МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра теорії оптимальних процесів

Затверджено
На засіданні
кафедри теорії оптимальних процесів
факультету прикладної математики та інформатики
Львівського національного університету імені Івана Франка
(протокол № 1 від 18 серпня 2025 р.)

Завідувач кафедри .
_____проф. Шахно С.М

Силабус з навчальної дисципліни
“Методи оптимізації”,
що викладається в межах ОПП
«Системний аналіз і управління. Інтелектуальний аналіз даних»,
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
з спеціальності 124 – Системний аналіз

Львів 2025 р.

Назва дисципліни	Методи оптимізації
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра теорії оптимальних процесів
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	12 – інформаційні технології 124 – системний аналіз
Викладачі дисципліни	Бартіш Михайло Ярославович, професор, кафедра ТОП, Огородник Наталя Пилипівна, доцент кафедри ТОП Гавдяк Михайло Михайлович, асистент кафедри ТОП
Контактна інформація викладачів	mykhailo.bartish@gmail.com nataliya.ohorodnyk@lnu.edu.ua mykhailo.Havdiak@lnu.edu.ua Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 269. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/methods-of-optimization-system-analysis
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Методи оптимізації” є нормативною дисципліною з спеціальності 124 – системний аналіз для освітньої програми Системний аналіз і управління. Інтелектуальний аналіз даних, яка викладається в 6-7-му семестрах в обсязі 6-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс «Методи оптимізації» спрямований на формування у студентів знань і практичних навичок розв’язування задач мінімізації функцій однієї та багатьох змінних, а також ознайомлення з основами варіаційного числення і теорії оптимального керування. Ці підходи є необхідним інструментом у сучасному інженерному проєктуванні, системному аналізі та інших прикладних галузях науки й техніки. Основну частину курсу становить поєднання теоретичного аналізу методів оптимізації з їх чисельною реалізацією. Практичні заняття та індивідуальні завдання передбачають реалізацію алгоритмів, аналіз їх ефективності та виконання обчислювальних експериментів із використанням сучасних програмних засобів.
Мета та цілі дисципліни	Метою вивчення дисципліни «Методи оптимізації» є формування у студентів базових теоретичних знань і практичних навичок розв’язування задач оптимізації, що виникають у системному аналізі та прикладних задачах. У процесі навчання студенти ознайомлюються з основними методами мінімізації, принципами їх чисельної реалізації та підходами до

	використання програмних засобів для розв’язування оптимізаційних задач на сучасних комп’ютерах.
Література для вивчення дисципліни	1. **Бартіш М. Я., Дудзяний І. М.** Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 168 с. 2. **Бартіш М. Я., Дудзяний І. М.** Дослідження операцій. Частина 4. Нелінійне програмування. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 208 с. 3. **Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г.** Задачі, методи та алгоритми оптимізації. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2012. – 711 с. 4. **Моклячук М. П.** Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2009. – 380 с. 5. **Nocedal J., Wright S.** Numerical Optimization. – New York: Springer, 2006. – 664 p. *(2nd ed.)* 6. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex Optimization. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 716 p. 7. **Bertsekas D. P.** Nonlinear Programming. – Belmont, MA: Athena Scientific, 2016. – 838 p. 8. **Bertsekas D. P.** Dynamic Programming and Optimal Control. – Belmont, MA: Athena Scientific, 2017. – Vol. 1–2. Частина навчальних матеріалів та додаткових джерел надається студентам викладачем у електронному вигляді через освітню платформу університету.
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 256 годин. Аудиторних занять: 128 год., з них 64 год. лекцій та 64 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 128 год.
Очікувані результати навчання	У результаті вивчення даного курсу студент буде: **знати**: ● основні поняття, постановки та класи задач оптимізації; ● чисельні методи мінімізації функцій однієї та багатьох змінних; ● роль опуклості, умов оптимальності та двоїстості у задачах оптимізації; ● основи лінійного програмування та відповідні алгоритми його розв’язування; ● базові положення варіаційного числення та теорії оптимального керування. **вміти**: ● формулювати математичні моделі задач оптимізації на основі прикладних постановок; ● обирати та застосовувати відомі чисельні методи для розв’язування задач оптимізації; ● реалізовувати базові алгоритми оптимізації з використанням програмних засобів; ● аналізувати результати чисельних обчислень та оцінювати ефективність застосованих методів; ● використовувати навчальну та довідкову літературу з тематики оптимізації у процесі розв’язування задач. **Загальні компетентності (ІК) і фахові компетентності (К):** ІК01. Здатність розв’язувати складні задачі та практичні проблеми системного аналізу у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає проведення

	досліджень із застосуванням теорії та методів системного аналізу, які характеризуються невизначеністю умов і вимог. К01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. К14. Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт К17. Здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем. К19. Здатність будувати математично коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів. К21. Здатність формулювати задачі оптимізації при проектуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації та оптимального керування. К22. Здатність до комп'ютерної реалізації математичних моделей реальних систем і процесів; проектувати, застосовувати і супроводжувати програмні засоби моделювання, прийняття рішень, оптимізації, обробки інформації, інтелектуального аналізу даних. **Програмні результати навчання(ПРН)** ПР07. Знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень,вміти застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проектування складних систем. ПР09. Вміти створювати ефективні алгоритми для обчислювальних задач системного аналізу та систем підтримки прийняття рішень.
Ключові слова	Методи оптимізації; задачі оптимізації; мінімізація функцій однієї та багатьох змінних; чисельні методи оптимізації; умовна і безумовна оптимізація; опуклі множини та опуклі функції; умови оптимальності; лінійне програмування; варіаційне числення; оптимальне керування.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.

Теми	1. Вступ у теорію оптимізації. Постановка та класифікація задач оптимізації. 2. Мінімізація функції однієї змінної. Чисельні методи мінімізації функцій однієї змінної. 3. Оптимальні методи пошуку екстремуму. Питання стійкості. 4. Мінімізація багатоекстремальних функцій однієї змінної. 5. Методи локалізації екстремумів. 6. Опуклі множини та їх властивості. 7. Опуклі функції та їх властивості. 8. Віддільність множин та опорні гіперплощини. 9. Колоквіум 1 (класифікація задач, одновимірна мінімізація, опуклість). 10. Умови оптимальності Джона. 11. Умови оптимальності Куна-Таккера. 12. Сідлові точки функції Лагранжа. 13. Мінімізація функцій багатьох змінних. Постановка задачі. 14. Чисельні методи безумовної багатовимірної мінімізації. Градієнтні та ньютонівські методи. 15. Квазіньютонівські методи та методи спряжених напрямків. 16. Колоквіум 2 (умови оптимальності і безумовна оптимізація). 17. Умовна мінімізація. Постановка задачі. 18. Чисельні методи умовної оптимізації. 19. Метод штрафних функцій та бар'єрні методи. 20. Задачі лінійного програмування (ЛП). 21. Теорія двоїстості в задачах лінійного програмування. 22. Симплекс-метод. 23. Знаходження початкового опорного плану задачі ЛП. М-задача ЛП. 24. Колоквіум 3 (умовна оптимізація і ЛП). 25. Вступ до варіаційного числення. 26. Необхідні умови екстремуму. Рівняння Ейлера. 27. Необхідні умови у задачі Больца. Умови трансверсальності. 28. Ізоперіметричні задачі та задачі з обмеженнями. 29. Задача Лагранжа і основна задача оптимального керування. 30. Принцип максимуму Понтрягіна. 31. Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана. 32. Колоквіум 4 (варіаційне числення, оптимальне керування, ДП).
Підсумковий контроль, форма	Екзамен у кінці кожного семестру
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з: ● Математичного аналізу; ● Чисельних методів; ● Програмування; ● Функціонального аналізу; ● Диференціальних рівнянь достатніх для сприйняття категоріального апарату методів оптимізації
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час	Презентації, лекції, лабораторні заняття Індивідуальні завдання Групові проекти

<table>
<tr><td>викладання курсу</td><td></td></tr>
<tr><td>Необхідне обладнання</td><td>Комп’ютер із програмним необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.</td></tr>
<tr><td>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</td><td>Оцінювання в кожному семестрі проводиться за 100-бальною шкалою.
Бали нараховуються за наступним співвідношенням:
• індивідуальні завдання: 35% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 35; оцінюється правильність реалізації алгоритмів, коректність отриманих результатів;
• колоквіуми (2 колоквіуми в кожному семестрі): 15% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 15; оцінюється рівень засвоєння теоретичного матеріалу, вміння застосовувати методи оптимізації до типових задач.
• екзамен: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 50; екзамен проводиться у письмовій формі та передбачає перевірку розуміння основних понять і методів оптимізації; здатності розв’язувати задачі з використанням вивчених методів; уміння аналізувати та інтерпретувати результати розв’язання.
Підсумкова максимальна кількість балів 100.

<table>
<tr><td rowspan="2">Оцінка ЄКТС</td><td rowspan="2">Оцінка в балах</td><td colspan="3">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td colspan="2">Екзамен, диференційований залік</td><td>Залік</td></tr>
<tr><td>A</td><td>90-100</td><td>5</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>B</td><td>81-89</td><td rowspan="2">4</td><td>дуже добре</td></tr>
<tr><td>C</td><td>71-80</td><td>добре</td></tr>
<tr><td>D</td><td>61-70</td><td>3</td><td>задовільно</td></tr>
<tr><td>E</td><td>51-60</td><td rowspan="2">2</td><td>достатньо</td></tr>
<tr><td>FX</td><td>21-50</td><td>незадовільно</td><td>не зараховано</td></tr>
<tr><td>F</td><td>0-20</td><td>незадовільно (без права перездачі)</td><td>не зараховано (без права перездачі)</td></tr>
</table>

Критерії оцінювання елементів курсу:
Оцінювання здійснюється з урахуванням таких критеріїв:
● повнота і правильність теоретичних відповідей;
● коректність математичних викладок і чисельних розрахунків;
● обґрунтованість вибору методів розв’язування задач;
● самостійність виконання робіт;
● дотримання встановлених термінів виконання завдань.</td></tr>
</table>

	Індивідуальні завдання: Очікується, що студенти виконають по 7 індивідульних завдань кожного семестру, кожне з яких оцінюється до 5 балів. **5 балів** — завдання виконано повністю; математична постановка коректна; алгоритм реалізований правильно; отримані результати проаналізовані; студент аргументовано відповідає на запитання щодо виконаної роботи. **4 бали** — завдання виконано повністю; реалізація алгоритму коректна, проте наявні незначні неточності в оформленні або аналізі результатів. **3 бали** — завдання виконано з помилками у реалізації або аналізі результатів; студент розуміє допущені помилки та може їх пояснити. **2 бали** — завдання виконано частково; реалізовано лише окремі етапи алгоритму; аналіз результатів поверхневий або неповний. **1 бал** — виконано лише фрагменти завдання без коректної реалізації алгоритму або без осмисленого аналізу результатів. **0 балів** — завдання не виконано або подане з грубими помилками, що свідчать про нерозуміння матеріалу. **Колоквіум (до 8 балів)**: **7-8 балів** — повні та правильні відповіді на всі теоретичні питання; коректне та обґрунтоване розв'язання задач. **5-6 балів** — правильні відповіді загалом, допущено незначні помилки або неточності, які не впливають на правильність основних результатів. **3-4 бали** — часткове розуміння матеріалу; наявні помилки в теоретичних відповідях або розв'язках задач. **1–2 бали** — фрагментарні знання; суттєві помилки у відповідях та розв'язках. **0 балів** — відсутність результату або виконання завдання з грубими помилками, що свідчать про нерозуміння матеріалу. **Екзамен (до 50 балів):** **45–50 балів** — студент демонструє глибоке розуміння теоретичних основ методів оптимізації; коректно розв'язує задачі; обґрунтовує вибір методів та інтерпретує отримані результати. **38–44 бали** — загалом правильні відповіді з незначними неточностями в теоретичних викладках або розв'язанні задач. **30–37 балів** — достатній рівень знань; наявні помилки в окремих питаннях або розв'язках, що не свідчать про повне нерозуміння матеріалу. **20–29 балів** — фрагментарне розуміння матеріалу; суттєві помилки у відповідях та розв'язанні задач. **1–19 балів** — низький рівень знань; більшість відповідей некоректні. **0 балів** — відсутність результату. **Академічна доброчесність**: Виявлення ознак академічної недоброчесності в індивідуальній роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. **Відвідування занять** є важливою складовою навчання. Відвідування занять є важливою складовою навчального процесу. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів індивідуальних завдань, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

	Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються активність студента під час практичного заняття;
Питання до екзамену.	1. Поняття задачі оптимізації. Основні елементи та приклади прикладних задач. 2. Класифікація задач оптимізації. 3. Мінімізація функцій однієї змінної: постановка задачі та загальні підходи. 4. Чисельні методи мінімізації функцій однієї змінної. 5. Оптимальні методи пошуку екстремуму та питання стійкості. 6. Мінімізація багатоекстремальних функцій однієї змінної. 7. Методи локалізації екстремумів. 8. Опуклі множини та їх основні властивості. 9. Опуклі функції та їх властивості. 10. Віддільність множин. Опорні гіперплощини. 11. Необхідні умови оптимальності Джона. 12. Умови оптимальності Куна–Таккера. 13. Сідлові точки функції Лагранжа. 14. Безумовна мінімізація функцій багатьох змінних: постановка задачі. 15. Чисельні методи безумовної багатовимірної мінімізації. 16. Градієнтні методи мінімізації. 17. Метод Ньютона та його модифікації. 18. Квазіньютонівські методи та методи спряжених напрямків. 19. Умовна мінімізація: постановка задачі. 20. Чисельні методи умовної оптимізації. 21. Метод штрафних функцій та бар'єрні методи. 22. Задачі лінійного програмування та їх властивості. 23. Теорія двоїстості в задачах лінійного програмування. 24. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування. 25. Знаходження початкового опорного плану задачі лінійного програмування. М-задача. 26. Основні поняття варіаційного числення. 27. Необхідні умови екстремуму у варіаційному численні. Рівняння Ейлера. 28. Необхідні умови в задачі Больца. Умови трансверсальності. 29. Ізоперіметричні задачі та задачі з обмеженнями. 30. Основна задача оптимального керування. 31. Принцип максимуму Понтрягіна. 32. Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу "Методи оптимізації"

Тиждень	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)	Література. Ресурси в інтернеті	Завдання, год.	Термін виконання
1	**Вступ у теорію оптимізації. Постановка та**	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2, 5]	Опрацювання лекційного матеріалу (2	1 тиждень

	класифікація задач оптимізації. Предмет і завдання теорії оптимізації. Приклади оптимізаційних задач. Класифікація задач оптимізації за типом цільової функції та обмежень.			год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	
2	**Мінімізація функції однієї змінної. Чисельні методи мінімізації функцій однієї змінної.** Постановка задачі мінімізації функції однієї змінної. Основні підходи до чисельного пошуку мінімуму. Порівняння методів за ефективністю.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	2 тиждень
3	**Оптимальні методи пошуку екстремуму. Питання стійкості.** Поняття оптимального методу пошуку екстремуму. Метод золотого поділу, метод Фібоначчі.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	3 тиждень
4	**Мінімізація багатоекстремальних функцій однієї змінної.** Особливості багатоекстремальних функцій. Проблема локальних і глобальних мінімумів. Підходи до пошуку глобального екстремуму.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	4 тиждень
5	**Методи локалізації екстремумів.** Задача локалізації області пошуку	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.)	5 тиждень

	мінімуму. Основні методи локалізації екстремумів. Поєднання локалізації з методами мінімізації.			Робота над індивідульним завданням (2 год.)	
6	**Опуклі множини та їх властивості.** Означення опуклої множини. Основні властивості опуклих множин. Приклади опуклих і неопуклих множин.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,6]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	6 тиждень
7	**Опуклі функції та їх властивості.** Означення опуклої функції. Геометрична інтерпретація опуклості. Роль опуклості у задачах оптимізації.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,6]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	7 тиждень
8	**Віддільність множин та опорні гіперплощини.** Поняття віддільності множин. Теореми про віддільність. Опорні гіперплощини та їх застосування в оптимізації.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,6]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Підготовка до колоквіуму (6 год.)	8 тиждень
9	Колоквіум 1 (класифікація задач, одновимірна мінімізація, опуклість)	контрольний захід (2 год.) лабораторне (2 год.)			9 тиждень
10	**Умови оптимальності Джона.** Поняття допустимої точки. Необхідні і достатні умови оптимальності Джона для задач з обмеженнями. Геометрична інтерпретація умов.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	10 тиждень

11	**Умови оптимальності Куна–Таккера.** Умови Куна–Таккера для задач умовної оптимізації. Множники Лагранжа та їх властивості. Зв’язок з умовами Джона	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	11 тиждень
12	**Сідлові точки функції Лагранжа.** Поняття функції Лагранжа. Сідлові точки та їх роль у задачах оптимізації. Зв’язок із двоїстістю.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	12 тиждень
13	**Мінімізація функцій багатьох змінних. Постановка задачі.** Постановка задачі безумовної мінімізації функцій багатьох змінних. Градієнт та матриця Гессе. Критерії локального екстремуму.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	13 тиждень
14	**Чисельні методи безумовної багатовимірної мінімізації. Градієнтні та ньютонівські методи.** Основні ідеї градієнтних методів. Метод Ньютона та його модифікації. Порівняння методів за швидкістю збіжності.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	14 тиждень
15	**Квазіньютонівські методи та методи спряжених напрямків.** Ідея квазіньютонівських методів. Методи	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Підготовка до колоквіуму	15 тиждень

	спряжених напрямків. Застосування у задачах багатовимірної оптимізації.			(6 год.)	
16	Колоквіум 2. (умови оптимальності і безумовна оптимізація)	контрольний захід (2 год.) лабораторне (2 год.)			16 тиждень
17	**Умовна мінімізація. Постановка задачі.** Поняття умовної оптимізації. Типи обмежень та допустима множина. Загальна постановка задач умовної мінімізації.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	1 тиждень
18	**Чисельні методи умовної оптимізації.** Основні підходи до чисельного розв’язування задач з обмеженнями. Проекційні методи та методи умовного градієнта.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	2 тиждень
19	**Метод штрафних функцій та бар’єрні методи.** Ідея методів штрафів і бар’єрів. Побудова допоміжних задач. Збіжність методів та вибір параметрів.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[2,3,5,7]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	3 тиждень
20	**Задачі лінійного програмування (ЛП).** Постановка задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація. Основні властивості задач ЛП.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[1,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	4 тиждень
21	**Теорія двоїстості в**	лекція (2 год.)	[1,3]	Опрацюванн	5

	задачах лінійного програмування. Пряма та двоїста задачі ЛП. Основні теореми двоїстості. Економічна інтерпретація двоїстих змінних.	лабораторне (2 год.)		я лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	тиждень
22	**Симплекс-метод.** Ідея симплекс-методу. Опорні плани та переходи між ними. Критерії оптимальності в симплекс-методі.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[1,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	6 тиждень
23	**Знаходження початкового опорного плану задачі ЛП. М-задача ЛП.** Методи побудови початкового опорного плану. Штучні змінні. М-задача лінійного програмування.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[1,3]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Підготовка до колоквіуму (6 год.)	7 тиждень
24	Колоквіум 3 (умовна оптимізація і ЛП).	контрольний захід (2 год.) лабораторне (2 год.)			8 тиждень
25	**Вступ до варіаційного числення.** Предмет і задачі варіаційного числення. Функціонали та їх властивості. Приклади класичних варіаційних задач.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	9 тиждень
26	**Необхідні умови екстремуму. Рівняння Ейлера.** Поняття екстремуму функціонала. Виведення рівняння Ейлера. Застосування	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням	10 тиждень

	рівняння Ейлера до типових задач.			(2 год.)	
27	**Необхідні умови у задачі Больца. Умови трансверсальності.** Постановка задачі Больца. Граничні умови. Умови трансверсальності та їх інтерпретація.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	11 тиждень
28	**Ізопериметричні задачі та задачі з обмеженнями.** Поняття ізопериметричних задач. Задачі варіаційного числення з обмеженнями. Методи врахування обмежень.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	12 тиждень
29	**Задача Лагранжа і основна задача оптимального керування.** Постановка задачі Лагранжа. Перехід до задач оптимального керування. Основні елементи задачі керування.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	13 тиждень
30	**Принцип максимуму Понтрягіна.** Формулювання принципу максимуму. Спряжена система рівнянь. Застосування принципу максимуму до задач керування.	лекція(2 год.) лабораторне (2 год.)	[4,]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Робота над індивідульним завданням (2 год.)	14 тиждень
31	**Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана.** Основні ідеї динамічного програмування.	лекція (2 год.) лабораторне (2 год.)	[1,8]	Опрацювання лекційного матеріалу (2 год.) Підготовка до колоквіуму (6 год.)	15 тиждень

	Принцип оптимальності Беллмана. Зв’язок з задачами оптимального керування.				
32	Колоквіум 4 (варіаційне числення, оптимальне керування, ДП).	контрольний захід (2 год.) лабораторне (2 год.)			16 тиждень