

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра прикладної математики

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри прикладної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету імені
Івана Франка
(протокол № 1 від 31 серпня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Юрій ЯЩУК

**Силабус з навчальної дисципліни
«Математичні моделі механіки суцільного середовища»,
що викладається в межах ОПІ Прикладна математика
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
з спеціальності 113 Прикладна математика**

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Математичні моделі механіки суцільного середовища
Адреса викладання дисципліни	вул. Університетська, 1, Львів, Львівська область, 79000
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики, Кафедра прикладної математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика та статистика Спеціальність: 113 Прикладна математика
Викладачі дисципліни	Токовий Юрій Владиславович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, професор кафедри прикладної математики
Контактна інформація	yuriy.tokovyuy@lnu.edu.ua http://iapmm.lviv.ua/11/files/st_files/TokovyuyYuV.htm Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 278. м. Львів, вул. Університетська 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю). Адреса: кафедра прикладної математики, вул. Університетська, 1, Львів, Львівська область, 79000.
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/continuum-mechanics-applied-mathematics
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Математичні моделі механіки суцільного середовища» є нормативною дисципліною з спеціальності 113 Прикладна математика для освітньої програми «Прикладна математика», яка викладається у сьомому семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Математичне моделювання процесів природнього, соціального та технологічного походження в наш час є актуальною задачею, яку треба розв'язувати для забезпечення гармонійного та сталого розвитку суспільства, економіки та природокористування. У даному курсі на основі понять з курсу шкільної фізики побудовано моделі деформування суцільного середовища і сформульовано початково-крайові задачі та крайові умови, які є математичною моделлю вказаних процесів. Студент отримує базові знання з основ тензорного аналізу, які є основою будь-якого просторового математичного моделювання, і на основі цих знань розширює шкільні знання з фізики і оволодіває методикою побудови моделей механіки

	суцільного середовища.
Мета та цілі дисципліни	<p>Мета – ознайомлення з сучасними методами побудови математичних моделей загалом, та моделей механіки суцільного середовища зокрема на основі тензорного аналізу. Студент також розширює шкільні знання з фізики і оволодіває методикою побудови моделей механіки суцільного середовища на базі цих знань.</p> <p>Ціль – головним завданням курсу є вироблення у студентів навичок побудови складних математичних моделей механіки суцільного середовища, зокрема моделей деформування твердих тіл, в'язких рідин та газів.</p>
Література для вивчення дисципліни	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Муха І.С.</i> Математичні моделі механіки суцільного середовища. – Львів: Вид-во Львів.ун-ту. – 2015. – 222с. 2. <i>Tokovyy Y., Ma C.-C.</i> The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 329 p. 3. <i>Будак В. Д., Жук Я. О.</i> Механіка суцільних середовищ: навчальний посібник. – Миколаїв: Іліон, 2011. – 160 с. 4. <i>Карвацький А. Я.</i> Механіка суцільних середовищ: навч. посіб. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. – 290 с. 5. <i>Ванін В.А.</i> Математичні моделі та чисельні методи в задачах механіки суцільного середовища: Навчальний посібник – Харків : НТУ «ХП», 2018. – 209 с. 6. <i>Муха І.С., Косак О.С.</i> Методичні рекомендації до розв'язування задач механіки суцільного середовища. – Львів: Вид-во ЛНУ. – 2002. – 60с
Обсяг курсу	150 години аудиторних занять. З них 32 годин лекцій, 32 годин лабораторних робіт/практичних занять та 86 годин самостійної роботи
Очікувані результати навчання	<p>Після завершення цього курсу студент буде <i>знати</i>: основні модельні принципи, які використовуються при моделюванні природничих процесів, диференціальні рівняння, що описують різні процеси в суцільному середовищі.</p> <p><i>вміти</i>: будувати на основі вищезгаданих рівнянь математичні моделі процесів деформування середовища у формі початково-крайових задач математичної фізики.</p> <p>Будуть сформовані наступні фахові компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі. • ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень. • ФК13. Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі,

	<p>здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних.</p> <ul style="list-style-type: none"> • ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату. • ФК17. Здатність розробляти та досліджувати комп'ютерні моделі складних систем, поведінка яких описується за допомогою диференціальних рівнянь. <p>Очікувані програмні результати вивчення курсу:</p> <ul style="list-style-type: none"> • РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці. • РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів. • РН06. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності їх розв'язку. • РН12. Розв'язувати окремі інженерні задачі та/або задачі, що виникають принаймні в одній предметній галузі: в соціології, економіці, екології та медицині.
Ключові слова	Математичні моделі, тензорний аналіз, механіка суцільного середовища, термодинаміка
Формат курсу	Очний (денна форма навчання). Передбачає постійний особистий контакт науково-педагогічного працівника і студента, що забезпечує надбання глибоких системних знань, стійких умінь. Студенти денної форми навчання зобов'язані відвідувати навчальні заняття згідно з розкладом та своєчасно виконувати навчальні завдання згідно з робочою програмою.
Теми	Подано нижче у табличній формі СХЕМА КУРСУ «Математичні моделі механіки суцільного середовища»
Підсумковий контроль, форма	Екзамен. Тестові екзаменаційні білети.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з нормативних дисциплін, достатніх для сприйняття категоріального апарату тензорного аналізу, розуміння природних явищ, уміння формулювати початково-крайові задачі та розв'язувати їх.
Навчальні методи	Основними формами навчання є лекційна подача матеріалу,

<p>та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</p>	<p>проведення лабораторних занять, а також організація самостійної роботи студентів. Методика їх проведення націлена на реалізацію принципу індивідуалізації в освіті, сприяє найбільш повному розкриттю особистісного потенціалу студента за умови встановлення суб'єктних відносин, в яких кожна сторона бере на себе відповідальність за свій вибір.</p>
<p>Необхідне обладнання</p>	<p>Комп'ютер, мультимедійний проектор, дошка, крейда</p>
<p>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • практичні/самостійні тощо: 20% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 20; • контрольні заміри (модулі): 30% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 30; • екзамен: 50% семестрової оцінки. Максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p>Критерії оцінювання завдань на колоквиумі (контрольні заміри):</p> <p>5 балів – студент повністю розкрив теоретичне завдання;</p> <p>4 бали – студент розкрив теоретичне завдання з незначними помилками та неточностями;</p> <p>3 бали – студент розкрив теоретичне завдання частково, міркування містять помилки та неточності;</p> <p>2 бали – студент розкрив теоретичне питання частково, міркування містять помилки, які суттєво впливають на результат, коментарі є недостатніми для розуміння;</p> <p>1 бал – студент практично не розкрив теоретичне питання, міркування містять грубі помилки, коментарі практично відсутні;</p> <p>0 балів – студент не відповів на питання або не продемонстрував базового рівня розуміння при відповіді на питання.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані за практичні / самостійні завдання, контрольні заміри та бали за екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
<p>Питання до</p>	<p>1. Криволінійна система координат. Коваріантна база.</p>

екзамену

1. Коефіцієнти Ляме. Контраваріантна база. Скалярний та векторний добуток векторів.
2. Скалярні і тензорні величини. Метричний тензор. Геометричний зміст компонент метричного тензора. Фізичні компоненти вектору.
3. Власні значення та власні вектори тензора другого рангу. Інваріанти тензора другого рангу.
4. Похідна від вектору. Символи Крістофеля. Коваріантна похідна від компонент тензора.
5. Градієнт тензора. Похідна від функції по напрямку.
6. Дивергенція тензора. Лапласіан. Ротор тензора. Набла-оператор.
7. Деякі диференціальні тензорні тотожності (доведення).
8. Формули Остроградського-Гауса та Стокса.
9. Поняття про матеріальну точку та суцільне середовище. Просторові та матеріальні координати точки.
10. Початкова та актуальна конфігурації суцільного середовища. Рівняння руху. Змінні Ейлера та змінні Лагранжа.
11. Швидкість руху точок суцільного середовища.
12. Прискорення руху точок суцільного середовища.
13. Дослідження руху суцільного середовища за методом Лагранжа.
14. Дослідження руху суцільного середовища за методом Ейлера.
15. Означення тензора градієнта локального руху.
16. Вирази для коваріантних компонент тензора градієнта локального руху.
17. Означення тензорів деформації Коші, Гріна та Альмансі.
18. Коваріантні компоненти тензора Гріна в недеформованій базі.
19. Геометричний зміст компонент тензора деформації Гріна.
20. Геометрично-лінійна теорія деформування. Умови сумісності деформацій. Рівняння Сен-Венана.
21. Означення тензора швидкостей деформації.
22. Означення тензора вихору та бівектор цього тензора.
23. Швидкість в близьких точках суцільного середовища.
24. Умова нестисливості середовища.
25. Теорема Нансона.
26. Класи сил, що діють на суцільне середовище. Густина сили. Означення вектора напруження.
27. Тензор істинних напружень (тензор Коші).
28. Фізичний смисл компонент тензора істинних напружень.
29. Закон збереження маси суцільного середовища в змінних Лагранжа.
30. Закон збереження маси суцільного середовища в змінних Ейлера.
31. Закон зміни кількості руху суцільного середовища в

	<p>змінних Лагранжа. Тензор номінальних напружень (перший тензор Піолі).</p> <p>32. Закон зміни кількості руху суцільного середовища в змінних Ейлера.</p> <p>33. Закон зміни моменту кількості руху суцільного середовища. Наслідки з цього закону.</p> <p>34. Термодинамічна рівновага суцільного середовища. Масова густина внутрішньої та кінетичної енергії.</p> <p>35. Перший закон термодинаміки.</p> <p>36. Густина роботи зовнішніх сил. Другий (симетричний) тензор Піолі.</p> <p>37. Густина роботи зовнішніх сил в актуальній конфігурації.</p> <p>38. Поняття про внутрішню енергію механічної системи. Ентропія.</p> <p>39. Другий закон термодинаміки.</p> <p>40. Потужність дисипації. Дисипативна функція.</p> <p>41. Густина породження тепла в середовищі та надходження теплоти через поверхню.</p> <p>42. Закон Фур'є. Рівняння поширення тепла в суцільному середовищі.</p> <p>43. Формулювання граничних задач теплопереносу. Умови на поверхні суцільного середовища.</p> <p>44. Фізичні співвідношення для лінійно-пружного тіла.</p> <p>45. Фізичні співвідношення для ідеальної рідини (газу) та для в'язкої (Ньютонівської) рідини.</p> <p>46. Формулювання математичної моделі лінійно-пружного деформівного тіла.</p> <p>47. Формулювання математичної моделі ідеальної та в'язкої Ньютонівської рідини.</p> <p>48. Урахування електромагнітних ефектів в термодинаміці.</p>
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

СХЕМА КУРСУ «Математичні моделі механіки суцільного середовища»

Тиж.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності	Література	Завдання, год
1-й тиждень	Тема 1. Криволінійна система координат. Коваріантна база. Коefіцієнти Ляме. Контраваріантна база. Скалярні і тензорні величини. Метричний тензор.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.
1-й тиждень	Оволодіння основами тензорної алгебри на прикладах.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
2-й тиждень	Тема 2. Символи Кристофеля. Коваріантна похідна від компонент тензора.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.

2-й тиждень	Оволодіння основами тензорної алгебри на прикладах.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
3-й тиждень	Тема 3. Градієнт тензора. Дивергенція тензора. Лапласіан. Ротор тензора. Формули Остроградського-Гауса та Стокса	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 6 год.
3-й тиждень	Оволодіння основами тензорної алгебри на прикладах.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
4-й тиждень	Тема 4. Просторові та матеріальні координати. Початкова та актуальна конфігурації суцільного середовища. Швидкість та прискорення точок суцільного середовища.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 6 год.
4-й тиждень	Розв'язування задач на швидкість та прискорення.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
5-й тиждень	Тема 5. Рівняння руху. Змінні Ейлера та змінні Лагранжа. Дослідження руху	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.
5-й тиждень	Дослідження різних законів руху суцільного середовища	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
6-й тиждень	Тема 6. Означення тензора градієнта локального руху, тензорів деформації Коші, Гріна та Альмансі.	Лекція Самостійна робота	[1,2,3,5]	2 год. / 5 год.
6-й тиждень	Розв'язування задач з тензорами деформацій.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
7-й тиждень	Тема 7. Геометрично-лінійна теорія деформування. Умови сумісності деформацій.	Лекція Самостійна робота	[1,2,4]	2 год. / 6 год.
7-й тиждень	Розв'язування задач з тензорами деформацій.	Лабораторне заняття	[1]	2 год.
8-й тиждень	Тема 8. Означення тензора швидкостей деформації. Умова нестисливості. Швидкість в точках суцільного середовища. Теорема Нансона.	Лекція Самостійна робота	[1, 2, 3]	2 год. / 6 год.
8-й тиждень	Розв'язування задач на теорему Нансона.	Лабораторне заняття	[1]	2 год.
9-й тиждень	Тема 9. Класи сил, що діють на суцільне середовище. Густина сили. Означення вектора напруження. Тензор істинних напружень (тензор Коші).	Лекція Самостійна робота	[1,2]	2 год. / 5 год.
9-й тиждень	Розв'язування задач з тензорами напружень.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
10-й тиждень	Тема 10. Фізичний смисл компонент тензора істинних напружень.	Лекція Самостійна робота	[1,3,4]	2 год. / 5 год.

10-й тиждень	Розв'язування задач з тензорами напружень.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
11-й тиждень	Тема 11. Закон збереження маси суцільного середовища.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.
11-й тиждень	Розв'язування задач на закон збереження маси суцільного середовища.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
12-й тиждень	Тема 12. Закон зміни кількості руху суцільного середовища. Закон зміни моменту кількості руху суцільного середовища.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 6 год.
12-й тиждень	Розв'язування задач на закон зміни кількості руху суцільного середовища.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
13-й тиждень	Тема 13. Термодинамічна рівновага суцільного середовища. Закони термодинаміки. Густина роботи зовнішніх сил. Другий (симетричний) тензор Піоли. Ентропія.	Лекція Самостійна робота	[1,2]	2 год. / 6 год.
13-й тиждень	Розв'язування задачі про чистий згин тіла у формі бруса прямокутного перерізу	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
14-й тиждень	Тема 14. Рівняння поширення тепла в суцільному середовищі.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.
14-й тиждень	Розв'язування задачі про теплопровідність в брусі прямокутного перерізу.	Лабораторне заняття	[1,7]	2 год.
15-й тиждень	Тема 15. Фізичні співвідношення для ідеальної рідини (газу) та для в'язкої (Ньютонівської) рідини. Фізичні співвідношення для пружного тіла. Співвідношення Дюгамеля-Неймана.	Лекція Самостійна робота	[1-6]	2 год. / 5 год.
15-й тиждень	Розв'язування задачі про кулю в досконалому газі.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.
16-й тиждень	Тема 16. Електромагнітні ефекти в термодинаміці.	Лекція Самостійна робота	[1]	2 год. / 5 год.
16-й тиждень	Розв'язування задачі про склянку з ідеальною рідиною.	Лабораторне заняття	[7]	2 год.