

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Затверджено

на засіданні
кафедри обчислювальної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29 серпня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Роман ХАПКО

Силабус з навчальної дисципліни
«Функціональний аналіз»,
що викладається в межах ОПП «Прикладна математика»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
зі спеціальності 113 Прикладна математика

Львів 2023 р.

| | |
|--|--|
| Назва дисципліни | Функціональний аналіз |
| Адреса викладання дисципліни | Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1 |
| Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна | Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики |
| Галузь знань, шифр та назва спеціальності | 113 – прикладна математика |
| Викладачі дисципліни | Недашковська Анастасія Миколаївна, доцент кафедри обчислювальної математики; |
| Контактна інформація викладачів | anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua , Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1 |
| Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються | Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю). |
| Сторінка курсу | https://ami.lnu.edu.ua/course/functional-analysis-applied-mathematics |
| Інформація про дисципліну | Дисципліна «Функціональний аналіз» є нормативною дисципліною зі спеціальності 113 – прикладна математика для освітньої програми Прикладна математика, яку викладають в 4 семестрі в обсязі 4 кредити(ECTS) |
| Коротка анотація дисципліни | Цей курс є логічним продовженням курсу математичного аналізу, традиційно читається для студентів факультету прикладної математики та інформатики. Предметом вивчення є основні поняття, пов'язані з лінійними, нормованими просторами, просторами зі скалярним добутком, банаховими та гільбертовими просторами, а також лінійними операторами та функціоналами. |
| Мета та цілі дисципліни | Метою є вивчення базових понять та методів сучасного функціонального аналізу. |
| Література для вивчення дисципліни | <ol style="list-style-type: none"> 1. Ковальчук Б. Основи математичного аналізу: підручник: в 2 ч. Ч. I / Б. Ковальчук, Й. Шіпка. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. – 374с. 2. Гарасим Я.С. Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів/ Я.С. Гарасим, А.М. Недашковська, Б.А. Остудін. – Львів: Простір-М, 2015. – 72 с. 3. Березанський Ю.М. Функціональний аналіз: підручник / Ю.М. Березанський, Г.Ф.Ус, З.Г. Шефтель. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с. 4. Сторож О. Додаткові розділи теорії міри та функціонального аналізу: навч.посібник / О. Сторож, Т. Кудрик, Н. Сущик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. – 198 с. 5. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: 2023. – 313с. |
| Обсяг курсу | Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год лек- |

| | |
|--------------------------------------|--|
| | цій та 32 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 56 год. |
| Очікувані результати навчання | <p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>Знати:</p> <ul style="list-style-type: none"> - основні поняття теорії лінійних, нормованих просторів; - основні поняття теорії просторів із скалярним добутком; - основні поняття теорії банахових і гільбертових просторів; - способи побудови елементів найкращих наближень; - методи дослідження лінійних операторів та функціоналів; - методи знаходження та дослідження обернених та спряжених операторів у різних функціональних просторах; <p>Вміти: застосовувати вивчені методи до розв'язування та аналізу конкретних задач.</p> <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. - ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності. <p>Фахові компетентності:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем. - ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі. - ФК13. Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних. - ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату. <p>Програмні результати навчання:</p> <ul style="list-style-type: none"> - РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці. - РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами. - РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів. |
| Ключові слова | Лінійні нормовані простори, простори зі скалярним добутком, банахові простори, гільбертові простори, елементи найкращих наближень, лінійні оператори і функціонали, спряжені простори і оператори |
| Формат курсу | Очний. Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій |
| Теми | Подано нижче у таблиці «Схема курсу» |
| Підсумковий контроль, | Екзамен |

| форма | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-----------------------|---------------------------------|----------------|-------------------------------|--|-------|--|--|---------------------------------|--|---|----------|----------|----------|---|------------|---|------------|--------|-------|---|---|-------|--------|---|------------|---------|------------|---|---|-----------|--------|--------|--------------|--------|--------------|---|
| Пререквізити | Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> - Алгебри; - Чисельних методів; - Математичного аналізу; | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу | Презентації, лекції (лекція-розповідь, лекція-бесіда) Індивідуальні завдання. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Необхідне обладнання | Комп'ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі, проектор | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності) | Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Оцінка за шкалою ECTS</th> <th rowspan="2">Оцінка в балах</th> <th colspan="2">Оцінка за національною шкалою</th> <th rowspan="2">залік</th> </tr> <tr> <th></th> <th></th> <th colspan="2">Екзамен, диференційований залік</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>Відмінно</td> <td>100 - 90</td> <td>Відмінно</td> <td>5</td> <td rowspan="4">зараховано</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>Дуже добре</td> <td>81- 89</td> <td rowspan="2">Добре</td> <td rowspan="2">4</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>Добре</td> <td>71 -80</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>Задовільно</td> <td>61 - 70</td> <td rowspan="2">Задовільно</td> <td rowspan="2">3</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>Достатньо</td> <td>51- 60</td> </tr> <tr> <td>FX (F)</td> <td>Незадовільно</td> <td>0 - 50</td> <td>Незадовільно</td> <td>2</td> <td>не зараховано</td> </tr> </tbody> </table> | Оцінка за шкалою ECTS | | Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | | залік | | | Екзамен, диференційований залік | | A | Відмінно | 100 - 90 | Відмінно | 5 | зараховано | B | Дуже добре | 81- 89 | Добре | 4 | C | Добре | 71 -80 | D | Задовільно | 61 - 70 | Задовільно | 3 | E | Достатньо | 51- 60 | FX (F) | Незадовільно | 0 - 50 | Незадовільно | 2 |
| Оцінка за шкалою ECTS | | Оцінка в балах | Оцінка за національною шкалою | | залік | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | Екзамен, диференційований залік | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| A | Відмінно | 100 - 90 | Відмінно | 5 | зараховано | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| B | Дуже добре | 81- 89 | Добре | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| C | Добре | 71 -80 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| D | Задовільно | 61 - 70 | Задовільно | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| E | Достатньо | 51- 60 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| FX (F) | Незадовільно | 0 - 50 | Незадовільно | 2 | не зараховано | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Впродовж семестру студент може отримати 100 балів. З них:</p> <ul style="list-style-type: none"> - індивідуальні завдання (30 балів): 5 завдань по 6 балів кожне; - колоквіум (20 балів); - письмовий екзамен (50 балів); <p>Підсумкове оцінювання проводиться у вигляді письмового екзамену (50 балів: 20 тестових завдань по 1 балу і 3 практичні завдання по 10 балів)</p> <p>Загалом максимальна кількість балів, яку можна набрати протягом семестру 100 балів.</p> <p>Критерії оцінювання індивідуальних завдань:</p> <p>6 балів – студент повністю виконав умови завдання, хід розв'язування оформлено належним чином, нема ознак недоброчесності.</p> <p>4-5 балів – студент повністю виконав умови завдання, хід розв'язування оформлено належним чином, розв'язок містить незначні помилки, нема ознак недоброчесності.</p> <p>2-3 бали – студент виконав завдання з помилками, або ж не повністю викладено хід розв'язування завдання, нема ознак недоброчесності;</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | |
|------------------------------------|---|
| | <p>1 бал – студент виконав завдання частково з грубими помилками, які самостійно не може виправити, демонструє незнання матеріалу, нема ознак недоброчесності.</p> <p>0 балів – студент не виконав завдання або ж у роботі виявлені ознаки недоброчесності.</p> <p>Критерії оцінювання тестових завдань (колоквіум, екзамен): 1 бал: відповідь на завдання правильна; 0 балів: відповідь на завдання неправильна.</p> <p>Критерії оцінювання практичних завдань (екзамен): 10 балів: студент правильно виконав практичне завдання; 8-9 балів: студент виконав завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв’язування знає і вміє його застосовувати; 6-7 бали: студент виконав завдання з помилками, алгоритм розв’язування, в основному, знає; 3-5 бали: студент виконав лише частину завдання або повністю, але зі значними помилками; 1-2 бали: студент виконав лише частину завдання значними помилками; 0 балів: студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов’язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані на лабораторних заняттях (індивідуальні завдання), колоквіумі та екзамені. При цьому обов’язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторного заняття; недопустимість пропусків та запізень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов’язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> |
| <p>Питання до екзамену.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Лінійні простори; 2. Приклади нормованих просторів. Аксиоми нормованого простору; 3. Збіжність послідовностей у нормованих просторах; 4. Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах. Підпростір; 5. Простори зі скалярним добутком; |

| | |
|-------------------|---|
| | 6. Банахові простори; 7. Гільбертові простори; 8. Ортогональні доповнення; 9. Лінійні оператори: неперервність, обмеженість, норма; 10. Обернені оператори: умови існування, неперервна оборотність; 11. Спряжені оператори. |
| Опитування | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу. |

Схема курсу «Функціональний аналіз»

| Ти ж. | Тема, план, короткі тези | Форма діяльності (заняття) | Література. Ресурси в інтернеті | Завдання, год | Термін виконання |
|-------|---|-----------------------------|---------------------------------|---|------------------|
| 1. | Тема 1. Лінійні простори. Приклади лінійних просторів. Ізоморфні лінійні простори: Лінійні простори, приклади лінійних просторів, лінійна залежність і лінійна незалежність елементів, скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори, лінійні многовиди, ізоморфізм лінійних просторів, опуклі множини в лінійних просторах | Лекція (2 год) | [1],[2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 2 | Тема 2. Нормовані простори. Означення метричного простору. Деякі приклади метричних просторів. Елементарні властивості метрики. Означення нормованого простору. | Лекція (2 год) | [4],[2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 3 | Тема 2. Нормовані простори. Приклади нормованих просторів. Елементи аналізу в нормованих просторах. Нерівність Гьольдера і Мінковського для сум | Лекція (2 год) | [1],[2],[3], [4] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 4 | Тема 2. Нормовані простори. Відкриті та замкнені множини. Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах. | Лекція (2 год) | [2],[3],[4] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 5 | Тема 2. Нормовані простори. Про елемент найкращого наближення в нормованому просторі | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |

| | | | | | |
|----|--|---|-----------------------------|---|-----------------------------|
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 6 | Тема 2. Нормовані простори. Наближення елементами простору | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 7 | Тема 2. Нормовані простори. Лінійні многовиди щільні в нормованому просторі | Лекція (2 год) | [1],[2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 8 | Тема 3. Банахові простори. Фундаментальні послідовності. Означення банахового простору | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 9 | Тема 3. Банахові простори. Приклад неповного нормованого простору. Банахові простори $C^k(G), k \geq 1$. | Лекція (2 год) | [4],[2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Тема 3. Банахові простори. Фундаментальні послідовності. Означення банахового простору | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) |
| 10 | Тема 4. Простори зі скалярним добутком. Евклідові простори. Унітарні простори. Приклади просторів зі скалярним добутком | Лекція (2 год) | [1],[2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 11 | Тема 4. Простори зі скалярним добутком. Процес ортогоналізації Шмідта. Деякі властивості скалярного добутку | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 12 | Тема 5. Гільбертові простори. Означення гільбертового простору. Ортогональне доповнення. | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття | [2],[3],[5] | Розв'язування | 1 тиждень |

| | | | | | |
|----|--|-----------------------------|-------------|---|-----------|
| | | (2 год) | | задач (2 год) | |
| 13 | Тема 5. Гільбертові простори. Означення гільбертового простору. Ортогональне доповнення. | (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) | 1 тиждень |
| | Колоквіум (Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5) | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Підготовка до колоквіуму (9 год.) | 1 тиждень |
| 14 | Тема 6. Лінійні оператори. Загальне означення оператора. Взаємооднозначні (ін'єктивні) оператори. Суперпозиція операторів | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 15 | Тема 6. Лінійні оператори. Означення лінійного оператора. Неперервні лінійні оператори. Обмежені лінійні оператори | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | Тема 7. Простір лінійних обмежених операторів. Нормований простір $\mathcal{L}(X, Y)$. Поняття збіжності послідовності операторів. | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |
| 16 | Тема 8. Обернені оператори. Обернені оператори. Умови існування обернених операторів. Лівий і правий обернений оператори. | Лекція (2 год) | [2],[3] | Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.) | 1 тиждень |
| | Тема 9. Спряжені простори та спряжені оператори. Спряжені простори. Спряжені і самоспряжені оператори | Лабораторне заняття (2 год) | [2],[3],[5] | Розв'язування задач (2 год) | 1 тиждень |