

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Затверджено

на засіданні
кафедри обчислювальної математики
факультету прикладної математики та
інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29 серпня 2023 р.)

Завідувач кафедри



Роман ХАПКО

Силабус з навчальної дисципліни
«Лінійні інтегральні рівняння»,
що викладається в межах ОПІ Прикладна математика
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
зі спеціальності 113 Прикладна математика

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Лінійні інтегральні рівняння
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Факультет прикладної математики та інформатики Кафедра обчислювальної математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – математика та статистика 113 – прикладна математика
Викладачі дисципліни	Хапко Роман Степанович, завідувач кафедри обчислювальної математики, професор; Гарасим Ярослав Степанович, старший викладач кафедри обчислювальної математики; Власюк Марія Володимирівна, асистент кафедри обчислювальної математики
Контактна інформація викладачів	roman.chapko@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/chapko ; iaroslav.harasym@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/harasym ; mariia.vlasiuk@lnu.edu.ua ; https://ami.lnu.edu.ua/employee/vlasiuk-m-v ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 262. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://ami.lnu.edu.ua/course/linear-integral-equations-applied-mathematics
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Лінійні інтегральні рівняння» є нормативною дисципліною з спеціальності 113 – прикладна математика для освітньої програми «Прикладна математика», яка викладається в 7-му семестрі (5 кредитів ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Даний курс є продовженням курсів чисельних методів і функціонального аналізу. До його складу входять: цикл лекцій та лабораторних занять. Курс лекцій складається з трьох частин: розгляд теорій обґрунтування коректності IP другого роду; розробка та обґрунтування чисельних методів для IP другого роду; застосування методу IP для наближеного розв'язування крайових задач. В процесі виконання проектів студенти будують наближені розв'язки інтегральних рівнянь першого та другого роду різними чисельними методами, використовуючи відповідне програмне забезпечення, проводять необхідні обчислювальні експерименти.
Мета та цілі дисципліни	Метою вивчення нормативної дисципліни «Лінійні інтегральні рівняння» є освоєння студентами теоретичних аспектів дослідження інтегральних рівнянь, методів побудови їх наближеного розв'язку та застосування для чисельного розв'язування крайових задач
Література для вивчення дисципліни	Основна література 1. Atkinson K. The numerical solution of integral equations of the second kind.- Cambridge University Press, 2009. 2. Kress R. Linear integral equations.- Berlin: Springer, 2013.

	<p>3. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations // Inverse Problems in Science and Engineering, 2016.- 24.- P. 1550 -1568.</p> <p>4. Chapko R., Johansson B.T. Calculating heat and wave propagation from lateral Cauchy data // Український математичний журнал. - 2022. - Vol.74, №2 – P. 274-285. (DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6880).</p>
Обсяг курсу	<p>Загальний обсяг: 7 семестр, 150 годин (аудиторних занять: 80 год., з них 48 год. лекцій та 32 години лабораторних робіт; самостійної роботи: 70 год).</p>
Очікувані результати навчання	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>знати: основні теорії обґрунтування коректності IP другого роду, ряд чисельних методів для наближеного розв'язування IP, етапи застосування методу IP для наближеного розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу;</p> <p>вміти: застосовувати чисельні методи для розв'язування IP, метод IP до конкретних еліптичних задач.</p> <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:</p> <p>Загальні компетентності: ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.</p> <p>Фахові компетентності: ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем. ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі. ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень. ФК17. Здатність розробляти та досліджувати комп'ютерні моделі складних систем, поведінка яких описується за допомогою диференціальних рівнянь. ФК19. Здатність аналізувати інтегральні рівняння та методи їх розв'язування.</p> <p>Програмні результати навчання: РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці. РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами. РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів. РН05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми,</p>

	пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень. РН07. Вміти проводити практичні дослідження та знаходити розв'язок некоректних задач. РН21. Розробляти програмне забезпечення для чисельного розв'язування задач, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь. РН22. Аналізувати та чисельно розв'язувати інтегральні рівняння.					
Ключові слова	Інтегральні рівняння Фредгольма першого і другого роду. Компактні оператори. Теорія Рісса. Теорія Фредгольма. Методи вироджених ядер, Нистрьома, Гальоркіна, колокації. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Граничні інтегральні рівняння. Теорія потенціалів. Формули Гріна. Коректність.					
Формат курсу	Очний Проведення лекцій, лабораторних робіт і консультацій.					
Теми	Подано нижче у таблиці Схема курсу «Лінійні інтегральні рівняння»					
Підсумковий контроль, форма	Іспит					
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> - Математичного аналізу; - Диференціальних рівнянь; - Функціонального аналізу; - Програмування; - Чисельних методів. 					
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції					
Необхідне обладнання	Комп'ютер із програмним забезпеченням GNU Octave, доступ до Internet мережі.					
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.					
	Оцінка за шкалою ECTS		Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою		
				Екзамен, диференційований залік		залік
	A	Відмінно	100 - 90	Відмінно	5	зараховано
	B	Дуже добре	81- 89	Добре	4	
	C	Добре	71 -80			
	D	Задовільно	61 - 70	Задовільно	3	
	E	Достатньо	51- 60			
FX (F)	Незадовільно	0 - 50	Незадовільно	2	не зараховано	

Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- проект: максимальна кількість балів 45
- відвідування занять: максимальна кількість балів 5
- екзамен: максимальна кількість балів 50

Проект

Кожен студент отримує складну задачу, для розв'язування якої треба використати один із розглянутих на лекціях чисельних методів. Алгоритм необхідно запрограмувати на мові високого рівня, відлагодити програму і отримати результати тестових прикладів. Результати теоретичних досліджень, алгоритм методу, чисельні експерименти мають бути оформлені у вигляді звіту (в LaTeX), який студент має публічно захистити.

За написану програму: максимальна кількість балів 15

За підготовлений звіт: максимальна кількість балів 15

За публічний захист: максимальна кількість балів 15

Критерії оцінювання програми:

15 балів - студент повністю виконав умови завдання, алгоритм реалізовано правильно, відповідає на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання, проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів;

12-14 балів - студент написав програму, яка вірно реалізує відповідний алгоритм, на деякі запитання, пов'язані з тематикою завдання, відповідає з незначними неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з незначними неточностями;

9-11 балів - студент написав програму з незначними помилками, але самостійно їх виправляє, якщо на них вкаже викладач, на деякі запитання, пов'язані з роботою програми, відповідає з неточностями, проводить аналіз отриманих результатів з неточностями;

5-8 бали - студент написав програму, яка реалізовує завдання частково і з помилками, які частково може виправити, якщо на них вкаже викладач, на запитання відповідає з помилками, проводить аналіз отриманих результатів з помилками;

1-4 бали - студент написав програму, яка реалізовує завдання частково і з помилками, які самостійно не може виправити, переважно не відповідає на запитання;

0 балів - студент не написав програми.

Критерії оцінювання звіту:

15 балів – студент підготував звіт у системі LaTeX, який містить чітку постановку задачі, основні теоретичні відомості, необхідні математичні перетворення і обґрунтування як в контексті коректності задачі, так і в контексті дослідження чисельного методу. Приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Використана література оформлена згідно необхідного стандарту;

12-14 балів - студент підготував звіт у системі LaTeX, який містить постановку задачі, основні теоретичні відомості, певні математичні перетворення і обґрунтування як в контексті коректності задачі, так і в контексті дослідження чисельного методу. Приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Використана література оформлена згідно необхідного стандарту;

9-11 балів - студент підготував звіт у системі LaTeX, який містить чітку постановку задачі, наведено деякі теоретичні відомості і математичні перетворення. Приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Використана література оформлена згідно необхідного стандарту;

5-8 бали - студент підготував звіт у системі LaTeX, який містить

постановку задачі, короткий алгоритм її розв'язування і деякі таблиці, що мають демонструвати правильність роботи програми;
 1-4 бали - студент підготував звіт у системі LaTeX, який містить постановку задачі, короткий алгоритм її розв'язування;
 0 балів - студент не подав звіту.

Критерії оцінювання публічного захисту:

15 балів – студент підготував звіт у системі LaTeX, яка містить чітку постановку задачі, основні теоретичні відомості, необхідні математичні перетворення і обґрунтування як в контексті коректності задачі, так і в контексті дослідження чисельного методу. Приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Відповідає на всі запитання, пов'язані з тематикою завдання, проводить чіткий аналіз та порівняння отриманих результатів, пропонує інші підходи до вирішення поставленого завдання

12-14 балів - студент підготував презентацію у системі LaTeX, яка містить постановку задачі, основні теоретичні відомості, певні математичні перетворення і обґрунтування як в контексті коректності задачі, так і в контексті дослідження чисельного методу. Приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Відповідає на запитання з незначними неточностями;

9-11 балів - студент підготував презентацію у системі LaTeX, яка містить чітку постановку задачі, наведено деякі теоретичні відомості і математичні перетворення, приведено результати чисельних експериментів у вигляді таблиць і рисунків. Відповідає на запитання з незначними неточностями

5-8 бали - студент підготував презентацію у системі LaTeX, яка містить постановку задачі, короткий алгоритм її розв'язування і деякі таблиці, що мають демонструвати правильність роботи програми, на запитання відповідає з помилками;

1-4 бали - студент підготував презентацію у системі LaTeX, яка містить велику кількість помилок, переважно не відповідає на запитання;

0 балів - студент не захищав проект.

Екзамен. Проводиться у письмовій формі (5 завдань по 10 балів кожне). До здачі допускаються студенти, які отримали більше 10балів за роботу протягом семестру.

Критерії оцінювання теоретичних/практичних завдань (екзамен):

Екзамен (10балів)	Критерії оцінювання
10 балів	студент правильно виконав завдання; вільно володіє навчальним матеріалом, чітко розкриває зміст теоретичних питань;
7-9 балів	студент виконав завдання з незначними помилками (на кінцевому етапі), але алгоритм розв'язування знає і вміє його застосовувати;; добре володіє навчальним матеріалом, розкриває повністю зміст теоретичних питань з незначними неточностями;
4-6 балів	студент виконав завдання з помилками, алгоритм виконання, в основному, знає; володіє навчальним матеріалом на достатньому рівні,

		розкриває зміст теоретичних питань невичерпно та з неточностями, виникають труднощі під час аналізу матеріалу;
	1-3 бали	студент виконав лише частину завдання або повністю, але зі значними помилками; частково знає теоретичний матеріал (основні поняття, твердження, нескладні алгоритми), розкриває зміст питань зі значними помилками;
	0 балів	студент не володіє навчальним матеріалом і не виконав завдання.
	<p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані за проект, відвідування та бали за екзамен. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час лабораторні заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>	
Питання до екзамену.	Теорія компактних операторів. Теорія Рісса. Теорія Фредгольма. Метод вироджених ядер. Проекційні методи. Метод колокації. Проекційні методи. Метод Гальоркіна. Метод Нистрьома. Ітераційні методи. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Існування та єдиність розв'язку. Непрямий метод граничних IP. Прямий метод граничних IP. Метод граничних елементів. Метод IP для рівняння Гельмгольца.	
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завер-	

Схема курсу «Лінійні інтегральні рівняння»

Модуль 1. Теорії для обґрунтування коректності IP				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Огляд типів інтегральних рівнянь [1,2].	2	-	2
2	Теорія компактних операторів. Компактні інтегральні оператори [2].	2	2	2
3	Теорія Рісса-Шаудера [2].	2	2	2
4	Теорія Фредгольма [2].	4	2	2

Модуль 2. Чисельні методи для IP.				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Метод вироджених ядер [2]	2	2	2
2	Проекційні методи. Загальна теорія [1].	2	2	2
3	Проекційні методи. Метод колокації [1].	2	2	4
4	Проекційні методи. Метод Гальоркіна [1].	2	2	4
5	Метод Нистрьома. Випадок неперервних ядер [2].	2	2	4
6	Метод Нистрьома. Випадок слабо-сингулярних ядер [2].	2	2	4
7	Дискретні проекційні методи [1,2].	2	2	2
8	Ітераційні методи [1]	2	-	4

Модуль 3. Застосування методів ІР до крайових еліптичних задач				
№	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин		
		Лекції (год)	Лаб. (год)	Сам. р-та
1	Гармонійні функції та їх властивості. Крайові задачі для рівняння Лапласа [2].	2	2	2
2	Непрямий метод граничних ІР [2].	2	2	4
3	Граничні інтегральні рівняння. Прямий підхід. Граничні ІР другого роду [2].	2	-	4
4	Граничні інтегральні рівняння першого роду з логарифмічною особливістю [2].	2	2	2
5	Граничні інтегральні рівняння першого роду з гіперособливістю [2].	2	-	4
6	Граничні інтегральні рівняння на кусково гладких плоских кривих [2].	2	-	4
7	Метод граничних елементів в R^2 [1].	2	2	4
8	Метод граничних інтегральних рівнянь для рівняння Гельмгольца. ІР другого роду [2].	4	-	4
9	Чисельне розв'язування поверхневих інтегральних рівнянь [3].	2	-	4
10	Регуляризація Тіхонова для некоректних лінійних інтегральних рівнянь. Використання для граничних задач [2,4].	2	-	4
11	Захист проектів		4	-

Усього:	48 год	32 год	70 год
----------------	--------	--------	--------

Завдання для проекту.

1. Знайти наближений розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом ІР у випадку гладкої границі заданої параметрично.
 - 1.1. Використати потенціал подвійного шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним з методів:
 - 1.1.1. Метод колокації з кусково-лінійними базисними функціями.
 - 1.1.2. Метод колокації з тригонометричними базисними функціями.
 - 1.1.3. Метод вироджених ядер з кусково-лінійними базисними функціями.
 - 1.1.4. Метод вироджених ядер з тригонометричними базисними функціями.
 - 1.1.5. Метод Гальоркіна з кусково-лінійними базисними функціями.

- 1.1.6. Метод Гальоркіна з тригонометричними базисними функціями.
- 1.1.7. Метод ітерованої колокації з вузлами Гауса-Лежандра.
- 1.1.8. Метод Нистрьома з квадратурною формулою Сімпсона.
- 1.1.9. Метод Нистрьома з квадратурною ф-лою трапецій.
- 1.1.10. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
- 1.2. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним із методів:
 - 1.2.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 1.2.2. Метод колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.
 - 1.2.3. Метод колокації з використанням тригонометричних базисних функцій.
 - 1.2.4. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
- 1.3. Використати формулу Гріна із зведенням до ІР першого роду. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним з методів:
 - 1.3.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 1.3.2. Метод колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.
 - 1.3.3. Метод колокації з використанням тригонометричних базисних функцій.
 - 1.3.4. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
- 1.4. Використати формулу Гріна із зведенням до ІР другого роду. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним з методів:
 - 1.4.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 1.4.2. Метод колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.
 - 1.4.3. Метод колокації з використанням тригонометричних базисних функцій.
 - 1.4.4. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
2. Знайти наближений розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом ІР у випадку границі з кутовою точкою.
 - 2.1. Використати потенціал подвійного шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити методом Нистрьома.
 - 2.2. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити методом квадратур.
3. Знайти наближений розв'язок мішаної задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області методом ІР у випадку гладких границь, заданих параметрично.
 - 3.1. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним із методів:
 - 3.1.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 3.1.2. Метод колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.
 - 3.1.3. Метод колокації з використанням тригонометричних базисних функцій.
 - 3.1.4. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
 - 3.2. Використати потенціал подвійного шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити одним з методів:
 - 3.2.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 3.3. Використати комбінацію потенціалів. Чисельне розв'язування системи ІР першого роду здійснити одним з методів:
 - 3.3.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних кв. формул.
 - 3.4. Використати комбінацію потенціалів. Чисельне розв'язування системи ІР другого роду здійснити одним з методів:
 - 3.4.1. Метод колокації з кусково-лінійними базисними функціями.
 - 3.4.2. Метод колокації з тригонометричними базисними функціями.
 - 3.4.3. Метод вироджених ядер з кусково-лінійними базисними функціями.
 - 3.4.4. Метод вироджених ядер з тригонометричними базисними функціями.

- 3.4.5. Метод Гальоркіна з кусково-лінійними базисними функціями.
- 3.4.6. Метод Гальоркіна з тригонометричними базисними функціями.
- 3.4.7. Метод ітерованої колокації з вузлами Гауса-Лежандра.
- 3.4.8. Метод Нистрьома з квадратурною формулою Сімсона.
- 3.4.9. Метод Нистрьома з квадратурною ф-лою трапецій.
- 3.4.10. Метод граничних елементів на основі методу колокації з лінійними граничними елементами і кусково-постійною апроксимацією густини.
- 4. Знайти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Клейна-Гордона у двозв'язній області методом IP у випадку гладкої границі заданої параметрично.
 - 4.1. Використати потенціал подвійного шару. Чисельне розв'язування IP здійснити одним з методів:
 - 4.1.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних квадратур.
 - 4.2. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування IP здійснити одним із методів:
 - 4.2.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних квадратур.
- 5. Знайти наближений розв'язок мішаної задачі Діріхле-Неймана для рівняння Клейна-Гордона у двозв'язній області методом IP у випадку гладкої границі заданої параметрично.
 - 5.1. Використати потенціал подвійного шару. Чисельне розв'язування IP здійснити одним з методів:
 - 5.1.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних квадратур.
 - 5.2. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування IP здійснити одним із методів:
 - 5.2.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних квадратур.
 - 5.3. Використати комбінацію потенціалів. Чисельне розв'язування отриманої системи IP другого роду здійснити одним із методів:
 - 5.3.1. Метод квадратур з використанням тригонометричних квадратур.