МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
(повне найменування назва факультету)

Кафедра дискретного аналізу та інтелектуальних систем
(повна назва кафедри)

Магістерська робота

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Виконав: студент групи ПМІм-23с

Спеціальності 122 Комп'ютерні науки
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

Костик Н. І.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник Притула М. М.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент Сенько П.С.,
(підпис) (прізвище та ініціали)

Львів – 2022

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет Прикладної математики та інформатики

Кафедра Дискретного аналізу та інтелектуальних систем

Факультет 122 Комп'ютерні науки
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Завідувач кафедри _____

Притула М. М.

« 31 » серпня 2022 року

З А В Д А Н Н Я

НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Костику Назару Ігоровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Точні розв'язки нелінійної системи типу Шредінгера»

керівник роботи Притула Микола Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені Вченою радою факультету від « 13 » вересня 2022 року № 15.

2. Строк подання студентом проєкту (роботи) 12 грудня 2022 року.

3. Вихідні дані до проєкту (роботи) Система нелінійних рівнянь типу Шредінгера; стаття Zayed E. M. E. та Gepreel K. A. «The (G'/G)-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics»; документація: бібліотеки matplotlib, pandas, numpy для мови програмування python, пакет прикладних програм MATLAB для числового аналізу.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Ознайомитись із нелінійною системою рівнянь типу Шредінгера, знайти її точні розв'язки за допомогою методу (G'/G)-розширення, графічно представити отримані результати.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень Графіки знайдених розв'язків для системи нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

6. Консультанти розділів проєкту (роботи)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 31 серпня 2022 року.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломного проекту (роботи)	Строк виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1.	Вивчення предметної області	01.09.2022-15.09.2022	
2.	Пошук та дослідження необхідних наукових статей	16.09.2022-25.09.2022	
3.	Дослідження методу (G'/G)-розширення	26.09.2022-10.10.2022	
4.	Розв'язання заданої системи нелінійних рівнянь типу Шредінгера	11.10.2022-02.11.2022	
5.	Побудова графіків для знайдених розв'язків	03.11.2022-20.11.2022	
6.	Аналіз результатів	21.11.2022-31.11.2022	
7.	Оформлення магістерської роботи	01.12.2022-10.12.2022	

Студент _____ Костик Н. І.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____ Притула М. М.
(підпис) (прізвище та ініціали)

РЕФЕРАТ

Магістерська робота складається із вступу, п’яти розділів, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг складає двадцять вісім сторінок, список використаних джерел містить двадцять одне найменування, робота ілюстрована дев’ятьма рисунками.

У даній роботі розв’язано нелінійну динамічну систему типу Шредінгера методом (G'/G)-розширення.

Знайдено солітонні розв’язки двох типів для вищезазначеної системи: у вигляді гіперболічних та раціональних функцій.

Крім цього, використовуючи середовище MATLAB, для кожної із множин розв’язків побудовано графіки із різними значеннями вхідних параметрів.

Знайдені розв’язки можуть бути застосовані нелінійній оптиці і фізиці плазми, зокрема, для опису динаміки хвильових пакетів в середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю, для позначення модуляційної нестабільності водних хвиль, опису поширення теплових імпульсів в ангармонійних кристалах, тощо.

Ключові слова: нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ), метод (G'/G)-розширення, нелінійна система типу Шредінгера, розв’язки мандрівної хвилі, закони збереження, MATLAB.

ЗМІСТ

Вступ 6

Розділ 1. Нелінійне рівняння Шредінгера 8

Розділ 2. Метод (G'/G)-розширення 10

Розділ 3. Точні розв'язки нелінійної системи типу Шредінгера 12

Розділ 4. Графічне представлення отриманих результатів 16

Розділ 5. Закони збереження 22

Висновки 25

Список використаних джерел 26

Вступ

Точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь з частковими похідними становлять значну частину опублікованих протягом останніх років наукових робіт.

Дана тема є неабияк актуальною і математики, які цікавляться нелінійними фізичними явищами, представили багато дієвих методів вирішення подібних задач: метод однорідного балансу, метод розширення гіперболічного тангенсу, метод пробної функції, метод нелінійного перетворення, перетворення оберненого розсіювання, перетворення Беклунда, білінійний метод Хіроти, узагальнене рівняння Ріккаті, метод еліптичної функції Вейєрштрасса, метод тета-функції, метод синуса-косинуса, розкладання еліптичної функції Якобі, метод комплексної гіперболічної функції, усічене розширення Пенлеве, метод F-розширення, метод рангового аналізу, тощо.

Крім цього, було досягнуто значного прогресу в дослідженні нелінійних хвиль, включаючи «солітонні рівняння», клас нелінійних хвильових рівнянь, які часто виникають у таких областях, як нелінійна оптика, динаміка рідини та статистична фізика.

Нелінійні системи Шредінгера у безперервних середовищах інтенсивно вивчалися з середини 1960-х років.

На початку 1970-х було показано [1], що нелінійне рівняння Шредінгера визначає поширення імпульсу на великі відстані в оптичних волокнах.

Наприкінці 1980-х і в 1990-х роках було виявлено [2], [3], що векторні нелінійні системи Шредінгера керують поширенням поляризованих хвиль в оптичних волокнах.

Сьогодні, нелінійні системи Шредінгера із певними модифікаціями та додатковими умовами регулярно використовуються для прогнозування передачі інформації у волокнах.

Без сумніву, передача хвиль в оптичних волокнах, які використовуються для цілей зв'язку, є надзвичайно важливою темою у світі, де цифрові технології розвиваються із невгамовною швидкістю.

Останніми роками, НРШ активно досліджували такі автори, як Гупта та Гоял [4], Окалі та Нкоа [5], Гіта та Річа [6], Ву, Гао та Ю [7] та інші.

У цій роботі ми проаналізуємо один із нових методів, який називається метод (G'/G)-розширення, для пошуку точних розв’язків нелінійної системи рівнянь типу Шредінгера.

Розділ 1. Нелінійне рівняння Шредінгера

Нелінійне або кубічне рівняння Шредінгера (НРШ) – це нелінійне рівняння в часткових похідних другого порядку, що грає важливу роль в теорії нелінійних хвиль, зокрема, в нелінійній оптиці і фізиці плазми. Воно є узагальненням лінійного параболічного рівняння Шредінгера, яке широко використовується у квантовій механіці. Будучи нелінійним узагальненням параболічного рівняння, нелінійне рівняння Шредінгера описує широкий клас фізичних явищ: динаміку хвильових пакетів в середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю, модуляційну нестабільність водних хвиль, поширення теплових імпульсів в ангармонійних кристалах, тощо.

Класичне нелінійне рівняння Шредінгера має такий вигляд [8]:

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi + k|\psi|^2\psi \tag{1.1}$$

де $\psi(x,t)$ – комплекснозначна функція. Рівняння (1.1) виникає із Гамільтоніану [9]

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2}|\partial_x\psi|^2 + \frac{k}{2}|\psi|^4\right] \tag{1.2}$$

з наступними дужками Пуассона:

$$\begin{gathered}\{\psi(x),\psi(y)\} = \{\psi^*(x),\psi^*(y)\} = 0 \\ \{\psi^*(x),\psi(y)\} = i\delta(x-y).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Для того, щоб отримати нелінійне рівняння Шредінгера у квантовій механіці потрібно просто замінити дужки Пуассона на комутатори:

$$\begin{gathered}[\psi(x),\psi(y)] = [\psi^*(x),\psi^*(y)] = 0 \\ [\psi^*(x),\psi(y)] = -\delta(x-y).\end{gathered} \tag{1.4}$$

та використати Гамільтоніан нормального порядку

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2}\partial_x\psi^*\partial_x\psi + \frac{k}{2}\psi^*\psi^*\psi\psi\right] \tag{1.5}$$

В оптиці нелінійне рівняння Шредінгера зустрічається в системі Манакова – моделі поширення хвилі у волоконній оптиці. Функція ψ представляє хвилю, а НРШ описує поширення цієї хвилі через нелінійне середовище. Похідна другого порядку представляє дисперсію, тоді як член k представляє нелінійність.

Рівняння моделює багато нелінійних ефектів у волокні, включаючи, але не обмежуючись, самофазову модуляцію, чотирихвильове змішування, генерацію другої гармоніки, вимушене комбінаційне розсіювання, оптичні солітони, ультракороткі імпульси тощо.

Для водних хвиль нелінійне рівняння Шредінгера описує еволюцію обгортки групи модульованих хвиль. Для повільно модульованих хвильових груп амплітуда хвилі буде керуватися деяким нелінійним рівнянням Шредінгера, наприклад [9]. Значення параметра нелінійності k залежить від відносної глибини води. Для глибокої води, коли глибина води велика порівняно з довжиною хвилі, k є від'ємним, і в такому випадку можуть виникнути солітони обгортки.

Для мілководдя з довжинами хвиль, що перевищують глибину води в 4.6 разів, параметр нелінійності k додатний і групи хвиль із солітонами обгортки не існує. На мілководді існують солітони висоти над поверхнею або хвилі трансляції, але вони не керуються нелінійним рівнянням Шредінгера.

Розділ 2. Метод (G'/G)-розширення

Припустимо, що нелінійне рівняння задається наступним чином:

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \tag{2.1}$$

де $u = u(x,t)$ – це невідома функція, а P – це поліном у $u = u(x,t)$ та його часткові похідні у якому беруть участь похідні найвищого порядку та нелінійні доданки. Далі розглянемо основні кроки виконання методу (G'/G)-розширення [10].

Крок 1: змінна мандрівної хвилі:

$$u(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = x - Vt, \tag{2.2}$$

де V це константа, що дозволяє нам звести рівняння (2.1) до звичайного диференціального рівняння для $u = u(\xi)$ у вигляді

$$P(u, -Vu', u', V^2u'', -Vu'', u'', \dots) = 0. \tag{2.3}$$

Крок 2: припустимо, що розв'язок (2.3) може бути поданий поліномом у (G'/G) наступним чином:

$$u(\xi) = \alpha_m \left(\frac{G'}{G}\right)^m + \alpha_{m-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{m-1} + \cdots, \tag{2.4}$$

де $G = G(\xi)$ задовольняє лінійне диференціальне рівняння другого порядку у вигляді

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{2.5}$$

де $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, \lambda$ та μ це константи, які будуть визначені пізніше, $\alpha_m \neq 0$. Ціле додатне число m можна визначити врахувавши однорідний баланс між похідними найвищого порядку та нелінійними доданками, що з'являються в (2.3).

Крок 3: підставимо (2.4) в (2.3) та використаємо рівняння (2.5). Зібравши усі терми із однаковим порядком (G'/G) разом, а потім прирівнявши кожен коефіцієнт отриманого полінома до нуля отримуємо набір алгебраїчних рівнянь для $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, V, \lambda$ та μ.

Крок 4: оскільки загальні розв'язки (2.5) нам добре відомі, то підставляючи $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, V$ та загальні розв'язки (2.5) у (2.4) отримуємо декілька розв'язків мандрівної хвилі нелінійного диференціального рівняння (2.1).

Розв’язок рівняння (2.5) є відомим і може бути виведений методом Ейлера [11]

$$G(\xi)=\begin{cases}\left(A_1\sin\dfrac{\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}+A_2\cos\dfrac{\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\lambda\xi}, \text{якщо } \lambda^2-4\mu<0\\ (A_1+A_2\xi)e^{-\frac{1}{2}\lambda\xi}, \text{якщо } \lambda^2-4\mu=0\\ \left(A_1\sinh\dfrac{\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}+A_2\cosh\dfrac{\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\lambda\xi}, \text{якщо } \lambda^2-4\mu>0\end{cases} \quad (2.6)$$

Розділ 3. Точні розв'язки нелінійної системи типу Шредінгера

Розглянемо деяку нелінійну систему рівнянь типу Шредінгера:

$$K[\psi,\psi^*]=\begin{cases}\psi_t=i\psi_{xx}-2\psi\psi^*\psi_x\\ \psi_t^*=-i\psi_{xx}^*-2\psi\psi^*\psi_x^*\end{cases} \tag{3.1}$$

Використовуючи солітонну змінну

$$u(x,t)=u(\xi),\qquad \xi=x-Vt, \tag{3.2}$$

перетворимо нелінійну систему (3.1) в диференціальну:

$$\begin{cases}i\psi''-2\psi\psi^*\psi'+V\psi'=0\\ -i(\psi^*)''-2\psi\psi^*(\psi^*)'+V(\psi^*)'=0\end{cases} \tag{3.3}$$

Спростимо отриману систему рівнянь (3.3), проінтегрувавши її:

$$\begin{cases}i\psi'-\psi^2\psi^*+V\psi-C_1=0\\ -i(\psi^*)'-\psi(\psi^*)^2+V\psi^*-C_2=0\end{cases} \tag{3.4}$$

Припустимо, що розв'язки системи рівнянь (3.4) можуть бути подані поліномом у (G'/G) наступним чином:

$$u(\xi)=\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m+\alpha_{m-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{m-1}+\alpha_{m-2}\left(\frac{G'}{G}\right)^{m-2}+\cdots, \tag{3.5}$$

де $\alpha_m(m=0,1,2,\dots)$ є довільними константами, а $G=G(\xi)$ задовольняє лінійне диференціальне рівняння другого порядку у вигляді

$$G''+\lambda G'+\mu G=0, \tag{3.6}$$

де λ та μ є константами.

Беручи до уваги гомогенний баланс між ψ' і ψ^2 та $(\psi^*)'$ і $(\psi^*)^2$ у системі рівнянь (3.4), можемо оцінити кількість змінних у (G'/G) необхідних для розв'язання заданої системи:

$$\begin{cases}m+1=2m\\ n+1=2n\end{cases} \tag{3.7}$$

Розв'язавши систему (3.7), отримуємо такі значення – $m=1,\ n=1$. Звідси, функції $\psi(\xi)$ та $\psi^*(\xi)$ можна виразити наступними поліномами

$$\begin{cases}\psi(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right), & a_1\neq 0\\ \psi^*(\xi)=b_0+b_1\left(\frac{G'}{G}\right), & b_2\neq 0\end{cases} \tag{3.8}$$

Користуючись системою (3.4) і поліномами (3.8), виразимо наступні елементи:

$$\psi^2(\xi) = a_0^2 + 2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \tag{3.9}$$

$$\psi'(\xi) = -a_1\left(\mu + \lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right) \tag{3.10}$$

$$(\psi^*)^2(\xi) = b_0^2 + 2b_0b_1\left(\frac{G'}{G}\right) + b_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \tag{3.11}$$

$$(\psi^*)'(\xi) = -b_1\left(\mu + \lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\psi^2(\xi)\cdot\psi^*(\xi) &= \left(a_0^2 + 2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)\cdot\left(b_0 + b_1\left(\frac{G'}{G}\right)\right) = \\ &= a_1^2b_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (a_1^2b_0 + 2a_0a_1b_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (2a_0a_1b_0 + a_0^2b_1)\left(\frac{G'}{G}\right) + a_0^2b_0\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}(\psi^*)^2(\xi)\cdot\psi(\xi) &= \left(b_0^2 + 2b_0b_1\left(\frac{G'}{G}\right) + b_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)\cdot\left(a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right)\right) = \\ &= b_1^2a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (b_1^2a_0 + 2b_0b_1a_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (2b_0b_1a_0 + b_0^2a_1)\left(\frac{G'}{G}\right) + b_0^2a_0\end{aligned} \tag{3.14}$$

Підставивши (3.9) – (3.14) у систему (3.4) і зібравши усі терми із однаковим порядком (G'/G) разом отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}&a_1^2b_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (a_1^2b_0 + 2a_0a_1b_1 - ia_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \\ &+(2a_0a_1b_0 + a_0^2b_1 - ia_1\lambda + Va_1)\left(\frac{G'}{G}\right) + a_0^2b_0 - ia_1\mu + Va_0 - C_1 = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}&b_1^2a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (b_1^2a_0 + 2b_0b_1a_1 + ib_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \\ &+(2b_0b_1a_0 + b_0^2a_1 + ib_1\lambda + Vb_1)\left(\frac{G'}{G}\right) + b_0^2a_0 + ib_1\mu + Vb_0 - C_2 = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

Прирівнявши кожен коефіцієнт отриманих поліномів (3.15) – (3.16) до нуля, отримуємо наступний набір алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0^2 b_0 - i a_1 \mu + V a_0 - C_1 = 0 \\ 2a_0 a_1 b_0 + a_0^2 b_1 - i a_1 \lambda + V a_1 = 0 \\ a_1^2 b_0 + 2a_0 a_1 b_1 - i a_1 = 0 \\ a_1^2 b_1 = 0 \\ b_0^2 a_0 + i b_1 \mu + V b_0 - C_2 = 0 \\ 2b_0 b_1 a_0 + b_0^2 a_1 + i b_1 \lambda + V b_1 = 0 \\ b_1^2 a_0 + 2b_0 b_1 a_1 + i b_1 = 0 \\ b_1^2 a_1 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Розв'язавши описану вище систему (3.17), отримуємо наступні множини допустимих розв'язків:

$$V = -\lambda i, \quad a_0 = -\mu, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = -\frac{i}{\mu}, \quad C_1 = \lambda \mu i, \quad C_2 = 1 \quad (3.18)$$

де $\mu \neq 0$.

$$V = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (3.19)$$

$$V = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (3.20)$$

Використовуючи розв'язки (3.18) – (3.20), поліноми (3.5) набувають наступного вигляду:

$$\begin{cases} \psi(\xi) = -\mu \\ \psi^*(\xi) = -\frac{i}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right), \end{cases} \quad \text{де } \xi = x - \lambda i t \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \psi(\xi) = 1 \\ \psi^*(\xi) = 0, \end{cases} \quad \text{де } \xi = x \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \psi(\xi) = 0 \\ \psi^*(\xi) = 1, \end{cases} \quad \text{де } \xi = x \quad (3.23)$$

Із означення функції $G(\xi)$ (3.6), після низки перетворень і скорочень отримуємо:

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\left(\frac{\mathrm{C}_3 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}\xi\right) + \mathrm{C}_4 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}\xi\right)}{\mathrm{C}_3 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}\xi\right) + \mathrm{C}_4 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)}\xi\right)}\right) - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.24)$$

де C_3 та C_4 є довільними константами.

Оскільки більшість значення у множинах розв'язків (3.22) та (3.23) – нулі, то надалі розглянемо детальніше лише множину розв'язків (3.21).

Використовуючи (3.24) та (3.21), отримуємо наступні розв'язки рівнянь мандрівної хвилі:

Випадок 1: якщо $\lambda^2 - 4\mu > 0$, використовуючи розв'язок (15), отримуємо:

$$\begin{cases} \psi(\xi) = -\mu \\ \psi^*(\xi) = -\dfrac{i\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu}\left(\dfrac{c_3\, cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right) + c_4\, sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right)}{c_3\, sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right) + c_4\, cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right)}\right) - \dfrac{\lambda}{2}, \end{cases} \quad (3.25)$$

де $\xi = x - \lambda i t$.

Випадок 2: якщо $\lambda^2 - 4\mu < 0$, тоді:

$$\begin{cases} \psi(\xi) = -\mu \\ \psi^*(\xi) = -\dfrac{i\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu}\left(\dfrac{-c_3\, sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi\right) + c_4\, cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi\right)}{c_3\, cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi\right) + c_4\, sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi\right)}\right) - \dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (3.26)$$

де $\xi = x - \lambda i t$.

Розв'язки (3.25) – (3.26) і будуть розв'язками мандрівної хвилі початкової системи нелінійних рівнянь типу Шредінгера (3.1).

Розділ 4. Графічне представлення отриманих результатів

Побудова отриманих розв'язків (3.25) та (3.26) є нетривіальною задачею, оскільки вони містять комплексні значення, які не можна просто так зобразити на прямій дійсних чисел. Щоб представити комплексне число, нам потрібно врахувати обидві компоненти (дійсну і уявну) цього числа.

Введемо деяку комплексну площину, що є системою координат, у якій горизонтальна вісь представляє дійсну компоненту комплексного числа, а вертикальна – уявну. В такому випадку, деяке комплексне число буде точкою на цій площині, вираженого через пару координат (a, b), де a представляє собою координату на горизонтальній осі, а b – на вертикальній.

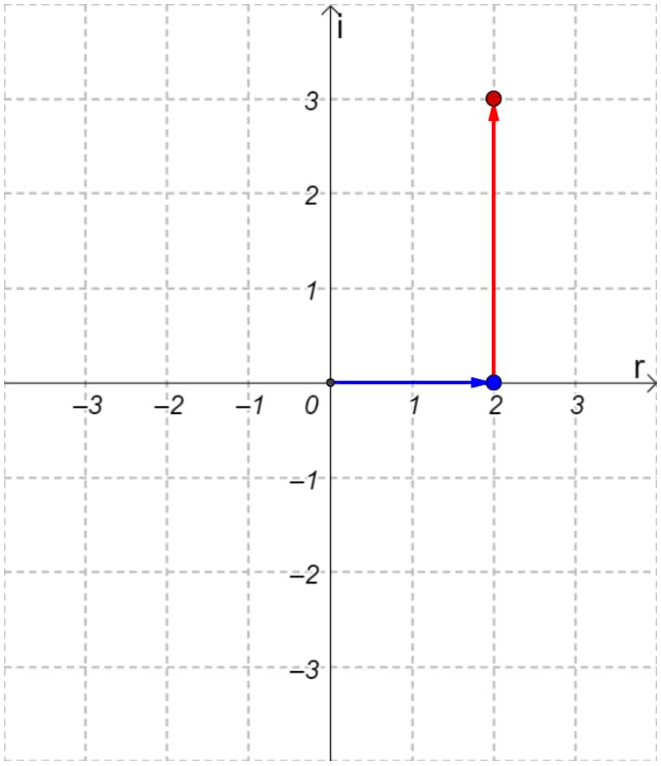

Рис. 1. Графік комплексного числа $2 + 3i$.

Для того, щоб графічно зобразити комплексне число у 3D просторі, потрібно скористатися властивістю модуля комплексного числа.

Нехай x і y – дійсні числа, такі, що комплексне число $z = x + iy$. Тоді

- Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається модулем числа z.

Ця властивість дозволяє нам перенести графічне представлення із чотиривимірного простору, у тривимірний, а отже тепер ми можемо зобразити отримані результати за допомогою MATLAB.

1. Спочатку розглянемо графічне представлення множини розв'язків (3.25):

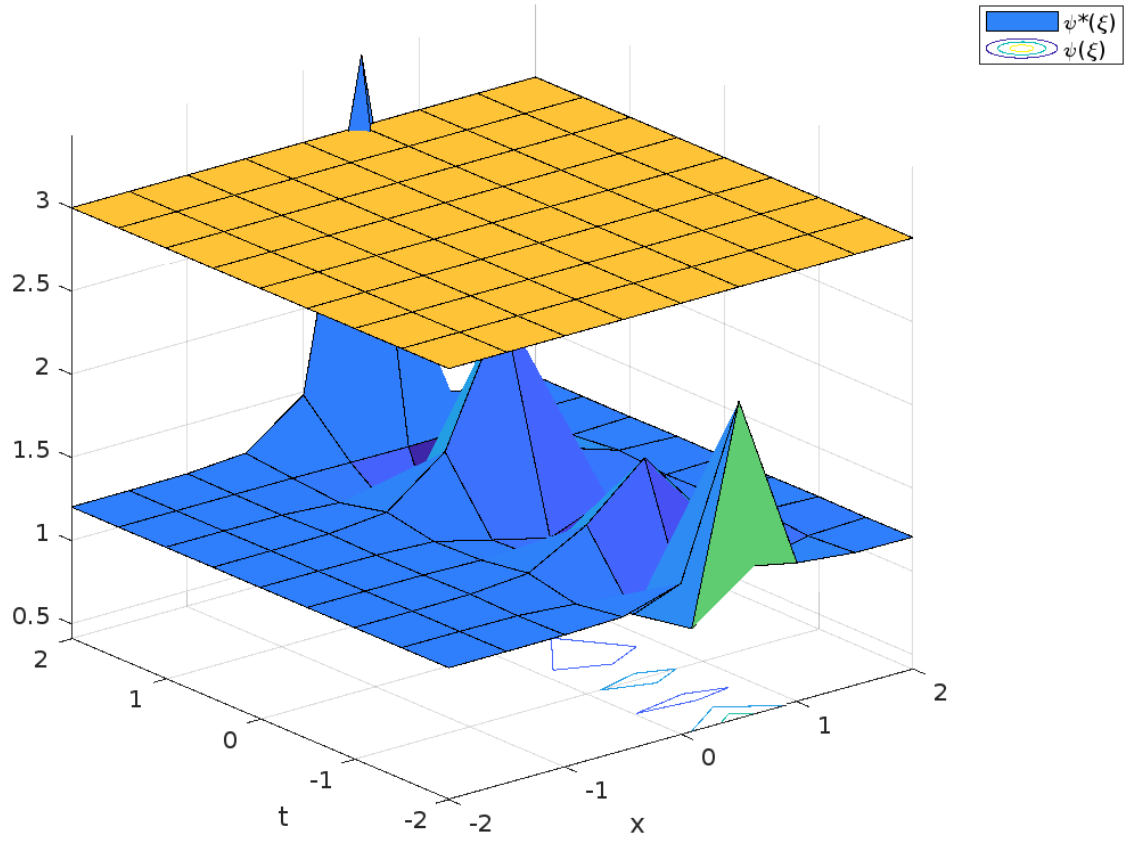

Рис. 2. $\lambda = 2, \mu = -3, c_3 = -2, c_4 = 3, -2 \leq x, t \leq 2.$

Оскільки, у даному випадку функція $\psi(\xi)$ – це константа величина, що дорівнює площині $-\mu$, то на рис. 3 розглянемо детальніше лише представлення функції $\psi^*(\xi)$. Найцікавіше відбувається в околі нуля – функція швидко змінює своє значення від 1.2 до майже 3.5. Такий характер графіка зумовлений наявністю тригонометричних функцій у отриманих розв'язках.

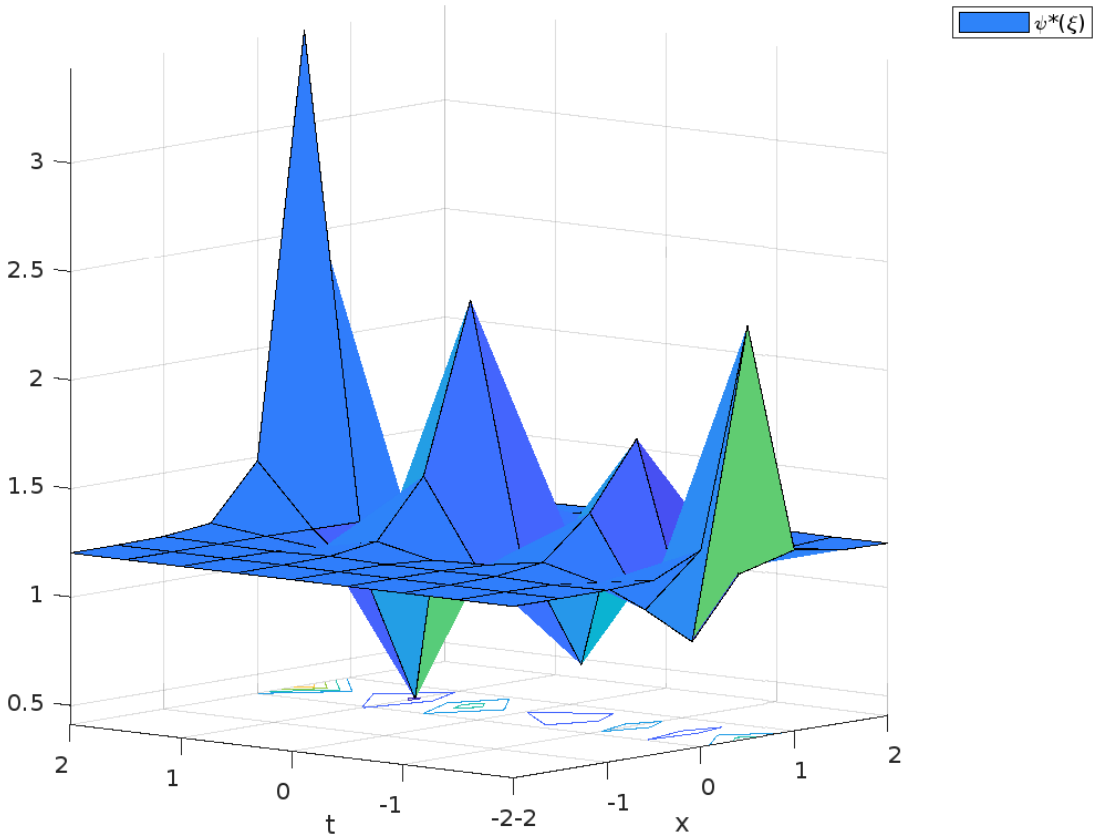

Рис. 3. $\lambda = 2, \mu = -3, c_3 = -2, c_4 = 3, -2 \leq x, t \leq 2.$

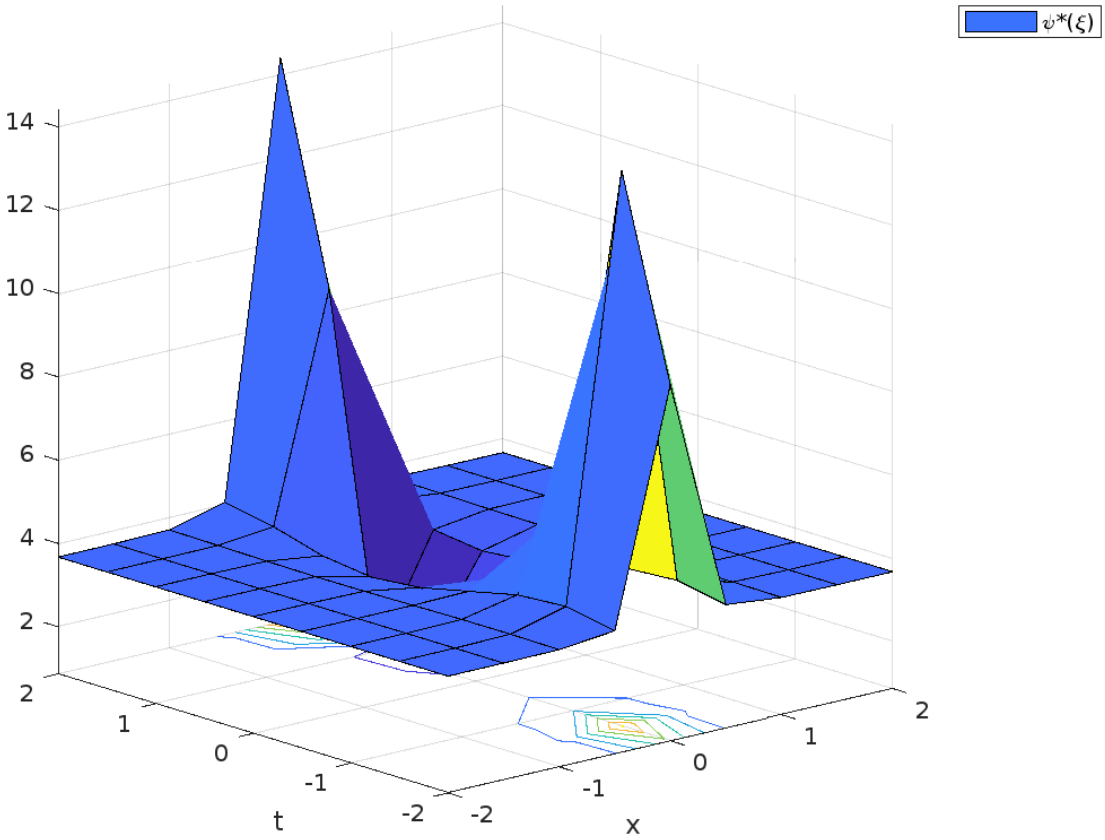

Рис. 4. $\lambda = 5, \mu = -1, c_3 = 0, c_4 = 1, -2 \leq x, t \leq 2.$

На рис. 4, після занулення одного із доданків – c_3, отримуємо майже симетричний графік із двома екстремумами по краях і розривом в околі нуля.

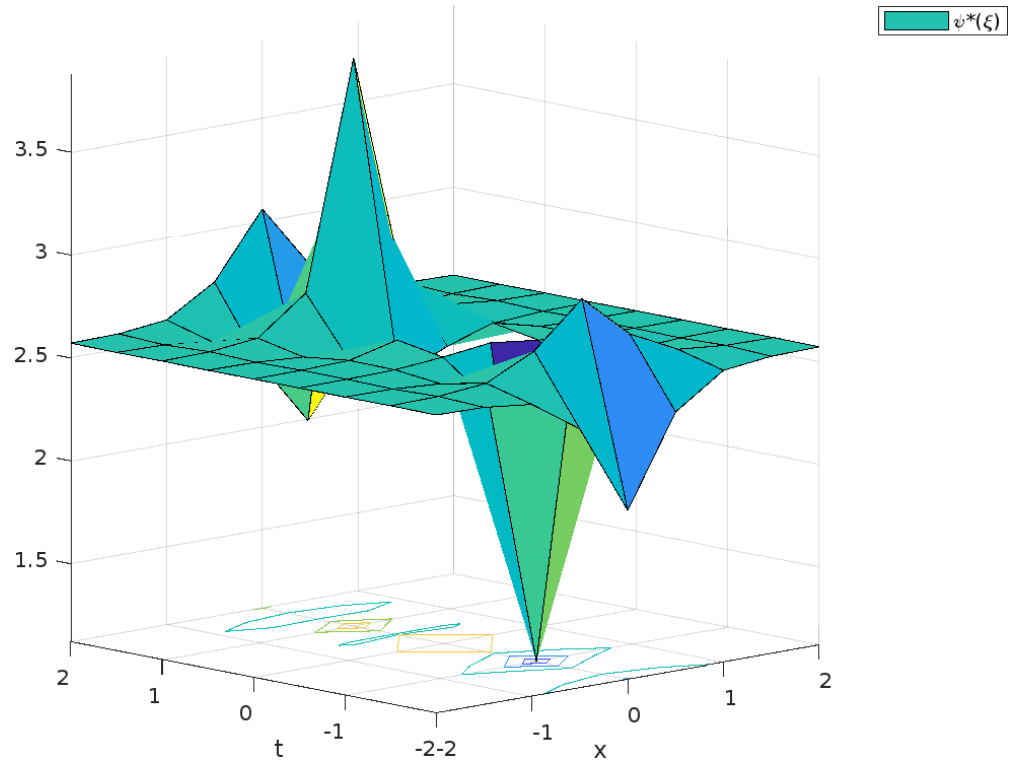

Рис. 5. $\lambda = 5, \mu = 3, c_3 = 2, c_4 = 0, -2 \leq x, t \leq 2.$

2. Далі розглянемо графічне представлення множини розв'язків (3.26):

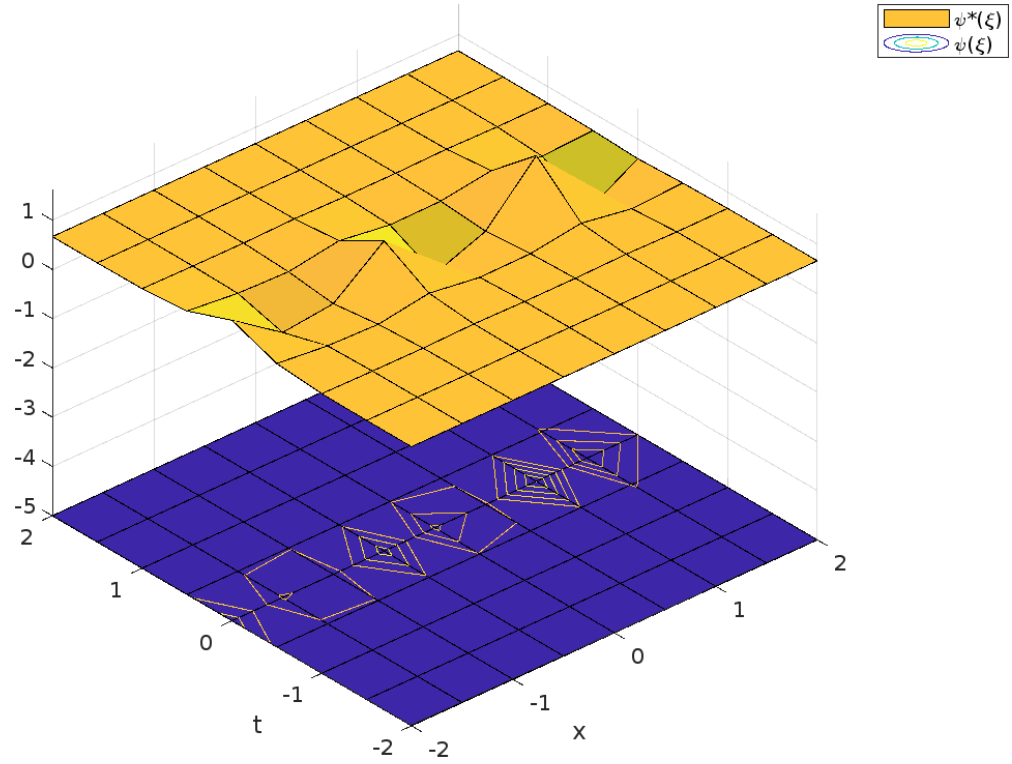

Рис. 6. $\lambda = 1, \mu = 5, c_3 = 2, c_4 = 3, -2 \leq x, t \leq 2.$

Аналогічно, оскільки в цьому випадку функція $\psi(\xi)$ теж є константою, то на рис. 7 розглянемо більш детально лише функцію $\psi^*(\xi)$.

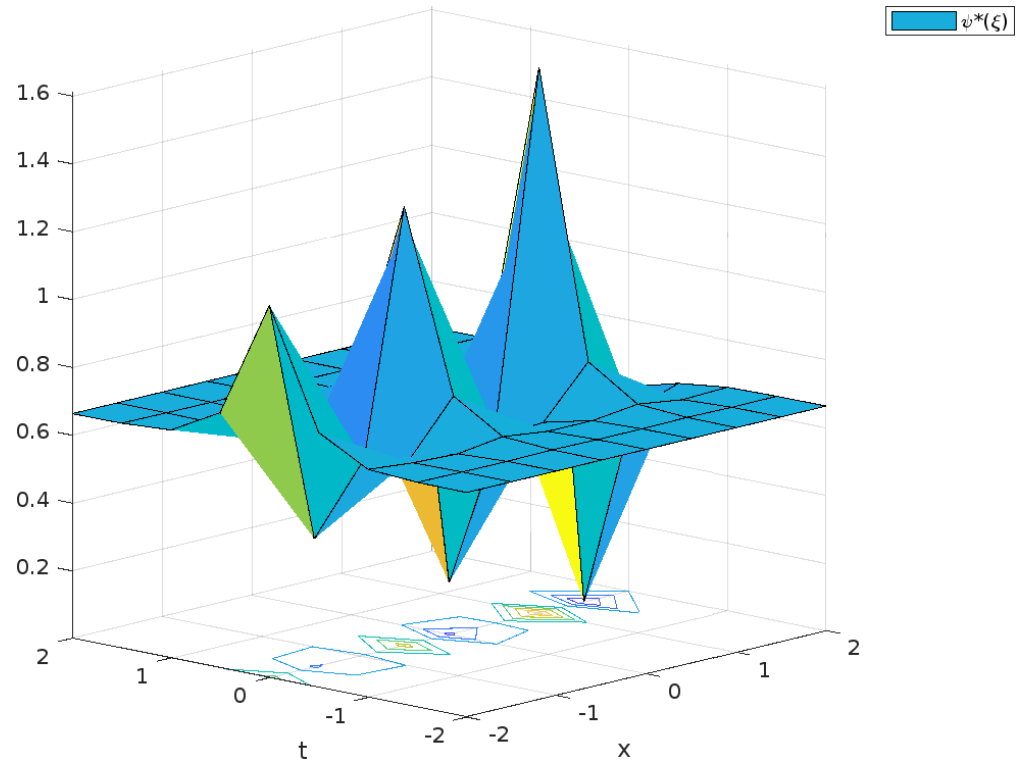

Рис. 7. $\lambda = 1, \mu = 5, c_3 = 2, c_4 = 3, -2 \leq x, t \leq 2.$

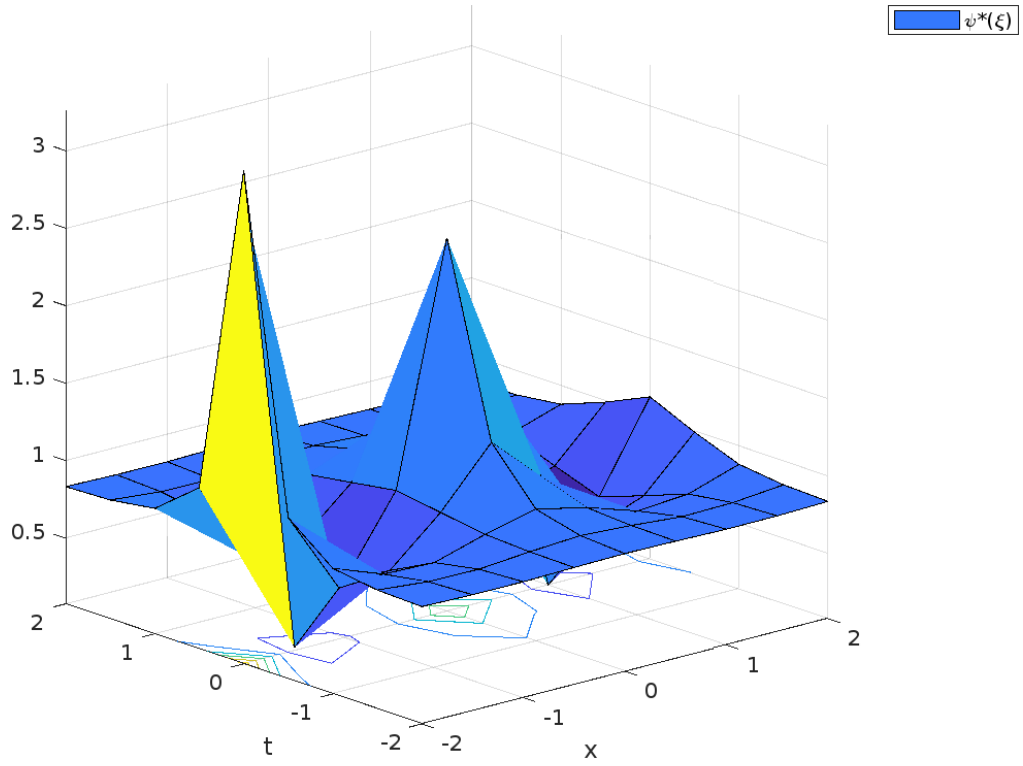

Рис. 8. $\lambda = 1, \mu = 2, c_3 = 1, c_4 = -3, -2 \leq x, t \leq 2.$

На рис. 8 бачимо, що при зменшення значення μ амплітуда вигинів теж значно зменшується. Зміна ж значення c_4 на від'ємне обертає графік таким чином, що максимальне значення функції тепер отримуємо при $x = -2,\ t = 0$.

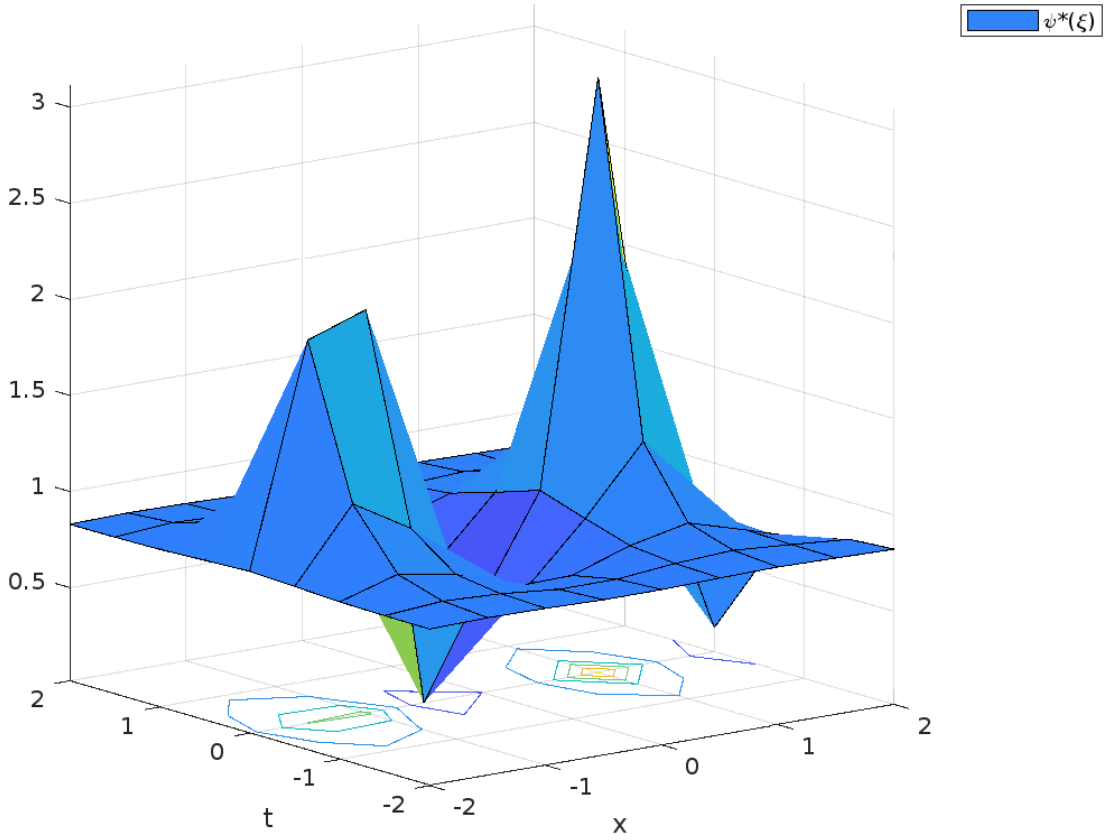

Рис. 9. $\lambda = 1, \mu = 2, c_3 = 3, c_4 = 0, -2 \leq x, t \leq 2.$

На рис. 9 показано ще одне графічне представлення функції $\psi^*(\xi)$ із новими вхідними параметрами.

Розділ 5. Закони збереження

Нехай задана динамічна система

$$u_t = K[u], \tag{5.1}$$

де $u \in M = C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^n),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ l -$ періодична функція змінної x.

Якщо динамічна система (5.1) допускає нескінченну ієрархію $\{T_j \in \mathcal{D}(M),\ i \in \mathbb{Z}_+\}$ законів збереження, то породжуюча функція $T(\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} T_j \lambda^{-j}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} T(\lambda) = -K'\operatorname{grad} T(\lambda) \tag{5.2}$$

для всіх $\lambda \in \mathbb{C}^1$ [12]. Позначаючи $\varphi(x,t;\lambda) = \operatorname{grad} T(\lambda)$, перепишемо рівняння (5.2) у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K'\varphi. \tag{5.3}$$

Причому, рівняння (5.3) допускає при $\lambda \to \{\infty\}$ асимптотичні розв'язки у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1(x,t;\lambda) \\ \dots \\ b_{n-1}(x,t;\lambda) \end{pmatrix} \exp\left[\omega(x,t;\lambda) + \int_{x_0}^{x} \sigma(x,t;\lambda)dx\right], \tag{5.4}$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^1;\ \omega(x,t;\lambda)$ – дисперсійна функція лінеаризованої системи (5.2) в околі $u = 0 \in M;\ \sigma(x,t;\lambda),\ b_k(x,t;\lambda),\ k = 1,2,\dots,n,$ – локальні функціонали на M, які можна представити наступним чином

$$\varphi(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sigma_j[u]\lambda^{-j}, \qquad b_k(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} b_j^{(k)}[u]\lambda^{-j}. \tag{5.5}$$

Із виразу (5.4) і рівняння (5.3) знаходимо, що функціонал $T(\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+l} \sigma(x,t;\lambda)dx$, $x_0 \epsilon \mathbb{R}^1$, є породжуючою функцією законів збереження $T_j = \int_{x_0}^{x_0+l} \sigma_j[u]dx,\ j \in \mathbb{Z}_+$, для початкової динамічної системи (5.1).

Нехай для законів збереження $T_j \in \mathcal{D}(M),\ j \in \mathbb{Z}_+$, виконується наступне співвідношення

$$\Lambda\operatorname{grad} T_i = \operatorname{grad} T_{i+q} \tag{5.6}$$

де q – деяке ціле число, яке можна однозначно визначити із умов $T_{j_0} = 0 = \operatorname{grad} T_{j_0+q}$; $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ – фіксоване. Із (5.6) бачимо, що рекурсивний оператор Λ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = [\Lambda, K'] = \Lambda' \cdot K. \tag{5.7}$$

Для нелінійної системи рівнянь типу Шредінгера (4.1), де $\psi \in M = C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^1)$, представимо оператор K' [13]:

$$K' = \begin{pmatrix} i\partial^2 + 2\psi^*\psi_x - 2\psi\psi^*\partial^2 & -2\psi\psi_x \\ -2\psi^*\psi_x & -i\partial^2 - 2\psi\psi_x^* - 2\psi\psi^*\partial \end{pmatrix}$$
$$K' = \begin{pmatrix} i\partial^2 + 2\psi\partial\psi^* & -2\psi^*\psi_x^* \\ -2\psi\psi_x & -i\partial^2 + 2\psi^*\partial\psi^* \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Відповідний розв'язок $\varphi(x, T; \lambda) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ рівняння (5.3) згідно (5.4) має вигляд

$$\varphi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ b(x, t; \lambda) \end{pmatrix} \exp\left[\lambda x - i\lambda^2 t + \int_{x_0}^{x} \sigma(x, t; \lambda) dx\right], \tag{5.9}$$

де при $\lambda \to \{\infty\} \in \mathbb{C}^1$ локальні функціонали $\sigma(x, t; \lambda)$ і $b(x, t; \lambda)$ мають наступні асимптотичні розклади:

$$\sigma(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[\psi, \psi^*]\lambda^{-i},$$
$$b(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j[\psi, \psi^*]\lambda^{-i}. \tag{5.10}$$

Підставивши вираз (5.7) в (5.3) з оператором K' (5.8), знаходимо для локальних функціоналів $\sigma_j[\psi, \psi^*]$, $\beta_j[\psi, \psi^*]$, $j \in \mathbb{Z}_+$ наступні рекурентні співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^{x} \sigma_j[\psi, \psi^*]\, dx = -i\left[2\sigma_{j+1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sigma_k \sigma_{j-k} + \sigma_{j,x}\right] -$$
$$-2\psi\psi_x^*\delta_{j,0} - 2\psi^*\psi_x^*\beta_j - 2\psi\psi^*\left(\delta_{j+1,0} + \sigma_j\right), \tag{5.10}$$
$$-2i\beta_{j+2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^{x} \sigma_k\, dx\right)\beta_{j-k} + \beta_{j,t} =$$

$$= -2\psi\psi_x\delta_{j,0} + i\left[2\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sigma_k\beta_{j+1-k} + \sum_{k,n\in\mathbb{Z}_+}\sigma_k\sigma_n\beta_{j-k-n} + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sigma_{k.x}\beta_{j-k} + \right.$$

$$\left. +2\beta_{j+1,x} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sigma_k\beta_{j-k,x} + \beta_{j,xx}\right] -$$

$$-2\psi^*\psi_x\beta_j - 2\psi^*\psi\left(\beta_{j+1} + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sigma_k\beta_{j-k} + \beta_{j,x}\right).$$

Вирази (5.10) дозволяють визначити локальні функціонали $\sigma_j[\psi,\psi^*]$, $j\in\mathbb{Z}_+$, в явному вигляді:

$$\begin{gathered}\sigma_0 = i\psi\psi^*, \qquad \sigma_1 = i(\psi_x^*\psi - \psi^*\psi_x),\\ \sigma_2 = i(\psi\psi_{xx}^* - \psi_x\psi_x^*) - \psi\psi^*(\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*), \ldots\end{gathered} \tag{5.11}$$

Враховуючи, що функціонали $T_j = \int_{x_0}^{x_0+l}\sigma_j[\psi,\psi^*]dx$, $j\in\mathbb{Z}_+$, являються законами збереження, із (5.11) знаходимо вирази для градієнтів $\operatorname{grad} T_j$, $j = 0,\ 1,\ 2$,

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} T_0 = \begin{pmatrix} i\psi^* \\ i\psi \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} T_1 = \begin{pmatrix} 2i\psi_x^* \\ -2i\psi_x \end{pmatrix},\\ \operatorname{grad} T_3 = \begin{pmatrix} 2i\psi_{xx}^* + 4\psi\psi^*\psi_x^* \\ -2i\psi_{xx}^* + 4\psi\psi^*\psi_x \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{5.12}$$

Висновки

У даній роботі було досліджено використання методу (G'/G)-розширення для пошуку точних розв'язків нелінійної системи типу Шредінгера у вигляді гіперболічних та раціональних функцій.

Було описано аналітичні кроки методу, а також на прикладі конкретної системи нелінійних рівнянь Шредінгера, було доведено ефективність його використання для задач подібного типу.

Зважаючи на наявність комплексних чисел у знайдених розв'язках, спочатку було теоретично описано один із можливих способів побудови графіків функцій, що містять комплексні значення, у 3D просторі.

Пізніше, використовуючи середовище MATLAB, було написано програму за допомогою якої вдалося отримати графічне представлення розв'язків заданої системи при різних значеннях λ, μ, c_3, c_4, а також було проаналізовано отримані результати.

Розв'язки цієї нелінійної системи рівнянь можуть бути використані для подальшого аналізу динаміки хвильових пакетів в середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю, або для опису поширення теплових імпульсів в ангармонійних кристалах, тощо.

Для нелінійної динамічної системи типу Шредінгера доведено існування нескінченної ієрархії функціонально незалежних та інволютивних законів збереження.

Метод (G'/G)-розширення, попри свою відносну простоту, виявився надійним і ефективним для розв'язання рівнянь типу Шредінгера. При невеликій кількості кроків з його допомогою можна знаходити точні розв'язки для різних нелінійних рівнянь часткових похідних.

Тому даний метод має великий потенціал і може стати одним із незамінних інструментів в руках математиків для розв'язань систем подібного типу у майбутньому.

Список використаних джерел

[1] Zakharov V.E., Shabat A.B., Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP 34 (1972)

[2] Menyuk C.R., Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers, IEEE Jour. Quantum Electronics 23 (1987) 174-176

[3] Wei P.K.A., Menyuk C.R. and Chen H.H., Stability of solitons in randomly varying birefrengent fibers, Opt. Lett. 16 (1991) 1231-1233

[4] Gupta, R., Goyal, A. (2022). The Insights into Richness of Nonlinear Schrödinger Equation. In: Zdravković, S., Chevizovich, D. (eds) Nonlinear Dynamics of Nanobiophysics. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-5323-1_2

[5] Okaly, J.B., Nkoa Nkomom, T. (2022). Nonlinear Dynamics of DNA Chain with Long-Range Interactions. In: Zdravković, S., Chevizovich, D. (eds) Nonlinear Dynamics of Nanobiophysics. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-5323-1_4

[6] A. Geeta, R. Richa, H. Emadifar. Soliton: A dispersion-less solution with existence and its types. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e12122.

[7] Wu, XH., Gao, YT., Yu, X. et al. Vector breathers, rogue and breather-rogue waves for a coupled mixed derivative nonlinear Schrödinger system in an optical fiber. Nonlinear Dyn (2022). https://doi.org/10.1007/s11071-022-08058-2

[8] V. E. Zakharov; S. V. Manakov (1974). "On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation". Journal of Theoretical and Mathematical Physics. 19 (3): 551–559.

[9] V. E. Zakharov (1968). "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid". Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 9 (2): 190–194.

[10] Zayed E. M. E., Gepreel K. A. The (G′/G)-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical

physics. Journal of mathematical physics. 2009. Vol. 50, no. 1. P. 013502. URL: https://doi.org/10.1063/1.3033750 (date of access: 22.09.2022).

[11] Mykhailiuk I. S. Application of (G’/G) - Expansion Method to Two Korteweg - de Vries Type Dynamic Systems / Mykhailiuk I. S., Prytula M. M. // Department of Discrete Analysis and Intelligent Systems, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine – P. 1-23

[12] A. Mitropolsky, N. Bogolyubov (Jr.), A. Prykarpatsky, V. Samoylenko. Integrable dynamical systems: spectral and differential-geometric aspects. 1987. 42–43.

[13] A. Mitropolsky, N. Bogolyubov (Jr.), A. Prykarpatsky, V. Samoylenko. Integrable dynamical systems: spectral and differential-geometric aspects. 1987. 47–48.

[14] Wang M., Li X., Zhang J. The (G′/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Physics letters A. 2008. Vol. 372, no. 4. P. 417–423. URL: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051 (date of access: 24.10.2022).

[15] Khan K., Akbar M. A. Traveling wave solutions of nonlinear evolution equations via the enhanced (G′/G)-expansion method. Journal of the egyptian mathematical society. 2014. Vol. 22. P. 220–226.

[16] Naher, Hasibun. (2012). The Basic (G'/G)-Expansion Method for the Fourth Order Boussinesq Equation. Applied Mathematics. 03. 1144-1152. 10.4236/am.2012.310168.

[17] Hobbs B., Ord A. Nonlinear dynamics. Structural geology. 2015. P. 189–240.

[18] Ablowitz M. J. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 516 p.

[19] Epstein I. R., Pojman J. A. An introduction to nonlinear chemical dynamics. Oxford University Press, 1998 URL: https://doi.org/10.1093/oso/9780195096705.001.0001 (date of access: 11.11.2022).

[20] (Sciences) I. C. o. N. D. (. N. Y. A. o. Nonlinear dynamics. New York, N.Y: New York Academy of Sciences, 1980.

[21] Ayati Z. Comparing between G′/G expansion method and tanh-method. Open engineering. 2014. Vol. 4, no. 4. URL: https://doi.org/10.2478/s13531-013-0171-0 (date of access: 11.11.2022).