МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Затверджено
На засіданні
кафедри обчислювальної математики
факультету прикладної математики та інформатики
Львівського національного університету імені Івана Франка
(протокол № 7 від 24.06 2025 р.)

Завідувач кафедри
_____Роман ХАПКО

Силабус з навчальної дисципліни
«Функціональний аналіз»,
що викладається в межах ОПП «Системний аналіз і управління. Інтелектуальний аналіз даних»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з спеціальності 124 Системний аналіз

Львів 2025 р.

Назва дисципліни	Функціональний аналіз
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	12 – інформаційні технології 124 – системний аналіз
Викладачі дисципліни	Недашковська Анастасія Миколаївна, доцент кафедри обчислювальної математики; Лисецька Олександра Юріївна, доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
Контактна інформація викладачів	anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua, oleksandra.lysetska@lnu.edu.ua Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/functional-analysis-applied-mathematics
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Функціональний аналіз” є нормативною дисципліною зі спеціальності 124 – системний аналіз для освітньої програми «Системний аналіз і управління. Інтелектуальний аналіз даних, Освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр (4 кредити ECTS)
Коротка анотація дисципліни	Цей курс є логічним продовженням курсу математичного аналізу, традиційно читається для студентів факультету прикладної математики та інформатики. Предметом вивчення є основні поняття, пов’язані з лінійними, нормованими просторами, просторами зі скалярним добутком, банаховими та гільбертовими просторами, а також лінійними операторами та функціоналами.
Мета та цілі дисципліни	Метою є вивчення базових понять та методів сучасного функціонального аналізу.
Література для вивчення дисципліни	1. Недашковська А. М. Вступ до функціонального аналізу : навч. посіб. для студентів ф-ту приклад. математики та інформатики / А. М. Недашковська, О. В. Ільницька ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. — Львів : ПАІС, 2024. — 127 с. 2. Гарасим Я.С. Методи розв’язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів/ Я.С. Гарасим, А.М. Недашковська, Б.А. Остудін. – Львів: Простір-М, 2015. – 72 с. 3. Ковальчук Б. Основи математичного аналізу: підручник: в 2 ч. Ч. І / Б. Ковальчук, Й. Шіпка. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. – 374с. 4. Березанський Ю.М. Функціональний аналіз: підручник / Ю.М. Березанський, Г.Ф.Ус, З.Г. Шефтель. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с. 5. Сторож О. Додаткові розділи теорії міри та функціонального аналізу: навч.посібник / О. Сторож, Т. Кудрик, Н. Сущик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. – 198 с. 6. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге,

	виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: 2023. – 313с.
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год лекцій та 32 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 56 год.
Очікувані результати навчання	Після завершення цього курсу студент буде : **Знати:** - основні поняття теорії лінійних, нормованих просторів; - основні поняття теорії просторів із скалярним добутком; - основні поняття теорії банахових і гільбертових просторів; - способи побудови елементів найкращих наближень; - методи дослідження лінійних операторів та функціоналів; - методи знаходження та дослідження обернених та спряжених операторів у різних функціональних просторах; **Вміти:** застосовувати вивчені методи до розв'язування та аналізу конкретних задач. **Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:** **Загальні компетентності:** - ЗК01. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями. - ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях. - ЗК03. Здатність генерувати нові ідеї (креативність). - ЗК05. Здатність проведення досліджень на відповідному рівні. - ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. - ЗК07. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел. - ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності. **Фахові компетентності:** - ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем. - ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі. - ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень. **Спеціальні компетентності:** - СК01. Знання принципів побудови та дослідження математичних моделей, а також чисельних методів їх розв'язування. - СК02. Здатність розробляти та досліджувати математичні моделі та методи їх розв'язування. **Програмні результати навчання:** - РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці. - РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами. - РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної

<table>
<tr><td></td><td>предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв’язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

- РН14. Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку.
- РН15. Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.</td></tr>
<tr><td>Ключові слова</td><td>Лінійні нормовані простори, простори зі скалярним добутком, банахові простори, гільбертові простори, елементи найкращих наближень, лінійні оператори і функціонали, спряжені простори і оператори</td></tr>
<tr><td>Формат курсу</td><td>Очний. Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій</td></tr>
<tr><td>Теми</td><td>Подано нижче у таблиці «Схема курсу»
1. Лінійні простори: підпростори, лінійні многовиди, лінійна залежність і незалежність, опуклі множини;
2. Приклади нормованих просторів. Аксіоми нормованого простору;
3. Збіжність послідовностей у нормованих просторах. Границя послідовностей. Застосування нерівності трикутника і її наслідку;
4. Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах. Підпростір;
5. Простори зі скалярним добутком: означення, норма породжена скалярним добутком, ортогональні системи;
6. Банахові простори:фундаментальні послідовності, критерії повноти, дослідження повноти різних нормованих просторів;
7. Гільбертові простори: питання побудови елемента найкращого наближення;
8. Ортогональні доповнення;
9. Лінійні оператори: неперервність, обмеженість, норма. Приклади дослідження конкретних функціоналів та операторів;
10. Простори лінійних обмежених операторів: сильна та рівномірна збіжність послідовностей операторів;
11. Обернені оператори: умови існування, неперервна оборотність;
12. Приклади дослідження конкретних операторів та оборотність;
13. Спряжені оператори: загальне означення, приклади побудови спряжених операторів у гільбертовому просторі.</td></tr>
<tr><td>Підсумковий контроль, форма</td><td>Залік</td></tr>
<tr><td>Пререквізити</td><td>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з
- Алгебри;
- Чисельних методів;
- Математичного аналізу;</td></tr>
<tr><td>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</td><td>Презентації, лекції (лекція-розповідь, лекція-бесіда)
Індивідуальні завдання.</td></tr>
<tr><td>Необхідне обладнання</td><td>Комп’ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі, проектор</td></tr>
<tr><td>Критерії оцінювання (окремо для кож-</td><td>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.
<table><tr><th rowspan="2">Оцінка за шкалою ECTS</th><th rowspan="2">Оцінка в балах</th><th colspan="2">Оцінка за національною шкалою</th></tr><tr><th>Екзамен,</th><th></th></tr></table></td></tr>
</table>

ного виду навчальної діяльності)

			диференційований залік		залік
A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5	зараховано
B	Дуже добре	81- 89	Добре	4	
C	Добре	71 -80			
D	Задовільно	61 - 70	Задовільно	3	
E	Достатньо	51- 60			
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано

Впродовж семестру студент може отримати 100 балів. З них:

- самостійні роботи (50 балів): 5 самостійних робіт по 10 балів кожна;
- колоквіуми(50 балів): 2 колоквіуми по 25 балів кожен;

Загалом максимальна кількість балів, яку можна набрати протягом семестру 100 балів.

Критерії оцінювання індивідуальних завдань:

10 балів – студент повністю виконав умови завдання, хід розв'язування оформлено належним чином, нема ознак недоброчесності.

9-8 балів – студент повністю виконав умови завдання, хід розв'язування оформлено належним чином, розв'язок містить незначні помилки, нема ознак недоброчесності.

7-3 бали – студент виконав завдання з помилками, або ж не повністю викладено хід розв'язування завдання, нема ознак недоброчесності;

2-1 бали – студент виконав завдання частково з грубими помилками, які самостійно не може виправити, демонструє незнання матеріалу, нема ознак недоброчесності.

0 балів – студент не виконав завдання або ж у роботі виявлені ознаки недоброчесності.

Критерії оцінювання тестових завдань (колоквіум, іспит):

1 бал: відповідь на завдання правильна;

0 балів: відповідь на завдання неправильна.

Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів виз-

	начених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих. **Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані на лабораторних заняттях (індивідуальні самостійні завдання) та під час проведення двох колоквіумів. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.
Питання до колоквіумів	1. Лінійні простори; 2. Приклади нормованих просторів. Аксіоми нормованого простору; 3. Збіжність послідовностей у нормованих просторах; 4. Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах. Підпростір; 5. Простори зі скалярним добутком; 6. Банахові простори; 7. Гільбертові простори; 8. Ортогональні доповнення; 9. Лінійні оператори: неперервність, обмеженість, норма; 10. Обернені оператори: умови існування, неперервна оборотність; 11. Спряжені оператори.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу "Функціональний аналіз"

Тиж.	Тема, план, короткі тези	**Форма діяльності (заняття)**	Література. Ресурси в інтернеті	Завдання, год	Термін виконання
1.	**Тема 1. Лінійні простори. Приклади лінійних просторів. Ізоморфні лінійні простори:** Лінійні простори, приклади лінійних просторів, лінійна залежність і лінійна незалежність елементів, скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори, лінійні многовиди, ізоморфізм лінійних просторів, опуклі множини в лінійних просторах	Лекція (2 год)	[1],[2],[3]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
2	**Тема 2. Нормовані простори.** Означення метричного простору. Деякі приклади метричних просторів. Елементарні властивості метрики. Означення нормованого простору.	Лекція (2 год)	[1],[2],[3]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год)	1 тиждень
		Лабораторна робота	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень

		(1год) Самостійна робота (1 год)			
3	**Тема 2. Нормовані простори.** Приклади нормованих просторів. Елементи аналізу в нормованих просторах. Нерівність Ґольдера і Мінковського для сум	Лекція (2 год)	[1],[2],[3], [4]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
4	**Тема 2. Нормовані простори.** Відкриті та замкнені множини. Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах.	Лекція (2 год)	[1],[2],[4]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[6]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
5	**Тема 2. Нормовані простори.** Про елемент найкращого наближення в нормованому просторі	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[3]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
6	**Тема 2. Нормовані простори.** Наближення елементами простору	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (1 год) Самостійна робота (1 год)	[1],[2],[4]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
7	**Тема 2. Нормовані простори.** Лінійні многовиди щільні в нормованому просторі	Лекція (2 год)	[1],[2],[3]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
8	**Тема 3. Банахові простори.** Фундаментальні послідовності. Означення банахового простору	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[3]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень

9	**Тема 3. Банахові простори.** Приклад неповного нормованого простору. Банахові простори $C^k(G), k \geq 1$.	Лекція (2 год)	[1],[2],[4]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
9	**Тема 3. Банахові простори.** Фундаментальні послідовності. Означення банахового простору	Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
10	**Тема 4. Простори зі скалярним добутком.** Евклідові простори. Унітарні простори. Приклади просторів зі скалярним добутком	Лекція (2 год)	[1],[2],[3]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[3]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
11	**Тема 4. Простори зі скалярним добутком.** Процес ортогоналізаці Шмідта. Деякі властивості скалярного добутку	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (1 год) Самостійна робота (1 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
12	**Тема 5. Гільбертові простори.** Означення гільбертового простору. Ортогональне доповнення.	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
13	**Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5**	Колоквіум (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (9 год.)	1 тиждень
	Тема 5. Гільбертові простори. Означення гільбертового простору. Ортогональне доповнення.	Лабораторна робота (1 год) Самостійна робота (1 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
14	**Тема 6. Лінійні оператори.** Загальне означення оператора. Взаємооднозначні (ін'єктивні) оператори. Суперпозиція операторів	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
		Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
15	**Тема 6. Лінійні оператори.** Означення лінійного оператора. Неперервні лінійні оператори.	Лекція (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу	1 тиждень

	Обмежені лінійні оператори			(1 год.)	
	Тема 7. Простір лінійних обмежених операторів. Нормований простір $\mathcal{L}(X,Y)$. Поняття збіжності послідовності операторів.	Лабораторна робота (2 год)	[1],[2],[5]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень
16	**Тема 8. Обернені оператори. Обернені оператори.** Умови існування обернених операторів. Лівий і правий обернений оператори.	Колоквіум (2 год)	[1],[2]	Опрацювання лекційного матеріалу (1 год.)	1 тиждень
	Тема 9. Спряжені простори та спряжені оператори. Спряжені просторі. Спряжені і самоспряжені оператори	Лабораторна робота (1 год) Самостійна робота (1 год)	[1],[2],[4]	Розв'язування задач (2 год)	1 тиждень