

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Факультет прикладної математики та інформатики**  
**Кафедра прикладної математики**

**Затверджено**

на засіданні кафедри прикладної  
математики  
факультету прикладної математики та  
інформатики  
Львівського національного  
університету імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 31 серпня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Юрій ЯЩУК

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Чисельні методи математичної фізики”,**  
**що викладається в межах ОПШ Прикладна математика**  
**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з**  
**спеціальності 113 Прикладна математика**

Львів 2023 р.

<b>Назва дисципліни</b>	Чисельні методи математичної фізики
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра прикладної математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	11 – математика і статистика 113 – прикладна математика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Дияк Іван Іванович, професор кафедри прикладної математики Макар Ігор Григорович, доцент кафедри прикладної математики Стягар Андрій Орестович, доцент кафедри прикладної математики
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:ivan.dyyak@lnu.edu.ua">ivan.dyyak@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/dyyak">https://ami.lnu.edu.ua/employee/dyyak</a> ; <a href="mailto:andriy.styaha@lnu.edu.ua">andriy.styaha@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/styaha-a-o">https://ami.lnu.edu.ua/employee/styaha-a-o</a> ; <a href="mailto:igor.makar@lnu.edu.ua">igor.makar@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://ami.lnu.edu.ua/employee/makar-i-h">https://ami.lnu.edu.ua/employee/makar-i-h</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 278. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю).
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://ami.lnu.edu.ua/course/numerical-methods-of-mathematical-physics-applied-mathematics">https://ami.lnu.edu.ua/course/numerical-methods-of-mathematical-physics-applied-mathematics</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Чисельні методи математичної фізики” є нормативною дисципліною зі спеціальності 113 – прикладна математика для освітньої програми Прикладна математика, яка викладається в 7-му та 8-му семестрах у обсязі 6-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Курс розроблено таким чином, щоб надати учасникам знання принципів скінченно елементного аналізу (СЕА), як необхідного інструменту у вигляді програмного забезпечення в інженерному проектуванні, а також у багатьох інших галузях науки та техніки. Тому у курсі представлено застосування МСЕ до лінійних стаціонарних і нестаціонарних задач, а також задач на власні значення. Основну частину курсу займає розгляд практичних і теоретичних аспектів МСЕ та його основних програмних реалізацій.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Метою вивчення нормативної дисципліни “Чисельні методи математичної фізики” є освоєння студентами теоретичних і практичних основ МСЕ та МГЕ, МДО та принципів розробки програмного забезпечення для їх реалізації на робочих станціях та кластерах.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	1. Ярема Савула. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів, Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004 – 221с. <a href="https://ami.lnu.edu.ua/academics/library">https://ami.lnu.edu.ua/academics/library</a> 2. Brenner S.C., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer-Verlag New York Inc., 1994 – 294 pp. 3. Smith B., Bjorstad P., Gropp W. Domain Decomposition. Cambridge University Press, 1996 – 224 pp. 4. Akin J. E. Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, 2006. – 447pp. 5. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Oxford:

	<p>Butterworth &amp; Heinemann, 2002. - 688 p</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>6. Nguyen D. Finite element methods: Parallel-Sparse Statics and Eigen- So- lutions.– Springer, 2006–534p.</li> <li>7. Shih R.M. Introduction to Finite Element Analysis Using SOLIDWORKS Simulation, SDC Publications, 2023, 518p.</li> <li>8. Kontromanos I., McClure J., Roy C. Fundamentals of Finite Element Analysis: Linear Finite Element Analysis. John Wiley&amp;Sons Ltd., 2018, 736p.</li> <li>9. Katsikadelis John T. Boundary Elements: Theory and Applications. Elsevier, 2002.- 336p</li> <li>10. Pozrikidis C. Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using MATLAB. CRC Press. 2014.793p</li> <li>11. Lee H.-H. Finite Element Simulations with Workbench 2022: Theory, Applications, Case Studies. SDC Publications, 2022.618p.</li> <li>12. Yagawa G., Oishi A., Computational Mechanics with Deep Learning. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. CIMNE, Switzeland AG, 2023. 400p.</li> <li>13. Knupp P., Salari K. Varification of computer codes in computational science and engineering. Chapman and Holland, 2003.</li> <li>14. Siu-Wing Cheng, Tamal Krishna Dey, and Jonathan Richard Shewchuk, Delaunay Mesh Generation, 375 pages. CRC Press, Boca Raton, Florida, December 2012.</li> </ol> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <a href="https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/">https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/</a></li> <li>2. <a href="https://freefem.org/">https://freefem.org/</a></li> <li>3. <a href="https://fem-code.com/">https://fem-code.com/</a></li> <li>4. <a href="https://fenicsproject.org/">https://fenicsproject.org/</a></li> </ol>
<p><b>Обсяг курсу</b></p>	<p>Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 120 год., з них 60 год. лекцій та 60 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 60 год.</p>
<p><b>Очікувані результати навчання</b></p>	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>Знати:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Додатні, додатно визначені оператори, формули Гріна;</li> <li>- Задача про мінімум функціоналу, узагальнений розв'язок;</li> <li>- Головні та природні крайові умови;</li> <li>- Метод Рітца, метод Гальоркіна;</li> <li>- Метод зважених залишків, метод граничних елементів;</li> <li>- Апроксимації на скінченних елементах: лагранжеві, ермітові одновимірні апроксимації. апроксимації на трикутниках, двовимірні ізопараметричні апроксимації, просторові апроксимації на тетраедрах та паралелепіпедах;</li> <li>- Априорні оцінки похибки МСЕ;</li> <li>- Задачі на власні значення, мінімаксимальний принцип Куранта;</li> <li>- Напівдискретні апроксимації Гальоркіна для параболічних початково-крайових задач;</li> <li>- Альтернувальний метод Шварца, МДО без налягання областей.</li> <li>- Мортгарні МСЕ;</li> <li>- Адаптивні схеми МСЕ та МГЕ;</li> </ul> <p>Вміти:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Будувати схеми МСЕ для задачі Штурма-Ліувілля;</li> </ul>

- Будувати схеми МСЕ для рівняння Пуассона у двовимірному випадкові;
- Реалізувати ізопараметричні апроксимації МСЕ для еліптичних задач;
- Будувати напівдискретні апроксимації для нестационарних задач;
- Реалізовувати схеми МСЕ на сучасних комп'ютерах з використанням підходів паралелізації.

Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:

Загальні компетентності:

ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

Фахові компетентності:

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень

ФК12. Здатність до пошуку, систематичного вивчення та аналізу науково-технічної інформації, вітчизняного й закордонного досвіду, пов'язаного із застосуванням математичних методів для дослідження різноманітних процесів, явищ та систем.

ФК17. Здатність розробляти та досліджувати комп'ютерні моделі складних систем, поведінка яких описується за допомогою диференціальних рівнянь.

ФК18. Здатність формулювати та розв'язувати задачі оптимізації.

Програмні результати навчання:

РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

РН05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

РН06. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності їх розв'язку.

РН16. Демонструвати навички взаємодії з іншими людьми, уміння

	працювати в команді. PH21. Розробляти програмне забезпечення для чисельного розв'язування задач, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь.				
<b>Ключові слова</b>	Варіаційні методи, МСЕ, МГЕ, методи декомпозиції області, адаптивні алгоритми, програмна реалізація МСЕ				
<b>Формат курсу</b>	Очний. Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій. Ознайомлення з Internet курсами по МСЕ <b>Open University courses:</b> <a href="https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/introduction-finite-element-analysis/content-section-1">https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/introduction-finite-element-analysis/content-section-1</a> або eDX courses: High Performance Finite Element Modeling <a href="https://www.edx.org/course/high-performance-finite-element-modeling-?source=aw&amp;awc=6798_1587147662_7cb82852a251632f8bb9ad32b97285a1&amp;utm_source=aw&amp;utm_medium=affiliate_partner&amp;utm_content=text-link&amp;utm_term=301045_https%3A%2F%2Fwww.class-central.com%2F">https://www.edx.org/course/high-performance-finite-element-modeling-?source=aw&amp;awc=6798_1587147662_7cb82852a251632f8bb9ad32b97285a1&amp;utm_source=aw&amp;utm_medium=affiliate_partner&amp;utm_content=text-link&amp;utm_term=301045_https%3A%2F%2Fwww.class-central.com%2F</a> або COURSERA courses: <a href="https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/exam/sO3rZ/unit-2-quiz">https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/exam/sO3rZ/unit-2-quiz</a> <a href="https://online-learning.tudelft.nl/courses/linear-modeling-fem/">https://online-learning.tudelft.nl/courses/linear-modeling-fem/</a> <a href="https://nptel.ac.in/courses/112/104/112104116/">https://nptel.ac.in/courses/112/104/112104116/</a>				
<b>Теми</b>	Подано нижче у таблиці Схема курсу «Чисельні методи математичної фізики»				
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Залік (7 семестр), екзамен (8 семестр).				
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> <li>- Чисельних методів;</li> <li>- Програмування;</li> <li>- Функціонального аналізу</li> </ul> достатніх для сприйняття категоріального апарату методів скінченних і граничних елементів.				
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції, індивідуальні завдання, групові проекти, менторство				
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер, програмне забезпеченням та середовище розробки, Internet доступ.				
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.				
	<b>Оцінка за шкалою ECTS</b>		<b>Оцінка в балах</b>	<b>Оцінка за національною шкалою</b>	
				<b>Екзамен, диференційовані й залік</b>	<b>залік</b>
	A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5
	B	Дуже добре	81- 89	Добре	4
	C	Добре	71 -80		
	D	Задовільно	61 - 70	Задовільно	3
					зараховано

E	Достатньо	51- 60			
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не- зараховано

### 7 семестр

Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- індивідуальні завдання: 60% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 60 (6 завдань по 10б.);
- підсумковий тест: 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 40 (20 завдань по 2 б.).

Підсумкова максимальна кількість балів 100.

### 8 семестр

Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- індивідуальні завдання: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50 (5 завдань по 8б. і 1 завдання – 10б.);
- екзамен: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.

Підсумкова максимальна кількість балів 100.

Окремі завдання можуть виконуватися у командах.

Додаткові бали (15 балів) нараховуються за отримання сертифікату про проходження безкоштовного курсу по МСЕ на різних освітніх платформах в Internet.

Критерії оцінювання тестових завдань (підсумковий тест):

2 бали: відповідь на завдання правильна;

0 балів: відповідь на завдання неправильна.

Критерії оцінювання завдань

	Критерії оцінювання
<b>100%</b>	Студент повністю виконав умови завдання; алгоритм реалізовано правильно; відповідає на практично на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання; проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів.
<b>80-99%</b>	Студент повністю виконав умови завдання; алгоритм реалізовано правильно; на деякі питання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями; проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями.
<b>61-79%</b>	Студент виконав завдання з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач; на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з неточностями; проводить аналіз отриманих результатів з неточностями.
<b>50-60%</b>	Студент виконав завдання частково; алгоритм реалізовано з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач; на запитання відповідає з помилками; проводить аналіз отриманих результатів з

	помилками.
<b>26-49%</b>	Студент виконав завдання частково, алгоритм реалізовано з помилками, які самостійно не може виправити; переважно не відповідає на запитання.
<b>1-25%</b>	Студент виконав завдання частково або з грубими помилками, які самостійно не може виправити; демонструє незнання матеріалу.
<b>0 балів</b>	Студент не виконав завдання.

**Академічна доброчесність:** Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

**Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.

**Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

**Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані за індивідуальні завдання, підсумковий тест або екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.

Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.

**Питання до екзамену.**

Симетричні, додатно визначені оператори.  
 Теорема про функціонал енергії. Метод Рітца.  
 Слабкий розв'язок крайової задачі. Метод Бубнова-Гальоркіна.  
 Функції апроксимації в МСЕ.  
 Особливості ізопараметричних апроксимацій.  
 Априорні оцінки похибки.  
 Схеми МСЕ для рівняння Пуассона.  
 Властивості спектра оператора. Мінімаксимальний принцип Куранта.  
 Похибки власних чисел і власних значень.  
 Варіаційне формулювання параболічної задачі. Стійкість напівдискретних апроксимацій. Дискретизація задачі за часом.  
 Адаптивні схеми МСЕ.  
 Методи декомпозиції області.

<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.
-------------------	--

## Схема курсу “Чисельні методи математичної фізики”

### 7 семестр

Тиж.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)	Література, Ресурси в інтернеті	Завдання, год.	Термін виконання
1	<b>Тема 1.</b> Вступ. Предмет курсу. Комп'ютерні CAD/CAM технології. МСЕ основні формулювання. Приклади застосувань.	Лекція	[5,6,11]	2	1 тиждень
	<b>Тема 1.</b> Ознайомлення з безкоштовними курсами по МСЕ в Internet	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,10]	2, 1	Під час заняття
2	<b>Тема 2.</b> Додатні, додатно визначені оператори, формули Гріна.	Лекція	[1,2]	2	1 тиждень
	<b>Тема 2.</b> Постановка двовимірної задачі еліптичного типу у сильній формі. Аналіз індивідуальних завдань.	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,10]	2, 1	Під час заняття
3	<b>Тема 3.</b> Задача про мінімум функціоналу, узагальнений розв'язок. Існування розв'язку про мінімум функціонала енергії	Лекція	[1,8,10]	2	1 тиждень
	<b>Тема 3.</b> <i>Індивідуальне завдання №1:</i> Формулювання задачі у слабкій формі. Дослідження властивостей оператора і доведення коректності задачі	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,10]	2, 4	Під час заняття, 1 тиждень
4	<b>Тема 4.</b> МСЕ для одномірної задачі Штурма-Ліувілля з лінійними функціями апроксимації.	Лекція	[1,5]	2	1 тиждень
	<b>Тема 4.</b> Приймання <i>індивідуального завдання №1</i>	Лабораторна		2	Під час заняття
5	<b>Тема 5.</b> Головні та природні граничні умови. Задачі з неоднорідними умовами.	Лекція	[1,2,8]	2	1 тиждень
	<b>Тема 5.</b> <i>Індивідуальне завдання №2.</i> Аналіз алгоритмів триангуляції	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,14]	2, 4	Під час заняття



	Делоне . Реалізація алгоритму триангуляції “Edge-flip”. Структури даних і аспекти ефективної нумерація вузлів при побудові триангуляції				2 тижні
6	<b>Тема 6.</b> Метод Рітца. Слабкий розв’язок крайової задачі. Абстрактна варіаційна задача. Метод Гальоркіна. Теорема Лакса-Мільграма.	Лекція	[1,2,8]	2	1 тиждень
	<b>Тема 6.</b> Використання відомих пакетів для побудови скінченної-елементної сітки для МСЕ	Лабораторна	[1, 5, 14]	2	Під час заняття
7	<b>Тема 7.</b> Апроксимації на скінченних елементах. Одномірні апроксимації: ермітового типу, апроксимації функціями-бульбашками. Двомірні апроксимації на трикутниках і чотирикутниках. Сирендипові чотирикутники, Ізопараметричні апроксимації.	Лекція	[1,2,5,10]	2	1 тиждень
	<b>Тема 7.</b> Приймання <i>індивідуального завдання №2</i>	Лабораторна Самостійна робота		2	Під час заняття
8	<b>Тема 8.</b> Просторові апроксимації на тетраедрах та паралелепіпедах.	Лекція	[1,5,10]	2	1 тиждень
	<b>Тема 8.</b> <i>Індивідуальне завдання №3.</i> Обчислення локальних матриць МСЕ. Обчислення глобальної матриці та врахування граничних умов задачі	Лабораторна Самостійна робота	[1,2,5,10]	2 4	1 тиждень
9	<b>Тема 9.</b> Метод спектральних елементів.	Лекція	[8,10]	2	1 тиждень
	<b>Тема 9.</b> Приймання <i>Індивідуального завдання №3.</i>	Лабораторна,		2	Під час заняття
10	<b>Тема 10.</b> Методи зважених залишків, як основа методів скінченних і граничних елементів.	Лекція	[5,9]	2	1 тиждень
	<b>Тема 10.</b> <i>Індивідуальне завдання №4.</i> Розв’язування СЛАР, знаходження і інтерпретація розв’язку МСЕ	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,10]	2 4	1 тиждень

11	<b>Тема 11.</b> Прямий метод граничних елементів.	Лекція	[6,13,14]	2	1 тиждень
	<b>Тема 11.</b> Приймання <i>Індивідуального завдання №4</i>	Лабораторна		2	Під час заняття
12	<b>Тема 12.</b> Непрямий метод граничних елементів.	Лекція	[9]	2	1 тиждень
	<b>Тема 12.</b> <i>Індивідуальне завдання №5.</i> Реалізація прямого методу граничних елементів для двовимірної задачі еліптичного типу	Лабораторна, Самостійна робота	[6, 9]	2 4	1 тиждень
13	<b>Тема 13.</b> Априорна оцінка точності. Априорна оцінка точності за Нітше.	Лекція	[1,2,4]	2	1 тиждень
	<b>Тема 13.</b> Приймання <i>Індивідуального завдання №5</i>	Лабораторна		2	Під час заняття
14	<b>Тема 14.</b> Крайові задачі для рівняння Пуассона. Схема МСЕ для рівняння Пуассона.	Лекція	[1,2,8]	2	1 тиждень
	<b>Тема 14.</b> <i>Індивідуальне завдання №6.</i> Розв'язування двовимірної задачі адвекції дифузії за допомогою МСЕ	Лабораторна, Самостійна робота	[1,10]	2 4	1 тиждень
15	<b>Тема 15.</b> Схема МСЕ побудована на ізопараметричних апроксимаціях. МСЕ для рівняння адвекції-дифузії.	Лекція	[1,11]	2	1 тиждень
	<b>Тема 15.</b> Приймання <i>Індивідуального завдання №6.</i>	Лабораторна		2	Під час заняття
16	<b>Тема 16.</b> Методи декомпозиції області. Альтернуючий метод Шварца.	Лекція	[1,3]	2	1 тиждень
	<b>Тема 16.</b> <i>Підсумкове тестування</i>	Лабораторна		2	Під час заняття

## 8 семестр

1	<b>Тема 17.</b> Задачі на власні значення. Властивості спектра оператора.	Лекція	[1,5,6]	2	1 тиждень
	<b>Тема 17.</b> <i>Індивідуальне завдання №7.</i> Побудова аналітичного розв'язку крайової задачі. Оцінка відносної та абсолютної	Лабораторна, Самостійна робота	[1, 5, 13]	2 5	1 тиждень

	похибок у нормах відповідних просторів Соболева				
2	<b>Тема 18.</b> Енергетичні теореми в проблемі власних значень. Дискретний спектр оператора Штурма – Ліувілля.	Лекція	[1,2]	4	1 тиждень
	Приймання <i>індивідуального завдання 7.</i> <b>Тема 18.</b> <i>Індивідульне завдання №8.</i> Оцінка порядку збіжності числового розв'язку з використанням отриманих у попередньому завданні №7 абсолютних похибок	Лабораторна, Самостійна робота	[1, 13]	4 5	Під час заняття, 3 тижні
3	<b>Тема 19.</b> Мінімаксимальний принцип Куранта. Метод Рітца в задачах на власні значення. Похибки власних значень і власних функцій. Метод Гальоріна.	Лекція	[1,6]	4	1 тиждень
	<b>Тема 19.</b> <i>Індивідульне завдання №9.</i> Застосування схеми Ейткена для оцінки порядку збіжності у випадку коли аналітичний розв'язок відсутній	Лабораторна, Самостійна робота	[1, 5, 13]	2 5	1 тиждень
4	<b>Тема 20.</b> Варіаційне формулювання параболічної задачі. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна. Стійкість і збіжність напівдискретних апроксимацій.	Лекція	[1,5,11]	2	1 тиждень
	<b>Тема 20.</b> Приймання <i>індивідуального завдань 8, 9.</i>	Лабораторна		4	Під час заняття
5	<b>Тема 21.</b> Бібліотеки Free Ware FEM	Лекція	[7,10,11]	4	1 тиждень
	<b>Тема 21.</b> <i>Індивідульне завдання №10.</i> Квадратичні апроксимації на скінченних елементах. Аналіз алгоритму МСЕ і обчислення матриць. Чисельне інтегрування на трикутних квадратичних скінченних елементах.	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5]	4 5	1 тиждень
6	<b>Тема 22.</b> Енергетичне рівняння. Дискретизація варіаційної задачі за часом. Стійкість	Лекція	[1,10]	2	1 тиждень

	напівдискретних апроксимацій за часом				
	<b>Тема 22.</b> Приймання індивідуального завдання 10.	Лабораторна		2	Під час заняття
7	<b>Тема 23.</b> Схеми МСЕ для розв'язування гіперболічних початково-крайових задач.	Лекція	[5,10]	2	1 тиждень
	<b>Тема 23.</b> Індивідуальне завдання №11. Реалізація схеми МСЕ для двовимірної початково-крайової задачі гіперболічного типу	Лабораторна, Самостійна робота	[1,5,10]	2 5	Під час заняття, 1 тиждень
8	<b>Тема 24.</b> Адаптивні схеми МСЕ та МГЕ.	Лекція	[4,5,9]	4	1 тиждень
	<b>Тема 24.</b> Індивідуальне завдання №12. Побудова h-адаптивного алгоритму МСЕ для двовимірної задачі еліптичного типу	Лабораторна, Самостійна робота	[4,5,9,14]	2 5	Під час заняття, 2 тижні
9	<b>Тема 25.</b> Метод скінченних елементів "розривів-зв'язків". Використання мортарних функцій.	Лекція	[6,8]	2	1 тиждень
	<b>Тема 25.</b> Приймання індивідуального завдання 11.	Лабораторна		4	Під час заняття
10	<b>Тема 26.</b> Використання методів ШІ у розв'язуванні задач МСЕ.	Лекція, Самостійна робота	[5,12]	2 4	1 тиждень
	<b>Тема 26.</b> Приймання індивідуального завдання №12. Підведення підсумків.	Лабораторна		2	Під час заняття