

У цьому навчальному посібнику представлено лекційний курс із функціонального аналізу, який викладається для студентів спеціальності «прикладна математика». Для кращого засвоєння матеріалу та наочності теоретичних викладок у посібнику також наведені приклади розв'язування типових задач, схематичні ілюстрації деяких понять.

Оскільки, функціональний аналіз як нормативну дисципліну вивчають лише протягом одного семестру студенти другого курсу, то ми мали на меті полегшити засвоєння базових понять та продемонструвати їх прикладне застосування.

Лекційний курс охоплює теми від лінійних просторів до спряжених операторів, містить дев'ять розділів, у кожному з яких наведено теоретичні відомості, приклади та зразки розв'язування типових задач із відповідними поясненнями й коментарями. Не претендуючи на оригінальність, частину матеріалу ми запозичили із відомих збірників, підручників та монографій: [5, 7, 8, 9, 10, 11, 12] та інші. Також у посібнику використаний ілюстративний матеріал із сайтів [1, 2, 3, 4, 5].

Віддаючи належне високому професійному рівню спеціалістів з функціонального аналізу, ми намагалися адаптувати строгість математичних понять до рівня знань студентів, захоплених, як відомо, передусім інформаційними технологіями.

У посібнику також наведені приклади екзаменаційних білетів для того, щоб допомогти студентам краще зрозуміти вимоги до рівня засвоєння функціонального аналізу.

Особливо хочемо подякувати нашим колегам— фахівцям із функціонального аналізу механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка за цінні поради та консультації.

Розділ 1

Лінійні простори. Приклади лінійних просторів. Ізоморфні лінійні простори

1.1 Лінійні простори

Означення 1.1. Множина E елементів $x, y, z, \ldots$ називається лінійним простором, якщо в ньому визначені дві операції:

1. додавання елементів простору: будь-яким двом елементам x, $y \in E$ поставлений у відповідність елемент $x + y \in E$, що називається їх сумою;
2. множення елемента на скаляр: будь-якому елементу $x \in E$ і будь-якому скаляру λ поставлений у відповідність певний елемент $\lambda x \in E$ – добуток елемента x на скаляр λ.

При цьому означені вище операції задовольняють такі аксіоми:

1) $x + y = y + x$ (комутативність додавання);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність додавання);

3) існує нейтральний елемент $\Theta \in E$ такий, що $x + \Theta = x$;

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x$ (асоціативність множення);

5) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \Theta$;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивність);

7) $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивність).

Якщо $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то E називатимемо дійсним лінійним простором, якщо ж $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то комплексним лінійним простором.

У будь-якому лінійному просторі E для довільного елемента $x \in E$ можна визначити *протилежний* елемент $-x$, а отже, і операцію віднімання елементів $y - x$. Приймемо, що $-x = (-1)\, x$. Тоді, відповідно до аксіом 5 та 7,

$x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x = \Theta$, а тому $y - x = y + (-x)$.

Розглянемо деякі прості наслідки, що випливають із визначення лінійного простору.

Наслідок 1.1. Нейтральний елемент єдиний.

□ Припустимо, що Θ_1, Θ_2 – нулі в E. Тоді (відповідно до третьої аксіоми)

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_1 \quad \text{і} \quad \Theta_2 + \Theta_1 = \Theta_2.$$

Звідси, за аксіомою 1, $\Theta_1 = \Theta_2$. ■

Наслідок 1.2. Якщо $\lambda x = \mu x$, де $x \neq \Theta$, то $\lambda = \mu$.

□ Додамо до обох частин рівності $\lambda x = \mu x \ \ (-\mu x)$. Отримаємо $(\lambda - \mu)\, x = \Theta$. Якщо $\lambda \neq \mu$, то звідси за аксіомою 4

$$(\lambda - \mu)^{-1} \left[(\lambda - \mu)\, x\right] = x = \Theta.$$

Отримаємо протиріччя $\Rightarrow \ \lambda = \mu$ ■

Наслідок 1.3. Якщо $\lambda x = \lambda y$ і $\lambda \neq 0$, то $x = y$.

□ Додамо до обох частин рівності $\lambda x = \lambda y \ \ (-\lambda y)$. Отримаємо: $\lambda(x - y) = \Theta$. Якщо $\lambda \neq 0$, то звідси

$$x - y = \lambda^{-1} \left[\lambda\, (x - y)\right] = \Theta.$$

Тобто $x = y$. ■

1.2 Приклади лінійних просторів

Приклад 1.1. Множина всеможливих впорядкованих стовпців.

Нехай $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тоді $x = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^n$, де $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$. Суму елементів можна означити як $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_i + \eta_i\}_{i=1}^n$, а добуток на скаляр як $\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda\xi_i\}_{i=1}^n$.

Приклад 1.2. Простір k разів неперервно диференційовних функцій $C^k[a,b]$.

Нехай $k \geq 1$. Відповідно до властивостей похідних, якщо $x(t), y(t)$ належать простору $k \geq 1$ неперервно диференційовних функцій $C^k[a,b]$, то їх сума $x(t) + y(t)$ теж є k разів неперервно диференційовною функцією і належить $C^k[a,b]$. Аналогічно, якщо функція $x(t) \in C^k[a,b]$, то добуток $\lambda x(t) \in C^k[a,b]$. А отже, $C^k[a,b]$ – лінійний простір.

Приклад 1.3. Простір поліномів степені, що не перевищує k, $\mathbb{P}^k$.

Розглянемо поліноми вигляду

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_k t^k$$

та

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \ldots + y_k t^k,$$

де x_0, x_1, $\ldots$, x_k та y_0, y_1, $\ldots$, y_k – довільні дійсні числа, $t \in D = (-\infty; +\infty)$.

Легко бачити, що

$$x(t) + y(t) = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)t + \ldots + (x_k + y_k)t^k$$

та

$$\lambda x(t) = \lambda x_0 + \lambda x_1 t + \ldots + \lambda x_k t^k$$

є поліномами степені, що не перевищує k. А отже, можемо стверджувати, що простір $\mathbb{P}^k$ є лінійним.

1.3 Лінійна залежність і лінійна незалежність елементів

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_l$ – довільні елементи лінійного простору E. *Лінійною комбінацією* цих елементів називатимемо суму вигляду $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k$, де $a_1, a_2, \ldots, a_l$ – довільні константи.

Елементи $x_1, x_2, \ldots, x_l$ називатимемо *лінійно залежними*, якщо існує їхня лінійна комбінація $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k = \Theta$, де хоча б одне a_k відмінне від 0. Якщо рівність $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k = \Theta$ можлива лише за умови, що $a_1 = a_2 = \cdots = a_l = 0$, то елементи $x_1, x_2, \ldots, x_l$ називатимемо *лінійно незалежними*.

Приклад 1.4. Перевіримо, чи будуть лінійно незалежними вектори $x_1 = (1;1;1)^T, x_2 = (1;2;0)^T, x_3 = (0;-1;1)^T \in \mathbb{R}^3$.

Знайдемо значення коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, при яких лінійна комбінація цих векторів буде дорівнювати нульовому вектору:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Дане векторне рівняння можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0; \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0; \\ a_1 + a_3 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Розв'яжемо систему (1.1) за допомогою методу Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що система (1.1) має безліч ненульових розв'язків a_1, a_2, a_3, таких, що лінійна комбінація векторів x_1, x_2, x_3 дорівнює нульовому вектору. Наприклад:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

а це означає, що вектори x_1, x_2, x_3 лінійно залежні.

Приклад 1.5. З'ясуємо [6] чи є лінійно залежними функції

$$y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos 2x, y_3 = 7.$$

Із курсу диференціальних рівнянь знаємо, що для лінійно залежних функцій визначник Вронського дорівнює нулю.

Для n функцій визначник Вронського будується із використанням похідних $n-1$ порядку:

$$W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Запишемо тепер визначник Вронського для функцій y_1, y_2, y_3 :

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos 2x & 7 \\ \sin 2x & -2\sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & -4\cos 2x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\left(\sin 2x \cdot (-4\cos 2x) - 2\cos 2x \cdot (-2\sin 2x)\right) = 0,$$

а отже, функції y_1, y_2, y_3 є лінійно залежними.

1.4 Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори

Означення 1.2. Лінійний простір називатимемо m-вимірним, якщо в ньому існує m лінійно незалежних елементів, а будь-яка система з $m+1$ елемента лінійно залежна.

Приклад 1.6. Очевидно, що простір $\mathbb{R}^n$ є n вимірним, а простір дійсних квадратних матриць $\mathbb{R}^{n\times n}$ має розмірність n^2.

Означення 1.3. Набір будь-яких m лінійно незалежних елементів у m-вимірному просторі E називатимемо базисом в E.

Приклад 1.7. Так базис простору $\mathbb{R}^n$ можна задати за допомогою набору векторів

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

а базис простору дійсних квадратних матриць $\mathbb{R}^{2\times 2}$ можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зображення стандартного базису в $\mathbb{R}^2$ [4] зображено на рис. 1.1.

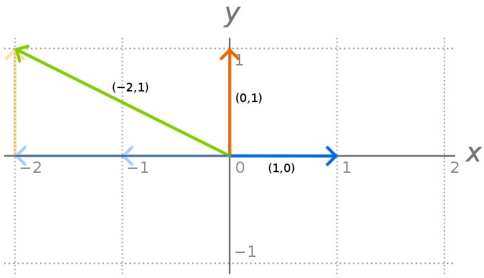

Рис. 1.1: Ілюстрація стандартного базису в $\mathbb{R}^2$.

Тут блакитний і помаранчевий вектори є елементами базису, а зелений вектор може бути представлений через базисні вектори, він лінійно залежить від них.

Нехай $\{e_k\}_{k=1}^m$ – базис лінійного простору E, тоді для будь-якого $x \in E$ існують скаляри $a_1, a_2, \ldots, a_m$ такі, що

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m. \tag{1.2}$$

Подання (1.2) довільного елемента m-вимірного простору E називатимемо *розкладом* елемента x за базисом $\{e_k\}_{k=1}^m$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – *координатами* елемента x у базисі $\{e_k\}_{k=1}^m$.

Означення 1.4. Лінійний простір E називатимемо нескінченновимірним, якщо для кожного натурального n в E існує n лінійно незалежних елементів, тобто $\forall n \in \mathbb{N}$ існує послідовність $\{e_k\}_{k=1}^n$ така, що $\{e_k\}_{k=1}^n$ – лінійно незалежні.

Прикладом нескінченновимірного простору може слугувати розглянутий вище простір k разів неперервно-диференційовних функцій $C^k[a,b]$.

1.5 Лінійні многовиди

Означення 1.5. Множина $\tilde{E}$ в лінійному просторі E називається лінійним многовидом (лінійною множиною), якщо для будь-яких $x, y \in \tilde{E}$ і довільних скалярів λ, μ лінійна комбінація $\lambda x + \mu y \in \tilde{E}$.

Приклад 1.8. Нехай $E\,[a,b]$ – лінійний простір всіх дійсних функцій, визначених на $[a,b]$. Тоді $C\,[a,b]$ – лінійний многовид на $E\,[a,b]$. Це випливає з відомого в математичному аналізі факту, що лінійна комбінація двох неперервних на $[a,b]$ функцій є неперервною на цьому відрізку (див. приклад 1.3, пункт 1.2).

Приклад 1.9. Простір $C^k\,[a,b]\,, k \geq 1$, є лінійним многовидом в просторі $C\,[a,b]$, оскільки будь-яка k разів неперервно диференційовна на $[a,b]$ функція є неперервною на $[a,b]$, а лінійна комбінація функцій із $C^k\,[a,b]$ знову є функцією із $C^k\,[a,b]$ (див. приклад 1.3, пункт 1.2).

1.6 Ізоморфізм лінійних просторів

Означення 1.6. Розглянемо лінійні простори X і $\tilde{X}$. Нехай кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність певний елемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Тобто задана функція $\tilde{x} = J(x)$, визначена скрізь на X, зі значеннями в $\tilde{X}$. Будемо говорити, що простори X і $\tilde{X}$ (лінійно) ізоморфні, якщо знайдеться функція $\tilde{x} = J(x)$, що забезпечує лінійну і взаємно однозначну відповідність між X і $\tilde{X}$. Тобто

1. $J(\lambda x + \mu y) = \lambda J(x) + \mu J(y)$ для будь-яких елементів $x, y \in X$ і довільних скалярів λ, μ;
2. Якщо $J(x_1) = J(x_2)$, то $x_1 = x_2$;
3. Для будь-якого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ знайдеться $x \in X$ такий, що

$$\tilde{x} = J(x).$$

Схематично це можна зобразити як на рис. 1.2.

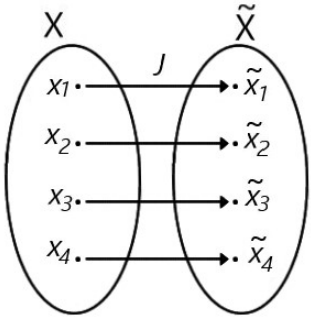

Рис. 1.2: Ізоморфні простори.

Наведемо приклади ізоморфних просторів.

Приклад 1.10. Простір поліномів із дійсними коефіцієнтами степені не вище m, $\mathbb{P}^m$ ізоморфний простору впорядкованих стовпців $\mathbb{R}^{m+1}$. Дійсно, нехай $x(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k t^k$. Розглянемо функцію J, що

відображає кожен такий поліном у стовпець $(x_k)_{k=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1}$, тобто $J(\sum\limits_{k=0}^{m} x_k t^k) = (x_k)_{k=0}^m$.

Та навпаки, $\mathbb{R}^{m+1}$ ізоморфний $\mathbb{P}^m$.

Приклад 1.11. Будь-який m-вимірний дійсний простір E ізоморфний $\mathbb{R}^m$.

1.7 Опуклі множини в лінійних просторах

Нехай E – лінійний простір. Відрізком, що з'єднує точки $x_1, x_2 \in E$ називається сукупність всіх точок x вигляду

$$x = (1-\tau)x_1 + \tau x_2, \quad \tau \in [0,1]\,.$$

Приклад 1.12. Нехай $x_1(t) = \sin t, x_2(t) = t^2 \ \in C[a,b]$. Відрізком, що з'єднує точки x_1 та x_2 буде сукупність точок

$$x = (1-\tau)x_1(t) + \tau x_2(t) = (1-\tau)\sin t + \tau t^2, \quad \tau \in [0,1]\,.$$

Означення 1.7. Множина W в лінійному просторі E називається опуклою, якщо з того, що $x_1, x_2 \in W$ випливає, що W також належить і відрізок, який з'єднує x_1 і x_2.

Тобто W – опукла, якщо для довільних (будь-яких) двох точок $x_1, x_2 \in W$ відрізок, який з'єднує x_1 та x_2 повністю лежить у W.

Наведемо приклади опуклих множин.

Приклад 1.13. Множина $y \geq x^2, x \in \mathbb{R}$ (рис. 1.3).

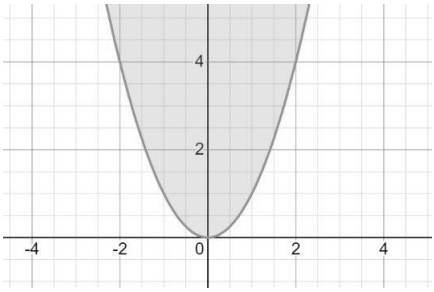

Рис. 1.3: Множина $y \geq x^2, x \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.14. Множина $y \leq \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}$ (рис. 1.4).

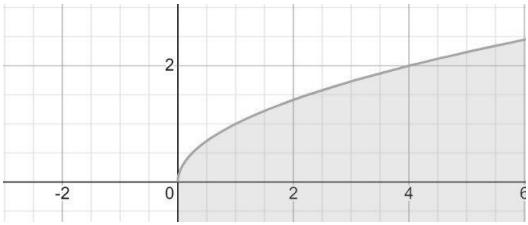

Рис. 1.4: Множина $y \leq \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.15. Множина $y \leq \ln x, x \in \mathbb{R}$ (рис. 1.5).

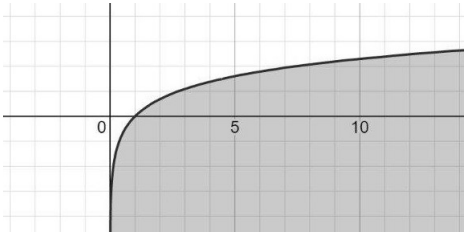

Рис. 1.5: Множина $y \leq \ln x, x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо також приклади неопуклих множин.

Приклад 1.16. Множина $9 \geq x^2 + y^2 \geq 1, x \in \mathbb{R}$ (рис. 1.6).

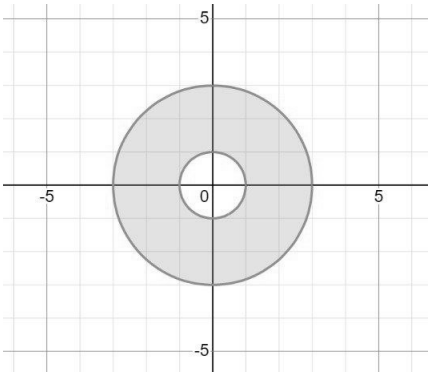

Рис. 1.6: Множина $9 \geq x^2 + y^2 \geq 1, x \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.17. Множина $\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}, x > 0; \\ y \leq \frac{1}{x}, x < 0, \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$ (рис. 1.7).

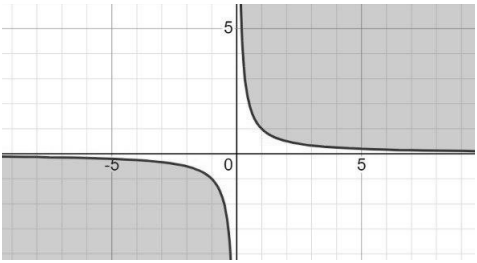

Рис. 1.7: Множина $\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{x}, x > 0; \\ y \leq \dfrac{1}{x}, x < 0, \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$.

Розділ 2

Нормовані простори

2.1 Означення метричного простору

Поняття модуля дійсного числа, комплексного числа чи вектора дозволить ввести відстань, або як прийнято говорити, метрику на числовій осі, в комплексній площині чи просторі векторів відповідно. Наявність метрики, в свою чергу, дозволяє розглянути важливі питання про збіжність послідовностей і рядів, про граничний перехід, про неперервність і диференційовність функцій і т. п. Основні поняття теорії метричних просторів дав на початку двадцятого століття відомий французький математик Моріс Фреше. Нагадаємо означення метрики:

Означення 2.1. Кажуть, що дана непорожня множина E утворює метричний простір, якщо кожній впорядкованій парі її елементів $x, y \in E$ відповідає число $\varrho(x, y)$, що задовольняє такі аксіоми:

1. $\varrho(x, y) \geq 0; \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x);$
3. $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$

Число $\varrho(x, y)$ називають відстанню точок (елементів) $x,\ y$.

Тобто метрика – це функціонал, що ставить у відповідність елементам $x, y \in E$ деяке невід'ємне число, що задовольняє перелічені вище аксіоми.

Означення 2.2. Множина X із метрикою $\varrho(x, y)$, де $x, y \in X$ називається метричним простором і позначається $(X, \varrho(x, y))$.

2.2 Деякі приклади метричних просторів

Приклад 2.1. Нехай $X = \mathbb{R}^m$. Для довільного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ та довільного $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ визначимо

$$\varrho(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}. \qquad (2.1)$$

Зауважимо, що при $m = 1$ маємо числову пряму, а при $m = 2$ площину із евклідовою відстанню. Перевіримо аксіоми метрики для функції $\varrho(x, y)$.

1. Очевидно, що $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \varrho(x, y) \geq 0$. Далі

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \ \forall i = \overline{1, m} \Leftrightarrow x = y.$$

2. Аксіома симетричності виконується, оскільки $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^m$ маємо

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2} = \varrho(y, x).$$

3. Доведемо нерівність трикутника. Нехай $x, y, z \in \mathbb{R}^m$. Розглянемо

$$\varrho^2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)^2.$$

У нерівності Коші-Буняковського $\left| \sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i \right| \leq \sqrt{| \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2 |}$ покладемо $a_i := x_i - z_i$, $b_i := z_i - y_i$, $1 \leq i \leq m$. Тоді

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)(z_i - y_i) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)^2}.$$

Звідси

$$\varrho^2(x,y) \leq \sum_{i=1}^{m}(x_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i)^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i)^2 = \varrho^2(x,z) + 2\varrho(x,z)\,\varrho(z,y) + \varrho^2(z,y) =$$

$$= (\varrho(x,z) + \varrho(z,y))^2. \tag{2.2}$$

Оскільки функція ϱ невід'ємна, то з (2.2) отримаємо нерівність трикутника

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Таким чином, $(\mathbb{R}^m, \varrho(x,y))$ – метричний простір.

Метрику (2.1) називають евклідовою.

Зауважимо, що $\varrho(x,y)$ – евклідова відстань між точками x, y на площині із прямокутною системою координат.

Приклад 2.2. Нехай M – дійсна симетрична $m \times m$ матриця. Дана матриця називається додатно визначеною, якщо

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ x \neq 0, x^T M x > 0.$$

Для довільних $x, y \in \mathbb{R}^m$ визначимо

$$\varrho(x,y) = \sqrt{(x-y)^T M (x-y)}. \tag{2.3}$$

Можна показати, що відображення $\varrho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ (2.3) задовольняє аксіоми метрики: перша та друга аксіоми є очевидними, а третя випливає із нерівності Коші-Буняковського для білінійної форми [5], а отже, $(\mathbb{R}^m, \varrho(x,y))$ є метричним простором.

Приклад 2.3. Нехай $X = C[a,b]$. $\forall x, y \in C[a,b]$ введемо

$$\varrho(x,y) := \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{2.4}$$

Коректність означення (2.4) випливає із властивостей неперервних функцій та другої теореми Веєрштраса для неперервних на відрізку функцій [5].

Геометричну інтерпретацію рівномірної метрики в просторі $C[a,b]$ можна зобразити так:

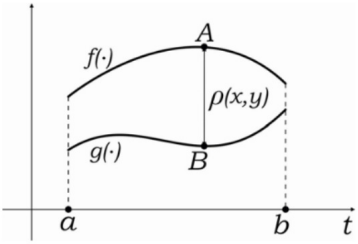

Рис. 2.1: Відстань між функціями f та g у рівномірній метриці рівна довжині відрізка AB [5].

Перевіримо виконання аксіом метрики.

1. $\forall x, y \in C[a,b] \quad \varrho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \geq 0$. Причому

$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv y(t).$$

2. Аксіома симетричності очевидна.

3. $\forall x, y, z \in C[a,b], \forall t \in [a,b]$ виконується

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t\in[a,b]} |z(t) - y(t)| = \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Звідки

$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$$

і

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Простір $(\mathrm{C}[a,b], \varrho(x,y))$ називають метричним простором неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій із рівномірною метрикою.

Приклад 2.4. Нехай $X = C[a,b]$. На цей раз визначимо метрику іншим способом, а саме покладемо $\forall x, y \in C[a,b]$.

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt}. \tag{2.5}$$

Оскільки для довільної неперервної на $[a,b]$ функції справедливим є наступне твердження: $\int_a^b f^2(t)dt = 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0$, то при $f(t) := x(t) - y(t), \quad t \in [a,b]$ аксіома невід'ємності виконується. Аксіома симетричності очевидна.

Перевіримо нерівність трикутника. Для довільних $x, y, z \in C[a,b]$ маємо:

$$\varrho^2(x,y) = \int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt = \int_a^b (x(t) - z(t) + z(t) - y(t))^2 \, dt =$$

$$= \int_a^b (x(t)-z(t))^2 dt + 2\int_a^b (x(t)-z(t))\,(z(t)-y(t))dt + \int_a^b (z(t) - y(t))^2 dt \leq$$

$$\leq \int_a^b (x(t) - z(t))^2 \, dt + 2\sqrt{\int_a^b (x(t) - z(t))^2 \, dt \int_a^b (z(t) - y(t))^2 \, dt} +$$

$$+ \int_a^b (z(t) - y(t))^2 \, dt = (\varrho(x,z) + \varrho(z,y))^2.$$

Для отримання даної нерівності використана нерівність Коші-Буняковського для інтегралів [5]. Таким чином,

$$\varrho^2(x,y) \leq (\varrho(x,z) + \varrho(z,y))^2,$$

звідки випливає нерівність трикутника для метрики (2.5). Отже, $(C[a,b], \ \varrho(x,y))$ – метричний простір. Його називають метричним простором неперервних на відрізку функцій із середньоквадратичною метрикою.

Приклад 2.5. Нехай $X = C[a,b], \forall x, y \in C[a,b]$ визначимо

$$\varrho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \tag{2.6}$$

Легко бачити, що для метрики (2.6) виконуються аксіоми метричного простору, а отже, означений таким чином простір $(C[a,b], \varrho(x,y))$ є метричним простором.

Приклад 2.6. Розглянемо тепер простір обмежених числових послідовностей, $m = \left\{ (x_1, x_2, \ldots)^T,\ x_i \in \mathbb{R},\ \sup\limits_{i\geq 1} |x_i| \leq \infty \right\}$. Для довільних $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$ визначимо

$$\varrho(x,y) = \sup_{i\geq 1} |x_i - y_i|.$$

Коректність означення функції $\varrho(x,y)$ випливає із обмеженості різниці обмежених послідовностей. Аксіоми невід'ємності і симетричності очевидні. Перевіримо аксіому трикутника. Для довільних $x, y, z \in m$

$$\varrho(x,y) = |x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \sup_{i\geq 1} |x_i - z_i| + \sup_{i\geq 1} |z_i - y_i| \leq$$

$$\leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Метричний простір $(m, \varrho(x,y))$ називається метричним простором обмежених числових послідовностей.

Приклад 2.7. На довільній непорожній множині X можна ввести дискретну метрику таким чином: $\forall x, y \in X$ покладемо

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Як вправу, пропонуємо читачу довести, що функція $\varrho(x,y)$ є метрикою, а $(X, \varrho(x,y))$ – метричним простором.

2.3 Елементарні властивості метрики

Нехай $(X, \varrho(x,y))$ – метричний простір.

Властивість 2.1. Нерівність багатокутника.
Для довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ справджується нерівність

$$\varrho(x_1, x_n) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3) + \ldots + \varrho(x_{n-1}, x_n).$$

□ Доведення проведемо шляхом послідовного застосування нерівності трикутника [5]:

$$\varrho(x_1, x_n) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_n) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3) +$$

$$+ \varrho(x_3, x_n) \leq \ldots \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3) + \ldots + \varrho(x_{n-1}, x_n).$$

■

Властивість 2.2. Нерівність чотирикутника.
Для довільних $x, y, u, v \in X$ має місце нерівність

$$|\varrho(x,u) - \varrho(y,v)| \leq \varrho(x,y) + \varrho(u,v). \tag{2.7}$$

□ Двічі застосуємо нерівність багатокутника для $n = 4$ [5]:

$$\varrho(x,u) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,v) + \varrho(v,u),$$

$$\varrho(y,v) \leq \varrho(y,x) + \varrho(x,u) + \varrho(u,v).$$

Із врахуванням аксіоми симетричності із даних нерівностей отримуємо нерівність (2.7). ■

Властивість 2.3. Друга нерівність трикутника.
Для довільних $x, y, u \in X$ має місце нерівність

$$|\varrho(x,u) - \varrho(y,u)| \leq \varrho(x,y).$$

□ Дана нерівність випливає із (2.7) при $u = v$. ■

Зауважимо, що дані властивості метрики є узагальненням відповідних нерівностей у евклідовій геометрії.

2.4 Означення нормованого простору

Для лінійних просторів існує аналог поняття метрики – норма. Якщо метрика говорить нам, наскільки два елементи відрізняються один від одного, то норма – наскільки один елемент відрізняється від нуля, тобто наскільки елемент «великий». Фактично, норма є узагальненням поняття довжини вектора.

Означення 2.3. Норма – це функціонал, що заданий на лінійному просторі E і ставить у відповідність кожному $x \in E$ невід'ємне число $\|x\|$ (норма x), яке задовольняє такі три властивості (аксіоми норми):

1) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \Theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для будь-якого $x \in E$ і будь-якого дійсного (комплексного) числа λ;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника) для будь-яких $x, y \in E$.

Лінійний простір, у якому задано норму, будемо називати нормованим.

Із аксіоми 3 нормованого простору випливає такий наслідок:

Наслідок 2.1. Для будь-яких $x, y \in E$ $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

□ З нерівності трикутника випливає:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

Аналогічно,

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|x - y\| + \|x\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|.$$

Таким чином

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$

■

Оскільки метрика є відстанню між двома довільними елементами простору, то очевидно, що у нормованому просторі

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Розглянемо різні об'єкти нормованого простору: *відкриту і замкнену кулі,* а також *сферу.*

У нормованому просторі E розглянемо множину

$$S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\},$$

де $x_0 \in E$ – фіксована точка, а $r > 0$. Множину $S_r(x_0)$ називатимемо *відкритою кулею* із центром у x_0 радіуса r. Аналогічно множину $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$ називатимемо *замкненою кулею* (із центром в x_0 радіуса r), а множину $\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$ – *сферою.* Очевидно, що $\bar{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$.

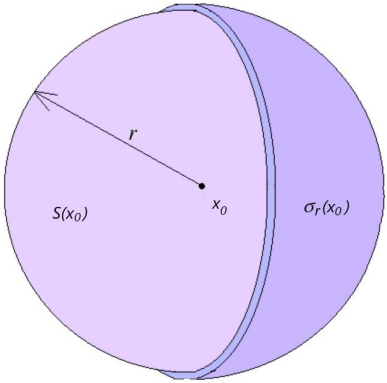

Рис. 2.2: Зображення замкненої кулі $\bar{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$.

Приклад 2.8. В дійсному лінійному просторі m-вимірних стовпців $\mathbb{R}^m$ можна ввести норму

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Виконання першої і другої аксіом доводиться тривіально, а нерівність трикутника (третя аксіома) є частковим випадком нерівності Мінковського:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отриманий нормований простір у лінійній алгебрі відомий як евклідів простір і позначається як E^m.

Приклад 2.9. Розглянемо простір c^m, простір елементів $x\in\mathbb{R}^m$ із нормою

$$\|x\|_{c^m}=\max_{1\le i\le m}|\xi_i|.$$

Перевіримо аксіоми норми:

1. Очевидно, що $\|x\|_{c^m}\ge 0$. Нехай $\|x\|=0$, тобто $\max\limits_{1\le i\le m}|\xi_i|=0$. Але тоді всі $\xi_i=0$ і $x=\{0\}_{i=1}^m=\Theta$.
2. $|\lambda\xi_i|=|\lambda|\cdot|\xi_i|$, звідки випливає однорідність норми.
3. $|\xi_i+\eta_i|\le|\xi_i|+|\eta_i|\le\max\limits_{1\le i\le m}|\xi_i|+\max\limits_{1\le i\le m}|\eta_i|$. Тобто

   $$|\xi_i+\eta_i|\le\|x\|_{c^m}+\|y\|_{c^m}.$$

   Переходимо в цій нерівності до max по i і отримуємо нерівність трикутника.

Зауваження: Замкнена куля $\overline{S}_1(x_0)=\{x\in E:\|x-x_0\|_{E^m}\le 1\}$ називається m-вимірною кулею, а $\overline{S}_1(x_0)=\{x\in E:\|x-x_0\|_{c^m}\le 1\}$ – m-вимірним кубом.

Приклад 2.10. Розглянемо деякий вектор

$$x=(-2;2;0;-4;0;1)^T\in\mathbb{R}^6$$

і знайдемо $\|x\|_{E^m}$ та $\|x\|_{c^m}$ та $||x||_{l_1}$ при $m=6$.

Евклідова норма

$$\|x\|_{E^6}=\sqrt{\sum_{k=1}^{6}|x_k|^2}=\sqrt{|-2|^2+|2|^2+|0|^2+|-4|^2+|0|^2+|1|^3}=$$

$$=\sqrt{4+4+16+1}=\sqrt{25}=5.$$

Максимум-норма

$$||x||_{c^6} = \max\limits_{1\le k\le 6} |x_k| = \max\{|-2|, |2|, |0|, |-4|, |0|, |1|\} = 4.$$

Октаедрична норма для даного вектора буде обчислюватися так:

$$||x||_{l_1} = \sum_{k=1}^{6} |x_k| = |-2| + |2| + |0| + |-4| + |0| + |1| = 9.$$

2.5 Елементи аналізу в нормованих просторах. Еквівалентність норм у скінченновимірних просторах

В нормованому просторі E розглянемо послідовність $\{x_n\}$.

Означення 2.4. Елемент $x_0 \in E$ називаємо границею послідовності $\{x_n\}$, якщо $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо x_0 є границею $\{x_n\}$, то записують $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, або $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збіжна до x_0. Околом точки x_0 називають будь-яку відкриту кулю $S_r(x_0)$.

На рис. 2.3 наведемо приклад послідовності $\{x_n\}$, що збігається до певної границі a при $n \to \infty$.

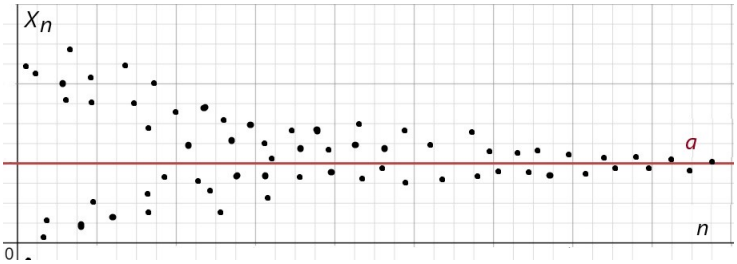

Рис. 2.3: Послідовність, що збігається до границі a.

Іншим цікавим візуальним прикладом є послідовність, представлена периметрами правильних багатокутників із n сторонами, які вписані в одиничне коло чи описані навколо нього (див. рис. 2.4).

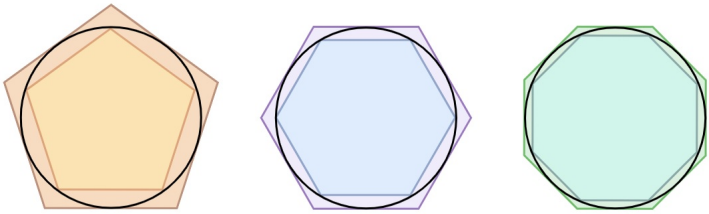

Рис. 2.4: Послідовність багатокутників, периметри яких збігаються до периметра кола

При збільшенні кількості сторін така послідовність має границю, яка дорівнює периметру кола, тобто 2π [1].

Для границі послідовності $\{x_n\}$ можна показати справедливість основних властивостей:

1. У будь-якому околі точки x_0 знаходяться всі члени послідовності $\{x_n\}$, за винятком їх скінченної кількості;
2. Границя x_0 єдина;
3. Будь-яка підпослідовність послідовності x_n збігається до x_0;
4. Якщо $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$, то $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ при $n \to \infty$;
5. Якщо окрім цього $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$ $(y_n \in E, y_0 \in E)$, то $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ при $n \to \infty$;
6. Якщо $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Залишаємо доведення цих властивостей як вправу для читача.

Приклад 2.11. Розглянемо деяку послідовність $\{x_n\}$ нормованого простору E. Нехай $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і $x_0 \in E$. Доведемо, що границя x_0 єдина.

Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо, що існують два елементи x_0 і y_0 такі, що $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ і $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0$, причому $x_0 \neq y_0$. Легко побачити, що

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - x_n + x_n - y_0\| \leq \|x_0 - x_n\| + \|x_n - y_0\|.$$

Оскільки $\|x_0 - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ і $\|x_n - y_0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, а наведена нерівність виконується за довільного n, отримуємо, що $x_0 = y_0$. Отже, границя єдина.

Означення 2.5. Множину $M \subset E$ називатимемо обмеженою, якщо її можна помістити в деяку кулю. Точніше, M – обмежена, якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $\|x\| \leq C$.

Приклад 2.12. Розглянемо простір c^m та деяку збіжну послідовність $\{x_n\}$.

Нехай $x_n = \{\xi_{ni}\}_{i=1}^m$ і $x_n \to x_0 = \{\xi_{0i}\}_{i=1}^m$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\|x_n - x_0\|_{c^m} = \max_{1\leq i\leq m} |\xi_{ni} - \xi_{0i}| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Тобто, $\xi_{ni} \to \xi_{0i}$ при $n \to \infty$ для довільного $i = 1, \ldots, m$.

Це означає, що кожна координата вектора x_n збігається до відповідної координати вектора x_0. Тому можна сказати, що збіжність в c^m є покоординатною.

Приклад 2.13. Розглянемо простір E^m. Нехай $\{\xi_{ni}\}_{i=1}^m = x_n \to x_0 = \{\xi_{0i}\}_{i=1}^m$ при $n \to \infty$. Це означає, що при $n \to \infty$

$$\|x_n - x_0\|_{E^m} = \left[\sum_{i=1}^m (\xi_{ni} - \xi_{0i})^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{2.8}$$

Оскільки для довільного $x = (\xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$.

$$\|x\|_{c^m} = \max_{1\leq i\leq m} |\xi_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{E^m},$$

то із (2.8) випливає, що

$$\|x_n - x_0\|_{c^m} \leq \|x_n - x_0\|_{E^m} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, тут збіжність теж є покоординатною.

2.6 Нерівність Ґольдера і Мінковського для сум

Доведемо дві нерівності, які часто використовуються у функціональному аналізі.

Нехай $p > 1$ і $q > 1$ такі, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Якщо $p = 1$, то $q = \infty$ і, якщо $q = 1$, то $p = \infty$. Тоді для чисел $a, b \in \mathbb{C}$ є справедливою така нерівність Юнга:

$$|a \cdot b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{2.9}$$

Розглянемо тепер два довільні набори комплексних чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ і $\eta_1, \ldots, \eta_m$ і переконаємося, що для них справджується

нерівність Ґольдера:

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.10}$$

□ Введемо наступні позначення:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ та } \|y\|_q := \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Припустимо, що $\|x\|_p \neq 0$ і $\|y\|_q \neq 0$, інакше (2.10) є очевидною.

Покладаючи

$$a := \frac{|\xi_k|}{\|x\|_p} \text{ та } b := \frac{|\eta_k|}{\|y\|_q}$$

із нерівності Юнга (2.9), отримаємо:

$$\frac{|\xi_k \eta_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \frac{|\xi_k|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|\eta_k|^q}{q \cdot \|y\|_q^q}.$$

Сумуючи дану нерівність по k від 1 до m, отримаємо:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_p} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\eta_k|^q}{q \cdot \|y\|_q^q}. \tag{2.11}$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|^p = \|x\|_p^p$, а $\sum\limits_{k=1}^{m} |\eta_k|^q = \|y\|_q^q$, а $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то із (2.11) випливає:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq 1,$$

а отже, справедливою є нерівність Ґольдера:

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q ,$$

■

Доведемо тепер

нерівність Мінковського:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (2.12)$$

□ Легко бачити, що

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k| . \qquad (2.13)$$

До кожної із сум у правій частині нерівності (2.13) застосуємо нерівність Ґольдера та використаємо те, що $(p-1)q = p$, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.14)$$

та

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.15}$$

Додамо нерівності (2.14) і (2.15) і отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \tag{2.16}$$

Будемо вважати, що $\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p > 0$ (якщо ця сума рівна нулю, то нерівність Мінковського (2.12) є очевидною). Поділимо нерівність (2.16) на $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$. Оскільки $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, то отримаємо нерівність (2.12). ■

2.7 Приклади нормованих просторів

Розглянемо деякі простори і перетворимо їх у нормовані.

1. **Простір $l_p^{(m)}$.** Нехай $p \in [1, +\infty)$. Перетворимо $\mathbb{R}^m$ в нормований простір, який будемо позначати $l_p^{(m)}$. Для цього введемо норму:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Перша і друга аксіоми тут є очевидними, а нерівність трикутника є нерівністю Мінковського.

В просторі $l_1^{(m)}$ норма елемента має вигляд $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i|$.

З'ясуємо тепер, якою буде збіжність в $l_p^{(m)}$. Для цього доведемо наступну нерівність:

$$\|x\|_{c^m} \leq \|x\|_{l_p^{(m)}} \leq m^{\frac{1}{p}} \|x\|_{c^m}, \tag{2.17}$$

де $\|x\|_{c^m} = \max\limits_{1\le i\le m} |\xi_i|$ – кубічна норма.

а) Покажемо справедливість лівої частини нерівності: $\|x\|_{c^m} \le \|x\|_{l_p^{(m)}}$. Оскільки $\|x\|_{l_p^{(m)}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то $\max\limits_{1\le i\le m} |\xi_i|$ також входить в суму $\sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i|$ і тоді дана нерівність є очевидною.

б) Покажемо тепер справедливість другої частини нерівності (2.17), $\|x\|_{l_p^{(m)}} \le m^{\frac{1}{p}} \|x\|_{c^m}$.

Легко бачити, що

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{m} \max_{1\le i\le m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(m \cdot \max_{1\le i\le m} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = m^{\frac{1}{p}} \|x\|_{c^m}.$$

Із правої частини нерівності (2.17) випливає, що якщо $\{x_n\} \in \mathbb{R}^m$ і $x_n \to x_0, n \to \infty$ в c^m, то $x_n \to x_0,$ при $n \to \infty$ і в $l_p^{(m)}$, оскільки $\|x_n - x_0\|_{l_p^{(m)}} \le m^{\frac{1}{p}} \|x_n - x_0\|_{c^m}$.

І навпаки, якщо $x_n \to x_0, n \to \infty$ в $l_p^{(m)}$, то $x_n \to x_0$, при $n \to \infty$ і в c^m як наслідок нерівності $\|x_n - x_0\|_{c^m} \le \|x_n - x_0\|_{l_p^{(m)}}$.

Таким чином, збіжні послідовності в c^m і в $l_p^{(m)}$ співпадають і збіжність у $l_p^{(m)}$, як і в c^m є збіжністю покоординатною.

2. **Простір обмежених числових послідовностей** m.

Розглянемо множину послідовностей $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ таких, що

$$\sup_{1\le i\le +\infty} |\xi_i| \le \infty.$$

Цю множину прийнято позначати буквою m.

Якщо $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$ і $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$, то за означенням покладають

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_i + \eta_i\}_{i=1}^{\infty}, \ \lambda x = \{\lambda \xi_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Можна показати, що якщо $x, y \in m$, то $x + y \in m$ і $\lambda x \in m$, а отже, m – лінійний простір.

Покладаючи $\|x\| = \sup\limits_{1 \le i \le +\infty} |\xi_i|$, простір m можна перетворити у нормований.

Можна також переконатися у справедливості аксіом норми в просторі m.

Розглянемо питання збіжності в просторі m.

Нехай $\{x_n\} \in m, x_0 \in m$ і $x_n \to x_0$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для довільного $n > N$ виконується

$$\sup_{1 \le i \le +\infty} |\xi_{ni} - \xi_{0i}| < \varepsilon.$$

Остання нерівність еквівалентна умові, що $\|\xi_{ni} - \xi_{0i}\| < \varepsilon$ для довільних номерів i.

Таким чином, збіжність в m є покоординатною, рівномірною відносно номера координати.

Приклад 2.14. Розглянемо послідовність $x = \left\{ \frac{1}{2^k} \,|k \in \mathbb{N} \right\} \in m$ і знайдемо її норму. Легко бачити, що

$$x = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots \right\},$$

а отже,

$$||x||_m = \sup_{1 \le k \le \infty} |x_k| = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots\} =$$

$$= \sup\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots \right\} = \frac{1}{2}.$$

3. **Простір** $l_p,\ p \ge 1$.

   Розглянемо множину l_p всіх числових послідовностей $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, таких, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ збігається.

   Можна показати, що якщо $x, y \in l_p$, то і $x + y \in l_p$, а також $\lambda x \in l_p$.

Норму в просторі l_p введемо за формулою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Перевірити першу і другу аксіоми тривіально. Покажемо в l_p нерівність трикутника. Для цього в нерівності Мінковського для скінченних сум збільшимо праву частину, замінивши m на довільне $n > m$ і в отриманій нерівності

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

перейдемо до границі при $n \to \infty$. Отримаємо нерівність (для довільних m)

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_{l_p} + \|y\|_{l_p}. \tag{2.18}$$

Це і є нерівність трикутника, а отже, l_p є нормованим простором.

Приклад 2.15. Розглянемо числову послідовність

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{k \cdot (k+1)} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Відомо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k \cdot (k+1)} \right|$ є збіжним, а отже, $x \in l_1$.

Знайдемо норму елемента x:

$$||x||_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k \cdot (k+1)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}.$$

Для цього обчислимо часткову суму ряду

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Із врахуванням того, що

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\ldots,\ \frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)},$$

маємо:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Звідси

$$||x||_{l_1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

4. **Простір неперервних функцій** $C\left[a,b\right]$.

Розглянемо лінійний простір всіх неперервних на $[a,b]$ функцій.

Норму введемо так:

$$\|x\|_{C[a,b]}=\max_{a\le t\le b}\left|x(t)\right|.$$

Перша і друга аксіоми перевіряються тривіально. Перевіримо третю аксіому.

Оскільки $\forall t\in[a,b]$ має місце нерівність

$$|x(t)+y(t)|\le|x(t)|+|y(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x(t)|+\max_{a\le t\le b}|y(t)|.$$

Відповідно, $|x(t)+y(t)|\le\|x\|_{C[a,b]}+\|y\|_{C[a,b]}$. Нерівність збережеться і якщо взяти $\max\limits_{a\le t\le b}$ в її лівій частині. В результаті отримаємо нерівність трикутника для норми в $C\left[a,b\right]$. Отриманий нормований простір будемо позначати аналогічно.

Покажемо далі, що збіжність в $C\left[a,b\right]$ по нормі є рівномірною. Для цього нагадаємо означення рівномірної збіжності послідовності функцій.

Означення 2.6. Послідовність функцій $\{f_n(t)\} \in C[a,b]$ рівномірно збігається до $f(t) \in C[a,b]$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$, що для всіх номерів $n > N_\varepsilon$ і для всіх точок $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$|f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon.$$

Нехай дано послідовність $\{x_n(t)\} \in C\,[a,b]$ і нехай вона збігається до $x_0(t) \in C\,[a,b]$, тобто $\|x_n(t) - x_0(t)\| \to 0,\ n \to \infty$. Це означає наступне: $\forall \varepsilon > 0$ існує номер N_ε такий, що $\forall n > N_\varepsilon$ справедлива нерівність

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

а отже, $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in [a,b]$. Тобто збіжність в $C\,[a,b]$ по нормі є рівномірною.

Подивимося, як виглядає в $C\,[a,b]$ (в дійсному випадку) окіл $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in C\,[a,b] : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$. Для цього побудуємо графіки функцій $x = x_0(t),\ x = x_0(t) + \varepsilon, x = x_0(t) - \varepsilon$. Ці два графіки і відрізки прямих $t = a$ і $t = b$ обмежують ε-смужку (смужку шириною 2ε навколо графіка $x = x_0(t)$), яка і є ε-околом точки x_0. В $S_\varepsilon(x_0)$ лежать ті елементи $x \in C\,[a,b]$, графіки яких лежать строго між графіком елементів $x_0 - \varepsilon$ і $x_0 + \varepsilon$.

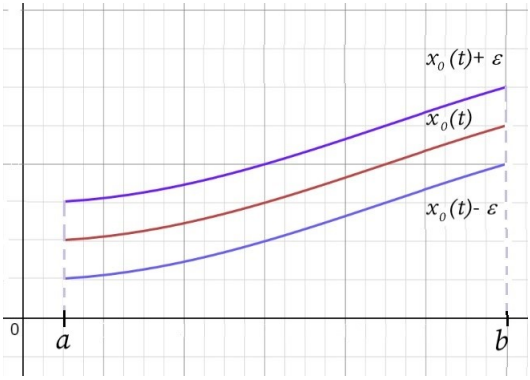

Рис. 2.5: Куля в просторі $C\,[a,b]$.

Приклад 2.16. Нехай $x(t) \in C[-2,2]$ і $x(t) = (t-0.5)^2 - 1$. Знайдемо норму даного елемента.

Оскільки

$$||x(t)||_{C[a,b]} = \max_{a \le t \le b} |x(t)|,$$

то

$$||x(t)||_{C[-2,2]} = \max_{-2 \le t \le 2} |x(t)| = \max_{-2 \le t \le 2} |(t-0.5)^2 - 1|.$$

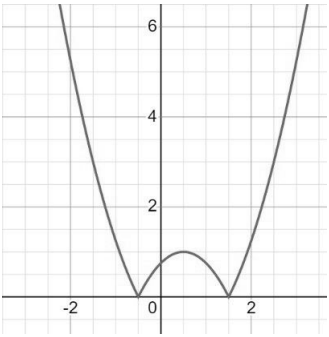

Рис. 2.6: Графік функції $|(t-0.5)^2 - 1|$.

Розглянемо рис. (2.6). Легко бачити, що максимум функції $|(t-0.5)^2 - 1|$ досягається при $t = -2$ і

$$||x(t)||_{C[-2,2]} = 5.25.$$

Приклад 2.17. Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$ у просторі $C[0,1]$ і перевіримо, чи вона є збіжною.

Послідовність $\{x_n(t)\}$ для кожного фіксованого $t \in [0,1]$ при $n \to \infty$ збігається до $x_0(t) \equiv 0$. Доведемо тепер, що $\{x_n(t)\}$ збігається до нуля рівномірно. Для цього розглянемо

$$\|x_n\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right|.$$

Знайдемо $\max\limits_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right|$. Легко побачити, що

$$\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)'=t^n-t^{n+1}$$

і

$$t^n-t^{n+1}=0 \text{ при } t_1=0 \text{ і } t_2=1.$$

Підставимо t_1 і t_2 в $\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)$. Максимум досягається при $t_2=1:\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Отже, ця послідовність збігається в просторі $C[0,1]$ рівномірно.

5. **Простір** $C^k[a,b]$. В лінійному просторі k разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій введемо норму

$$\|x\|_{C^k[a,b]}=\sum_{i=0}^{k}\max_{a\le t\le b}\left|x^{(i)}(t)\right|,$$

де $x^{(i)}(t)$ – i-та похідна функції $x(t)$.

Аналогічно до випадку простору $C[a,b]$, можна показати справедливість аксіом нормованого простору в $C^k[a,b]$, а також рівномірну збіжність на $[a,b]$ послідовностей $\left\{x^{(i)}(t)\right\}$, $i=0,1,\ldots,k$. Залишаємо це доведення як вправу для читача.

Приклад 2.18. Розглянемо неперервно диференційовну функцію $x(t)=t^2-1\in C^1[-1,1]$ і знайдемо її норму:

$$||x(t)||_{C^1[-1,1]}=\max_{-1\le t\le 1}|x(t)|+\max_{-1\le t\le 1}|x'(t)|=$$

$$=\max_{-1\le t\le 1}|t^2-1|+\max_{-1\le t\le 1}|2t|.$$

Функція $|t^2-1|$ досягає максимуму в точці екстремуму $t=0$, а $|2t|$ при $t=1$. Таким чином,

$$||x(t)||_{C^1[-1,1]}=|0-1|+|2\cdot 1|=3.$$

6. **Простір** $\tilde{\mathscr{L}}_p[a,b]$

Повернемося до лінійного простору неперервних на $[a,b]$ функцій. Але норму введемо інакше:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty.$$

Можна показати справедливість першої і другої аксіом нормованого простору. Нерівність трикутника буде ***нерівністю Мінковського для інтегралів*:**

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.19}$$

□ Доведення нерівності Мінковського при $p>1$ базується на нерівності Ґьольдера

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \|x\|_p \|y\|_q, \text{ де } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2.20}$$

Легко бачити, що при $x(t)\equiv 0$ і $y(t)\equiv 0$ на $[a,b]$ нерівність (2.20) виконується.

Нехай $\|x\|_p > 0$ і $\|y\|_q > 0$. Покладаючи

$$a := \frac{|x(t)|}{\|x\|_p} \quad \text{і} \quad b := \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$$

з нерівності Юнга (2.9)

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q},$$

після інтегрування отримаємо:

$$\frac{\int\limits_a^b |x(t)y(t)|\,dt}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt}{p\|x\|_p} + \frac{\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt}{q\|y\|_q} = 1.$$

Таким чином (2.20) показано.
Далі, як і у випадку сум, маємо

$$\|x+y\|_p^p = \int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt \le \int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}\,|x(t)|\,dt +$$

$$+ \int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}\,|y(t)|\,dt \le \|x+y\|^{\frac{p}{q}} \left(\|x\|_p + \|y\|_q\right).$$

Після скорочення на $\|x+y\|^{\frac{p}{q}}$ отримаємо нерівність Мінковського (2.19). ■

Приклад 2.19. Нехай $x(t) = t\cdot\sin(t)$ і $x(t) \in \tilde{\mathscr{L}}_2[-\pi,\pi]$. Знайдемо норму функції $x(t)$ в просторі функцій неперервно інтегровних за Лебегом із квадратом $\tilde{\mathscr{L}}_2[-\pi,\pi]$:

$$||x(t)||_{\tilde{\mathscr{L}}_2[-\pi,\pi]} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t\cdot\sin(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\sin^2(t) dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{t^3}{6} - \left(\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\sin(2t) - \frac{t\cos(2t)}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx (4.3823 - (-4.3823))^{\frac{1}{2}} \approx 2.9605.$$

Означення 2.7. Нехай в лінійному просторі E введено дві норми $\|\cdot\|^{(1)}$ і $\|\cdot\|^{(2)}$. Якщо існує константа $\beta > 0$ така, що $\forall x \in E$ виконується нерівність $\|x\|^{(1)} \le \beta\,\|x\|^{(2)}$, то будемо говорити, що норма $\|\cdot\|^{(1)}$ підпорядковується нормі $\|\cdot\|^{(2)}$.

Можна показати, що норма $\|\cdot\|_p$ підпорядковується нормі $\|\cdot\|_{C[a,b]}$, а отже, із рівномірної збіжності послідовності неперервних на $[a,b]$ функцій випливає збіжність $\tilde{\mathscr{L}}_p[a,b]$.

Приклад 2.20. Розглянемо нерівність

$$\|x\|_{E^m} \leq \beta \|x\|_{c^m}$$

і перевіримо, чи існує $\beta > 0$ така, що $\|x\|_{E^m}$ підпорядковується $\|x\|_{c^m}$.

Очевидно, що $\xi_i \leq \max\limits_i \xi_i$ за будь-якого $i = \overline{1,m}$, однак тоді $\xi_i^2 \leq \max\limits_i \xi_i^2$. Підсумуємо ці нерівності за i, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq i\leq m} \xi_i^2 = m \cdot \max_{1\leq i\leq m} \xi_i^2.$$

Звідси

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2} \leq \sqrt{m \cdot \max_{1\leq i\leq m} \xi_i^2},$$

або

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2} \leq \sqrt{m} \cdot \max_{1\leq i\leq m} |\xi_i|.$$

Отже, $\|x\|_{E^m} \leq \beta \|x\|_{c^m}$, де $\beta = \sqrt{m} > 0$.

2.7.1 Відкриті та замкнені множини

Нехай E – нормований простір.

Означення 2.8. Нехай $M \subset E$, точку $a \in M$ називаємо внутрішньою точкою множини M, якщо M містить також деякий окіл цієї точки. Тобто якщо для $a \in M$ знайдеться $r > 0$ таке, що $S_r(a) \subset M$.

Означення 2.9. Множину $M \subset E$ називаємо відкритою, якщо всі її точки є внутрішніми. Порожню множину $\emptyset$ вважають відкритою в E за означенням.

Приклад 2.21. Інтервал $(0,1)$ на числовій осі є відкритою множиною. Якщо взяти будь-яку точку x з цього інтервалу, то можна знайти маленький інтервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, який також повністю лежить в $(0,1)$.

Означення 2.10. Нехай $M \subset E$, множина

$$E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\}$$

називається доповненням до M.

Тобто якщо $M \subset E$, то всі точки з E можна поділити на

- внутрішні точки множини M (існує окіл точки $x_0, S_r(x_0) \subset M$);
- зовнішні точки множини M (існує окіл точки $S_r(x_0)$, що не містить точок із M, тобто $M \cap S_r(x_0) = \emptyset$);
- межеві точки: в будь-якому околі $S_r(x_0)$ є точки, що належать M і не належать M.

Межею множини M називається множина ∂M її межевих точок. Межева точка може належати M, а може й не належати. Тому може бути, що $\partial M \subset M$, що $\partial M \cap M = \emptyset$, і що $\partial M \cap M \neq \partial M$.

Означення 2.11. Точку a називаємо граничною точкою множини $M \subset E$, якщо довільний окіл a містить хоча б одну точку множини M, відмінну від a.

Означення 2.12. Точку a називаємо ізольованою точкою множини $M \subset E$, якщо довільний окіл a не містить жодної іншої точки множини M, відмінну від a.

Всі ізольовані точки є межевими точками.

Важливим є і таке твердження:

Теорема 2.1. Точка a є граничною точкою множини $M \subset E$ тоді й лише тоді, коли існує деяка послідовність $\{x_n\} \subset M$, що збігається до a, при цьому $x_n \neq a, n = 1, 2, \ldots$

□ ($\Rightarrow$) Нехай a – гранична точка M.
Візьмемо

$$r := 1 \text{ і знайдемо } x_1 \in M \cap S_1(a);$$

$$r := \frac{1}{2} \text{ і знайдемо } x_1 \in M \cap S_{\frac{1}{2}}(a);$$

Продовжуючи міркування, знайдемо послідовність $\{x_n\} \subset M$, що $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$. Тобто збіжну до a.

($\Leftarrow$) Нехай існує $\{x_n\} \subset M$, що збігається до a. Це означає, що для будь якого $r > 0$ існує номер $N = N(r)$ такий, що $x_n \in S_r(a)$ для будь-якого $n > N$.

■

Означення 2.13. Множину $M \subset E$ називаємо замкненою, якщо вона містить усі свої граничні точки. Порожню множину $\emptyset$ завжди вважають замкненою за означенням.

Приклад 2.22. Можна показати, що сфера

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

є замкнутою множиною.

□ Дійсно, нехай a – гранична точка $\sigma_r(x_0)$. Значить, знайдуться $x_n \in \sigma_r(x_0)$ (тобто $\|x_n - x_0\| = r, \quad n = 1, 2, \ldots$) такі, що $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

З нерівності трикутника

$$\|a - x_0\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + r. \quad (2.21)$$

Окрім того,

$$r = \|x_n - x_0\| \leq \|x_n - a\| + \|a - x_0\|. \quad (2.22)$$

Таким чином із нерівностей (2.21) та (2.22) при $n \to \infty$ отримаємо $\|a - x_0\| \leq r$ та $r \leq \|a - x_0\|$. Відповідно, $\|a - x_0\| = r$. Звідси випливає, що $a \in \sigma_r(x_0)$. Тобто сфера $\sigma_r(x_0)$ є замкнутою. ■

Означення 2.14. Нехай $M \subset E$, а M' – множина граничних точок M. Множина $\overline{M} = M \cup M'$ називається замиканням множини M.

Приклад 2.23. $\overline{S}_r(x_0)$ є замиканням $S_r(x_0)$.

Зупинимося на важливих для нас властивостях відкритих та замкнених множин:

- Замикання будь-якої множини є множина замкнена.
- Об'єднання скінченної кількості замкнених множин є множина замкнена.
- Об'єднання скінченної кількості відкритих множин є множина відкрита.
- Доповнення до замкнених множини є множина відкрита.
- Доповнення до відкритої множини є множина замкнена.
- Перетин скінченної кількості відкритих множин є множина відкрита.

2.8 Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах

Означення 2.15. Нехай E – лінійний простір і в ньому двома способами введені норми: $\|x\|$ (1) і $\|x\|^{(2)}$. Норми $\|x\|^{(1)}$ і $\|x\|^{(2)}$ називаються еквівалентними, якщо існують числа $\alpha > 0, \beta > 0$ такі, що $\forall x \in E$

$$\alpha \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \beta \|x\|^{(1)}.$$

Теорема 2.2. В будь-якому скінченновимірному лінійному просторі всі норми еквівалентні.

□ Фіксуємо в m-вимірному лінійному просторі E базис $\{e_k\}_{k=1}^m$ і нехай $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ – розклад довільного елемента $x \in E$ по цьому базису.

Введемо в E норму: $\|x\|_c = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Із цією нормою в E можна ототожнювати евклідів простір E^m.

Нехай $\|x\|$ – ще одна довільна норма в E.

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\xi_k| \, \|e_k\| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta \|x\|_c .$$

Відповідно $\|x\|$ підпорядкована $\|x\|_c$, оскільки

$$\|x\| \le \beta \|x\|_c . \tag{2.23}$$

Покажемо, що $\|x\|_c$ також підпорядкована $\|x\|$. Для цього розглянемо функцію $\|x\|$ на кулі $\|x\|_c = 1$.

Скористаємось наслідком із нерівності трикутника:

$$|\|a\| - \|b\|| \le \|a - b\| \tag{2.24}$$

Припустимо, що x' і x'' – два довільні елементи евклідового простору E^m. Тоді з нерівностей (2.23) і (2.24) маємо

$$|\|x'\| - \|x''\|| \le \|x' - x''\| \le \beta \|x' - x''\|_c .$$

Звідси випливає неперервність функції $\|x\|$ в E^m.

Куля $\|x\|_c = 1$ є замкненою і обмеженою множиною.

Скористаємося тепер наступною теоремою: функція неперервна на замкненій обмеженій множині в E^m обмежена на ній і досягає на ній своєї верхньої і нижньої граней. Відповідно до цієї теореми знайдеться x_0 таке, що $\alpha = \|x_0\| = \inf \|x\|$. Очевидно, що $\alpha > 0$, бо $x_0 \neq 0$. Звідси

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_c}\right\| \ge \alpha, \text{ звідки } \|x\| \ge \alpha \|x\|_c .$$

Отже, $\|x\|$ еквівалентна $\|x\|_c$. Тобто всі норми в E еквівалентні сферичній нормі, а значить всі вони еквівалентні.

■

Приклад 2.24. Доведемо правильність нерівностей

$$\alpha_m \|x\|_{E^m} \le \|x\|_{c^m} \le \beta_m \|x\|_{E^m}$$

та знайдемо відповідні константи еквівалентності α_m та β_m.

Почнемо із першої нерівності.

Очевидно, що

$$\xi_i \le \max_i \xi_i$$

за будь-якого $i = \overline{1,m}$, однак тоді

$$\xi_i^2 \le \max_i \xi_i^2.$$

Підсумуємо ці нерівності за i, s отримаємо

$$\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \le \sum_{i=1}^m \max_{1\le i\le m} \xi_i^2 = m \cdot \max_{1\le i\le m} \xi_i^2.$$

Звідси

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \xi_i^2} \le \sqrt{m \cdot \max_{1\le i\le m} \xi_i^2},$$

або

$$\tfrac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \xi_i^2} \le \max_{1\le i\le m} |\xi_i|.$$

Отже, $\alpha_m \|x\|_{E^m} \le \|x\|_{c^m}$, де константа еквівалентності $\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Доведемо тепер правильність $\|x\|_{c^m} \le \beta_m \|x\|_{E^m}$.

Числова послідовність $\{\xi_i^2\}_{i=1}^m$ також містить $\max\limits_{1\le i\le m} \xi_i{}^2$; тому $\max\limits_{1\le i\le m} \xi_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^m \xi_i^2$, звідки $\max\limits_{1\le i\le m} |\xi_i| \le 1 \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \xi_i^2}$. Отже, $\|x\|_{c^m} \le \beta_m \|x\|_{E^m}$, де константа еквівалентності $\beta_m = 1$.

Приклад 2.25. З'ясуємо чи еквівалентні в просторі неперервних на $[a,b]$ функцій такі норми [5]:

$$\max_{a\le t\le b} |x(t)| \quad \text{та} \quad \int_a^b |x(t)|dt.$$

Введемо позначення:

$$||x(t)||^{(1)} := \max_{a\le t\le b} |x(t)| \quad \text{та} \quad ||x(t)||^{(2)} := \int_a^b |x(t)|dt.$$

Оцінимо норму $||x(t)||^{(2)}$:

$$||x(t)||^{(2)} := \int_a^b |x(t)|dt \le \max_{a\le t\le b} |x(t)| \cdot (b-a) = (b-a)||x(t)||_1.$$

Тобто $||x(t)||^{(2)}$ підпорядковується нормі $||x(t)||^{(1)}$.

Покажемо тепер, що норма $||x(t)||^{(1)}$ не підпорядковується нормі $||x(t)||^{(2)}$. Для цього, не обмежуючи загальності, припустимо, що $a = 0$, а $b = \pi$. У просторі $C[0,\pi]$ розглянемо таку послідовність функцій:

$$x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{n}; \\ 0, & \dfrac{\pi}{n} \le t \le \pi. \end{cases}$$

Обчислимо

$$||x_n(t)||^{(1)} = \max_{0\le t\le \pi} |\sin nt| = 1$$

та

$$||x_n(t)||^{(2)} = \int_0^{\pi} |x_n(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nt|dt = \frac{2}{n}.$$

Легко бачити, що не існує додатної константи C, що для кожного числа n буде виконуватися

$$1 < C \cdot \frac{2}{n},$$

а отже, $||x_n(t)||^{(2)}$ не підпорядковується $||x_n(t)||^{(1)}$. Тобто норми $||x(t)||^{(1)}$ та $||x(t)||^{(2)}$ не є еквівалентними.

Можна показати, що відношення еквівалентності норм володіє наступними властивостями:

1. $\|x\| \sim \|x\|$ (рефлексивність);
2. Якщо $\|x\|^{(1)} \sim \|x\|^{(2)}$, то $\|x\|^{(2)} \sim \|x\|^{(1)}$ (симетричність);
3. Якщо $\|x\|^{(1)} \sim \|x\|^{(2)}$, а $\|x\|^{(2)} \sim \|x\|^{(3)}$, то $\|x\|^{(1)} \sim \|x\|^{(3)}$ (транзитивність).

2.9 Про елемент найкращого наближення в нормованому просторі

У математиці, зокрема у функціональному аналізі, елемент найкращого наближення в нормованому просторі є фундаментальним поняттям, пов'язаним з вивченням оптимізації та теорії наближення.

У нормованому просторі елементом найкращого наближення є єдиний елемент простору, найближчий до даного елемента. Цей елемент також відомий як проекція даного елемента на простір. Зупинимося на цьому детальніше.

Нехай E – абстрактний нормований простір, $L \subset E$.

Означення 2.16. Множина L є підпростором нормованого простору E, якщо L – замкнений лінійний многовид.

Приклад 2.26. Нехай $E = C[0,1]$. Розглянемо в цьому просторі сукупність поліномів із дійсними коефіцієнтами степеня не вище n:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n.$$

Можна показати, що ця сукупність утворює підпростір в E.

Також можна показати, що множина поліномів довільного степеня підпростір в E не утворює, бо не є замкнутою:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \to e^t \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а e^t – не поліном, а неперервна функція.

Розглянемо нормований простір E і для довільної точки $x \in E$ визначимо відстань $\rho(x, L)$ від підпростору $L \subset E$ до x як

$$\rho(x, L) := \inf_{u \in L} \|x - u\| .$$

Нехай M – множина дійсних чисел, обмежена знизу. Тоді існує число α_0 таке, що

1. $\alpha_0 \leq x \ \ \forall x \in M$ (тобто α_0 – нижня грань M);
2. $\forall \alpha' > \alpha_0 \ \ \exists\, x' \in M$ таке, що $x' < \alpha'$ (тобто α_0 – найбільша із нижніх граней M):

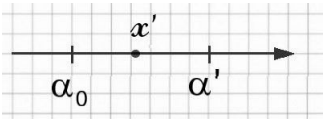

Рис. 2.7: Точна нижня грань.

При цьому α_0 називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\alpha_0 = \inf M$ чи $\alpha_0 = \inf\limits_{x \in M} x$.

Із цього випливає, що $\rho(x, L)$ існує, оскільки множина

$$M = \{\|x - u\| \to 0, \forall u \in L\}$$

обмежена знизу (числом нуль).

Властивості $\rho(x, L)$:

1. $\|x - u\| \geq \rho(x, L) \ \ \forall u \in L$;
2. Якщо $r > \rho(x, L)$, то $\exists\ u_r \in L$ таке, що $\|x - u_r\| < r$.

Лема 2.1. Якщо $x \in L$, то $\rho(x, L) = 0$; якщо ж $x \notin L$, то $\rho(x, L) > 0$.

□ Якщо $x \in L$, то прийнявши $u := x$ бачимо, що $\|x - u\| = 0$, тобто $\inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = 0$.

Нехай тепер $x \notin L$, припустимо тим не менше, що $\rho(x, L) = 0$. Тоді за означенням inf для будь-якого натурального n знайдеться $u_n \in L$ таке, що $\|u_n - x\| < \frac{1}{n}$. Звідси $u_n \to x$, $n \to \infty$. Оскільки L замкнутий, то $x \in L$, а ми припускали протилежне. Звідси випливає, що $\rho(x, L) > 0$. ■

2.10 Наближення елементами простору

Число $\rho(x, L)$ характеризує найкраще наближення (найкращу апроксимацію) елемента x за допомогою елементів підпростору L. Якщо існує елемент $u^* \in L$ такий, що $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$, то u^* називається найкращим елементом наближення x елементами підпростору L. Найкращий елемент наближення може виявитися не єдиним, а може не існувати взагалі. Проте можна показати, що у випадку, коли L – скінченновимірний підпростір, найкращий елемент завжди існує.

Побудова елемента найкращого наближення широко використовується в чисельних методах. Так елемент найкращого наближення можна знайти різними методами, зокрема такими:

- метод найменших квадратів;
- метод ортогонального проектування;
- метод найкрутішого спуску.

Метод найменших квадратів є найпоширенішим методом знаходження елемента найкращого наближення. Цей метод мінімізує суму квадратів відстаней між даним елементом і елементами в просторі.

Метод ортогональної проекції проектує даний елемент на простір, який є єдиним елементом у просторі, найближчим до даного елемента.

Метод найкрутішого спуску — метод знаходження елемента найкращого наближення шляхом ітераційного переміщення в напрямку найкрутішого спуску функції відстані. Цей спосіб часто використовують, коли простір нескінченновимірний.

Теорема 2.3. Нехай L – скінченновимірний підпростір нормованого простору E. Для будь-якого $x \in E$ існує (можливо, не єдиний) такий елемент $u^* \in L$, що $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$.

Наведемо приклад, який показує, що найкращий елемент може виявитися не єдиним навіть в скінченновимірному нормованому просторі.

Приклад 2.27. Розглянемо підпростір $l_1^{(2)}$, що складається із стовпців $x = (\xi_1, \xi_2)^T$. Нехай $\|x\|_{l_1^{(2)}} = |\xi_1| + |\xi_2|$. Окрім того, розглянемо деяку точку $x_0 = (1, -1)$ і одновимірний підпростір L із базисним вектором $e = (1, 1)$. Тобто $L = \{\alpha e;\ \alpha \in \mathbb{R}^1;\ |\alpha| \le 1\}$.

Обчислимо відстань

$$\rho(x_0, L) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \|x_0 - \alpha e\| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^1} (|1 - \alpha| + |1 + \alpha|) = 2.$$

Дана рівність виконується для кожного $\alpha \in [-1; +1]$. відповідно існує нескінченна кількість найкращих елементів $u^* = \alpha e$, $\alpha \in [-1; 1]$, що наближають x_0 із допомогою елементів L.

Означення 2.17. Нормований простір E будемо називати строго нормованим, якщо в ньому рівність $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ можлива тільки якщо $\exists\ \alpha > 0$, що $y = \alpha x$.

Теорема 2.4. В строго нормованому просторі E для кожного $x \in E$ і кожного підпростору L може існувати не більше одного найкращого елемента наближення x елементами L.

□ Доведемо від супротивного. Припустимо, що в деякому строго нормованому просторі E знайдуться елемент x, підпростір L і елементи $u_1^*,\ u_2^* \in L$ такі, що

$$\|x - u_1^*\| = \|x - u_2^*\| = d = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

Нехай $d > 0$ (якщо $d = 0$, то $u_1^* = u_2^*$ за першою аксіомою норми). Оскільки, d – найменша відстань від

x до будь-якого елемента з E, то відстань від x до $\frac{u_1^*+u_2^*}{2}$ не є меншою за d, то:

$$d \le \left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = \left\| \frac{x - u_1^*}{2} + \frac{x - u_2^*}{2} \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \|x - u_1^*\| + \frac{1}{2} \|x - u_2^*\| = d.$$

Відповідно, $\left\| x - \frac{u_1^*+u_2^*}{2} \right\| = d$.

Але тоді

$$\|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0.$$

Оскільки E – строго нормований, то існує $\lambda > 0$ таке, що $x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*)$. Якщо $\lambda \neq 1$, то

$$x = (1 - \lambda)^{-1} (u_2^* - \lambda u_1^*) \in L.$$

Звідси випливає, що $x \in L$, а це суперечить припущенню. ■

Приклад 2.28. Покажемо, що $C[0,1]$ не є строго нормованим. Нехай $x(t) \equiv 1,\ y(t) \equiv t$. Легко бачити, що

$$2 = \|x + y\| = \|x\| + \|y\| = 1 + 1.$$

А не існує $\lambda > 0$, що $y(t) = \lambda x(t)$.

2.11 Лінійні многовиди щільні в нормованому просторі

Означення 2.18. Нехай E – нормований простір. Лінійний многовид $L \subset E$ називається щільним в E, якщо $\forall x \in E$ і $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ u \in L$ такий, що $\|x - u\| < \varepsilon$.

Тобто до будь-якого елемента $x \in E$ можна наблизитися як завгодно близько якимось елементом $u \in L$.

Нехай L – щільний в E і $x \in E$. Вибираючи $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ знайдемо $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \in L$ такі, що $||x - u_n|| < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$

Таким чином, якщо многовид L є щільним в E, то для довільного $x \in E$ існує $\{u_n\} \subset L$ така, що $u_n \to x,\ n \to \infty$.

Також, пригадуючи операцію замикання, бачимо, що твердження «L є щільним в E», $L \subset E,\ L \neq E$ означає $\overline{L} = E$.

Відповідно до теорем Веєрштраса є багато прикладів лінійних многовидів, щільних в нормованих просторах.

Наведемо кілька прикладів таких многовидів:

1. Так, згідно з першою теоремою Веєрштраса, лінійний многовид тригонометричних поліномів $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ є щільним в нормованому просторі неперервних на $[-\pi; \pi]$ функцій, що задовольняє умову $x(-\pi) = x(\pi)$ із нормою $\|x\| = \max\limits_{-\pi \leq t \leq \pi} |x(t)|$.

2. Згідно з другою теоремою Веєрштраса, лінійний многовид всіх поліномів $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ є щільним в $C[a, b]$.

3. Якщо в якості нормованого простору вибрати $E = C[0, 1]$, то щільний многовид в ньому будуть утворювати так звані фінітні функції (функції тотожно рівні нулю за межами деякого відрізка носія, рис. 2.8), $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n+1}$.

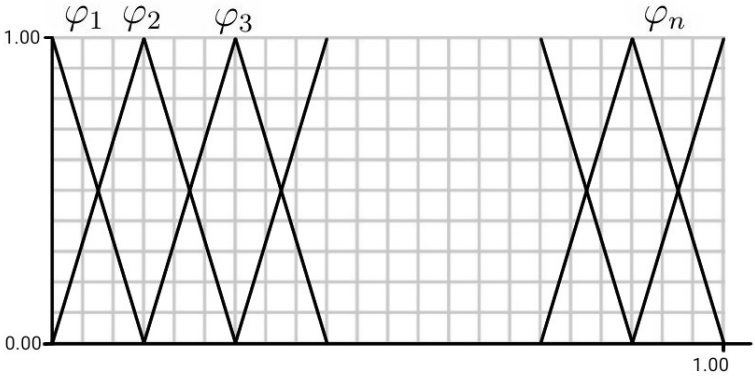

Рис. 2.8: Фінітні функції $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$.

В абстрактному нормованому просторі немає поняття ортогональності, тому використовується *теорія Pica* про майже перпендикуляр.

Нехай в тривимірному евклідовому просторі дано площину L, що проходить через початок координат O, дано вектор z одиничної довжини, z – перпендикуляр до L і має початок в O (рис. 2.9). Тоді для будь-якого вектора u, що лежить в L має місце: $|u - z| > |z| = 1$, бо довжина перпендикуляра z є меншою довжини будь-якої похилої $u - z$. Така ж ситуація буде в так званих гільбертових просторах, де визначене поняття перпендикулярності (ортогональності).

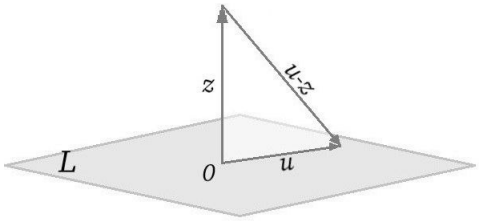

Рис. 2.9: Площина L і вектор z одиничної довжини.

Лема 2.2. ***(Лема Pica)*** Нехай L – підпростір в нормованому просторі E, причому $L \neq E$. Для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ існує елемент $z_\varepsilon \notin L, \|z_\varepsilon\| = 1$ такий, що $\rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$.

Розділ 3

Банахові простори

3.1 Фундаментальні послідовності

Оскільки кожний простір зі скалярним добутком є нормованим, то розглянемо питання, пов'язані з його повнотою. Це поняття є важливим у разі дослідження збіжності послідовностей та рядів. Тому розглянемо деякі необхідні для розв'язування конкретних задач означення та твердження.

Означення 3.1. Нехай X – нормований простір. Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називаємо фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер N_ε такий, що для довільних номерів $n > N_\varepsilon$ і будь-яких натуральних p виконується нерівність $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого номера N_ε, всі елементи послідовності $\{x_n\}$ розташовані як завгодно близько.

Властивості фундаментальних послідовностей:

1. Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ фундаментальні в X, тоді $\{x_n + y_n\}$ фундаментальна.

2. Нехай $\{x_n\}$ – фундаментальна $\Rightarrow$ $\{\lambda x_n\}$ – фундаментальна (тут λ – деяка константа).

3. Будь-яка фундаментальна послідовність обмежена.

4. Нехай $\{x_n\}$ – фундаментальна, $\{x_{n_k}\}$ – підпослідовність послідовності $\{x_n\}$. Тоді якщо $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

5. **Лема 3.1.** Будь-яка збіжна в X послідовність є фундаментальною.

   $\square$ Нехай $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує N_ε такий, що $\forall\ n > N_\varepsilon$ виконується

нерівність $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. Оскільки $n + p > N_\varepsilon$, то при $n > N$ маємо також $\|x_{n+p} - x_0\| < \varepsilon$. Тоді з нерівності трикутника

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_0\| + \|x_0 - x_n\| < 2\varepsilon.$$

Тобто $\{x_n\}$ фундаментальна. ■

Обернене твердження не є правильним: не всі фундаментальні послідовності є збіжними.

Для наочності, як приклад, наведемо графік деякої фундаментальної послідовності $\{x_n\}$:

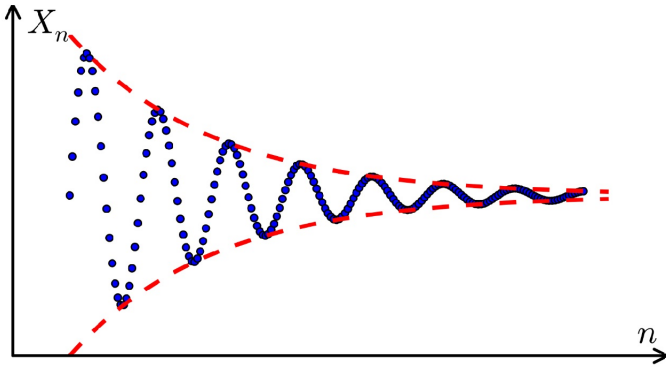

Рис. 3.1: Графік фундаментальної послідовності $\{x_n\}$[2].

Бачимо, що зі збільшенням n елементи послідовності стають ближчими один до одного.

Прикладом фундаментальної послідовності є послідовність $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Якщо ж послідовність не фундаментальна, її елементи не наближаються як завгодно близько один до одного із збільшенням n (див. рис. 3.2).

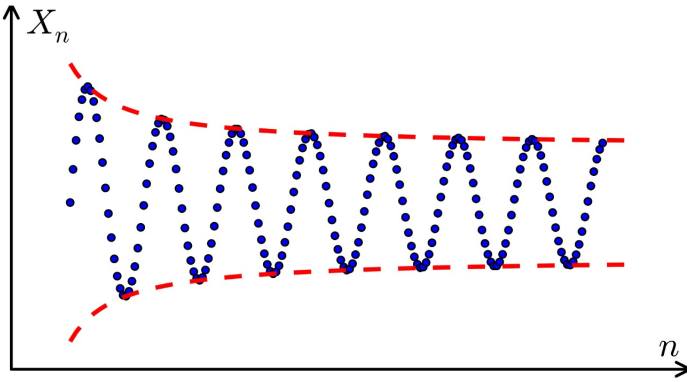

Рис. 3.2: Графік нефундаментальної послідовності $\{x_n\}$ [3].

Прикладом нефундаментальної послідовності є послідовність $\{x_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

3.2 Означення банахового простору

Означення 3.2. Нормований простір називатимемо повним, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність збігається. Повний нормований простір називають банаховим.

Теорема 3.1. (Критерій Коші) Нехай E – банахів простір. Для того, щоб послідовність $\{x_n\} \in E$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Наведемо деякі приклади банахових просторів.

1. Дійсна числова вісь E є банаховим простором, оскільки для неї є справедливим критерій Коші: вся дійсна вісь E заповнена точками – дійсними числами, на ній нема «дір», вона є повною.

2. Простори E^m $(m > 1)$ теж є банаховими, оскільки в E^m є справедливим критерій Коші.

3. Розглянемо простір неперервних на $[a,b]$ функцій. Нехай $\{x_n(t)\} \in C[a,b]$. Тоді справедливим є критерій Коші рівномірної збіжності послідовності функцій: для того, щоб послідовність $\{x_n(t)\}$ збігалася в $C[a,b]$, тобто рівномірно на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальна в $C[a,b]$. Тобто щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для будь-яких $n > N$ і довільних натуральних p виконувалася нерівність

$$\|x_{n+p} - x_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon,$$

або інакше

$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{ для всіх } t \in [a,b].$$

Окрім того, якщо послідовність неперервних на $[a,b]$ функцій $\{x_n(t)\}$ збігається рівномірно на $[a,b]$ до деякої функції $x(t)$, то $x(t)$ теж неперервна на $[a,b]$.

4. Відомим є наступне твердження:

Теорема 3.2. Нехай X – повний нормований простір, $Y \subset X$ – лінійний многовид. Для того, щоб Y був повним нормованим простором відносно норми, породженої X необхідно і достатньо, щоб Y був замкненою множиною.

Розглянемо тепер повний нормований простір $C[-1,1]$ в якості X і $C^1[-1,1]$ – в якості лінійного многовиду в $C[-1,1]$.

Нехай $x(t) \in C[-1,1]$, тоді $||x||^{(1)} := \|x\|_{C[-1,1]} = \max\limits_{-1\le t\le 1} |x(t)|$.

При $x(t) \in C^1[-1,1]$ $\|x\|^{(2)} := \max\limits_{-1\le t\le 1} |x(t)| + \max\limits_{-1\le t\le 1} |x'(t)|$.

Виберемо послідовність функцій $x_n(t) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. Покажемо, що дана послідовність збігається до $|t| \notin C^1[-1;1]$.

$$\frac{\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}} - |t|\right)\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}} + |t|\right)}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}} + |t|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{n^2}} + |t|} \le \frac{1}{n} \to 0$$

при $t = 0$ і $n \to \infty$.

Звідси випливає, що $x(t) \to |t| \notin C^1[-1;1]$. Тобто $C^1[-1;1]$ не є замкнутою множиною, а отже, не є й банаховим простором відносно першої норми.

А відносно другої буде.

3.3 Приклад неповного нормованого простору

Наведемо приклад неповного нормованого простору. Покажемо, що простір $\tilde{\mathscr{L}}_2[-1,1]$ не є повним. Розглянемо послідовність неперервних на $[-1,1]$ функцій $\{x_n(t)\}$ вигляду:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt \text{ при } t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ +1 \text{ при } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Побудуємо графік даної функції.

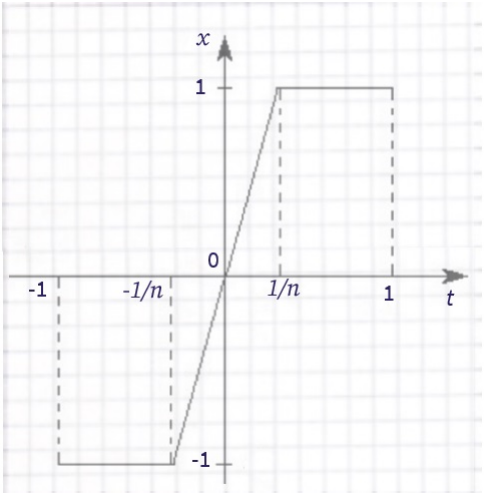

Рис. 3.3: Функція $x_n(t)$.

На рисунку видно (рис. 3.3), що $|x_n(t)| \leq 1$ для довільних n, але

тоді $|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \le 2$ і, відповідно,

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^2 \, dt = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^2 \, dt \le$$

$$\le 4 \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{8}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тобто послідовність $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в сенсі збіжності в середньому.

В кожній точці $t \in [-1, 1]$ при $n \to \infty$ послідовність $x_n(t)$ має границю:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } t \in [-1, 0), \\ 0 \text{ при } t = 0 \\ 1 \text{ при } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

При цьому $|x(t)| \le 1$ і $|x_n(t) - x(t)| \le 2$. Але тоді, як і вище,

$$\|x_n(t) - x(t)\|^2 \le \frac{8}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Отже, при $n \to \infty$ $x_n(t) \to x(t)$ в середньому на $[-1, 1]$, причому $x(t)$ розривна на $[-1, 1]$, функція, тобто $x(t) \notin \tilde{\mathscr{L}}_2[-1, 1]$, оскільки нормований простір складається із функцій неперервних на $[-1, 1]$.

3.4 Банахові простори $C^k(\overline{G})$, $k \ge 1$

Розглянемо тепер банахові простори диференційовних функцій $C^k(\overline{G})$, $k \ge 1$. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$. Введемо наступні позначення. Набір індексів

$$\alpha_s \ge 0, s = 1, 2, \ldots, m, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

називається мультиіндексом. Число $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ називається довжиною мульти індексу. Для запису часткових похідних введемо такі позначення:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot D_m^{\alpha_m}.$$

Нехай G – обмежена область в E^m, а $\overline{G}$ – замкнута область, отримана замиканням G. Будемо казати, що функція $u(x)$, визначена і неперервна на $\overline{G}$, k разів неперервно диференційовна в $\overline{G}$, якщо для всіх α таких, що $|\alpha| \leq k$:

1. $D^\alpha u$ існує і неперервна у всіх точках G.
2. $D^\alpha u$ має граничні значення, коли x прямує до границі ∂G області G (за точками G).
3. Довизначимо $D^\alpha u$ на ∂G, прийнявши за значення $D^\alpha u$ на ∂G її граничні значення. Ми отримаємо функцію $D^\alpha u$, неперервну на $\overline{G}$.

Розглянемо тепер $C^k(\overline{G})$ – нормований простір функцій, що мають на $\overline{G}$ всі неперервні часткові похідні до порядку k включно. Норму в $C^k(\overline{G})$ вводимо за формулою

$$\|u\|_{C^k(\overline{G})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{G})},$$

або, детальніше $\|u\|_{C^k(\overline{G})} = \sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq k} \max\limits_{x\in\overline{G}} |D^\alpha u(x)|$.

Наведемо приклад. Нехай $S_R \subset E^2$ – круг $x^2+y^2 < R^2$. Простір $C^1(S_R)$ складається із неперервно диференційовних в S_R функцій $u(x,y)$ із нормою

$$\|u\| = \max_{x,y\in S_R} |u(x,y)| + \max_{x,y\in S_R} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| + \max_{x,y\in S_R} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|.$$

Можна показати, що всі простори $C^k(\overline{G})$ є повними, а значить, і банаховими.

Розділ 4

Простори зі скалярним добутком

4.1 Евклідові простори

Розглянемо деякий дійсний лінійний простір E.

Означення 4.1. Скалярним добутком двох елементів $x, y \in E$ будемо називати функціонал (x, y), для якого є справедливими наступні аксіоми:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x = \Theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, за умови, що x, y, z – довільні елементи E, а λ – довільне дійсне число.

Означення 4.2. Дійсний лінійний простір із заданим на ньому скалярним добутком будемо називати евклідовим.

Будь-який евклідів простір можна перетворити в нормований, визначивши в ньому норму за формулою

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{4.1}$$

Виконання першої і другої аксіом нормованого простору є очевидними. Для перевірки нерівності трикутника (третьої аксіоми) скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\forall x, y \in E \quad |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| . \tag{4.2}$$

Дана нерівність отримується із таких міркувань:

□

1. Відповідно до першої аксіоми скалярного добутку для будь-якого дійсного λ маємо:

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0.$$

2. Розкриваючи ліву частину нерівності, із врахуванням другої, третьої і четвертої аксіом скалярного добутку, отримаємо

$$(x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0 \quad \forall\lambda.$$

Звідси випливає, що дискримінант рівняння

$$(x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) = 0$$

є невід'ємним. Тоді

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

3. Доведемо тепер аксіому трикутника

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Беремо корінь і отримуємо нерівність трикутника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

4.2 Унітарні простори

Нехай U – комплексний лінійний простір.

Означення 4.3. Скалярним добутком елементів x, y з U називається функціонал (x, y), для якого виконуються умови:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x = \Theta$;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;
4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для довільних x, y, z із U і довільній константі $\lambda \in \mathbb{C}$.

Означення 4.4. Комплексний лінійний простір U будемо називати унітарним, якщо в ньому визначено скалярний добуток.

Розглянемо також два твердження, що випливають із аксіом (1–4):

Наслідок 4.1. В унітарному просторі $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

□ $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \overline{\lambda}\ \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$. ■

Наслідок 4.2. В унітарному просторі $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$.

□ $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = (y, x) + \overline{(z, x)} =$
$= (x, y) + (x, z)$. ■

В унітарному просторі можна також ввести норму:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Перша і друга аксіоми норми будуть очевидними, а третя аксіома, як і у випадку евклідових просторів, випливає із нерівності Коші-Буняковського:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

□ Для доведення цієї нерівності знову розглянемо нерівність із довільним комплексним параметром λ :

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0.$$

Звідси випливає, що

$$(x,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y) \geq 0.$$

Нехай $y \neq 0$ (при $y=0$ нерівність Коші-Буняковського виконується). Оскільки λ довільне, можемо прийняти $\lambda := -\frac{(x,y)}{(y,y)}$. Тоді $\overline{\lambda} = -\frac{(y,x)}{(y,y)}$ і ми отримаємо

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0.$$

Звідси маємо, що

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

А далі дивимося доведення для дійсного випадку.
■

4.3 Приклади просторів зі скалярним добутком

Приклад 4.1. Евклідів простір E^m. Введемо в дійсному лінійному просторі скалярний добуток.

Нехай $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)^T \in E^m$, тоді скалярний добуток

$$(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k.$$

Відповідна норма матиме вигляд $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^2}$.

Нерівність Коші-Буняковського тоді запишемо як

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2} \, \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \eta_k^2} \, .$$

Вона буде частковим випадком нерівності Ґьольдера.

Ортогональність елементів $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$ і $y = \{\eta_k\}_{k=1}^m$ матиме вигляд $\sum\limits_{k=1}^m \xi_k \eta_k = 0$.

Якщо коефіцієнти комплексні, то скалярний добуток записується як

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m \xi_k \overline{\eta_k},$$

а норма матиме вигляд $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^m |\xi_k|^2}$.

Тобто якщо $x = (1, 2+i, 0, 3-i)^T$, а $y = (2, 2+i, -1, 3-i)^T$, і $x, y \in E^4$, то їх скалярний добуток обчислюється так:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^4 \xi_k \overline{\eta_k} = 1 \cdot 2 + (2+i) \cdot \overline{(2+i)} + 0 \cdot (-1) + (3-i) \cdot \overline{(3-i)} =$$

$$= 2 + (2+i) \cdot (2-i) + 0 \cdot (-1) + (3-i) \cdot (3+i) =$$

$$= 2 + 4 - i^2 + 9 - i^2 = 2 + 4 - (-1) + 9 - (-1) = 17.$$

Приклад 4.2. Простір l_2. Якщо $x, y \in l_2$, то $x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $y = \{\eta_k\}_{k=1}^\infty$.

Покладаємо що $\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 < +\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^\infty |\eta_k|^2 < +\infty$ (ряди збігаються). Тоді скалярний добуток визначається як $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^\infty \xi_k \eta_k$.

Якщо x, y – комплексні, то $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\eta_k}$.

Норма і в комплексному, і дійсному випадках визначається як

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2}.$$

В просторі l_2 також можна показати виконання аксіом скалярного добутку, записати нерівність Коші-Буняковського і записати умову ортогональності елементів x, y.

Нехай $x = (1, -2, 0, 3, 0, 0, \ldots)^T$, а $y = (-1, -1, 5, 1, 1, 1, \ldots)^T$ і $x, y \in l_2$. Тоді їх скалярний добуток рівний

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \ldots = 4.$$

Приклад 4.3. Лінійний простір комплекснозначних неперервних на $[a, b]$ функцій $\tilde{\mathscr{L}}_2[a, b]$.

Нехай $x, y \in \tilde{\mathscr{L}}_2[a, b]$, тоді $x := x(t), y := y(t)$. Скалярний добуток визначається як

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

норма –

$$\|x\| := \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 \, dt}.$$

Нерівність Коші-Буняковського –

$$\left| \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 \, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 \, dt}.$$

Нехай $x(t) = t^2 + i \cdot t$, а $y(t) = 2i \cdot t$ і $x(t), y(t) \in \tilde{\mathscr{L}}_2[0, 1]$. Знайдемо скалярний добуток даних комплекснозначних неперервних функцій:

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 \left(t^2 + i \cdot t\right) \overline{(2i \cdot t)}dt = \int_0^1 \left(t^2 + i \cdot t\right)(-2i \cdot t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-2i \cdot t^3 - 2i^2 t^2\right) dt = \left(-\frac{2i}{4} t^4 + \frac{2}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{i}{2}.$$

4.4 Процес ортогоналізації Шмідта

Нехай E – простір зі скалярним добутком. Якщо $(x, y) = 0$, то елементи x і y називатимемо *ортогональними* і записуватимемо $x \perp y$. Нуль простору E вважатимемо ортогональним до будь-якого елемента. Розглянемо в E елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, серед яких нема нульових. Якщо $(x_k, x_l) = 0$ при довільних $k, l = 1, 2, \ldots, m$ $(k \neq l)$, то систему елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називатимемо *ортогональною*.

Для означеної вище ортогональної системи справджується таке фундаментальне твердження.

Теорема 4.1. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – ортогональна система; тоді елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лінійно незалежні.

Якщо задана система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ така, що

$$(x_k, x_l) = \delta_{kl}, \ k,l = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\delta_{kl} = 1 \text{ при } k = l, \delta_{kl} = 0 \text{ при } k \neq l$$

(тут δ_{kl} – символ Кронекера), то систему елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називатимемо *ортонормованою*.

Для будь-якої лінійно незалежної системи $\{x_k\}$ можна побудувати ортогональну систему $\{e_k\}$ та ортонормовану систему $\{f_k\}$ за допомогою процесу ортогоналізації Шмідта.

- Приймаємо $e_1 = x_1$ (відомо, що $e_1 \neq 0$, оскільки система з одного елемента x_1 є лінійно незалежною, як частина $\{x_k\}$).
- Далі e_2 шукаємо у вигляді $e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$, де скаляр λ_{21} підбираємо так, щоб виконувалась умова $e_2 \perp e_1$. Звідси $0 = (x_2 - \lambda_{21} e_1, e_1)$, а $\lambda_{21} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$. Отже, $e_2 \neq 0$ знайдено.
- Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ уже побудовані. Елемент e_k шукаємо у вигляді $e_k = x_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i$.

Скаляри λ_{ki} на кожному кроці знаходимо з умови $e_k \perp e_l$ $\left(l = \overline{1, k-1}\right)$. Звідси $\lambda_{kl} = \frac{(x_k, e_l)}{(e_l, e_l)}$.

У цьому разі $e_k \neq 0$.

Отже, отримаємо ортогональну систему e_k. Приймаємо далі $f_k = e_k / \|e_k\|$, отримаємо ортонормовану систему $\{f_k\}$.

Приклад 4.4. Проведемо ортогоналізацію елементів

$$x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2$$

у просторі $\tilde{L}_2[-1, 1]$.

Приймемо

$$e_0 = x_0(t) = 1 \neq 0.$$

Тоді

$$e_1 = x_1 - \lambda_{10} e_0.$$

З умови ортогональності елементів e_0 та e_1 маємо

$$(x_1 - \lambda_{10} e_0, e_0) = 0,$$

звідки $\lambda_{10} = \frac{(x_1, e_0)}{(e_0, e_0)}$.

Знайдемо скалярні добутки (x_1, e_0) та (e_0, e_0):

$$(x_1, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} t dt = 0;\ (e_0, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} 1 dt = 2.$$

Тоді $\lambda_{10} = 0$, а $e_1 = t$.

Знайдемо тепер

$$e_2 = x_2 - \lambda_{20} e_0 - \lambda_{21} e_1.$$

Оскільки

$$(e_2, e_0) = 0 \quad \text{та} \quad (e_2, e_1) = 0,$$

то

$$\lambda_{20} = \frac{(x_2, e_0)}{(e_0, e_0)} \quad \text{і} \quad \lambda_{21} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

Обчислимо скалярні добутки (x_2, e_0), (x_2, e_1) та (e_1, e_1):

$$(x_2, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \tfrac{2}{3}; \quad (x_2, e_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot t dt = 0;$$

$$(e_1, e_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Звідси $\lambda_{20} = \frac{1}{3}$, а $\lambda_{21} = 0$. Отже, $e_2 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Отримали ортогональну систему елементів $e_0{=}1, e_1{=}t, e_2{=}t^2{-}\frac{1}{3}$.

4.5 Деякі властивості скалярного добутку

На практиці також часто використовують такі важливі властивості скалярного добутку:

Неперервність скалярного добутку. Нехай $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$; тоді $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$.

□ Легко бачити, що

$$(x_n, y_n){-}(x, y) = (x_n \pm x, y_n){-}(x, y) = (x_n - x, y_n){+}(x, y_n - y)\,.$$

Із нерівності трикутника маємо:

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \le |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)|\,.$$

До правої частини нерівності застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$|(x_n - x, y_n)|{+}|(x, y_n - y)| \le \|x_n - x\|\,\|y_n\|{+}\|x\|\,\|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$, оскільки $\{\|y_n\|\}$ обмежена.
■

Рівність паралелограма. У будь-якому просторі зі скалярним добутком для кожної пари елементів x та y

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{4.3}$$

□

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) +$$

$$+ (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) =$$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

■

Зауважимо, що в нормованих просторах дана рівність виконується не завжди.

Приклад 4.5. Довести, що в просторі $C[0,1]$ неможливо ввести скалярний добуток, що узгоджується із нормою даного простору. Для цього достатньо показати, що існують елементи x та y, що для них не виконується рівність (4.3).

Нехай $x(t) \equiv 2t$, а $y(t) \equiv 3$. Тоді $||x(t)||_{C[0,1]} = 2$, а $||y(t)||_{C[0,1]} = 3$.

Обчислимо $||x+y||_{C[0,1]}$ та $||x-y||_{C[0,1]}$:

$$||x+y||_{C[0,1]} = ||2t+3||_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1} |2t+3| = 5,$$

$$||x-y||_{C[0,1]} = ||2t-3||_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1} |2t-3| = 3.$$

Тоді $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 34 \neq 26 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Розділ 5

Гільбертові простори

5.1 Означення гільбертового простору

Гільбертів простір є узагальненням поняття евклідового чи унітарного простору на нескінченновимірний випадок. Це лінійний простір над полем дійсних або комплексних чисел, а отже, в ньому введені операції додавання і множення на скаляри із відповідних полів. Окрім того в гільбертовому просторі визначено скалярний добуток, що дозволяє вводити поняття, аналогічні звичним поняттям ортогональності і кута; визначити метрику, відносно якої гільбертів простір є повним метричним простором. Таким чином можемо ввести наступне

Означення 5.1. Нескінченновимірний простір зі скалярним добутком називатимемо гільбертовим, якщо він є повним відносно норми, породженої скалярним добутком. Гільбертові простори зазвичай позначають буквою H.

Тепер можемо сформулювати дуже важливу для обчислювальної математики задачу побудови елемента найліпшого наближення в гільбертових та банахових просторах.

Означення 5.2. Нехай X – лінійний нормований простір, L – підпростір у X, а $x \in X$. Якщо існує такий елемент $u^* \in L$, що $\varrho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = \|x - u^*\|$, то u^* називатимемо найліпшим елементом наближення x елементами підпростору L.

Окрім того, справджуються такі твердження.

Теорема 5.1. У гільбертовому просторі існує єдиний елемент $y \in L$, що реалізує відстань від точки x до підпростору L:

$$\varrho(x, L) = \|x - y\|.$$

Теорема 5.2. Нехай $\varrho(x, L) = \|x - y\|$, тоді $x - y \perp L$.

Отже, у гільбертовому просторі H, за умови скінченновимірності L із базисом $\{h_k\}_{k=1}^m$, побудова елемента найліпшого наближення зводиться до розв'язування (відносно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k, h_j\right) = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.1}$$

В абстрактному банаховому просторі важко побудувати ефективний числовий алгоритм відшукання елемента найліпшого наближення. Тому замість задачі наближення в банаховому просторі зазвичай розв'язують ту ж задачу в гільбертовому просторі, що вкладається в цей банахів. Наприклад, відомо, що простір Соболєва $H^1(a, b)$ вкладається в $C[a, b]$, а тому існує таке $\beta \in \mathbb{R}\,(\beta > 0)$, що за будь-якого $x \in H^1(a, b)$ справджується нерівність

$$\|x\|_{C[a,b]} \leq \beta \|x\|_{H^1(a,b)}.$$

Нехай $L \subset C[a, b]$ – підпростір із базисом, що містить неперервно диференційовані функції, $x \in \tilde{H}^1[a, b]$, u^*– елемент найліпшого наближення x елементами L, знайденими за допомогою системи типу (5.1), з огляду на означення скалярного добутку в $\tilde{H}^1[a, b]$. Точніше, якщо $x(t), y(t)$ – неперервно диференційовані, то

$$(x, y)_{\tilde{H}^1[a,b]} = \int_a^b [x(t) \cdot y(t) + x'(t) \cdot y'(t)]\, dt.$$

Тоді

$$\|x - u^*\|_{C[a,b]} \leq \beta \|x - u^*\|_{\tilde{H}^1[a,b]},$$

і за достатньо малої норми

$$\|x - u^*\|_{\tilde{H}^1[a,b]}$$

елемент u^* добре наближає x у просторі $C[a, b]$.

Приклад 5.1. Нехай елемент $x(t) \in \tilde{L}_2[0,1]$ і $x(t) = t^3$. Знайдемо елемент найкращого наближення із підпростору L поліномів степеня не вище другого. Фактично нам потрібно знайти проекцію елемента $x(t) = t^3$ на підпростір L.

Згідно з теоремою (5.2), елемент $u \in L$ є ортогональною проекцією x на підпростір L, якщо за будь-якого $v \in L$ $(x-u) \perp v$. Підпростір L породжений одночленами $h_0(t) = 1$, $h_1(t) = t$, $h_2(t) = t^2$, а вектор $u \in L$ має вигляд

$$u = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2,$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – невідомі константи.

Для того, щоб вектор $x - u$ був ортогональний до довільного вектора $v \in L$, необхідно і достатньо, щоб вектор $x - u$ був ортогональний до базисних векторів h_0, h_1, h_2. Отже, для знаходження вектора u потрібно розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь (відносно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$):

$$(x - (\lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)\ ,\ h_k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2. \tag{5.2}$$

Обчислимо скалярні добутки, що трапляються в цій системі:

$$(x, h_0) = \int_0^1 t^3 dt = \tfrac{1}{4}, \quad (x, h_1) = \int_0^1 t^4 dt = \tfrac{1}{5}, \quad (x, h_2) = \int_0^1 t^5 dt = \tfrac{1}{6},$$

$$(h_0, h_0) = \int_0^1 dt = 1, \quad (h_0, h_1) = \int_0^1 t dt = \tfrac{1}{2}, \quad (h_0, h_2) = \int_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3},$$

$$(h_1, h_1) = \int_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3}, \quad (h_1, h_2) = \int_0^1 t^3 dt = \tfrac{1}{4}, \quad (h_2, h_2) = \int_0^1 t^4 dt = \tfrac{1}{5}.$$

Тоді система (5.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\lambda_0 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3}\lambda_0 + \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{5}\lambda_2 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її і знайдемо $\lambda_0 = 0,05$; $\lambda_1 = -0,6$; $\lambda_2 = 1,5$. Отже, проекцією елемента $x(t) = t^3$ на підпростір багаточленів степеня ≤ 2 є багаточлен $u(t) = 1,5t^2 - 0,6t + 0,05$.

Наведемо приклади гільбертових просторів:

Приклад 5.2. Можна показати, що простір l_2 є повним і, значить, гільбертовим. Якщо $x, y \in l_2$, то $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Тоді $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < +\infty$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 < +\infty$ і можна розглянути скалярний добуток

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta}_i,$$

а також норму

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2}.$$

Приклад 5.3. Гільбертів простір $\tilde{L}_2[-\pi, \pi]$ неперервних, інтегровних із квадратом за Лебегом функцій на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Скалярний добуток в просторі задається як

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Тоді норма буде задаватись як

$$\|f(x)\|_{\tilde{L}_2[-\pi,\pi]} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

5.2 Ортогональне доповнення

Означення 5.3. Нехай L – лінійний многовид в H. Сукупність всіх елементів з H, ортогональних до L називається ортогональним доповненням до L і позначається $L^{\perp}$.

Це можна зобразити у вигляді рис. 5.1:

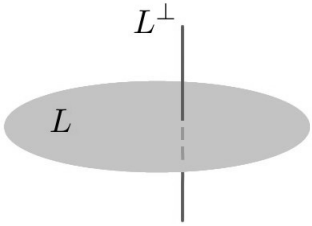

Рис. 5.1: Ортогональне доповнення $L^\perp$ до площини $L \in H$.

Теорема 5.3. $L^\perp$ – підпростір в H.

□ Покажемо лінійність $L^\perp$. Нехай $z_1, z_2 \in L^\perp$, тобто $(z_1, y) = 0,\ (z_2, y) = 0\ \forall y \in L$. Тоді для будь-яких скалярів λ_1, λ_2

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, y) = \lambda_1 (z_1, y) + \lambda_2 (z_2, y) = 0.$$

Оскільки $y \in L$ – довільне, то $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L^\perp$.

Покажемо замкнутість $L^\perp$.

Нехай задана послідовність $\{z_n\} \subset L^\perp$ і $z_n \to z$, $n \to \infty$. Для довільного y має місце $(z_n, y) = 0$.

Враховуючи неперервність скалярного добутку, можемо перейти до границі при $n \to \infty$.

Тоді $(z_n, y) \to (z, y) = 0$ при $n \to \infty$ для довільного $y \in L$. Тобто $z \in L^\perp$. ■

Зауваження: Якщо L – підпростір в H, то $L^\perp$ – теж підпростір в H.

Теорема 5.4. Нехай L – лінійний многовид в гільбертовому просторі H. L є щільним в H тоді і тільки тоді, коли $L^\perp = \{\Theta\}$.

□ (Достатність) Нехай $L^{\perp} = \{\Theta\}$, тобто, якщо $(z, y) = 0$ для довільного $y \in L$, то $z = \Theta$.

Припустимо тепер, що L не є щільним в H. Це означає, що існує $x_0 \notin \overline{L}$. $\overline{L}$ – підпростір і $x_0 \notin \overline{L}$. Тоді справедливим є ортогональний розклад $x_0 = y_0 + z_0$, де $y_0 \in \overline{L}$, а $z_0 \in \left(\overline{L}\right)^{\perp} = (L)^{\perp}$.

При цьому $z_0 \neq \Theta$, інакше, $x_0 \in \overline{L}$, $(z_0, y) = 0$ для будь-яких $y \in \overline{L}$, а також для будь-яких $y \in L$.

За умовою такий z_0 рівний Θ. Ми отримали протиріччя, яке доводить, що наше припущення про нещільність L в H є невірним.

(Необхідність) Нехай L є щільним многовидом H. Тоді $\overline{L} = H$.

Припустимо, що існує $z_0 \in H$, $z_0 \perp L$. Нехай $\{y_n\} \subset L$ і $y_n \to y \in H$, $n \to \infty$. Тоді $0 = (y_n, z_0) \to (y, z_0)$ при $n \to \infty$ в наслідок неперервності скалярного добутку.

Значить, $(y, z_0) = 0$ для будь-якого $y \in H$ (оскільки L є щільним в H). Далі, покладаючи, що $y = z_0$, отримаємо $(z_0, z_0) = 0$, звідки $z_0 = 0$. ■

Приклад 5.4. В просторі $\tilde{L}_2[0, 1]$ розглянемо множину

$$M = \left\{ x(t) \in \tilde{L}_2[0, 1] : \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\}$$

і опишемо її ортогональне доповнення $M^{\perp}$.

Очевидно, що

$$M^{\perp} = \left\{ y(t) \in \tilde{L}_2[0, 1] : \ \forall x(t) \in M, \int_0^1 x(t)\, y(t)dt = 0 \right\}.$$

Нехай існує неперервна функція $y(t) \not\equiv C$ така, що $y(t) \geq 0$ та $\int_0^1 x(t)\, y(t)dt = 0$. Оскільки $x(t)$ – неперервна, то за теоремою про середнє значення є $\bar{t} \in [0, 1]$ таке, що $\int_0^1 x(t)\, y(t)dt = x(\bar{t}) \int_0^1 y(t)dt$. З цього випливає, що $\int_0^1 y(t)dt = 0$, тобто $y(t) \in M$, що суперечить означенню $M^{\perp}$. Отже, $M^{\perp} = \left\{ y(t) \in \tilde{L}_2[0, 1] : y(t) \equiv C \right\}$.

Розділ 6

Лінійні оператори

6.1 Загальне означення оператора

Більшість рівнянь, що трапляються у прикладних застосуваннях, можна подати у вигляді:

$$Ax = y, \tag{6.1}$$

де $x \in X$, $y \in Y$, а A є відображенням одного простору в інший. Якщо дане відображення володіє певними властивостями, то використовуючи структуру просторів X та Y, зокрема їх повноту, ми можемо доволі багато дізнатися про розв'язок рівняння (6.1).

Зокрема, теорія операторів (відображень) дає нам відповіді на певні питання, що стосуються побудови методів наближеного розв'язування рівнянь (6.1):

- Чи має розв'язок рівняння, якщо так, то чи він єдиний?
- Чи є дане рівняння стійким: чи малі зміни y приведуть до малих змін x?
- Чи можна знайти обернений оператор A^{-1} і як він буде себе поводити?
- Чи існують ефективні ітераційні методи, що дозволяють послідовно покращувати вибране певним чином початкове наближення?

та інші.

Тож перейдемо до основної термінології теорії операторів.

Нехай X і Y – дві множини довільної природи. Нехай також $D \subseteq X$. Якщо кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність певний елемент $y \in Y$, то говорять, що задано **оператор** $y = A(x)$. При цьому множину D називають **областю визначення оператора** F і позначають $D(A)$.

Множину $R = R(A) = \{y \in Y;\ y = A(x),\ x \in D\}$ називають **областю значення оператора** A і позначають $R(A)$ (див. рис. 6.1).

Схематично дію оператора A можна зобразити так:

$$X \supseteq D(A) \overset{A}{\to} R(A) \subseteq Y,$$

або коротко, $A : X \to Y$.

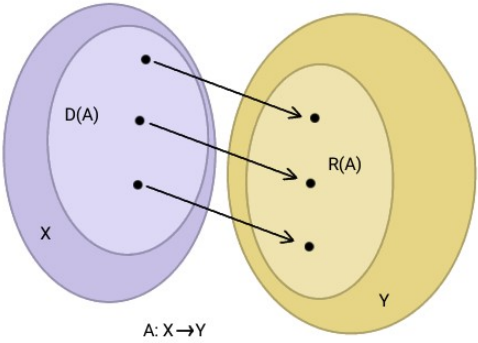

Рис. 6.1: Відображення $A : X \to Y$.

Приклад 6.1. Нехай область визначення $D_A = X = Y = \mathbb{R}^2$. Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

задає оператор, оскільки кожному $x \in \mathbb{R}^2$ ставиться у відповідність певний вектор

$$y = \begin{pmatrix} 2x_1 + 7x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.2. Нехай $X = Y = C[0,1], D_A = C^1[0,1]$. Тоді формула $(Ax)(t) = x'(t)$ задає оператор.

У даному випадку область визначення оператора не співпадає зі всім простором $C\,[0,1]$.

Замість терміну «оператор» можна використовувати – «**відображення**». Термін «відображення» частіше трапляється в питаннях геометричного характеру. При цьому користуються також наступною геометричною термінологією.

Якщо $y = A(x)$, $x \in D(A)$, $y \in R(A)$, то говорять, що y є **образом елемента** x, а елемент x – **прообразом елемента** y.

Функціоналом будемо називати оператор, що відображає довільний простір в дійсний чи комплексний (рис. 6.2).

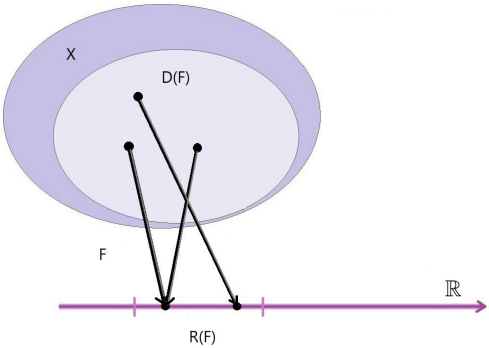

Рис. 6.2: Функціонал $F : X \to \mathbb{R}$.

Приклад 6.3. Нехай маємо деяку неперервну на $[-1,1]$ функцію $x(t)$. Норма даного елемента $||x(t)||_{C[-1,1]} = \max\limits_{-1\le t\le 1} |x(t)|$ буде функціоналом, оскільки відображає неперервну функцію в дійсне число.

Приклад 6.4. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$. Оператор

$$f\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$$

є функціоналом, адже $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Означення 6.1. Оператори $A : X \to Y$ та $\tilde{A} : X \to Y$ будемо називати рівними, якщо $D(A) = D(\tilde{A})$ і $Ax = \tilde{A}x \ \ \forall x \in D(A)$.

Оператор $\tilde{A}$ називається розширенням чи продовженням оператора A, якщо $D(A) \subset D(\tilde{A})$. Позначають це як $A \subset \tilde{A}$. Сам оператор A при цьому називають звуженням оператора $\tilde{A}$.

Приклад 6.5. Нехай оператори $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ і $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. При цьому

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

а

$$Bx = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $D(A) = D(B)$ і $Ax = Bx \ \forall x \in D(A)$, а отже, дані оператори рівні.

Приклад 6.6. Нехай тепер A: $\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{C}[0,1]$, а B: $\mathrm{C}'[0,1] \to \mathrm{C}[0,1]$. І $Ax(t) = Bx(t) = x(t)$.

Оскільки $D(A) \neq D(B)$, то оператори A і B не є рівними.

Приклад 6.7. Наведемо приклад розширення оператора. Для цього розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

і введемо оператор T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що рівний

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тепер ми можемо розширити цей оператор на простір $\mathbb{R}^3$. Для цього ми створюємо нову матрицю $\tilde{A}$ розміру 3×3, яка містить матрицю A як підматрицю у верхньому лівому куті і нулі в інших місцях:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\tilde{A}$ буде відповідати новому оператору $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\tilde{T}(y) = \tilde{A}x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, то можемо стверджувати, що оператор $\tilde{T}$ є розширенням оператора T, а оператор T є звуженням оператора $\tilde{T}$.

6.2 Взаємно однозначні (ін'єктивні) оператори

Означення 6.2. Оператор $A : X \to Y$ будемо називати ін'єктивним чи взаємно однозначним, якщо кожному $y \in R(A)$ відповідає єдине $x \in D(A)$ таке, що $Ax = y$.

Сюр'єктивним оператор A будемо називати, якщо $R(A) = Y$. У цьому випадку також кажуть, що оператор A відображає $D(A)$ в Y.

Ну і бієктивним називається оператор, який є одночасно і ін'єктивним, і сюр'єктивним.

Припустимо, що оператор A є ін'єктивним.

Означення 6.3. Оберненим до A будемо називати оператор, який кожному $y \in R(A)$ ставить у відповідність єдиний елемент $x \in D(A)$, що є розв'язком рівняння (6.1):

$$Ax = y.$$

Якщо A має обернений оператор, тобто рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок за будь-якого $y \in R(A)$, то A називають *оборотним*.

Обернений оператор позначають A^{-1}.

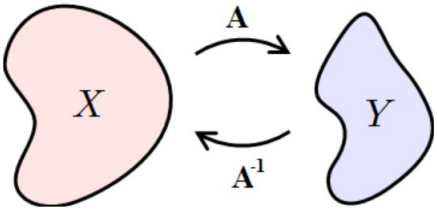

Рис. 6.3: Якщо A відображає X на Y, то A^{-1} відображає Y на X.

Зауваження 6.1. Очевидно, що $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$.

6.3 Суперпозиція операторів

Означення 6.4. Нехай дано множини X, Y, Z довільної природи і оператори F із $D(F) \subseteq X$ і $R(F) \subseteq Y$, та Φ із $D(\Phi) \subseteq Y$ і $R(\Phi) \subseteq Z$.

Якщо $R(F) \subseteq D(\Phi)$, то оператор $\Psi = \Phi[F(x)]$ відображає $D(F)$ в $R(\Phi)$ (тобто $\Phi(F(D(F))) \subseteq R(\Phi)$ називається суперпозицією операторів F і Φ:

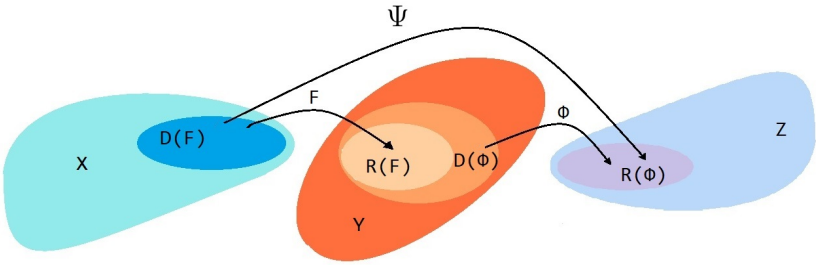

Рис. 6.4: Схематичне зображення суперпозиції операторів $\Psi = \Phi[F(x)]$.

Отриманий оператор також іноді називають добутком операторів Φ і F та позначають $\Phi * F$.

Приклад 6.8. Нехай $X = Y = C[0,1]$. Розглянемо оператори $A : X \to Y$ та $B : X \to Y : Ax(t) = (t-1)x(t), Bx(t) = 2x(t) + \int\limits_0^1 x(t)dt$. Суперпозицією операторів B та A буде оператор

$$B(A(x)) = 2\,(Ax(t)) + \int\limits_0^1 (Ax(t))\,dt = 2(t-1)x(t) + \int\limits_0^1 (t-1)x(t)dt.$$

Якщо F взаємно однозначний на $D(F)$, то

$$F^{-1} * F = I_X \text{ на } D(F),$$

$$F * F^{-1} = I_Y \text{ на } R(F),$$

де I_X і I_Y – тотожні оператори в X і Y відповідно.

Приклад 6.9. Нехай $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $Y = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $A : X \to Y$ і

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = y.$$

$$A^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} y.$$

Звідси

$$A^{-1}(Ax) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

де множення на матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є тотожнім оператором простору X, I_X.

6.4 Означення лінійного оператора

Нехай X і Y – лінійні простори (обидва дійсні чи комплексні).

Означення 6.5. Нехай D_A – лінійний многовид у дійсному (комплексному) нормованому просторі X, тобто якщо $x_1, x_2 \in D_A$, то завжди для будь-яких дійсних (комплексних) α_1, α_2 виконується включення $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D_A$. Оператор A називаємо лінійним, якщо для будь-яких x_1, x_2 з D_A і α_1, α_2 виконується рівність

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2. \tag{6.2}$$

Приклад 6.10. Покажемо, що оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = (t-1)x(t)$ є лінійним:

$$A(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) = (t-1)(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) =$$

$$= \alpha_1 (t-1) x_1(t) + \alpha_2 (t-1) x_2(t) = \alpha_1 A x_1(t) + \alpha_2 A x_2(t).$$

Приклад 6.11. Для того, щоб показати, що оператор не є лінійним, достатньо показати, що існують такі константи α_1, α_2, що рівність (6.2) не виконується.

Розглянемо оператор піднесення до квадрату $T : C[0,1] \to C[0,1]$ такий, що

$$Tx(t) = (x(t))^2. \tag{6.3}$$

Візьмемо $\alpha_1 := 1$ і $\alpha_2 := 1$ та подіємо оператором T (6.3) на $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$:

$$T(x_1(t) + x_2(t)) = (x_1(t) + x_2(t))^2 = x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2.$$

Легко бачити, що

$$T(x_1(t) + x_2(t)) = x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = T(x_1) + T(x_2)$$

лише за умови, що $x_1(t)$ чи $x_2(t)$ рівні 0 тотожно, що суперечить означенню (6.5), а отже, оператор T не є лінійним.

Теорема 6.1. Область значень довільного лінійного оператора є лінійним многовидом.

□ Нехай $y_1, y_2 \in R(A)$, α_1, α_2 – скаляри. Візьмемо елемент $x_1 \in D(A)$ – прообраз y_1 і елемент $x_2 \in D(A)$ – прообраз елемента y_2. Тобто $Ax_1 = y_1$ і $Ax_2 = y_2$.

Використовуючи лінійність A (6.2), отримаємо:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Тобто

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D(A)$$

є прообразом елемента

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Тоді $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in R(A)$, а отже, $R(A)$ – лінійний многовид. ■

6.5 Неперервні лінійні оператори

Нехай X і Y – нормовані простори і $A : X \to Y$, A – лінійний оператор, всюди заданий в X (область визначення $D(A) = X$).

Означення 6.6. (Означення за Коші) Оператор A називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$ або $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall\ x \in S_\delta(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\}$ виконується $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Теорема 6.2. Нехай X, Y – нормовані простори, A – лінійний оператор із $D(A) = X$.

Якщо A – неперервний в $\Theta \in X$, то A неперервний для будь-якого $x_0 \in X$.

□ $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 \Rightarrow$ Якщо $x \to x_0$, то $z = x - x_0 \to \Theta$. Оскільки A – неперервний в Θ, то $Az \to \Theta$, але тоді $Ax - Ax_0 \to \Theta$. Звідси випливає, що $Ax \to Ax_0$. ■

6.6 Обмежені лінійні оператори

Означення 6.7. Лінійний оператор A із $D(A) = X$ і $R(A) \subset Y$ будемо називати обмеженим оператором, якщо він замкнену обмежену кулю $\overline{S}_1(\Theta)$ (тобто $\|x\| \leq 1$) переводить в обмежену множину в просторі Y.

Відповідно до означення, якщо A – обмежений, то існує константа $C > 0$ така, що для будь-якого x з $\|x\| \leq 1$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq C$.

Теорема 6.3. (Критерій обмеженості лінійного оператора) Лінійний оператор $A : X \to Y$ обмежений тоді і тільки тоді, коли $\exists\ C > 0$ така, що

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall\ x \in D(A). \tag{6.4}$$

Приклад 6.12. Перевіримо лінійність та обмеженість оператора $A : l_1 \to l_1$, якщо $x = (x_1, x_2, \dots)^T$, причому $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, а

$$Ax = (0; 0; 3x_1 - 2x_4; x_5; x_2 + x_5; 0; ...)^T.$$

Покажемо лінійність:

$$A(\lambda x + \mu y) = (0; 0; 3(\lambda x_1 + \mu y_1) - 2(\lambda x_4 + \mu y_4); (\lambda x_5 + \mu y_5);$$
$$(\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_5 + \mu y_5); 0; ...)^T =$$
$$= (0; 0; 3\lambda x_1 - 2\lambda x_4; \lambda x_5; \lambda x_2 + \lambda x_5; 0; ...)^T +$$
$$+ (0; 0; 3\mu y_1 - 2\mu y_4; \mu y_5; \mu y_2 + \mu y_5; 0; ...)^T =$$
$$= \lambda (0; 0; 3x_1 - 2x_4; x_5; x_2 + x_5; 0; ...)^T +$$
$$+ \mu (0; 0; 3y_1 - 2y_4; y_5; y_2 + y_5; 0; ...)^T = \lambda A(x) + \mu A(y).$$

Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|_{l_1} = |3x_1 - 2x_4| + |x_5| + |x_2 + x_5| \leq$$
$$\leq 3|x_1| + |x_2| + 2|x_4| + 2|x_5| \leq 3 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = 3 \|x\|_{l_1}.$$

Отже, $\|Ax\| \leq 3||x||_{l_1}$ і оператор A є обмеженим.

Теорема 6.4. Нехай $A: X \to Y$, A – лінійний оператор, X, Y – банахові простори, $D(A) = X$. Для того, щоб A був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Запровадимо також поняття норми оператора.

Означення 6.8. Нехай A – лінійний обмежений оператор. Найменшу з констант C, для якої справджується нерівність (6.4), називатимемо нормою оператора A і позначатимемо $\|A\|$.

Зазвичай норму оператора шукають у такій послідовності. Спочатку отримують нерівність (6.4) з деякою константою C, а потім намагаються довести, що знайдена константа є найменшою.

Оскільки для всіх $x \in D_A$, що $\|x\| = 1$ справджується нерівність $\|Ax\| \leq C$, то для доведення, що C є нормою можна:

1. Спробувати знайти конкретний елемент $x_0 \in D_A$, $\|x_0\| = 1$, для якого $\|Ax_0\| = C$ (такий елемент не завжди існує).
2. Спробувати побудувати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$, $\|x_n\| = 1$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = C$.

Якщо вдасться показати, що константа C є нормою, то у цьому випадку лінійний обмежений оператор називають *досяжним*.

Також для знаходження норми оператора можна використовувати такі формули:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}. \qquad (6.5)$$

Приклад 6.13. Перевіримо лінійність, неперервність і знайти норму (за умови, що оператор неперервний) оператора $A : l_1 \to l_1$, якщо $x = (x_1, x_2, \dots)^T$, причому $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, а

$$Ax = (-x_1 + x_2; -7x_2; x_1 - 2x_4; x_3; 2x_4 + x_5; 0; \dots)^T.$$

Лінійність оператора очевидна. Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|_{l_1} = |-x_1+x_2| + |-7x_2| + |x_1-2x_4| + |x_3| + |2x_4+x_5| \leq$$

$$\leq 2|x_1| + 8|x_2| + |x_3| + 4|x_4| + |x_5| \leq 8\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = 8\|x\|_{l_1}.$$

Отже, $\|A\| \leq 8$. Нехай $\hat{x} = (0;1;0;0;\dots)^T$. Тоді $\|\hat{x}\|_{l_1} = 1$ і $\|A\hat{x}\|_{l_1} = 8 \cdot \|\hat{x}\|_{l_1}$, тобто $\|A\| = 8$ і оператор є досяжним.

Приклад 6.14. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму (за умови, що оператор неперервний) оператора $A : X \to Y$, якщо $X = Y = \tilde{\mathscr{L}}_2[0,1]$, а $Ax(t) = tx(t)$.

Покажемо лінійність оператора:

$$A(\lambda x(t) + \mu y(t)) = t(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda t x(t) + \mu t y(t) = \lambda Ax(t) + \mu Ay(t).$$

Перевіримо обмеженість.

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1}|t| \left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \|x\|.$$

Звідси $\|A\| \leq 1$. Доведемо, що $\|A\| = 1$. Нехай $x_n(t) = t^n\sqrt{2n+1}$. Тоді

$$\|x_n\| = \left(\int_0^1 (2n+1)\,t^{2n}dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\|Ax_n\| = \left(\int_0^1 (2n+1)\,t^{2n+2}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} = \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{\frac{1}{2}} \to 1$$

при $n \to \infty$.

Отже, $\|A\| = 1$.

6.7 Лінійні функціонали

Функціонали є частковим випадком операторів, що набувають значення в просторі дійсних чи комплексних чисел. Відповідно, всі означення, що стосуються операторів, виконуються і для функціоналів. Наведемо деякі з них.

Означення 6.9. Кажуть, що на множині D задано функціонал f, якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність деяке число $f(x)$ (дійсне чи комплексне).

Означення 6.10. Лінійний функціонал f, заданий на лінійному многовиді D_f нормованого простору X називатимемо обмеженим, якщо існує стала $C > 0$ така, що для всіх $x \in D_f$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C\|x\|$. Норму лінійного неперервного функціонала можна обчислити за формулами

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \in D_f, \|x\| \leq 1} |f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in D_f, \|x\|=1,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{6.6}$$

Для лінійного функціонала, визначеного на всьому просторі, поняття обмеженості і неперервності збігаються (як і для операторів).

Означення 6.11. Множину всіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на всьому лінійному нормованому просторі X, називатимемо спряженим простором і позначатимемо X^*.

Спряжений простір X^* є нормованим простором із нормою (6.6).

Сформулюємо твердження, яке є одним із найважливіших у функціональному аналізі.

Теорема 6.5. (Гана–Банаха про продовження лінійних функціоналів) Будь-який лінійний неперервний функціонал f_0, заданий на лінійному многовиді D нормованого простору X, можна продовжити на весь простір X зі збереженням норми, тобто знайдеться функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(x) = f_0(x)$ для всіх $x \in D$ і $\|f\| = \|f_0\|$.

Для знаходження норми того чи іншого функціонала f за формулою (6.6) достатньо знайти число $c = \sup\limits_{x \in D_f, \|x\|=1} |f(x)|$. Для його знаходження можна спочатку отримати оцінку вигляду $|f(x)| \leq c_1$, що справджується для всіх $x \in D_f$, $\|x\| = 1$. Потім намагаємося довести, що $c_1 = c$. Як і у випадку операторів, це можна зробити двома способами:

1. Спробувати знайти конкретний елемент $x_0 \in D_f$, $\|x_0\| = 1$, для якого $|f(x_0)| = c_1$ (такий елемент не завжди існує).
2. Спробувати побудувати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$, $\|x_n\| = 1$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = c_1$.

Приклад 6.15. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму функціонала $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

Лінійність цього функціонала очевидна. Для доведення неперервності достатньо показати обмеженість функціонала. Маємо за будь-якого $x \in l_1$:

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_{l_1},$$

тобто функціонал обмежений, причому $\|f\| \leq 1$.

Як і в попередньому прикладі, доведемо, що для деякого елемента x із l_1 $|f(x)| = \|x\|_{l_1}$. Справді, нехай $x = (1, 0, 0, \dots)^T$. Тоді

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| = 1 = 1 \cdot \|x\|_{l_1}.$$

Отже, $\|f\| = 1$ і функціонал є досяжним.

Приклад 6.16. Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму (за умови, що функціонал неперервний) функціонала

$$f(x) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt.$$

Лінійність є очевидною, покажемо обмеженість:

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt \right|.$$

За нерівністю Ґьольдера для інтегралів,

$$\left| \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)dt \right| \leq \left(\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \, \|x\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2[0,1]}.$$

Тобто $\|f\| \leq \sqrt{3}$.
Нехай $\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} t^{-\frac{1}{3}}$. Тоді

$$\|\hat{x}(t)\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{3} dt} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(3t^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 \right)} = 1.$$

А

$$f(\hat{x}(t)) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}} t^{-\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3t^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 \right) = \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \|\hat{x}\|_{\tilde{\mathscr{L}}_2[0,1]}.$$

Тобто норма функціонала є досяжною.

Розділ 7

Простір лінійних обмежених операторів

7.1 Нормований простір $\mathcal{L}(X, Y)$

Обмежені оператори відіграють важливу роль у чисельних методах, забезпечуючи стійкість, збіжність та ефективність обчислень:

- якщо оператор, який використовується в чисельному алгоритмі, є обмеженим, то це гарантує, що похибки заокруглення та інші невеликі збурення не будуть неконтрольовано зростати в процесі обчислень;
- якщо послідовність операторів, які наближають точний розв'язок задачі, є обмеженою, це може свідчити про збіжність чисельного методу до точного розв'язку при зменшенні кроку дискретизації;
- обмежені оператори часто легше апроксимувати, що знижує обчислювальні витрати і впливає на ефективність алгоритму.

Нас, як обчислювачів, будуть цікавити послідовності обмежених операторів, адже саме вони є ключовим інструментом для побудови надійних і ефективних чисельних методів у прикладній математиці та фізиці. Зупинимося детальніше на просторі обмежених операторів, $\mathcal{L}(X, Y)$.

Нехай $A, B, C, \ldots$ – лінійні обмежені оператори. $D(A) = X$, $D(B) = X$, $D(C) = X, \ldots R(A) \subset Y$, $R(B) \subset Y$, $R(C) \subset Y, \ldots$ На множині таких операторів визначимо операції додавання і множення на скаляр:

$$(A + B)x = Ax + Bx;$$

$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Можна показати, що $A + B$ і λA – лінійні обмежені оператори, і що для введеного таким чином простору $\mathcal{L}(X, Y)$ виконуються всі аксіоми лінійного простору.

Простір $\mathcal{L}(X,Y)$ будемо називати простором лінійних обмежених операторів.

Норму в просторі $\mathcal{L}(X,Y)$ можна задавати різними способами, але прийнято розглядати $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.

Перевіримо аксіоми норми:

1. Очевидно, що $\|A\| \ge 0$ оскільки $\|Ax\| \ge 0\ \forall x$.

   Нехай $\|Ax\| = 0$. Тоді, згідно з нерівністю $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$, $Ax \equiv 0 \Leftrightarrow A$ – нульовий оператор.

2. $\|\lambda A\| = \sup\limits_{||x||\le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda|\,\|A\|$.

3. Нехай $\|x\| \le 1$. Тоді $\|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| + \|B\|$. Відповідно для будь-якого $x \in \overline{S}_1(0)$ $\|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$. Переходимо до $\sup\limits_{\|x\|\le 1}$ зліва і отримуємо нерівність трикутника.

Приклад 7.1. Розглянемо послідовність операторів $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, що

$$T_k(x) = \frac{1}{k}\, x.$$

Легко бачити, що при $k \ge 1$

$$||T_k(x)||_{\mathbb{R}^n} \le \frac{1}{k}||x||_{\mathbb{R}^n} \le 1 \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

А отже, оператори T_k належать простору обмежених операторів $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

7.2 Поняття збіжності послідовності операторів

1. **Рівномірна збіжність лінійних операторів.**

   Нехай дано послідовність операторів $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Будемо говорити, що $A_n \to A \in \mathcal{L}(X,Y),\ n \to \infty$ рівномірно, якщо $\|A_n - A\| \to 0,\ n \to \infty$.

Таким чином рівномірна збіжність послідовності лінійних операторів – збіжність за нормою простору $\mathcal{L}(X,Y)$.

Теорема 7.1. Для того, щоб $A_n \to A,\ n \to \infty$ рівномірно (тут $A_n, A \in \mathcal{L}(X,Y)$) необхідно і достатньо, щоб $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$ рівномірно по x в кулі $\|x\| \le 1$.

Наслідок 7.1. Нехай $A_n \to A,\ n \to \infty$ рівномірно і нехай M – довільна обмежена множина в X. Тоді $A_n x \to Ax,\ n \to \infty$ рівномірно по $x \in M$.

Теорема 7.2. Якщо X – нормований, а Y – банахів, то $\mathcal{L}(X,Y)$ – банахів.

2. **Поточкова (сильна) збіжність в $\mathcal{L}(X,Y)$.**

Означення 7.1. Нехай дано послідовність $A_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Будемо говорити, що ця послідовність сильно збігається до оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, якщо $\forall\ x \in X$:

$$\|A_n x - Ax\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Із рівномірної збіжності завжди випливає поточкова збіжність, але не навпаки.

Приклад 7.2. Нехай $A_n : C[0, \frac{\pi}{2}] \to C[0, \frac{\pi}{2}]$ і $A_n x(t) = \sin^n t \cdot x(t)$. Дослідимо на збіжність дану послідовність операторів.

Оскільки $\forall t \in \mathbb{R}$ функція $\sin t \in [0,1]$, то поточкова границя

$$Ax(t) = \lim_{n\to\infty} A_n x(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ якщо } t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Але тоді $Ax(t) \notin C[0, \frac{\pi}{2}]$, а отже, послідовність операторів $A_n x(t)$ не є збіжною навіть поточково [7].

Приклад 7.3. Розглянемо тепер послідовність операторів $A_n : l_2 \to l_2$,

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{e^n}, \frac{x_2}{e^n}, \ldots, \frac{x_k}{e^n}, \ldots\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$, то поточкова границя

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = (0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \Theta x,$$

де Θ – нульовий оператор.

Тоді

$$||A_n x - \Theta x||_{l_2} = ||A_n x||_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{e^n}\right)^2} = \frac{1}{e^n}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} = \frac{||x||_{l_2}}{e^n}.$$

Легко бачити, що при $||x|| \le 1$

$$||A_n - \Theta||_{l_2} = \frac{1}{e^n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

А отже, послідовність операторів A_n рівномірно збігається [7].

Приклад 7.4. Розглянемо тепер послідовність операторів $T_n : C[0,1] \to C[0,1]$, де

$$T_n f(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} f(0).$$

Дані оператори називають операторами зсуву з коефіцієнтом згасання.

Оператори $T_n f(x)$ рівномірно збігаються до $f(x)$ при $n \to \infty$, оскільки для всіх x і $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon$, що $\forall n \ge N_\varepsilon$

$$|T_n f(x) - f(x)| = |\left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} f(0) - f(x)| =$$

$$= |\frac{1}{n}\left(f(0) - f(x)\right)| < \varepsilon.$$

Розділ 8

Обернені оператори

8.1 Обернені оператори. Умови існування обернених операторів

Нехай $Ax = y$. Якщо існує обернений до A оператор, то розв'язок задачі можна записати як $x = A^{-1}y$. Спробуємо з'ясувати, за яких умов існує A^{-1}.

Нехай задано лінійний оператор $A : X \to Y$, де X, Y – лінійні простори, причому $D(A) \subseteq X, R(A) \subseteq Y$.

Введемо множину $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ – множина нулів (ядро) оператора A. $N(A) \neq \emptyset$? оскільки $\Theta \in N(A)$.

Теорема 8.1. Для того, щоб оператор A взаємно однозначно здійснював відображення $D(A)$ в $R(A)$ необхідно і достатньо, щоб $N(A) = \{\Theta\}$ (ядро складається лише з Θ).

□ ($\Leftarrow$) Від супротивного. Нехай $N(A) = \{\Theta\}$, але існує $y \in R(A)$, що має два прообрази x_1 і $x_2 \in D(A)$ такі, що $x_1 \neq x_2$ але $Ax_1 = y$ і $Ax_2 = y$. Але тоді

$$(Ax_1 - Ax_2) = 0 \Rightarrow \ A(x_1 - x_2) = 0.$$

Тоді $x_1 - x_2 \in N(A)$. А отже, $x_1 = x_2$. Отримали протиріччя.

($\Rightarrow$) Нехай тепер A є взаємно однозначним, але $N(A) \neq \{\Theta\}$. Візьмемо $z \in N(A)$, $z \neq \Theta$. Нехай $y \in R(A)$ і рівняння $Ax = y$ має розв'язок x^*.

Розглянемо $x^* + z$. Очевидно, що $A(x^* + z) = y$ і $x^* + z \neq x^*$. Тобто виходить, що для довільного $y \in R(A)$ існує мінімум два прообрази x^* і $x^* + z$. Отримали протиріччя. ■

Дана теорема використовується на практиці для перевірки існування оберненого оператора. Наведемо приклад.

Приклад 8.1. У просторі l_1 розглянемо оператор

$$Ax = (2x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)^T, \text{ де } x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1.$$

Перевіримо чи існує обернений до оператора A оператор.

Для цього скористаємось теоремою 8.1. і перевіримо, чи відповідне однорідне рівняння $Ax = 0$ має лише тривіальний розв'язок:

$$(2x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)^T = 0,$$

або

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ -4x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots. \end{cases}$$

Тобто $Ax = 0$ має лише тривіальний розв'язок, а тому оператор обернений до A існує.

Приклад 8.2. Нехай $X = C^1[0,1]$, $Y = C[0,1]$, а

$$Ax(t) = \left(t^2 - t\right) x(t).$$

З'ясуємо чи існує обернений оператор до оператора $A : X \to Y$. Якщо так, то знайдемо його.

Розглянемо однорідне рівняння $Ax(t) = 0$:

$$t(t-1)x(t) = 0. \tag{8.1}$$

Як бачимо, при $t = 0$ і $t = 1$ рівняння (8.1) матиме безліч розв'язків, а отже, A^{-1} не існуватиме. Однак на інтервалі $(0,1)$ однорідне рівняння (8.1) матиме лише тривіальний розв'язок, $x(t) \equiv 0$.

Знайдемо обернений до A оператор на інтервалі $(0,1)$. Для цього розглянемо операторне рівняння вигляду $Ax(t) = y(t)$:

$$t(t-1)x(t) = y(t).$$

Звідси

$$x(t) = \frac{1}{t(t-1)}\, y(t).$$

Тобто

$$A^{-1}y(t) = \frac{1}{t(t-1)}\, y(t) \quad \text{при} \quad t \in (0,1).$$

Приклад 8.3. Нехай $X = Y = \tilde{L}_1[0,1],\ Y = C[0,1]$, а

$$Ax(t) = 2x(t) + (t-1)\int\limits_0^1 x(s)ds.$$

З'ясуємо, чи існує обернений оператор до оператора $A : X \to Y$.

Розглянемо однорідне рівняння $Ax(t) = 0$:

$$2x(t) + (t-1)\int\limits_0^1 x(s)ds = 0.$$

Нехай $x_0(t)$ – розв'язок даного рівняння. Тобто

$$2x_0(t) + (t-1)\int\limits_0^1 x_0(s)ds = 0. \tag{8.2}$$

Оскільки означений інтеграл $\int\limits_0^1 x_0(s)ds$ є константою, то можна стверджувати, що x_0 матиме вигляд

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}(t-1)C,$$

де $C = \int\limits_0^1 x_0(s)ds$ – деяка константа.

Легко бачити, що

$$x_0(s) = -\frac{1}{2}(s-1)C.$$

Підставляємо $x_0(t)$ та $x_0(s)$ в (8.2) і отримуємо:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}(t-1)C\right) + (t-1)\int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}(s-1)C\right)ds = 0$$

або

$$\mathrm{C}\,(t-1)\left(1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (s-1)\,ds\right) = 0. \tag{8.3}$$

Легко бачити, що

$$\int_0^1 (s-1)\,ds = -\frac{s^2}{2} - s \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Тобто (8.3) можна записати як

$$\frac{3}{4}C(t-1) = 0.$$

Рівність (8.2) має виконуватися $\forall\, t \in [0,1]$, а отже, константа $C = 0$ і $x_0(t) \equiv 0$. Тобто при $t \neq 1$ існує обернений оператор. Знайдемо його.

Для цього розглянемо рівняння $Ax(t) = y(t)$:

$$2x(t) + (t-1)\int_0^1 x(s)ds = y(t). \tag{8.4}$$

Припустимо тепер, що $\hat{x}(t)$ – розв'язок рівняння (8.4). Тоді

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{2}(t-1)\cdot\hat{C},$$

де $\hat{C} = \int_0^1 x(s)ds$ – деяка константа.

Запишемо ще

$$\hat{x}(s) = \frac{1}{2}y(s) - \frac{1}{2}(s-1)\cdot\hat{C}$$

і підставимо $\hat{x}(t)$ та $\hat{x}(s)$ в (8.4):

$$y(t) = 2\left(\frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{2}(t-1)\hat{C}\right) + (t-1)\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y(s) - \frac{1}{2}(s-1)\hat{C}\right)ds.$$

Звідси

$$y(t) = y(t) - (t-1)\hat{C} + \frac{1}{2}(t-1)\int_0^1 y(s)ds - \frac{1}{2}(t-1)\hat{C}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Тоді

$$0 = -(t-1)\hat{C} + \frac{1}{4}(t-1)\hat{C} + \frac{1}{2}(t-1)\int\limits_0^1 y(s)ds$$

або

$$\frac{3}{4}(t-1)\hat{C} = \frac{1}{2}(t-1)\int\limits_0^1 y(s)ds.$$

А отже, при $t \neq 1$

$$\hat{C} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 y(s)ds.$$

Тоді

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{3}(t-1)\int\limits_0^1 y(s)ds,$$

звідки

$$A^{-1}y(t) = \frac{1}{2}y(t) - \frac{1}{3}(t-1)\int\limits_0^1 y(s)ds.$$

Вправа 8.1. Нехай A – лінійний оператор $(A : X \to Y)$. Потрібно довести, що якщо існує A^{-1}, то він лінійний.

Нехай $x_1, x_2 \in X$. $Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$, при чому $y_1,\ y_2 \in Y$.

Оскільки існує обернений до A оператор, то $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$.

Тоді

$$A^{-1}\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right) = A^{-1}\left(\lambda A x_1 + \mu A x_2\right) = A^{-1}\left(A\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right)\right) =$$

$$= \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda A^{-1}y_1 + \mu A^{-1}y_2,$$

а отже, оператор A^{-1} є лінійним.

З точки зору практичного застосування важливим є не тільки існування оберненого оператора, а і його обмеженість.

Означення 8.1. Лінійний оператор $A : X \to Y$ будемо називати неперервно оборотнім, якщо:

1. $R(A) = Y$ (розв'язок існує).
2. A – оборотній (існує A^{-1}).
3. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ($\left\|A^{-1}\right\| < +\infty$, обмеженість).

Теорема 8.2. (Критерій обмеженості оператора A^{-1}) Нехай $A : X \to Y$. Для того, що існував A^{-1} і був обмеженим необхідно і достатньо, щоб $\exists\ m > 0,\ \forall\ x \in D(A)$

$$\|Ax\| \geq m \|x\| .$$

Розглянемо поняття неперервно оборотного оператора з точки зору розв'язності лінійного рівняння

$$Ax = y. \tag{8.5}$$

Якщо A – неперервно оборотній оператор, то рівняння (8.5) має єдиний розв'язок $x = A^{-1}y$ для будь-якої правої частини y. Якщо при цьому $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}$ (розв'язок того ж рівняння із правою частиною $\tilde{y}$), то

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|y - \tilde{y}\| .$$

Це означає, що малі зміни правої частини y викликають малі зміни розв'язку. Тобто задача (8.5) є коректно розв'язною.

8.2 Лівий і правий обернений оператори

Означення 8.2. Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ будемо називати правим оберненим до A, якщо $AU = I_Y$.

Означення 8.3. Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $V \in \mathcal{L}(Y, X)$ будемо називати лівим оберненим до A, якщо $VA = I_X$.

Тут через I_Y позначено тотожній оператор в просторі Y, а через I_X – тотожній оператор в просторі X. Далі для лівого оберненого оператора будемо використовувати позначення A_l^{-1}, а для правого – A_r^{-1}.

Розглянемо ці два оператори з точки зору існування і єдиності розв'язку рівняння $Ax = y$.

1. Припустимо, що для оператора A існує A_r^{-1}. Тоді $Ax = y$ має розв'язок для будь-якої правої частини $y \in Y$ і цей розв'язок можна подати у вигляді $x = A_r^{-1}y$.

   $\square$ $Ax = A(A_r^{-1}y) = (AA_r^{-1})y = I_Y y = y$ $\blacksquare$

2. Припустимо, що існує A_l^{-1}. Тоді $Ax = y$ може мати не більше одного розв'язку.

   $\square$ $Ax = 0$ помножити зліва на A_l^{-1} :

   $$A_l^{-1}(Ax) = (A_l^{-1}A)x = I_X x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

   $\blacksquare$

3. Якщо існує A_r^{-1} і $A_l^{-1} \Rightarrow$ A – оборотній, існує A^{-1}.

Приклад 8.4. Нехай X – лінійний простір. $A, B : X \to X$. Нехай також $D(A) = D(B) = X$. Крім цього:

$$\begin{cases} A \cdot B + A + I = 0; \\ B \cdot A + A + I = 0. \end{cases}$$

Чи існує A^{-1}?

$\square$

$$I = -A \cdot B - A = A(-B - I);$$

$$I = -B \cdot A - A = (-B - I)A.$$

Позначимо $U := -B - I$, отримаємо:

$$\left.\begin{matrix} I = AU \\ I = UA \end{matrix}\right\} \Rightarrow U = A^{-1}.$$

$\blacksquare$

Розділ 9

Спряжені простори та спряжені оператори

9.1 Спряжені простори

Нехай X– банахів простір, E^1 – дійсна вісь, якщо X є дійсним і E^1 – комплексна площина, якщо X – комплексний.

Нагадаємо, що оператор $f : X \to E$ будемо називати функціоналом.

Обмежимось вивченням лінійних функціоналів. Значення лінійного функціоналу f на $x \in X$ будемо позначати через $< x, f >$ або $f(x)$. Нагадаємо, що лінійність функціоналу f означає, що його область визначення $D(f)$ є лінійним многовидом, причому $\forall x, y \in D(f)$ і $\forall \alpha, \beta \in E$:

$$< \alpha x + \beta y, f >= \alpha < x, f > + \beta < y, f > .$$

Окрім того, ми будемо розглядати тут тільки обмежені лінійні функціонали. Тобто такі, що

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f),\ \|x\| \le 1} |< x, f >| .$$

Розглянемо $\mathcal{L}(X, E^1)$ – банахів простір лінійних обмежених функ-ціоналів, заданих на X. Цей простір називається спряженим до X і позначається X^*.

В наслідок лінійності X і X^* для будь-яких скалярів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ будь-яких елементів x_1, x_2, x та будь-яких функціоналів f_1, f_2, f справедливі наступні твердження:

1. $< \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, f > = \ \alpha_1 < x_1, f > + \alpha_2 < x_2, f > .$
2. $< x, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 > = \ \overline{\beta}_1 < x, f_1 > + \overline{\beta}_2 < x, f_2 > .$
3. Якщо $< x, f > \ = \ 0 \ \ \forall x \in X \Rightarrow f = \Theta.$

   Справедливою також є наступна властивість (дана властивість випливає із наслідку теореми Гана-Банаха):

4. Якщо $< x, f >= 0 \ \ \forall f \in X^*$, то $x = \Theta.$

В X^*, як і в довільному просторі лінійних обмежених операторів $\mathcal{L}(X,Y)$, можна ввести два види збіжності послідовностей:

- збіжність за нормою X^* (сильна збіжність):

  $$f_n \to f_0 \text{ при } n \to \infty, \text{ якщо } \|f_n - f_0\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

  де $f_n, f_0 \in X^*$;

- слабка збіжність:

  $f_n \to f_0$ при $n \to \infty$ слабо, якщо $\forall\, x \in X \;\; < x, f_n > \to < x, f_0 >$

  при $n \to \infty$.

Теорема 9.1. (Теорема Ріса про загальний вигляд лінійних функціоналів в гільбертовому просторі). Нехай H – гільбертів простір (комплексний чи дійсний). Для довільного обмеженого функціоналу f, заданого скрізь на H ($f \in \mathcal{L}(H)$) існує єдиний $y \in H$ такий, що $\forall x \in H$ $< x, f > = (x, y)$.

При цьому $\|f\| = \|y\|$.

□ Розглянемо L – множину всіх елементів $z \in H$ таких, що $< z, f > = 0$.

Якщо $L = H$, то $f = 0$, можна взяти $y = 0$ і теорема доведена.

Нехай $L \neq H$, тоді існує $z_0 \perp L$, $z_0 \neq 0$, причому можна вважати, що $< z_0, f > = 1$ (взявши замість z_0 $z_0' = \frac{z_0}{< z_0, f >}$, якщо знадобиться).

Нехай тепер $x \in H$, тоді $x - < x, f > z_0 \in L$, оскільки

$$< x - < x, f > z_0, f > = < x, f > - < x, f > = 0.$$

Відповідно, $x - < x, f > z_0 \perp z_0$, звідки

$$0 = (x - < x, f > z_0, z_0) = (x, z_0) - < x, f > \|z_0\|^2.$$

Звідси $< x, f > = \left(x, \frac{z_0}{\|z_0\|^2}\right)$. Тобто можна прийняти $y = \frac{z_0}{\|z_0\|^2}$.

Покажемо тепер, що $\|f\| = \|y\|$. Дійсно,

$$|< x, f >| = |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

за нерівністю Коші-Буняковського. Із означення норми f маємо $\|f\| \leq \|y\|$. Але також $< y, f > = (y, y) \leq \|f\| \, \|y\|$. Звідки $\|y\| \leq \|f\| \Rightarrow \|f\| = \|y\|$.

Залишилось показати єдиність. Якщо $< x, f > = (x, y) = (x, \tilde{y}) \Rightarrow (x, y - \tilde{y}) = 0 \; \forall x \in H$. Візьмемо $x = y - \tilde{y}$ і отримаємо $\tilde{y} = y$. ■

З даної теореми випливає, що простір H є самоспряженим: $H = H^*$.

Означення 9.1. Нехай дано послідовність $\{x_n\} \subset X$. Послідовність $\{x_n\}$ називається слабко збіжною до елемента $x \in X$, якщо $< x_n, f > \to < x, f > \quad \forall f \in X^*$.

Якщо $x_n \to x_0$ слабко, то x_0 називається слабкою границею $\{x_n\}$.

9.2 Спряжені і самоспряжені оператори

Означення 9.2. Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Розглянемо вираз $< Ax, f >$, де $x \in X, \; f \in Y^*$. Визначимо деякий функціонал φ за формулою

$$\varphi(x) \; = < x, \varphi > = < Ax, f > . \tag{9.1}$$

1. $D(\varphi) = X$.
2. φ є лінійним, бо

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \; = < A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), f > = \; \alpha_1 < Ax_1, f > +$$

$$+ \; \alpha_2 < Ax_2, f > = \; \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2).$$

3. φ обмежений оскільки

$$|\varphi(x)| = |< Ax, f >| \leq \|Ax\| \, \|f\| \leq \|A\| \, \|f\| \, \|x\| .$$

Отже, $\varphi \in X^*$. Тобто кожному $f \in Y^*$ поставлено у відповідності до формули (9.1) елемент $\varphi \in X^*$. Таким чином, заданий лінійний неперервний оператор $\varphi = A^* f$. Оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ називається спряженим до оператора A.

Означення 9.3. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називається самоспряженим або ермітовим, якщо $A^* = A$. Тобто A – самоспряжений, якщо $(Ax, y) = (x, Ay)$.

У випадку, коли $X = Y = H$, де H – гільбертів простір, на підставі теореми Ріса про загальний вигляд лінійних обмежених функціоналів, що діють в H, означення спряженого оператора пов'язуємо з рівністю $(Ax, y) = (x, A^*y) \ \ \forall x, y \in H$.

Приклад 9.1. Знайдемо спряжений до $A : l_2 \to l_2$ оператор, якщо

$$Ax = (0; x_1; 0; 3x_2 + x_1; 0; x_4 - ix_2; 0; \ldots)^T.$$

Оскільки $x, y \in l_2$, то $x = (x_1; x_2; \ldots)^T$ і $y = (x_1; x_2; \ldots)^T$. Скалярний добуток елементів x і y у просторі l_2 матиме вигляд

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

тож скалярний добуток

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \, \overline{y_i} = 0 \cdot \overline{y_1} + x_1 \cdot \overline{y_2} + 0 \cdot \overline{y_3} + (3x_2 + x_1)\, \overline{y_4} + 0 \cdot \overline{y_5} +$$

$$+ (x_4 - ix_2)\, \overline{y_6} + 0 \cdot \overline{y_7} + \ldots = x_1 \left(\overline{y_2} + \overline{y_4}\right) + x_2 \left(3\overline{y_4} - i\overline{y_6}\right) + x_4 \overline{y_6}.$$

Згідно із означенням спряженого оператора, $(Ax, y) = (x, A^*y)$, але

$$(x, A^*y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \left(\overline{A^*y}\right)_i,$$

а отже

$$A^*y = \left(\overline{\overline{y_2} + \overline{y_4}}\,; \overline{3\overline{y_4} - i\overline{y_6}}\,; 0; \overline{\overline{y_6}}\,; 0; 0; \ldots\right)^T =$$

$$= (y_2 + y_4;\ 3y_4 + iy_6; 0; y_6; 0; 0; \ldots)^T.$$

Приклад 9.2. Знайдемо спряжений до $A : \tilde{L}_2[-1,1] \to \tilde{L}_2[-1,1]$ оператор, якщо

$$Ax(t) = x(t) + 2i \int_{-1}^{1} t^2 s x(s) ds.$$

Скалярний добуток елементів $x(t)$ та $y(t)$ у просторі $\tilde{L}_2[-1,1]$ матиме вигляд

$$(x(t), y(t)) = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)} dt,$$

тож скалярний добуток

$$(Ax(t), y(t)) = \int_{-1}^{1} \left(x(t) + 2i \int_{-1}^{1} t^2 s x(s) ds \right) \overline{y(t)} dt = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)} dt +$$

$$+ \int_{-1}^{1} 2it^2 \, \overline{y(t)} \int_{-1}^{1} s x(s) ds dt = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)} dt + \int_{-1}^{1} 2it^2 \, \overline{y(t)} dt \int_{-1}^{1} s x(s) ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} x(s)\overline{y(s)} ds + \int_{-1}^{1} 2it^2 \, \overline{y(t)} dt \int_{-1}^{1} s x(s) d =$$

$$= \int_{-1}^{1} x(s)\overline{y(s)} ds + \int_{-1}^{1} x(s) s \int_{-1}^{1} 2it^2 \, \overline{y(t)} dt ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} x(s) \left(\overline{y(s)} + 2is \int_{-1}^{1} t^2 \, \overline{y(t)} dt \right) ds.$$

Оскільки

$$(Ax(s), y(s)) = (x(s), A^* y(s)) = \int_{-1}^{1} x(s)\overline{A^* y(s)} \, ds,$$

то прирівнявши

$$\overline{A^*y(s)} = \overline{y(s)} + 2is \int\limits_{-1}^{1} t^2 \ \overline{y(t)} \ dt$$

отримаємо

$$\overline{\overline{A^*y(s)}} \ = \ \overline{\overline{y(s)} + 2is \int\limits_{-1}^{1} t^2 \ \overline{y(t)} \ dt} \ ,$$

звідки

$$A^*y(s) = y(s) - 2is \int\limits_{-1}^{1} t^2 \ y(t) \ dt.$$

Зразки екзаменаційних білетів

Львівський національний університет імені Івана Франка

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Галузь знань 113 – прикладна математика
Дисципліна Функціональний аналіз

Семестр 4

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №1

1. Нехай $x_n, x, y_n, y \in X\,(n \in N)$. Довести таке: якщо $x_n \to x$ і $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$. (4 бали)
2. Записати нерівність трикутника для норми в просторі $\tilde{L}_p\,[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій $x\,(t)$ і $y\,(t)$. (3 бали)
3. На підставі якої класичної нерівності можна отримати нерівність Мінковського для інтегралів? (3 бали)
4. Чи можна стверджувати, що кожна збіжна послідовність елементів нормованого простору є фундаментальною? (3 бали)
5. Чи справджується рівність паралелограма в просторі $\tilde{L}_2\,[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій? (3 бали)
6. Які умови існування оберненого оператора знаєте? (3 бали)
7. Записати співвідношення, яке відіграє роль теореми Піфагора в абстрактному гільбертовому просторі. (4 бали)
8. Чи потрібно перевіряти неперервність лінійного оператора в кожній точці його області визначення? (3 бали)
9. Записати умову ортогональності двох елементів у просторі $l_2^{(m)}$. (3 бали)
10. Нехай $A_1^l \to l_1;\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_1;$

    $$Ax = (5x_4 + 6x_5, 0, 3x_1 - 2x_4, x_5, x_2 - 13x_5, 0, \dots)^T.$$

    Перевірити лінійність, обмеженість і знайти норму оператора. (4 бали)

11. Нехай $A : l_2 \to l_2;\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_2;$

$$Ax = (x_4 - x_2, x_3 - ix_1,\ 5x_4 - 24\,ix_2, 0, \dots)^T.$$

Знайти оператор A^*, спряжений до A. (4 бали)

12. Як ортогональну систему елементів у просторі зі скалярним добутком перетворити в ортонормовану? Чи буде ортонормована система лінійно незалежною? (3 бали)

13. Чи є простір $\tilde{L}_2[a, b]$ банаховим? (3 бали)

14. Нехай $A : l_2 \to l_2,\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_2,$

$$Ax = (x_1 + x_2, x_2, 2x_3 - x_2, x_4, \dots)^T.$$

Чи існує оператор A^{-1}? (4 бали)

15. Чи можна в лінійному просторі неперервно диференційованих на $[a, b]$ функцій прийняти за норму елемента $x(t)$: $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$? (3 бали)

Затверджено на засіданні кафедри обчислювальної математики
Протокол № 9 від 7 травня 2024 р.
Завідувач кафедри _____ Екзаменатор _____

Львівський національний університет імені Івана Франка

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Галузь знань 113 – прикладна математика
Дисципліна Функціональний аналіз

Семестр 4

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №2

1. Записати нерівність трикутника для норми в просторі $\tilde{L}_p\left(\bar{G}\right)$. (3 бали)
2. Навести приклад замкненої множини в абстрактному нормованому просторі X. (3 бали)
3. Чому простір зі скалярним добутком можна вважати нормованим простором? (3 бали)
4. Чому кожна збіжна послідовність елементів нормованого простору є фундаментальною? (3 бали)
5. Яку систему елементів у гільбертовому просторі H називають повною? (3 бали)
6. У якому просторі кожний абсолютно збіжний ряд збігається? (3 бали)
7. Яку властивість має множина значень будь-якого лінійного оператора? (3 бали)
8. Яку роль відіграє умова стійкості в означенні неперервно оборотного оператора? (4 бали)
9. Який простір називають спряженим? Чи існують самоспряжені простори? (4 бали)
10. Чому оператор ортогонального проектування є лінійним? (3 бали)
11. Нехай $A \in L\left(H\right)$. Довести, що $N\left(AA^*\right) = N\left(A^*\right)$. (3 бали)
12. Чи є простір $\tilde{L}_1\left[-1,1\right]$ банаховим? (3 бали)

13. Нехай $A \in L(X, Y)$, де X, Y – банахові простори. Довести, що $N(A)$ є підпростором у просторі X. (4 бали)

14. Нехай $A \in L(H)$. Довести, що $(R(A))^{\perp} = N(A^*)$. (4 бали)

15. Чому нормований простір $C[0, 1]$ не є строго нормованим? (4 бали)

Затверджено на засіданні кафедри обчислювальної математики
Протокол № 9 від 7 травня 2024 р.
Завідувач кафедри _____ Екзаменатор _____

Предметний показчик

m-вимірна куля, 28
m-вимірний куб, 28
m-вимірний простір, 11

базис m-вимірного простору, 11
банахів простір, 60
бієктивні оператори, 87

взаємно однозначні оператори, 87
властивості границі послідовності, 30
властивості метрики, 25
властивості скалярного добутку, 73
внутрішня точка, 44
віддаль точок, 19
відкрита куля, 27
відкрита множина, 44
відображення, 85
відрізок, 15

границя послідовності, 29, 30
гранична точка, 45
гільбертів простір H, 76

добуток операторів, 89
доповнення до множини, 45
досяжний оператор, 93
друга нерівність трикутника, 25

евклідова метрика, 21
евклідова норма, 27
евклідів простір, 28, 65
еквівалентність норм, 47
елемент найкращого наближення, 51, 53, 76

замикання множини, 46
замкнена куля, 27
замкнена множина, 46
збіжна послідовність, 29
збіжність в середньому, 63

звуження оператора, 86
зовнішня точка, 45

ізольована точка, 45
ін'єктивні оператори, 87

координати елемента, 12
коректно розв'язна задача, 109
критерій Коші, 60
критерій обмеженості лінійного оператора, 92

лівий обернений оператор, 109
лінійна комбінація, 10
лінійна множина, 13
лінійний многовид, 13
лінійний оператор, 90
лінійний простір, 7
лінійно залежні елементи, 10
лінійно незалежні елементи, 10
лінійно ізоморфні простори, 14

максимум-норма, 28
межа множини, 45
межева точка, 45
метричний простір, 19
множина нулів операторів, 104
мультиіндекс, 63

неперервний оператор, 91, 92
неперервно оборотній оператор, 109
неперервність скалярного добутку, 73
нерівність багатокутника, 25
нерівність Гьольдера для сум, 32
нерівність Коші-Буняковського, 65, 67
нерівність Мінковського для сум, 33
нерівність Мінковського для інтегралів, 42
нерівність чотирикутника, 25
нерівність Юнга, 32
нескінченновимірний простір, 13
норма оператора, 93
норма, 26
нормований простір, 26

обернений оператор, 87, 104
область визначення оператора, 83
область значення оператора, 84
обмежена множина, 31
обмежений оператор, 92
оборотний оператор, 87
образ елемента, 85
октаедрична норма, 29
окіл точки, 29
оператор, 83
опукла множина, 15
ортогональна система елементів, 71
ортогональне доповнення, 79
ортогональні елементи, 71
ортонормована система елементів, 71

повний простір, 60
поточкова збіжність лінійних операторів, 101
правий обернений оператор, 109
продовження оператора, 86
прообраз елемента, 85
простір зі скалярним добутком, 65
простір комплекснозначних неперервних на [a, b] функцій $\tilde{\mathscr{L}}_2[a,b]$, 70
простір лінійних обмежених операторів, 99
простір неперервних функцій $C[a,b]$, 38
простір неперервно-диференційовних функцій $C^1[a,b]$, 41
протилежний елемент, 8
процес ортогоналізації Шмідта, 71
підпорядкування норми, 43
підпростір, 51

розклад елемента за базисом, 12
розширення оператора, 86
рівномірна збіжність лінійних операторів, 100
рівномірна збіжність, 38
рівність операторів, 86
рівність паралелограма, 73

самоспряжений оператор, 115
самоспряжений простір, 114

середньоквадратична метрика, 23
сильна збіжність лінійних операторів, 101
сильна збіжність послідовності, 113
символ Кронекера, 71
скалярний добуток, 65, 67
слабка границя, 114
слабка збіжність послідовності, 113
спряжений оператор, 114
спряжений простір, 95, 112
строго нормований простір, 54
суперпозиція операторів, 88
сфера, 27
сюр'єктивні оператори, 87

теорема Гана-Банаха про продовження лінійних функціоналів, 96
теорема Ріса про загальний вигляд лінійних функціоналів, 113
теорія Ріса, 57
тотожні оператори, 89
точна нижня грань, 52

унітарний простір, 67

фундаментальна послідовність, 58
фундаментальних послідовностей властивості, 58
функціонал, 85, 95
фінітні функції, 56

щільний многовид, 55

ядро оператора, 104

Бібліографія

[1] URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c9/Archimedes_pi.svg

[2] URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/ 62 /Cauchy_sequence_illustration.svg/1920px-Cauchy_sequence_illustration.svg.png

[3] URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7a /Cauchy_sequence_illustration2.svg/1920px-Cauchy_sequence_illustration2.svg.png

[4] URL: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/9a /Basis_graph_%28no_label%29.svg/1280px-Basis_graph_%28 no_label%29.svg.png

[5] URL: https://docplayer.net/117596340-Metrichni-prostori-u-kursi-matematichnogo-analizu.html

[6] URL: http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/%D0%92%D0%9C_%D0%A0%D0 %BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1 %81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1 %83%D0%BA%D1%80.pdf

[7] *Боярощева Т. В., Гудивок Т. В., Погоріляк О. О.* Функціональний аналіз : навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика». Ужгород, 2013. 125 с.

[8] *Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці : навчальний посібник. Львів: Світ поліграфія, 1998. 184 с.

[9] *Prus S., Stachura A.* Analiza funkcjonalna w zadaniach. Warszawa : Wydawnictwo Naukowe PWNSA, 2007. 311 s.

[10] *Микитюк Я. В., Чуйко Г. І., Федик М. М.* Методичні вказівки для проведення лабораторних робіт з функціонального аналізу. Львів : ЛДУ, 1988. 40 с.

[11] *Вагін П. П., Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А.* Основи функціонального аналізу : курс лекцій. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. 140 с.

[12] *Гарасим Я. С., Недашковська А. М., Остудін Б. А.* Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу: методичний посібник для студентів. Львів: Простір-М, 2015. 72 с.

[13] *Лянце В., Кудрик Т., Чуйко Г.* Функціональний аналіз: навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. 384 с.

[14] *Стороож О.* Задачі з теорії міри і функціонального аналізу. Львів: Число, 2009. 152 с.

[15] *D.Lax P.* Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons, 2014. 608 с.

[16] *Kreyszig E.* Introductory Functional Analysis with Applications. New Delhi: Wiley India Pvt. Limited, 2007. 704 с.

[17] *Conway J. B.* A Course in Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, New York 2007. 400 с.

[18] *Oden J. T., Demkowicz L.* Applied Functional Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2010. 596 с.

Навчальне видання

Недашковська А. М., Ільницька О. В.

ВСТУП ДО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник для студентів факультету прикладної математики та інформатики

Відповідальний за випуск *І. І. Паславський*
Ілюстрування *Ю. І. Кружилко*
Макетування, дизайн обкладинки *А. М. Недашковська*
Коректура *А. В. Дідух*

Підп. до друку 29.11.2024.
Формат 60x84/16. Офсетний друк.
7,44 умовн.друк.арк.
Наклад 100 прим.

Видавництво «ПАІС»
Реєстраційне свідоцтво ДК № 3173
від 23 квітня 2008 року
вул. Гребінки, 5, оф. 1, м. Львів, 79007
тел.: (032)255-49-00, (032)261-24-15
e-mail: pais.drukgmail.com; www.pais.com.ua