

УДК 519.3

## ОГЛЯД ПРОБЛЕМ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ У СТОМАТОЛОГІЇ

Т. Мандзюк, В. Вовк

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

Наведено огляд праць із застосування моделей теорії пружності до розв'язування задач біомеханіки у стоматології. Особливу увагу приділено одній з найактуальніших тем у сучасному числовому аналізі поведінки системи зуб–щелепа – моделюванню шару періодонта. Значна відмінність його фізико-механічних характеристик від інших конструктивних елементів зуба, зокрема його фіброволоконна будова, що має добре виражену властивість анізотропії, звужує межі застосовності багатьох визнаних спрощених моделей. Інші важливі обговорені у статті напрями сучасних досліджень біомеханіки зуба стосуються проблем імплантології, які сьогодні також успішно досліджують засобами комп'ютерного моделювання.

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання, періодонт, біомеханіка, огляд літератури.

### 1. ВСТУП

Історично перші методики вивчення біомеханіки зубів людини мали в основі фізичний експеримент. Серед них широкого застосування набули фотопружні системи (Caruto зі співавт., 1974), лазерна голографічна інтерферометрія (Burstone і Rgurutniewicz, 1980) тощо.

Стрімкий розвиток комп'ютерних технологій сприяв появі як нових напрямів у науці, так і розширенню досліджень у класичних її галузях. Не стала винятком і біомеханіка, аналіз математичних моделей якої потребує великої кількості обчислень. У стоматології через складність об'єктів дослідження цей напрям почав розвиватися порівняно недавно, разом із досягненням певної межі потужності електронно-обчислювальними засобами. Втім, сьогодні ця межа все ще не дає змоги моделювати зубощелепний апарат у цілому. Тому більшість сучасних числових досліджень обмежена аналізом пружно-деформованого стану окремого зуба або його протеза за умов силових і температурних навантажень.

Якісно нового етапу розвитку числові експерименти досягли з появою методу скінченних елементів (МСЕ), який добре пристосований до складної геометрії досліджуваних об'єктів. Його перші застосування у сфері стоматології були зосереджені на розв'язуванні стаціонарних задач (Thresher and Saito, 1973; Takahashi et al., 1980; Moss et al., 1985; Kawasaki et al., 1987) [28, 37, 40, 58]. Сьогодні кількість публікацій з використання МСЕ у цій галузі охоплює широкий спектр різноманітних проблем біомеханіки від класичних статичних задач міцності системи зуб–щелепа до новітніх методик вивчення її поведінки у динаміці. Серед них переважають дослідження впливу анізотропії м'яких тканин зуба на його пружно-деформований стан за умови силових і температурних навантажень, урахування пористості

кісткових тканин, а також вивчення наслідків включення у систему зуб–щелепа різноманітних імплантантів. Відчутна різниця у клінічній поведінці здорового зуба та його протеза стала ще однією з вагомих причин урізноманітнення публікацій.

Згадане розмаїття та численність напрямів сучасних досліджень з моделювання біомеханічних систем у стоматології потребують систематичного огляду наявної наукової літератури, що і стало нашою метою.

## 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У СТОМАТОЛОГІЇ

З огляду на функціональне призначення елементи зубощелепного апарату людини є достатньо твердими і пружними, тому для їхнього моделювання переважно застосовують співвідношення механіки деформівного твердого тіла. Втім, природна складність як геометрії, так і його структурної будови без потужних обчислювальних засобів зумовили появу цілої ієрархії спрощених моделей, які з різним успіхом прогнозували поведінку зуба під дією зовнішніх навантажень.

Один з найвагоміших внесків у цьому напрямі зробив А. Шварц, який у монографії [22] виокремив головні аксіоми і поняття біомеханіки зубощелепного апарату. Його теорія ґрунтувалась головно на спрощенні реальних процесів жування до аналізу поведінки систем з двох тіл: зуб–зуб, зуб–їжа, їжа–зуб. У цьому разі розглянуто різні способи її навантаження (в декількох точках, під певним кутом тощо), а також вплив інших фізико-механічних параметрів, наприклад, матеріалу зуба. Всі запропоновані спрощення мали на меті зведення вихідної задачі до класичних моделей теорії опору матеріалів. Для цього в зубі, як твердому тілі, вводили у розгляд поняття центра опору ( $C_{то}$  на рис. 1) та центра обертання ( $C_{то}$ ), відносно яких вивчали його поступальні та обертальні рухи в альвеолярній лунці. Зокрема, відносно центра опору обчислювали моменти руйнівних зусиль  $R_{оп}$ ,  $N_1$ ,  $F_T$ , які брали визначальними у прогнозуванні реакції зуба на навантаження. Для розрахунку використовували сили тертя, що виникають на межі контактних поверхонь, а також кути нахилів коронок зубів. Важливим припущенням такого підходу було розміщення обох центральних точок на поздовжній осі зуба, через що рівнодійна всіх реакцій на навантаження проходить саме через центр опору. Втім, реальне розміщення центра опору в широких межах залежить від геометрії та розмірів зуба, морфологічних та фізико-механічних характеристик його тканин і навіть умов навантаження [57, 59, 70], що призвело до складних експериментальних досліджень за допомогою лазерно-голографічних технологій, магнетичних сенсорів тощо. Ще більші проблеми в цієї моделі з визначенням місцеположення центра обертання, яке змінюється у часі, ускладнюючи цим прогнозування еволюції поведінки зуба.

Окремим напрямом у літературі стали намагання перенести ідеї А. Шварца на системи (зокрема, в ортодонтії), що складаються з декількох зубів, а то й щелепи

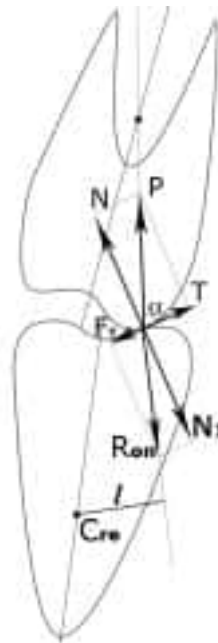


Рис. 1. Розміщення векторів сил моделі зуб–зуб за А. Шварцом.

загалом [31, 34, 55, 63, 72]. Для визначення центрів опору та обертання таких систем будували відповідні математичні моделі. Однак через надзвичайну складність вихідної задачі вони змушено опирались на масу штучно введених у модель параметрів, для визначення яких проводили численні клінічні дослідження. Зрештою однозначного висновку щодо успішності такого підходу так і не зроблено.

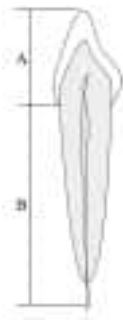


Рис. 2. Зуб як важіль першого роду.

Одним з відомих наступників А. Шварца у вдосконаленні спрощених моделей не тільки зуба, а й зубощелепного апарату став вітчизняний дослідник А.Н. Чуйко. В працях він критикував модель зуба як важеля першого роду [20], у якому достатні умови рівноваги трактували на рівні найпростіших законів механіки, наприклад, плече В має бути більшим від плеча А (рис. 2). Натомість А.Н. Чуйко запропонував альтернативну модель з двох балок різної жорсткості. Втім, ні ці уточнення, ні низка наступних так і не змогли адекватно змодельовати очевидно визначальний факт органічної цілісності системи зуб–щелепа. Головною перепоною на шляху подальшого розвитку спрощених моделей став тонкий шар періодонта, який завдяки м'якості та анізотропності сильно узалежнював поведінку системи від

геометрії контакту зуба з кістковими тканинами.

Фантастичний злет швидкодії обчислювальної техніки, що почався наприкінці ХХ ст., суттєво змінив підходи та засоби моделювання. Раніше недосяжно затратні числові схеми аналізу швидко опановували щораз нові горизонти складності розв'язуваних задач. Зокрема, поява методу скінченних елементів (МСЕ) максимально знизила залежність обчислювальних схем від геометрії досліджуваних об'єктів, що цілком відповідало потребам моделювання у сфері стоматології. Звичні, але часто вкрай складні проблеми якнайліпшої підгонки моделі досліджуваного об'єкта набором простіших моделей з відомими аналітичними методами аналізу змінилися на універсальні доволі незалежні етапи реалізації числових схем:

- дискретизація геометрії об'єкта;
- вибір простору апроксимацій;
- побудова і розв'язування системи (систем) алгебричних рівнянь;
- візуалізація результатів.

У багатьох галузях застосування слабо формалізованим, а тому і найбільш трудомістким для програмної реалізації етапом є побудова сітки МСЕ (далі без втрати загальності послуговуватимемось саме його термінологією). Зрозуміло, що це (чи не передусім) стосується стоматології з її абсолютно неklasичними геометричними формами багатокomпонентних шаруватих структурно-неоднорідних об'єктів (доволі детально геометричні вимірювання зубів наведено в працях [3, 17]).

Перші скінченно-елементні моделі в стоматології з огляду на тогочасний рівень ресурсів комп'ютера були не більш, ніж двовимірними (Thresher and Saito, 1973; Takahashi et al., 1980; Williams and Edmundson, 1984; Матвійчук О., 1997)[28, 37, 40, 58]. Втім з їхньою допомогою все ж вдалося скласти узагальнену картину пружно-деформованого стану зуба за умови функціонального навантаження. Зокрема в праці [13] описано механічну природу походження відомого клиноподібного дефекту у пришийкових ділянках як наслідок саме специфіки форми та структури

людського зуба. Поступово виявляли геометричні параметри, що найбільше впливають на концентрацію напружень: кривина поверхні окремих шарів зуба, наявність скатів та їхніх кутів нахилу, ступінь гостроти апекса кореня та його довжини тощо [54, 67]. Були навіть спроби розв'язування задач оптимізації [7, 8, 12, 78] (зрозуміло, в сфері ортодонції).

Отриману свободу у виборі геометрії доповнювали новими можливостями врахування крайових умов задачі про функціональне навантаження. Численні дослідження реакції зуба на дію сил різної інтенсивності під різноманітними кутами [38, 58, 61, 70, 71, 73] засвідчили природну пристосованість його геометрії більше до вертикальних навантажень [38, 52, 64].

Двовимірні моделі з огляду на складність геометрії вихідної задачі могли претендувати лише на якісне описання пружно-деформованого стану досліджуваного об'єкта. Проте цього було достатньо для аналізу взаємовпливу різних складових елементів зуба. Автори наукових публікацій намагалися охопити моделлю якомога більше таких шарів [9, 52]. Крім того, були спроби введення в розгляд різного роду імплантантів (пломби, штифти тощо) [16, 17].

Незважаючи на всі уточнення, найбільшою проблемою двовимірних моделей залишалось урахування крайових умов у разі виокремлення досліджуваної галузі із загальної системи зубощелепного апарату. Адекватне моделювання цих умов, що були принципово різними у напрямках вздовж і впоперек зубного ряду, потребували переходу до трьох просторових координат.

Перші дослідники тривимірних моделей (Tanne et al., 1987, Middleton et al., 1990) вимушено нехтували складною структурою зуба в намаганні з'ясувати найбільш загальні закономірності його поведінки як складової частини цілого жувального апарату. Однак швидке зростання обчислювальних потужностей комп'ютерів давало змогу будувати щораз детальніші сітки скінченних елементів, що з часом почали враховувати як шарувату будову зуба, так і складні умови його закріплення [27, 37, 40, 44, 49, 73]. Отримувані розв'язки щораз ліпше відповідали реальним значенням поля напружень у зубі за умов доброго підбору фізико-механічних параметрів його складових елементів. Проте згаданий підбір параметрів виявився доволі непростою справою, оскільки їхні значення варіювали у широкому діапазоні не тільки для різних об'єктів, а й у межах одного зуба. Це зумовило появу значної кількості публікацій [29, 40, 56, 68, 70, 79]. На підставі огляду більш ніж 50 з них наводимо найвживаніші в числових розрахунках інтервали зміни модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона тканин зубощелепного апарату, (табл. 1).

Таблиця 1

Найбільше використовувані значення механічних характеристик тканин зуба

Шари зуба	Модуль Юнга E, МПа	Стала Пуассона P
Зуб	$1,8 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4$	0,3
Кістка	$1,1 \cdot 10^4 - 1,38 \cdot 10^4; 2 \cdot 10^3$	0,26–0,3
<i>Спонгіозна</i>	$0,4 \cdot 10^4 - 0,5 \cdot 10^4$	0,3–0,32
<i>Кортикальна</i>	$1,37 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4$	0,3

Продовження таблиці 1

Емаль	$0,28 \cdot 10^4$ ; $2 \cdot 10^4$ ; $7,9 \cdot 10^4 - 8,4 \cdot 10^4$	0,28–0,33
Дентин	$1,5 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4$	0,25–0,31
Цемент	$1,5 \cdot 10^4 - 2,3 \cdot 10^4$	0,31
Періодонт	0,2–0,68; 2,5–3,2*; 5–6,8;	0,45–0,49
Пульпа (нерв)	2,03–2,07	0,45

Однією з основних причин доволі широких діапазонів варіювання наведених вище параметрів тканин (особливо періодонта та дентину) є анізотропія матеріалу. Дослідниками [25, 29, 36, 39, 44, 52] запропоновано низку моделей, що описують ті чи інші її варіанти.

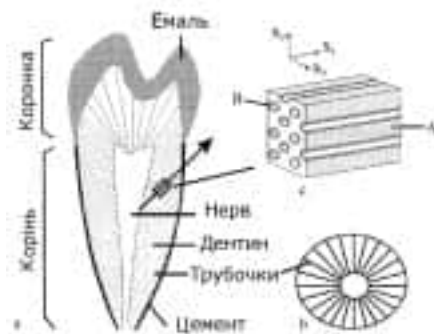


Рис. 3. Анізотропія дентину:  
а – осьовий переріз премоляра;  
b – поперечний переріз дентину;  
с – вирізка дентину.  
А – міжтрубна речовина;  
В – перитубулярний каналець [25].

Наприклад, у праці [25] дентин розглянуто як множину перитубулярних каналців, оточених міжтрубною речовиною (рис. 3). Його матеріал подано як трансверсально-ізотропний з урахуванням п'яти незалежних параметрів. Отриманий унаслідок цього розподіл напружень у системі емаль–дентин–кістка засвідчили, що механічні властивості дентину змінюються у напрямі вздовж каналців: його еластичність найменша в околі пульпи і найбільша на межі з кісткою.

Проблеми виокремлення досліджуваної ділянки зуба із загальної системи зубощелепного апарату вище обговорено згідно з історією її вивчення. Однак порівняно недавні результати аналізу

впливу тонкого шару періодонта на загальний рівноважний стан зуба під навантаженням [14, 33, 37, 40, 44, 59] ставлять під сумнів окремі попередні навіть уже доволі визнані факти. Врахування у моделі порівняно м'якого і сильно анізотропного періодонта, незважаючи на тонкість його шару, може принципово змінити картину пружно-деформованого стану системи загалом. Про однозначні висновки говорити ще рано, оскільки дослідження у цьому напрямі тільки розгортаються. Зважаючи на значний і щораз більший інтерес до них далі продовжимо обговорення проблем моделювання шару періодонта, підсумувавши наведений вище огляд розвитку моделей у стоматології такою схемою (рис. 4).

\* На різних рівнях кореня [20]

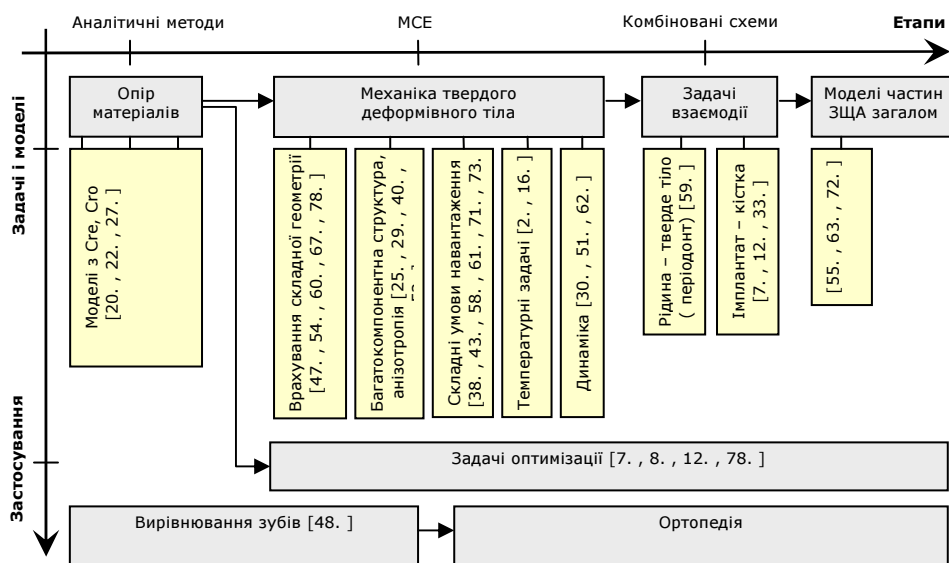


Рис. 4. Розвиток математичних моделей у стоматології.

### 3. БІОМЕХАНІКА ПЕРІОДОНТА

Шар періодонта є складовою частиною системи зуб–щелепа, як це зображено на рис. 5.

За будовою періодонт складається з майже паралельних фіброволокон, які врастають у цемент зуба з одного боку і альвеолярну кістку – з іншого, що зумовлює добре виражену анізотропію його матеріалу. Крім анізотропії, механічні властивості періодонта за показниками твердості та пружності сильно відрізняються від решти складових елементів конструкції зуб–щелепа і погано відповідають співвідношенням лінійної теорії пружності. Тому моделювання шару періодонта пов'язане зі значними математичними та обчислювальними труднощами, через що в багатьох дослідженнях механічні властивості пародонта по-різному намагаються адаптувати до ізотропних моделей.

Одним з перших системні спроби вивчення періодонта зробив А. Шварца [22]. Уже на найпростіших важливих моделях він запропонував низку важливих висновків: "...значення напружень у періодонті пропорційна до стиску періодонта й обернено пропорційна до його товщини...", "...дотичні напруження в кожній точці періодонта значно менші від нормальних..." тощо.

Подальший розвиток моделювання шару періодонта через складність вихідної задачі супроводжувався спробами врахування та нехтування тими чи іншими його властивостями. Низку публікацій з цього приводу нижче ми згрупуємо за окремими напрямками досліджень.

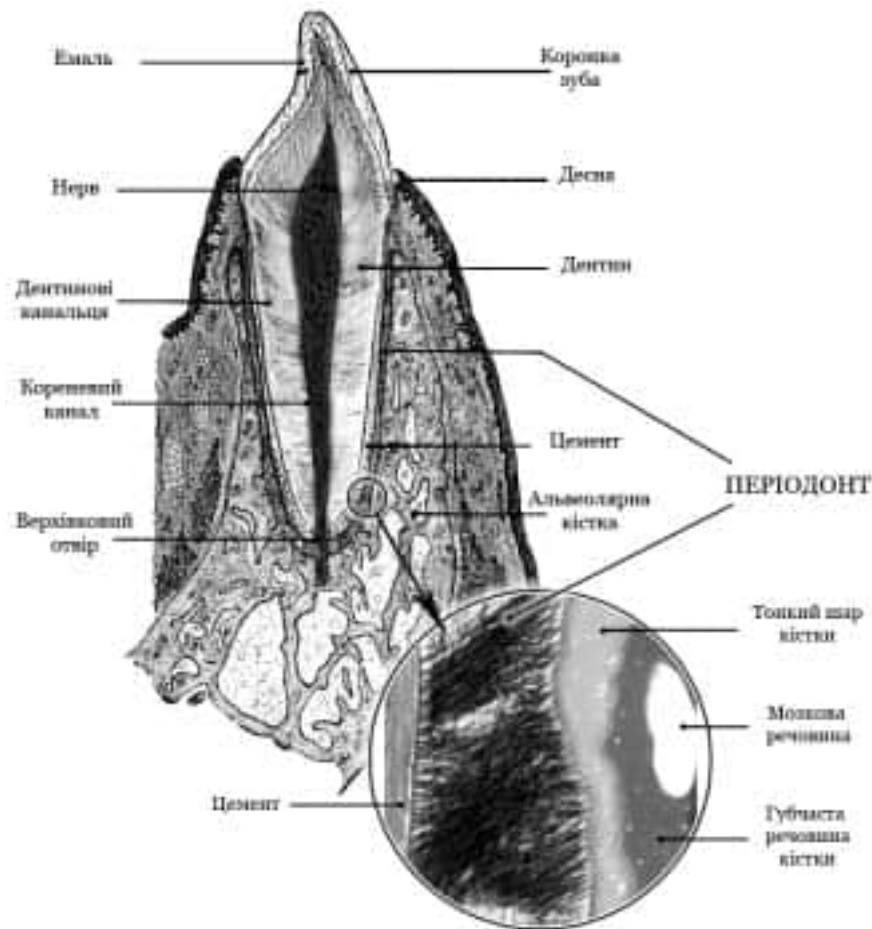


Рис. 5. Анатомія зуба людини [66].

**Ізотропні моделі пародонта.** Цей підхід властивий числовому аналізу багатокomпонентних моделей зуба засобами сучасних потужних універсальних програмних комплексів, які реалізують схеми МСЕ для широкого класу задач [5, 14, 57]. Одним з прикладів такого дослідження є праця [57], де в межах лінійної теорії пружності та за припущення ізотропності пародонта проведено числовий експеримент на тривимірних скінченно-елементних моделях поведінки зуба за умови різноманітних силових навантажень. Велику увагу приділено обчисленню ефективних усереднених (для моделювання ізотропії) фізико-механічних характеристик пародонта, для чого виконано значний обсяг високоточних фізичних експериментів на великій кількості людей. Результатом стали значення модуля Юнга пародонта (ізотропне наближення) –  $10^3$  МПа, коефіцієнт Пуассона – 0.45. У цьому разі автори звертають увагу на значну мінливість характеристик пародонта як між різними людьми, так і з їхнім віком та зі зміною інших параметрів. З огляду на це питання застосовності використаних ізотропних моделей теорії пружності для описання

поведінки реальних об'єктів обмежена посиланням на висновки інших авторів. Однозначним же твердженням є принципова необхідність урахування шару пародонта для достовірного моделювання реальних процесів реакції зуба на навантаження.

**Нелінійна поведінка пародонта.** На відміну від інших твердих компонент зубощелепної системи, нелінійна залежність модуля Юнга пародонта від умов його навантаження є доволі відчутною. Це стало предметом низки досліджень [29, 40, 56, 70, 79]. Характерний для багатьох з них прийом застосовано в [29], де на підставі фізичного експерименту виміряно відхилення зуба у пришийковій ділянці під дією горизонтально прикладених сил різної інтенсивності (рис. 6). Визначену нелінійну залежність апроксимовано двома прямими лініями, яким відповідають два ефективні значення модуля Юнга:  $E_1=0.085\text{MPa}$ ,  $E_2=4.3\text{MPa}$ .

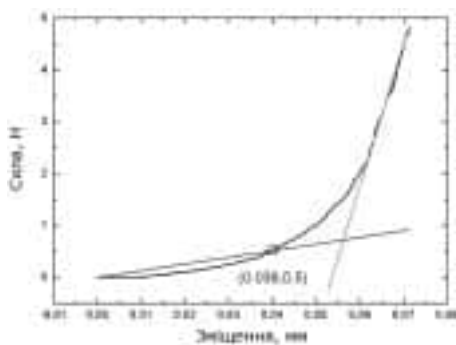


Рис. 6. Залежність зміщень шийки зуба від величини горизонтально прикладеної сили.

Однак нелінійна поведінка пародонта виявляється не тільки залежно від прикладеної сили. Наприклад, у праці [62] на підставі експериментів з зубами бика доведено, що час дії цієї сили також є джерелом нелінійності. Тому для виконання числових розрахунків пружні моделі там були скомбіновані з в'язко-пружними.

#### Анізотропні моделі пародонта.

Фіброволоконна будова пародонта чітко відображає структуру його анізотропії, яка визначена двома головними напрямками – удовж і впоперек волокон. Тому різноманіття моделей у публікаціях [28,

57] обмежене вибором того чи іншого напрямку волокон з урахуванням різних параметрів жорсткості цих волокон на розтяг та стиск. Внутрішнє розміщення шару пародонта разом зі швидкою втратою його властивостей поза межами живого оточення сильно ускладнює пряме фізичне експериментування з його тканинами. Тому більшість числових досліджень [29, 59] мають на меті лише якісний аналіз головних характеристик його поведінки у широкому (гіпотетичному) діапазоні зміни фізико-механічних параметрів пародонта.

Типовим таким дослідженням є праця [57], у якій засобами скінченно-елементного аналізу з позицій вивчення зміщень центрів опору та обертання зуба виконано порівняння його реакції на навантаження за умов вибору трьох характерних напрямків фіброволокон: горизонтальний, нормальний до межі пародонта та відповідний експериментальним даним. Доволі несподівано найбільшу відповідність фізичним спостереженням продемонструвала модель із горизонтальним напрямком волокон, при чому таке їхнє розташування не відповідає реальній анатомії зуба. Отож, для уточнення вибраної моделі треба враховувати додаткові особливості поведінки пародонта. Серед претендентів на включення в модель автори зазначають той факт, що пародонт містить 14 різних типів фіброволокон у перехресних напрямках з різною концентрацією по висоті зуба.



Для продовження обговорення сучасних проблем у моделюванні періодонта звертаємо увагу на працю [40], у якій ретельно узагальнено дослідження пародонта багатьма авторами, (табл. 2).

Таблиця 2

Фізико-механічні властивості пародонта людини, використані у попередніх працях

Посилання	Модуль Юнга, МПа	Стала Пуасона	Зуб	Метод
Yamada (1970)	1,4	–	Усі зуби	Експеримент
Thresher and Saito (1973)	1379	0,45	Верхній різець	2d-MSE
Atkinson and Ralph (1977)	3,8	–	Нижній премоляр	Експеримент
Yettram et al. (1977)	0,18	0,49	Верхній різець	2d-MSE
Takahashi et al. (1980)	9,8	0,45	Нижні зуби	2d-MSE
Atmaran and Mohammed (1981)	175–350 <sup>***</sup>	0,45	Моляр	2d-MSE
Williams and Edmundson (1984)	0,5–100 <sup>**</sup>	0–0,45 <sup>**</sup>	Однокореневий	2d-MSE
Mandel et al. (1986)	3	–	Нижній премоляр	Експеримент
Siegele et al. (1986)	0,26; 8,5 <sup>*</sup>	0,28	Верхній різець	2d-MSE
Tanne et al. (1987)	0,69	0,49	Нижній премоляр	3d-MSE
Farah et al. (1988)	6,9	0,45	Нижній моляр	2d-MSE
Andersen et al. (1991)	0,07	0,49	Нижній премоляр	Експеримент, 3d-MSE
Jones et al. (2001)	1	0,45	Верхній різець	Експеримент, 3d-MSE
Middleton et al. (1996)	0,75–1,5 <sup>***</sup>	0,45	Ікло	2d-MSE
Rees and Jacobsen (1997)	50	0,49	Нижн. премоляр	Експеримент, 2d-MSE
Yoshida et al. (2001)	0,25–0,96 <sup>**</sup>	0,45	Верхній різець	Експеримент, 3d-MSE
Poppe et al. (2002)	0,05; 0,28 <sup>*</sup>	0,30	Різці, ікла	Експеримент, 3d-MSE

\* Розрахунки з урахуванням білінійної поведінки модуля пружності.

\*\* Розрахунки з урахуванням різних значень модуля Юнга.

\*\*\* Розрахунки з урахуванням двокомпонентної структури періодонта.

#### 4. МОДЕЛІ В ІМПЛАНТОЛОГІЇ

Комп'ютерні моделі “живих” зубів людини дають змогу пояснити, а отже, і запобігти розвитку окремих негативних процесів, що призводять до захворювання зубощелепної системи. Втім до керування ні геометричними формами, ні фізико-механічними параметрами жива система зі зрозумілих причин не надається. Звідси стає зрозумілою особлива увага дослідників до сфери ортопедії з її широким набором задач оптимізації конструкцій у протезуванні.

Як і в лікувальній стоматології тематичні напрями досліджень задач ортопедії розвивались за принципами відповідності практичних потреб поточному рівню розвитку обчислювальної техніки. Відповідно до цих напрямів розглянемо окремі публікації.

**Пломби та інші імплантати живого зуба.** Пломби є найпоширенішими і найзручнішими для аналізу за допомогою числових методів протезами, через що їхньому вивченню присвячена велика кількість праць. Доволі умовно їх можна згрупувати за трьома розділами.

Найчисленніші за кількістю публікацій дослідження залежності пружно-деформованого стану зуба від геометричних характеристик пломби. Типовими прикладами таких праць є [6, 24, 76], де вивчено параметри міцності системи зуб–пломба залежно від товщини збережених бічних стінок зуба за різних умов реставрації (наприклад, із внутрішнім або зовнішнім розміщенням імплантанта) та функціонального навантаження.

Значна кількість публікацій (наприклад, [2, 65]) містить порівняльний аналіз поведінки різноманітних матеріалів (метал, пластмаса, кераміка, композити та ін.) як наповнювачів пломби. Предметом обговорення тут є проблеми технологічної взаємодії штучних матеріалів з тканинами зуба та між собою, раціональний підбір фізичних характеристик імплантатів тощо.

Доволі часто трапляються праці з включенням у досліджувані моделі різноманітних додаткових параметрів та шуканих величин. Зокрема в [2, 15] вивчено вплив температури на функціональну придатність вкладок з різноманітними коефіцієнтами теплового розширення.

**Штифтові та еластичні включення.** Методика введення металевого штифта в канал кореня зруйнованого зуба для фіксування його штучної коронкової частини сьогодні широко запроваджена у практику протезування [11, 18, 46, 74] (рис. 7).

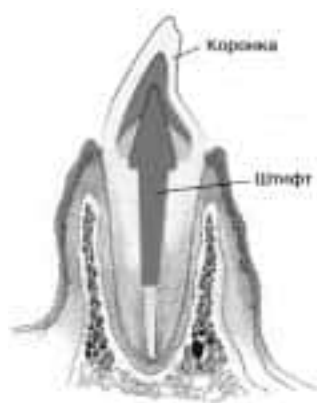


Рис. 7. Штифтове включення [18].

Проте механіка такого з'єднання кореня і базису пов'язана із вкрай високим рівнем концентрації напруженого стану в околі їхнього контакту зі штифтом. Дослідженням з цього приводу присвячена велика кількість публікацій [4, 11, 45, 47, 78]. Серед вирішуваних у них проблем центральним є питання підбору оптимальних за функціональністю геометричних та фізичних параметрів штифта, які забезпечують надійне з'єднання елементів протеза між собою за допустимого рівня пружного стану в околі контакту. Наприклад, у [78] для цього виконано порівняння МСЕ-моделі здорового зуба та відновленого за допомогою конусоподібного, циліндричного й інших типів штифтів, виготовлених зі сталі, титану, карбону, скловолокна.

Низка праць [11, 45] містить аналіз проблеми забезпечення потрібного розподілу навантаження від штучного базису зуба між його коренем та слизовою. У цьому напрямі показовими є дослідження [11], у яких завдяки введенню еластичного прошарку між протезом та слизовою досягають рівномірного навантаження слизової по всій площі контакту.

**Аналіз взаємодії імплантатів із прилеглими кістковими тканинами.** Ділянка контакту будь-якої живої тканини та імплантата апріорі містить потенційну небезпеку взаємної несумісності і, вочевидь, стоматологія не є винятком. Це пояснює значну кількість досліджень у напрямі запобігання ресорбції кісткової тканини та виникненню інших різноманітних дегісценцій [8, 21, 41]. Із біомеханічних чинників у літературі найчастіше вивчають вплив функціонального навантаження на концентрацію напружень у зоні контакту. Переважно для цього застосовують 2D та 3D МСЕ-моделі. Зокрема, в [1] зазначено, що штифтові з'єднання значно ліпше працюють в умовах вертикальних осьових навантажень, аніж під дією горизонтальних складових зусиль, які здебільшого притаманні переднім різцям, а отже, їм не рекомендовані. Схожі дослідження для місткоподібних конструкцій виконані в [8].

Стабілізуювальний вплив шару періодонта на загальний напружений стан зуба послугував прототипом цікавої ідеї про кріплення металевго штифта у дентині кореня зуба не класичним жорстким цементним склеюванням, а за допомогою м'якої прокладки, так званого пери-імплантанта, що клінічно подібний до м'якої тканини навколо здорового зуба. В [33] на 2D та 3D моделях проаналізовано напружений стан в околі такого з'єднання. Підтверджено підвищену стійкість досліджуваної системи з імплантатом до динамічних навантажень.

Для пацієнтів з вузькими альвеолярними кістковими відростками використання імплантантів поєднують з підвищеним ризиком механічного перевантаження кісткової опори. Серед досліджень у цьому напрямі варто назвати [35].

**Протезні конструкції загалом (у тім числі багатоелементні та місткоподібні).** Потреби числового моделювання поведінки навіть окремого зуба через складність його багатозарової геометрії в багатьох випадках перевищують можливості сучасної комп'ютерної техніки. Тому розрахунки цілого щелепного апарату людини чи навіть його частини потребують настільки значного спрощення моделей окремих його елементів, що отримувані результати можуть претендувати максимум на якісний характер.

Дещо ліпша ситуація з багатокомпонентними протезними конструкціями, які за не менш складної форми, аніж зуби, все ж мають значно простішу внутрішню будову. Переважна кількість публікацій у цьому напрямі присвячена вивченню трьох типів цих конструкцій: місткоподібних протезів, частково знімних та бюгельних [8, 10, 21, 42].

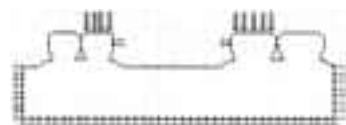


Рис. 8. Точки закріплення навантажень у разі заміщення дефекту зубного ряду мостоподібним протезом [10].

Типовим прикладом таких досліджень є праця [10], у якій розглянуто 2D модель заміщення двох премоларів та одного моляра протезом за умови вертикального навантаження (рис. 8). Аналіз напруженого стану в системі із застосуванням різних конструкцій протеза дав змогу для цього випадку пропонувати саме бюгельний варіант, який забезпечує найоптимальніший розподіл жувального навантаження на опорні зуби і протезне ложе.

Складність 3D моделей для багатокомпонентних протезів спонукає дослідників поєднувати числові та натуральні експерименти, як це зроблено, наприклад, у [8]. Для звуження галузі, яку вивчають,

до прийнятних за кількістю обчислень меж частину крайових умов на її границі отримують тензометричними вимірюваннями. Втім, за розглянутих у праці умов протезування та функціонального навантаження на конструкцію обчислений рівень напруженого стану в ділянці контакту живої тканини та протеза наближається до фізіологічно допустимого. Це приводить до доволі типової для цього напрямку досліджень ситуації, коли для надійного обґрунтування тих чи інших висновків та рекомендацій у модель необхідно закладати свідомо достатній запас міцності для компенсації динамічних, нелінійних, мікробіологічних та інших чинників ризику руйнування протезних конструкцій. Зокрема, оцінка розміру нелінійної складової напруженого стану для жорстких та нежорстких видів з'єднань вивчена в [42].

**Задачі оптимізації у протезуванні.** Ітераційність відомих сьогодні методів оптимізації числових моделей передбачає цілеспрямований перебір допустимих варіантів конструкції протеза. Проте якщо функцію цілі тут доволі легко визначити

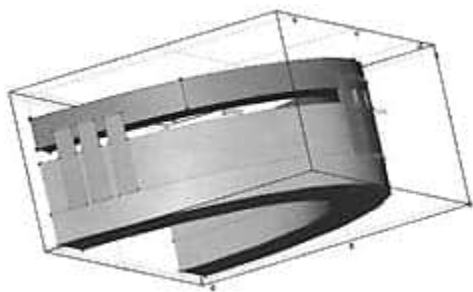


Рис. 9. Графічна модель повної відсутності зубів нижньої щелепи, заміненої незнімним протезом з опорою на остеointегровані імплантати [7].

(допустимий рівень напружень, максимальна вага, тощо), то формулювання геометричних обмежень для числової моделі виглядає реальним лише для найпростіших за формою імплантантів. Це підтверджує порівняно невелика кількість знайдених нами публікацій у цьому напрямі, серед яких до огляду пропонуємо [7, 12, 41]. Зокрема, в [7] розглянуто задачу про проектування незнімного протеза у випадках кінцевого дефекту зубного ряду та повної відсутності зубів за методикою, що передбачає наявність деякої кількості

імплантантів як опор для майбутньої протезної конструкції. Для оптимізації їхньої кількості та геометричних параметрів (довжини та діаметра) засобами програмного комплексу FEMLAB побудовано МСЕ-модель (рис. 9), за допомогою якої контролювали рівень пружно-деформованого стану кістки щелепи. На підставі низки числових експериментів дано чіткі рекомендації щодо кількості, розміщення та параметрів імплантованих штифтів.

##### 5. ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У СТОМАТОЛОГІЇ

Перші прикладні програми аналізу поведінки зуба за умов функціонального навантаження реалізували доволі специфічні (з огляду на вимушену простоту) математичні моделі. Головним завданням був пошук витончених засобів боротьби зі слабкістю тогочасної обчислювальної техніки, через що розробка таких програм, межуючи з мистецтвом, потребувала значних затрат.

Поява МСЕ, підтримана вибуховим зростанням потужності комп'ютерів, привела до створення універсальних програмних комплексів як автоматичного проектування (AutoCAD [45], SolidWorks [20], Pro/ENGINEER та ін.), так і багатоцільових програм, що реалізують МСЕ (ANSYS [43, 29, 78], ABAQUS [32, 45, 52, 59], COSMOS [20, 28, 40, 79], NASTRAN [26], PATRAN [25, 37] та ін.). Опираючись на універсальність і надійність їхніх засобів моделювання, переважна

більшість дослідників тепер змогла зосередитись на вирішенні безпосередніх задач у вибраній галузі. З цієї причини, зокрема в стоматології, в оглянутих нами сучасних наукових публікаціях авторські програмні розробки майже не трапляються.

Проте універсальність потужних програмних комплексів зручна за умови розв'язування задач для конструкцій, що складаються з частин класичної геометрії. Побудова ж сітки скінченних елементів для реальних стоматологічних об'єктів саме через цю універсальність украй трудомістка, особливо, коли йдеться про необхідність варіювання геометрією досліджуваного об'єкта. Очевидною є потреба у розробці та уніфікації спеціалізованих до задач стоматології засобів триангуляції складних багатокomпонентних областей [11, 14, 21].

Проблеми з просторовою дискретизацією особливо відчутні в разі запровадження комп'ютерного аналізу в клінічну практику [19, 23]. Крім обчислювальної техніки, вочевидь, додатково потрібні засоби сканування геометрії досліджуваного об'єкта. Класичним прикладом такого тандему є прилади родини CEREC, що містять програмний пакет конструювання CEREC 3D [19]. Спеціалізація таких програмно-апаратних комплексів забезпечує швидкий аналіз моделі вибраного об'єкта, однак платою за це є слабка їх придатність для наукових досліджень.

## 6. ВИСНОВКИ

Отже, початкове різноманіття в моделях та способах їхнього дослідження перших праць у галузі стоматологічної біомеханіки поступово зникає. Тематика публікацій у цьому напрямі стає щораз усталенішою з постійним ухилом у бік експериментування з численними моделями, зреалізованими засобами стандартних МСЕ-пакетів.

Сьогодні визнаною математичною моделлю поведінки зубощелепної системи за умов функціонального навантаження є рівняння тривимірної теорії пружності. Розроблені відповідні комп'ютерні моделі доволі успішно долають більшість проблем, пов'язаних із складною геометрією та шаруватою структурою стоматологічних об'єктів. Очікуване подальше зростання потужності обчислювальної техніки вже в недалекому майбутньому дасть змогу аналізувати повну модель зубощелепного апарату з імплантатами та протезними елементами включно.

Однак ці доволі оптимістичні прогнози в наукових публікаціях сьогодні звучать уже не так впевнено, як раніше. Щораз частіше з'являються свідчення, що такий погляд на моделювання задач біомеханіки поступово переживає себе. Уточнення комп'ютерних моделей екстенсивним шляхом згущення скінченно-елементних сіток виправданий (можливо) більше для геометрично складних систем, які добре надаються до наближення лінійними моделями. Багатокomпонентні ж конструктивно складні сильно неоднорідні біосистеми переважно демонструють нелінійну поведінку, що у черговий раз засвідчує приклад з вирішальним для поведінки зубощелепної системи значенням прошарку періодонта.

Головною розвинутою методологією сучасного апарату числового аналізу нелінійних задач залишається все та ж їхня лінеаризація. Отже, до уваги беруть лише перші головні власні форми взаємодії системи з навколишнім середовищем. Щодо біосистем такий підхід у багатьох випадках виявився занадто спрощеним. На наш погляд, перспективу подальшого розвитку матимуть нелінійні моделі у парі з новими сучасними синергетичними підходами до їхнього аналізу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Галькевич П.Й., Вовк Ю.В., Коркуна А.М.* Моделювання та розрахунок систем типу імплантант–кісткова тканина щелепи людини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2000. Вип. 3. С. 92–97.
2. *Германчук С.М.* Математичне обґрунтування технологічного з'єднання сплаву металі та керамічного покриття // Укр. стоматол. альманах. 2001. № 3. С. 39–40.
3. Гистология тканей зуба // <http://www.ctomakc.ru/gistologiya-tkanei-zuba>
4. *Годований В.О.* Особливості розподілу напружень у корені зуба, реставрованого штифтовими конструкціями, отримані методом тривимірного комп'ютерного моделювання // Новини стоматології. 2002. № 1. С. 41–43.
5. *Гризодуб В.И., Чуйко А.Н., Бахуринский Н.Ю.* Основные биомеханические характеристики тканей пародонта // Вісник стоматології. 2001. № 1. С. 59–65.
6. *Жаров М., Крупінський Є.* Непрямі композитні реставрації при значному руйнуванні коронок бічних зубів // Новини стоматології. 2005. Вип. 4(45). С. 77–83.
7. *Заблоцький Я.В., Дидик Н.М., Гжегоцький М.М.* Математичне моделювання заміщення дефектів зубних рядів незнімними протезами з опорою на остеоінтегровані імплантати // Новини стоматології. 2005. Вип. 4(45). С. 56–62.
8. *Карл М., Вінтер В.* та ін. Аналіз кінцевого елемента для визначення навантаження на кістку, спричиненого багатоланковими супраструктурами з опорою на імплантати // Новини стоматології. 2005. Вип. 4(45). С. 36–41.
9. *Клочан С.Н.* Особенности напряженно-деформированного состояния зуба и околозубных тканей верхней челюсти во фронтальном участке при внешних динамических нагрузках и возможности их защиты при занятиях контактными видами спорта // Совр. стоматология. 2006. Февраль.
10. *Лазарев С.А.* Изучение влияния различных видов протезов на протезное ложе и опорные зубы на математической модели // Стоматология для всех. 2003. № 4. С. 8–10.
11. *Лещук С., Вовк В.Д.* Тестування нової технології зубного протезування методами комп'ютерного моделювання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2003. Вип. 6. С. 166–177.
12. *Матвеева А.И., Гаврюшин С.С.* и др. Использование математического моделирования при планировании ортопедического лечения больных с дефектами зубного ряда верхней челюсти с применением имплантатов // Панорама ортопед. стоматологии. 2002. № 3. С. 20–25.
13. *Матвійчук О.Я.* Некаріозні пришийкові ураження як наслідок функціональних зубо-щелепових патологій: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. мед. наук. Львів, 1997.
14. *Наумович С.А., Крушевский А.Е., Кожич П.П.* Визуализация полей напряжений в периодонте при действии произвольной силы // Науково-дослідна робота БДМУ. 1999–2003.
15. *Путалова И.Н., Семенюк В.М.* и др. Опытная проверка математической модели нижнечелюстного моляра // Бюлл. Со РАМН. 2003. № 3 (109).
16. *Рогожников Г.И., Логинов В.А.* та ін. Реставрация твердых тканей зубов вкладками. М.: Мед. книга; Н. Новгород: Изд. НГМА, 2002. С. 82–118.

17. *Степанов А.Е.* Косметическое восстановление коронок зубов. М.: АОЗТ "Паритет", 1999. С. 70–86.
18. *Уханов М.М.* Пути и решения проблемы укрепления реставрации коронковой части зуба // 100матология on-line. 2001. <http://www.100mat.ru/profession/ts1.htm>
19. Тривимірне конструювання з CEREC // Новини стоматології. 2005. Вип. 4(45). С. 14–17.
20. *Чуйко А.М., Вовк В.Е., Гризодуб В.І., Романов М.Г.* Біомеханіка періодонта: порівняльний аналіз монографій "Заболевание периодонта" (под ред. Н.Ф. Данилевского) і "Особенности биомеханики в стоматологии" (А. Чуйко, В. Вовк) // Новини стоматології. 2006. Вип. 4 (49). С. 10–20.
21. *Чуйко А.Н., Вовк В.Е.* О роли и возможностях биомеханического анализа в имплантологии // Стоматолог. 2004. № 6. С. 32–37; № 7. С. 32–34.
22. *Шварц А.Д.* Биомеханика і окклюзия зубов. М.: Медицина, 1994.
23. 3D scanners and CAD/CAM software // <http://www.3shape.com>
24. *Ausiello P., Apicella A., Davidson C.L., Rengo S.* 3D-finite element analyses of cusp movements in a human upper premolar, restored with adhesive resin-based composites // J. of Biomechanics. 2001. Vol. 34. N 10. P. 1269–1277.
25. *Bo Huo et al.* An Homogeneous and Anisotropic Constitutive Model of Human Dentin // J. Biomech. 2005. Vol. 38. P. 587–594.
26. *Boruszewski W. et al.* Stress Distributions in Mandibles Around Osseo-integrated Implants, According to the Occlusion Pattern, Using MSC/NASTRAN Three-Dimensional Modeling // [www.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc96](http://www.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc96)
27. *Bourauel C.C. et al.* Computer-aided analysis of the biomechanics of tooth movements // Int. J. Comput. Dent. 2007. Vol. 10. P. 25–40.
28. *Cattaneo P.M., Dalstra M., Melsen B.* The Finite Element Method: a Tool to Study Orthodontic Tooth Movement // J. Dent. Res. 2005. Vol. 84(5). P. 428–433.
29. *Dorow C., Schneider J., Sander F.G.* Finite Element Simulation of in Vivo Tooth Mobility in Comparison with Experimental Results // J. Mech. Med. Biol. 2003. Vol. 3 (1). P. 79–94.
30. *Driel W. D., Leeuwen E. J. et al.* Time-dependent Mechanical Behaviour of the Periodontal Ligament // Proc. IME H. J. Eng. Med. 2000. Vol. 214. N 5. P. 497–504.
31. *Farah J. W., Craig R. G., Meroueh K. A.* Finite element analysis of a mandibular model // J. of Oral Rehabilitation. 1988. Vol. 15(6). P. 615–624.
32. *Gei M., Genna F., Bigoni D.* An Interface Model for the Periodontal Ligament // J. Biomech. Eng. 2002. Vol. 124(5). P. 538–546.
33. *Giulio Menicucci et al.* Tooth-implant connection: some biomechanical aspects based on finite element analyses // Clinical Oral Implants Research. 2002. Vol. 13 (3). P. 334–341.
34. *Gross M. D., Arbel G., Hershkovitz I.* Three-dimensional finite element analysis of the facial skeleton on simulated occlusal loading // J. Oral Rehabil. 2001. Vol. 28 (7). P. 684–694.
35. *Hans Van Oosterwyck et al.* Peri-implant bone tissue strains in cases of dehiscence: a finite element study // Clinical Oral Implants Research. 2002. Vol. 13(3). P. 327–333.
36. *Hoffmeister B. K., Smith S. R., Handley S. M., Rho J. Y.* Anisotropy of Young's Modulus of Human Tibial Cortical Bone // Med Biol Eng Comput. 2000. Vol. 38. N 3. P. 333–338.

37. Jones M.L. et al. A Validated Finite Element Method Study of orthodontic tooth movement in the human subject // J. Orthod. 2001. Vol. 28(1). P. 29–38.
38. Jost-Brinkmann P.G., Tanne K., Sakuda M., Miethke R.R. A FEM Study for the Biomechanical Comparison of Labial and Palatal Force Application on the Upper Incisors. Finite Element Method // Fortschr Kieferorthop. 1993. Vol. 54(2). P. 76–82.
39. Katz J. L., Meunier A. The Elastic Anisotropy of Bone and Dentitional Tissues // J Mater Sci Mater Med. 2005. Vol. 16. N 9. P. 803–806.
40. Kawarizadeh A., Bourauel C. and Jäger A. Experimental and Numerical Determination of Initial Tooth Mobility and Material Properties of the Periodontal Ligament in Rat Molar Specimens // Eur. J. Orthod. 2003. Vol. 25. P. 569–578.
41. Leuven K.U. Course Material for Prosthetic Dentistry and Implant Dentistry // 2003. <http://www.feppd.org/ICB-Dent/index.htm>
42. Lin C-L, Wang J-C, Chang W-J. Biomechanical interactions in tooth-implant-supported fixed partial dentures with variations in the number of splinted teeth and connector type: a finite element analysis // Clin. Oral Impl. Res. 2008. Vol. 19. P. 107–117.
43. Lin Chun-Li. Nonlinear Finite Element Analysis of a Splinted Implant with Various Connectors and Occlusal Forces // Int. J. Oral Maxillofac Implants. 2003. Vol. 18. N 3. P. 331–367.
44. Lu H.P., Fu M.K., Huang J.F. Three Dimensional Finite Element Analysis of Stress Induced by Orthodontic Forces in the Periodontal Tissue // Zhonghua Kou Qiang Yi Xue Za Zhi. 1994. Vol. 6 (29). P. 332–335, 384.
45. Manoj Khanala, Zengtao Chen, Ying Zheng. Finite Element Analysis Of Mechanical Behaviour Of Dental Materials. // The Internet J of Dental Science. 2006. Vol. 1. N 2.
46. McLean Alex. Predictably Restoring Endodontically Treated Teeth // J Can Dent Assoc. 1998. Vol. 64. P. 782–787.
47. Monzavi A., Nokar S., Javadi HR. The Effects of Post Diameter on Stress Distribution in Maxillary Central Incisor, A Three Dimensional Finite Element Study // J. of Dentistry. Tehran University of Medical Sciences. 2004. Vol. 1. N 2. P. 17–23.
48. Motoyoshi M., Hirabayashi M., Shimazaki T., Namura S. An Experimental Study on Mandibular Expansion: Increases in arch Width and Perimeter // European Journal of Orthodontics. 2002. Vol. 24. N 2. P. 125–130.
49. Motta A. B., Pereira L. C., Andreia R.C.C. da Cunha. Finite Element Analysis in 2D and 3D Models for Sound and Restored Teeth // ABAQUS Users' Conference. 2006. P. 329–343.
50. Natali A.N., Pavan P.G., Carniel E.L., Dorow C. Transversally Isotropic Elasto-damage Constitutive Model for the Periodontal Ligament // Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin. 2003. Vol. 6 (5,6). P. 329–336.
51. Natali A.N., Pavan P.G., Carniel E.L., Dorow C. Viscoelastic Response of the Periodontal Ligament: an Experimental-numerical Analysis // Connect Tissue Res. 2004. Vol. 45 (4,5). P. 222–230.
52. Neves A.A., Pereira L.C., Duda F.P. Stress Distribution in Bidimensional Finite-element Models Regarding Enamel Anisotropic Properties // 83rd General Session Exhibition of the IADR. 2005. Vol. 1. P. 1–2.
53. O'Brien W.J. Biomaterials Properties Database // Website of University of Michigan-NIDR Materials Science Research Center. 1997. [http://www.lib.umich.edu/dentlib/Dental\\_tables/toc.html](http://www.lib.umich.edu/dentlib/Dental_tables/toc.html)



54. *Pan S., Feng H., Yin Y.* The Influence of Different Root Length on Stress Distribution in the Bone Around Abutment Root of Telescopic Overdenture // *Zhonghua Kou Qiang Yi Xue Za Zhi.* 2000. Vol. 35(1). P. 67–68.
55. *Papageorgiou Ioannis S.* The Center of Resistance of Teeth in Orthodontics // *Hellenic orthodontic review.* 2005. Vol. 8. P. 41–55.
56. *Poppe M, Bourauel C, Jäger A.* Determination of the Elasticity Parameters of the Human Periodontal Ligament and the Location of the Center of Resistance of Single-rooted Teeth // *J. of Orofacial Orthopedics.* 2002. Vol. 63, N 5. P. 358–370.
57. *Provatidis C.G. et al.* A Comparative FEM-study of Tooth Mobility Using Isotropic and Anisotropic Models of the Periodontal Ligament // *Med Eng Phys.* 2000. Vol. 22(5). P. 359–370.
58. *Puente M.I., Galban L., Cobo J.M.* Initial Stress Differences Between Tipping and Torque Movements. A Three-dimensional Finite Element Analysis // *Eur. J. Orthod.* 1996. Vol. 18(4). P. 329–339.
59. *Qian H., Chen J., Katona T.R.* Finite Element Analysis of the Influence of PDL Fibers on Orthodontic Tooth Movement // *International Society of Biomechanics Meeting, 5–7 August 1999, Calgary, Alberta, Canada.*
60. *Romeed S.A., Fok S.L., Wilson N.H.F.* A comparison of 2D and 3D finite element analysis of a restored tooth // *J. of Oral Rehabilitation.* 2006. Vol. 33. N 3. P. 209–215.
61. *Rudolph D.J., Willes M.G., Sameshima G.T.* A Finite Element Model of Apical Force Distribution From Orthodontic Tooth Movement // *The Angle Orthodontist.* 2000. Vol. 71. N 2. P. 127–131.
62. *Shibata T. et al.* Mechanical Behavior of Bovine Periodontal Ligament under Tension–Compression Cyclic Displacements // *Eur. J. Oral Sci.* 2006. Vol. 114(1). P. 74–82.
63. *Sia SheauSoon, Koga Yoshiyuki, Yoshida Noriaki.* Determining the Center of Resistance of Maxillary Anterior Teeth Subjected to Retraction Forces in Sliding Mechanics // *Angle Orthod.* 2006. Vol. 77. N 6. P. 999–1003.
64. *Shinishiro Tada, Osamu Miyakawa.* Influence of Implant Design and Bone Quality on Stress/Strain Distribution in Bone Around Implants: A 3-dimensional Finite Element Analysis // *The international J of Oral & Maxillofacial Implants.* 2003. Vol. 13. P. 357–367.
65. *Sorrentino R.* A Study into the Laboratory Techniques for Investigating the Resistance to Fracture and the Clinical Performances of Endodontically-treated Teeth Restored with Fiber Posts and Different Restorative Materials Configurations. Mechanical Tests and Finite Element Analyses // *PhD Programme in Biotechnologies Section of Dental Biomaterials. University of Siena.* 2006.
66. *Spiller Martin S.* Dental Technical Information // <http://www.doctorspiller.com>
67. *Tanne K., Burstone C.J., Sakuda M.* Biomechanical Responses of Tooth Associated with Different Root Lengths and Alveolar Bone Heights: Changes of Stress distributions in the PDL // *J. Osaka Univ Dent Sch.* 1989. N 29. P. 17–24.
68. *Tanne K., Yoshida S. et al.* An Evaluation of the Biomechanical Response of the Tooth and Periodontium to Orthodontic Forces in Adolescent and Adult Subjects // *Br. J. Orthod.* 1998. Vol. 25. P. 109–115.
69. *The Science of Orthodontics // Website of University of North Carolina at Chapel Hill.* 1999. [http://www.unc.edu/depts/appl\\_sci/ortho/](http://www.unc.edu/depts/appl_sci/ortho/)

70. *Vollmer D. et al.* Determination of the Centre of Resistance in an Upper Human Canine and Idealized Tooth Model // *Eur. J. Orthod.* 1999. Vol. 21(6). P. 633–648.
71. *Yijin Ren, Jaap C. Maltha et al.* Optimum Force Magnitude for Orthodontic Tooth Movement: A Systematic Literature Review // *Angle Orthod.* 2002. Vol. 73. N 1. P. 86–92.
72. *Yoshida N, Koga Y, Mimaki N, Kobayashi K.* In Vivo Determination of the Centres of Resistance of Maxillary Anterior Teeth Subjected to Reaction Forces // *Eur. J. Orthod.* 2001. N 23. P. 529–534.
73. *Yukio Kojimaa, Hisao Fukui.* A Numerical Simulation of Tooth Movement by Wire Bending // *Am. J. Orthod Dentofacial Orthoped.* 2006. Vol. 130. N 4. P. 452–459.
74. Why choose Snowpost® composite posts? // <http://www.snowpost.com/fiber-reinforced-dental-posts.html>
75. *Williams K.R., Edmundson J.T.* Orthodontic tooth movement analysed by the Finite Element Method // *Biomaterials.* 1984. Vol. 5(6). P. 347–351.
76. *Winkler M.M., Katonah T.R., Paydarl N.H.* Finite Element Stress Analysis of Three Filling Techniques for Class V Light-cured Composite Restorations // *J. Dent. Res.* 1996. Vol. 75(7). P. 1477–1483.
77. *Vandana K.L., Kartik M.* Finite Element Method – Perio-Endo Concept // *Endodontology.* 2004. Vol. 16(2). P. 38–41.
78. *Vasconcellos W.A., Jr. Cimini C.A., Albuquerque R.C.* Effect of the post geometry and material on the stress distribution of restored upper central incisors using 3D finite element models. Stress distribution on incisors with posts // *J. Indian Prosthodont Soc.* 2006. Vol. 6. P. 139–144.
79. *Ziegler A., Keilig L., Kawarizadeh A., Jäger A., Bourauel C.* Numerical Simulation of the Biomechanical Behaviour of Multi-rooted Teeth // *Eur. J. Orthod.* 2005. Vol. 27(4). P. 333–339.

#### **COMPUTER MODELING OF BIOMECHANICAL SYSTEMS IN DENTISTRY: A REVIEW**

**T. Mandzyuk, V. Vovk**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

In the paper the studies concerning elasticity theory models for fulfilling tasks of biomechanics in dentistry are reviewed. Special attention is devoted to one of the most topical issues in modern numerical analysis of "tooth–jaw" system behaviour – periodontal ligament modeling. Considerable difference of its physical and mechanical characteristics from those of other structural elements of a tooth, in particular, its explicitly expressed anisotropic fibre structure, limits applicability of most approved simplified models. Other important directions of modern researches in biomechanics of tooth, discussed in this article, touch on the problems of implantology which are now also successfully resolved by means of computer modelling.

*Key words:* FEM modeling, periodontal ligament, tooth movement, biomechanics in dentistry, literature review

*Стаття надійшла до редколегії 03.09.2008*

*Прийнята до друку 08.10.2008*