УДК 517.9, 518:517.948
№ держреєстрації 0108U004150
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
ЛНУ ім.Івана Франка
79000 м. Львів, вул. Університетська, 1; тел. (032) 272 70 40
факс (032) 261-69-03, ndch@franko.lviv.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор
з наукової роботи
д-р хім. наук, проф.
_____ Б. Котур
_____ _____ _____

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І МЕХАНІКИ
Пі-224П
(заключний)

Начальник НДЧ
канд. хім. наук, ст. наук. співроб. С. Орищин

Декан факультету
прикладної математики та інформатики,
д. ф.-м. н., професор Я. Савула

Керівник НДР
д. ф.-м. н., професор Г. Шинкаренко

Керівник НДР
д. ф.-м. н., професор Р. Хапко

2009

Рукопис закінчено 2 листопала 2009 р.
Результати цієї роботи розглянула Вчена Рада
факультету прикладної математики та інформатики
протокол № 14 від 4 листопала 2009 р.

С П И С О К А В Т О Р І В

Зав. кафедри, г. н. сп, д-р фіз.-мат. наук, проф.	_____ __.__._____	Г. Шинкаренко (розд.4, 5)
Зав. кафедри, г. н. сп., д-р фіз.-мат. наук, проф.	_____ __.__._____	Р. Хапко (розд. 1)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____ __.__._____	Б. Остудін (розд. 2)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____ __.__._____	С. Шахно (розд. 3)
мол. наук. співроб., ст. викл.	_____ __.__._____	Я. Гарасим (розд. 2)
мол. наук. співроб.	_____ __.__._____	Р. Малець (розд. 6)
мол. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук	_____ __.__._____	Ю. Сінчук (розд. 4)
мол. наук. співроб., ас.	_____ __.__._____	Г.Квасниця (розд. 4)
мол. наук. співроб.	_____ __.__._____	Т. Мандзюк (розд. 6)
мол. наук. співроб.	_____ __.__._____	Ф. Чабан (розд. 5)
інж. 1 к.	_____ __.__._____	Л. Пахолків (розд. 1)
ст. лаб.	_____ __.__._____	Т. Семенюта (розд. 6)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	Є. Абрамов (розд. 4)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	Я. Коковська (розд. 6)
студ., лаб.	_____ __.__._____	О. Собейко (розд. 1)

Нормоконтролер М. Благітко

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 264 с., 6 розділів, 71 рис., 26 табл., 230 джерел.

Об'єкт дослідження є прямі та обернені еволюційні задачі, крайові, початково-крайові і варіаційні задачі фізики та механіки, граничні задачі теорії потенціалу, інтегральні рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Предметом є математичні моделі відповідних фізичних явищ.

Мета роботи – створення, дослідження та апробування чисельних методів для розв'язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики на основі варіаційних рівнянь, граничних інтегральних рівнянь і нелінійних функціональних рівнянь.

Методи дослідження – метод Петрова-Гальоркіна, метод скінченних елементів (МСЕ), граничні інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функція Гріна.

Запропоновано стабілізовані та *h*-адаптивні високоточні схеми методу скінченних елементів для сингулярно збурених початкових та крайових задач з використанням дискретизації Гальоркіна та Петрова-Гальоркіна. Стабілізовані схеми МСЕ побудовано застосуванням як експоненціальних базисних функцій простору апроксимацій, так і простору тестових функцій. Встановлено безумовну стійкість таких схем та порядки їх збіжності для частинами визначених поліноміальних апроксимацій різних порядків, проаналізовано результати числових експериментів.

Адаптивні схеми МСЕ побудовано з використанням оригінальних апостеріорних оцінювачів похибок, які засновані на властивостях лишків варіаційних рівнянь обчислених із апроксимацій МСЕ. Обчислювані розподіли норм похибок на кожному скінченному елементі покладено в основу гнучкої системи керування структурою та густотою елементів розрахункових

тріангуляцій, здатних забезпечити відшукання апроксимацій МСЕ з наперед гарантованою точністю. Надійність та ефективність запропонованих стабілізованих та *h*-адаптивних схем демонструється результатами розв'язування модельних та прикладних задач, зокрема, п'єзоелектричних актуаторів і сенсорів та біомеханічних систем у стоматології.

Розроблено наближені схеми розв'язування обернених задач реконструкції тріщин, включень та граничних значень у частково-необмежених областях для випадків рівнянь Лапласа, теплопровідності та системи Нав'є. Доведено збіжність ітераційного процесу з надквадратичною збіжністю для розв'язування одного класу нелінійних рівнянь.

КРАЙОВА ЗАДАЧА, РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ-РЕАКЦІЇ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ, РІВНОВАГИ ПРУЖНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА ТА ГІДРОЛОГІЇ, ВАРІАЦІЙНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ТА ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ, АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ, АДАПТУВАННЯ ТРІАНГУЛЯЦІЙ, БАГАТОСІТКОВА НЕЙРОМЕРЕЖНА СХЕМА, СТАБІЛІЗОВАНА СХЕМА, АДАПТИВНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ГАРАНТОВАНА ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЙ, ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ, ЕВОЛЮЦІЙНІ ЗАДАЧІ СЛОШИНГУ, ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА, ПРОСТОРОВІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНІ ПОЛЯ, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

З М І С Т

СПИСОК АВТОРІВ 2
РЕФЕРАТ 3
ЗМІСТ 5
ВСТУП 9
1 Метод інтегральних рівнянь для наближеного розв’язування обернених задач 12
1.1 Задача Коші для рівняння Лапласа 12
1.2 Задача Коші для системи рівнянь Нав’є 14
1.3 Параболічна задача Коші 27
2 Чисельне розв’язування деяких задач електронної оптики методом інтегральних рівнянь 37
2.1 Постановка проблеми та відповідна наближена схема 37
2.2 Наближене розв’язування окремих модельних задач 46
2.3 Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв’язку 49
2.4 Розв’язування однієї наближеної до практики задачі 52
2.5 Використання специфіки деяких граничних задач теорії потенціалу при їх числовому аналізі 57
2.6 Оцінювання похибки 64
2.7 Ітераційне уточнення розв’язків 67
2.8 Аналіз "плоского" наближення суттєво-просторової проблеми 69
3 Чисельні методи для нелінійних операторних рівнянь 75
3.1 Вступ 75
3.2 Поділені різниці і алгоритми методу (3.2) для конкретних операторних рівнянь 77
3.3 Локальна збіжність ітераційного процесу (3.2) 81
3.4 Напівлокальна збіжність методу (3.2) 84
3.5 Апостеріорна оцінка похибки методу (3.2) 92

3.6 Застосування 93
3.7 Висновки 97
4 Адаптивні схеми методу скінченних елементів (МСЕ) 98
4.1 h-адаптивні схеми МСЕ для одновимірних крайових задач 98
4.1.1 Постановка крайової задачі 100
4.1.2 Варіаційне формулювання крайової задачі 100
4.1.3 Частинами квадратичні апроксимації МСЕ 101
4.1.4 Частинами кубічні апроксимації МСЕ 106
4.1.5 Стратегія адаптування сітки 109
4.1.6 Аналіз числових результатів 110
4.1.7 Висновки 115
4.2 h-адаптивні схеми експоненціального МСЕ для двовимірних крайових задач 117
4.2.1 Модельна задача. 118
4.2.2 Експоненціальна схема МСЕ. 120
4.2.3 Побудова апостеріорного оцінювача та h-адаптивність. 121
4.2.4 Числові експерименти. 122
4.2.5 Висновки 125
5 Адаптивні схеми МСЕ для задач п’єзоелектрики 126
5.1 Побудова та аналіз апостеріорних оцінювачів похибок для стаціонарних задач п’єзоелектрики 126
5.1.1 Постановка задач та попередні результати 127
5.1.2 Алгоритм побудови апроксимацій МСЕ для задач статики 129
5.1.3 Аналіз функціоналу похибок 130
5.1.4. Варіаційна задача для похибки дискретизації Гальоркіна 133
5.1.5 Бабл-апроксимація похибки дискретизації МСЕ 135
5.1.6 Числові експерименти з одновимірними задачами 136
5.2 Конструювання h-адаптивних схем методу скінченних елементів для задач п’єзоелектрики 141

5.2.1 Формулювання стаціонарної задачі п’єзоелектрики. 142
5.2.2 Задача про похибку апроксимацій МСЕ. 145
5.2.3 Кусково лінійні апроксимації МСЕ. 147
5.2.4 Апроксимація апостеріорний оцінювач похибки. 147
5.2.5 Критерій та стратегія адаптування. 149
5.2.6 Аналіз результатів обчислювального експерименту. 150
6 Метод скінченних елементів (МСЕ) для задач фізики та механіки суцільного середовища. 155
6.1 Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті 155
6.1.1 Побудова математичної моделі 157
6.1.2 Постановка задачі 158
6.1.3 Варіаційна постановка задачі 160
6.1.4 Напівдискретизація Гальоркіна 161
6.1.5 Дискретизація задачі за часовою змінною 162
6.2 Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини 163
6.2.1 Виведення рівнянь руху потоку 164
6.2.2 Дослідження стійкості встановленого потоку 167
6.2.3 Формулювання початково-крайової задачі 169
6.2.4 Про коректив швидкості потоку 170
6.2.5 Варіаційна задача 170
6.2.6 Дискретизація за часовою змінною 171
6.2.7 Проекційні рівняння 172
6.2.8 Рекурентна схема 174
6.2.9 Дискретизація Гальоркіна 174
6.2.10 Кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів 176
6.2.11 Тестові приклади 179
6.3 Огляд проблем комп’ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології 185
6.3.1 Математичні моделі у стоматології 186

6.3.3 Моделі в імплантології 198
6.3.4 Програмне забезпечення комп'ютерного моделювання у стоматології 203
6.3.5 Висновки 204
6.4 Комп'ютерне моделювання багатокореневих зубів в умовах силового навантаження 206
6.4.1 Матеріал і методи дослідження 207
6.4.2 Результати дослідження та їх обговорення 212
6.5 Визначення нестаціонарного температурного поля в пластині за змішаних умов теплообміну на основі штучних нейронних мереж 216
6.5.1 Формулювання задачі 218
6.5.2 Математична модель нестаціонарної теплопровідності тонкої трансверсально ізотропної пластини 220
6.5.3 Варіаційне формулювання задачі 223
6.5.4 Дискретизація задачі за часовою змінною 224
6.5.5 Дискретизація задачі за просторовою змінною 225
6.5.6 Побудова нейронної мережі 226
6.5.7 Числові результати 228
6.5.8 Висновки 234
ВИСНОВКИ 236
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 239

В С Т У П

За останнє двадцятип'ятиріччя серед методів чисельного розв'язування наукових та інженерних задач домінуючі позиції здобув метод скінчених елементів (МСЕ). Успішну альтернативу зараз йому складають методи граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Можна навести й випадки, коли кооперування цих чисельних методів для варіаційних та інтегральних рівнянь приводило до успішного розв'язання складних проблем фізики і механіки, демонструючи актуальність подібних досліджень в галузі обчислювальної математики. Систематизований і найбільш повний огляд новітніх досягнень можна знайти в двотомнику Encyclopedia of Computational Mechanics / E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.

На порядку дня перед теорією та застосуваннями МСЕ стоїть вирішення таких проблем:

(I) як забезпечити належний запас стійкості апроксимацій МСЕ, щоб гарантувати їх надійне застосування до широкого кола задач, зокрема, сингулярно збурених;

(II) яким чином можна забезпечити ефективність обчислення апроксимацій МСЕ з наперед заданою точністю.

Розробка цих фундаментальних проблем далека від остаточних рішень, але вагомі здобутки останніх п'ятнадцяти років привели до становлення двох важливих концепцій: (I) стабілізовані схеми МСЕ, в яких забезпечення стійкості не занижує порядків точності апроксимацій; (II) адаптивні схеми МСЕ, які встановили тісний зв'язок між апостеріорними похибками одержаних наближених розв'язків та стратегіями адаптування чисельних схем.

З іншого боку, застосування інтегральних рівнянь передбачає доведення теорем еквівалентності, а також побудову та обгрунтування наближених схем розв'язування інтегральних рівнянь різних класів у суттєво просторовому випадку, ускладнених різним характером нелінійностей, при наявності

незамкнених поверхонь інтегрування. Окрім цього, актуальними залишаються різноманітні прямі та обернені нестаціонарні проблеми, до яких можна ефективно застосовувати методи ГІР. У зв'язку з цим виникає необхідність створення досконалих чисельних методів розв'язування відповідних еволюційних задач, одно- та двовимірних інтегральних рівнянь із різними показниками та типами сингулярностей у ядрах.

Актуальним є також створення конкурентноспроможного програмного продукту, адаптованого до аналізу широкого кола прикладних проблем.

Метою даного проекту є побудова та обґрунтування числових схем, які створять теоретичну основу для проведення кваліфікованого обчислювального експерименту у проблемах фізики і механіки, які описуються сингулярно збуреними крайовими і початково-крайовими прямими та оберненими задачами для систем рівнянь у часткових похідних.

Основою проектування схем методу скінченних елементів є побудова та аналіз функціоналів джерел похибок, які приводять до надійних та зручних апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій МСЕ та індикаторів їх чутливості, створюючи теоретичний фундамент пошуку оптимальних реалізацій алгоритмів МСЕ, здатних знаходити наближені розв'язки з наперед гарантованою точністю та очікуваною швидкістю збіжності. На цих засадах будуються алгоритми послідовного уточнення апроксимацій МСЕ із системою контролю за пониженням рівня похибок на кожному скінченому елементі до бажаної величини шляхом адаптування розрахункових сіток, підвищення порядку апроксимації та/або зважування нев'язок. Доповненням до адаптивних схем відшукання розв'язків сингулярно збурених задач є стабілізовані МСЕ, які будуть розвинені за допомогою належного вибору базисів просторів вагових функцій методу Петрова-Гальоркіна.

Результати побудови та дослідження згаданих схем МСЕ конкретизуються для сингулярно збурених задач: п'єзо- і піроелектрики та фотопровідності; уточнених моделей оболонок, мілкої води та гідроакустики; формування

дисипативних структур у збудливих середовищах та мігрування домішок. Запропоновані схеми знайдуть програмну реалізацію і перевірку своїх можливостей за результатами обчислювальних експериментів.

Альтернативний підхід до створення та обґрунтування чисельних методів для розв'язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики полягає у широкому застосуванні граничних інтегральних рівнянь. В основу цих досліджень покладено інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функції Гріна, декомпозицію складних нерегулярних областей, регуляризуючі методи типу Ньютона тощо. Розглядаються питання розв'язності наближених схем, апроксимації відповідних операторів та просторів, умови стійкості та збіжності.

Конкретні фундаментальні задачі, яку вирішує проект:

Розробка та аналіз методів дискретизації варіаційних та інтегральних рівнянь математичної фізики, які забезпечують надійні обчислення високоточних апроксимацій їхніх розв'язків, зокрема, із наперед заданою точністю, та оптимальність їх обчислень.

Конструювання схем граничних інтегральних рівнянь, адаптивних та стабілізованих схем МСЕ.

Аналіз апроксимативності, стійкості та збіжності, апріорні та апостеріорні оцінки швидкості зібжності.

Розробка алгоритмів чисельних схем та відповідного програмного забезпечення комп'ютерного моделювання.

1 МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

В даному розділі приведено огляд отриманих результатів наближеного розв'язування деяких задач Коші для рівнянь різних типів на площині. При цьому такі задачі інтерпретувались як лінійні некоректні задачі реконструкції граничних значень. Загальна схема побудови наближеного розв'язку полягала в наступному: до вихідної задачі застосовувався той чи інший ітераційний метод, який володіє регуляризуючими властивостями; далі на кожному кроці необхідно розв'язувати певні коректні граничні задачі, для чого і було використано метод інтегральних рівнянь. У всіх випадках здійснено аналіз збіжності і на чисельних прикладах продемонстровано ефективність розроблених методів. Результати досліджень опубліковано в працях. В п. 1.1 ми опишемо коротко отримані результати для випадку задач Коші для рівняння Лапласа у частково-необмежених областях; в п. 1.2 детально розглянемо чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння еластостатики; в п. 1.3 зупинимось на проблемах, що виникають при наближеному розв'язування параболічної задачі Коші.

1.1 Задача Коші для рівняння Лапласа

В багатьох прикладних застосуваннях виникає задача відновлення (реконструкції) граничних значень на недоступній (наприклад, внутрішній) частині границі об'єкту за відомими даними Коші на зовнішній. Така проблема приводить до необхідності розв'язувати некоректну, в сенсі відсутності стійкості за вхідними даними, задачу Коші. Нехай $D_1 \subset R^2$ – канонічна частково необмежена область (півплощина, смуга, півсмуга, квадрант) з

границею Γ і $D_0 \subset D_1$ – обмежена область з границею Γ_0, $D = D_1 \setminus \overline{D_0}$ Необхідно знайти розв'язок задачі:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.1}$$

$$u = f_1 \text{ на } \Gamma \text{ і } \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \text{ на } \Gamma. \tag{1.2}$$

Враховуючи некоректність задачі, для її розв'язування пропонується дра ітераційні регуляризуючі методи: альтернуючий метод Козлова-Мазьї і метод Ландвебера. Коротко зупинимось на методі Ландвебера. Розглянемо такі дві мішані граничні задачі Діріхле-Неймана:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.3}$$

$$u = h \text{ на } \Gamma_0 \text{ і } \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \text{ на } \Gamma \tag{1.4}$$

та

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.3}$$

$$v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \text{ і } \frac{\partial v}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma. \tag{1.4}$$

Ітераційна процедура побудови наближеного розв'язку задачі (1.1)-(1.2) полягає в наступному:

- Вибираємо довільну функцію h_0. Тоді розв'язок u_0 отримується з (1.3)-(1.4) при $u_0 = h_0$ на Γ_0.
- Знаходимо v_0 як розв'язок (1.3)-(1.4) з $\frac{\partial v_0}{\partial \nu} = g_0$ на Γ, де $g_0 = u_0 - f_1$.
- Маючи побудовані u_{k-1} і v_{k-1}, елемент u_k визначається з (1.3)-(1.4) із $u_k = h_k$ на Γ_0, де $h_k = h_{k-1} - \gamma \left. \frac{\partial v_{k-1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0}$, $\gamma > 0$.
- Накінець v_k отримується з (1.3)-(1.4) при $\frac{\partial v_k}{\partial \nu} = g_k$ на Γ, де $g_k = u_k - f_1$.

Два останні кроки процедери ітеруються. Доведено збіжність цього ітераційного методу.

Теорема 1.1. Нехай задача (1.1)-(1.2) має обмежений розв'язок з слідом h на границі Γ_0. Нехай h_k – k-та апроксимація, отримана за описаною вище процедурою. Тоді, якщо $\gamma > 0$ вибрано достатньо малим і для кожного достатньо гладкого початкового наближення h_0 має місце збіжність

$$\lim_{k\to\infty} \|h - h_k\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0 .$$

Чисельне розв'язування відповідних мішаних задач на кожному кроці ітераційної процедури здійснюється за допомогою техніки функцій Гріна. Це дає змогу звести задачу до одного інтегрального рівняння з невідомою густиною на границі Γ_0. Повна дискретизація виконана методом квадратур з використанням тригонометричних і sinc-квадратур.

1.2 Задача Коші для системи рівнянь Нав'є

Постановка задачі. Нехай $D \subset R^2$ – двозв'язна обмежена область з гладкими границями Γ_0 і Γ. Границі не мають спільних точок і самоперетинів (див. рисунок 1.1).

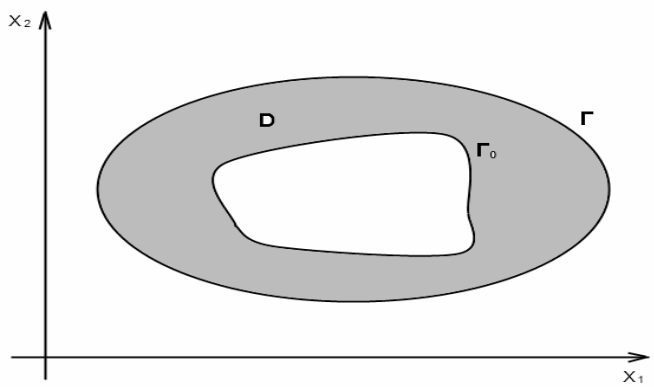


Рисунок 1.1 – Приклад області

З фізичної точки зору можна вважати, що область є заповнена пружним твердим ізотропним матеріалом. Контур Γ можна інтерпретувати як доступну границю тіла, контур Γ_0 – як недоступна.

Розглядається задача Коші для рівняння еластостатики. Нехай вектор-функція $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ задовольняє рівняння Нав'є

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.5}$$

граничну умову Діріхле

$$u = g \text{ на } \Gamma \tag{1.6}$$

і граничну умову Неймана

$$Tu = f \text{ на } \Gamma\,. \tag{1.7}$$

Необхідно знайти значення u і Tu на недоступній границі Γ_0. Постійні μ і λ $(\mu > 0, \lambda > -\mu)$ називають константами Ляме, які характеризують фізичні властивості матеріалу. Оператор T є оператором напружень, який визначається як

$$Tu = \lambda\,\mathrm{div}\, u\,\nu + 2\mu\,(\nu \cdot \mathrm{grad})\,u + \mu\,\mathrm{div}\,(Qu)Q\nu\,, \tag{1.8}$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі і Q – унітарна матриця виду $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Функції g і f – задані граничні вектор-функції.

Разом, функції з граничних умов (1.6) і (1.7) називають даними Коші. З фізичної точки зору вектор функція u означає переміщення точок тіла, включаючи граничні точки. Tu означає напруження, яке виникає на границі тіла і яке відповідає переміщенню.

Така обернена задача є некоректною оскільки її розв'язок є нестійким до змін у вхідних даних. Тому виникає необхідність у застосуванні регуляризуючих методів. Один з можливих варіантів – це альтернуючий метод, запропонований Козловим і Мазьйою для еліптичних задач Коші.

Альтернуючий метод. Для формулювання альтернуючої ітераційної процедури для задачі Коші розглянемо дві мішані задачі для системи рівнянь Нав'є.

Перша задача, відома як мішана задача Діріхле-Неймана полягає в наступному: знайти вектор-функцію $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, яка розв'язує рівняння (1.5) і задовольняє граничну умову Діріхле

$$u = g_1 \text{ на } \Gamma_0 \tag{1.9}$$

і граничну умову Неймана

$$Tu = f_1 \text{ на } \Gamma. \tag{1.10}$$

Друга задача, яку називають мішаною задачею Неймана-Діріхле, передбачає знаходження вектор-функції $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, яка розв'язує рівняння (1.1) і задовольняє граничну умову Неймана

$$Tu = g_2 \text{ на } \Gamma_0 \tag{1.11}$$

і граничну умову Діріхле

$$u = f_2 \text{ на } \Gamma. \tag{1.12}$$

Тепер, грунтуючись на введених мішаних задачах, альтернуюча процедура формулюється наступним чином:

- задається довільне початкове наближення u_0 для розв'язку u задачі (1.5)-(1.7) на Γ_0;
- маючи обчислену k-ту апроксимацію u_k, можна розв'язати мішану задачу Діріхле-Неймана з граничними умлвами $g_1 = u_k|_{\Gamma_0}$ і $f_1 = f$ для знаходження наближення для Tu_k на Γ_0;
- маючи Tu_k, можна розв'язати мішану задачу Неймана-Діріхле з граничними умовами $g_2 = Tu_k|_{\Gamma_0}$ і $f_2 = g$ для обчислення наступгої ітераційної апроксимації u_{k+1}.

Справедливим є наступне твердження про збіжність альтернуючого методу.

Теорема 1.2. Нехай задача (1.5)-(1.7) має обмежений розв'язок з слідом u на границі Γ_0. Нехай h_k – k-та апроксимація, отримана за описаною вище процедурою. Тоді для кожного достатньо гладкого початкового наближення h_0 має місце збіжність

$$\lim_{k\to\infty}\| u - u_k \|_{L^2(\Gamma_0)} = 0 .$$

Як бачимо, альтернуючий метод передбачає розв'язування двох мішаних коректних задач на кожному ітераційному кроці. Метод володіє регуляризуючими властивостями і в якості критерію зупинки ітераційного процесу може бути використано принцип нев'язки Морозова.

Чисельне розв'язування мішаних граничних задач. Звичайно, отримані коректні граничні задачі можна наближено розв'язувати будь-яким підходящим чисельним методом. З нашої точки зору найефективнішим в даному випадку є застосування методу граничних інтегральних рівнянь. Цей підхід грунтується на теорії потенціалів у випадку еластостатики. Фундаментальний розв'язок рівнянь Нав'є має вигляд

$$\Phi(x,y) = \frac{c_1}{2\pi}\Psi(x,y)I + \frac{c_2}{2\pi}J(x-y), \tag{1.13}$$

де

$$c_1 = \frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)},\ c_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}$$

і

$$\Psi(x,y) = \ln\frac{1}{|x-y|},\ x \neq y.$$

Матриця I є одинична 2 на 2 матриця і J є визначена як

$$J(\omega) := \frac{\omega\omega^t}{|\omega|^2}.$$

Подамо розв'язок у вигляді еластостатичного потенціалу простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_0} \Phi(x,y)\varphi_0(y)ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in D. \tag{1.14}$$

Тут φ_0 і φ є деякі невідомі вектор-густини. Інтегральне подання (1.10) можна використати і як для мішаної задачі Діріхле-Неймана, так і мішаної задачі Неймана-Діріхле. Очевидна перевага такого підходу – зменшення розмірності вихідної задачі на одиницю.

Припустимо, що граничні криві Γ_0 і Γ мають параметричне подання:

$$\Gamma_0 := \{\gamma_0(t) = (\gamma_{01}(t), \gamma_{02}(t)) \mid \quad 0 \le t \le 2\pi\}$$

і

$$\Gamma := \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid \quad 0 \le t \le 2\pi\}.$$

У випадку мішаної задачі Діріхле-Неймана введемо такі інтегральні оператори:

$$(S\psi)(x) := \int_{\Gamma_0} \Phi(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_0,$$

$$(C\psi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_0,$$

$$(N\psi)(x) := \int_{\Gamma_0} (T_x\Phi)(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$(H\psi)(x) := \int_{\Gamma} (T_x\Phi)(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

Беручи до уваги інтегральне подання (1.14) і відомі властивості потенціалів, гранична задача (1.5)-(1.9)-(1.10) редукується до системи інтегральних рівнянь, які в операторній формі мають вигляд:

$$\begin{cases} (S\varphi_0)(x) + (C\varphi)(x) = g_1(x), \quad x \in \Gamma_0, \\ (N\varphi_0)(x) + ((I+H)\varphi)(x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.15}$$

Тут функції φ_0 і φ підлягають визначенню.

Зауважимо, що інтегральні оператори S і H містять сингулярності в ядрах. Отже, інтеграл в S розуміється як невласний, а в H – в сенсі головного значення Коші.

Коректність отриманої системи інтегральних рівнянь отримується з такого результату.

Теорема 1.3. Для $m \in \mathrm{N}, m \le p$, де p характеризує гладкість граничних кривих Γ_0 і Γ, для $g_1 \in C^{m,\alpha}(\Gamma_0)$ і для $f_1 \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma)$ з $\alpha \in (0,1)$ система інтегральних рівнянь (1.15) має єдиний розв'язок $\varphi_0 \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma_0)$ і $\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma)$, який неперервно залежить від вхідних даних.

Доведення. Систему (1.15) можна переписати у вигляді:

$$\left[\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I+H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C \\ N & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Можна показати, що інтегральні оператори S і $I+H$ є обмеженими у відповідних просторах і мають обмежені обернені S^{-1} і $(I+H)^{-1}$, а інтегральні оператори C і N – компактні. В результаті система набуде вигляду

$$\left[\begin{pmatrix} I_{C^{m-1,\alpha}} & 0 \\ 0 & I_{C^{m-1,\alpha}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & S^{-1}C \\ (I+H)^{-1}N & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-1}g_1 \\ (I+H)^{-1}f_1 \end{pmatrix}.$$

Так як пряма гранична задача Діріхле-Неймана має не більше як один розв'язок, то відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок. Тепер, за теорією Рісса-Шаудера для операторних рівнянь з компактним оператором отримуємо твердження теореми. □

Зважаючи на параметричне подання граничних гривих, здійснимо параметризацію відповідних інтегральних операторів:

$$(S\varphi_0)(\gamma_0(t)) = \int_0^{2\pi} \Phi(\gamma_0(t), \gamma_0(\tau))\varphi_0(\tau)\left|\gamma'_0(\tau)\right| d\tau,$$

$$(C\varphi)(\gamma_0(t)) = \int_0^{2\pi} \Phi(\gamma_0(t), \gamma(\tau))\varphi(\tau)\left|\gamma'(\tau)\right| d\tau,$$

$$(N\varphi_0)(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} (T_{\gamma(t)}\Phi)(\gamma(t), \gamma_0(\tau))\varphi_0(\tau)\left|\gamma'_0(\tau)\right| d\tau,$$

$$(H\varphi)(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} (T_{\gamma(t)}\Phi)(\gamma(t),\gamma(\tau))\varphi(\tau)\,|\gamma'(\tau)|\,d\tau .$$

Тут ми ввели позначення $\varphi_0(\tau) = \varphi_0(\gamma_0(\tau))$, $\varphi(\tau) = \varphi(\gamma(\tau))$.

Як вже вказувалось раніше, оператори S і H містять сингулярності, які можна виділити у формі спеціальних вагових функцій. Після нескладних еквівалентних перетворень отримаємо:

$$(S\varphi_0)(\gamma_0(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{c_1}{2}\ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\}I + K_s(t,\tau)\right]\varphi_0(\tau)\,|\gamma'_0(\tau)|\,d\tau ,$$

$$(H\varphi)(\gamma(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[c_0\cot\left(\frac{t-\tau}{2}\right)Q + K_H(t,\tau)\right]\varphi(\tau)\,|\gamma'(\tau)|\,d\tau ,$$

де $c_0 = -\dfrac{\mu}{(\lambda+\mu)|\gamma'(t)|}$ і функції $K_S(t,\tau)$ і $K_H(t,\tau)$ мають вигляд:

$$K_S(t,\tau) = 2\pi\Phi(\gamma_0(t),\gamma_0(\tau)) + \frac{c_1}{2}\ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\}I ,$$

$$K_H(t,\tau) = 2\pi(T_x\Phi)(\gamma(t),\gamma(\tau)) - c_0\cot\left(\frac{t-\tau}{2}\right)Q .$$

Не складає труднощів пересвідчитись, що ядра K_S і K_H є неперервними і їхня гладкість залежить від гладкості граничних кривих.

Для повної дискретизації скористаємось методом квадратур, який грунтується на квадратурах, отриманих за допомогою тригонометричної інтерполяції. На рівновіддаленому поділі

$$t_j = \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0,\ldots,2n-1,\ n \in N, \tag{1.16}$$

розглянемо три квадратурних формули:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\}f(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j(t)f(t_j) ,$$

з ваговими функціями

$$R_j(t) := -\frac{1}{2n}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\cos k(t-t_j) + \frac{\cos(t-t_j)}{n}\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\tau - t}{2} f(\tau)d(\tau) \approx \sum_{j=0}^{2n-1}\widetilde{T}_j(t) f(t_j),$$

з ваговими функціями

$$\widetilde{T}_j(t) := -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\sin m(t-t_j) - \frac{1}{2n}\sin n(t-t_j).$$

Після використання виписаних квадратур до відповідних інтегралів в (1.15) і колокації у вузлах (1.16) отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2n-1}\left[-\frac{c_1}{2}R_j(t_i)I + \frac{1}{2n}K_S(t_i,t_j)\right]\left|\gamma_0'(t_j)\right|\varphi_{0j} + \\ + \sum_{j=0}^{2n-1}\frac{1}{2n}\Phi(\gamma_0(t_i),\gamma(t_j))\left|\gamma'(t_j)\right|\varphi_j = g_1(\gamma_0(t_i)) \\ \sum_{j=0}^{2n-1}\frac{1}{2n}(T_x\Phi)(\gamma(t_i),\gamma_0(t_j))\left|\gamma_0'(t_j)\right|\varphi_{0j} + \\ + \varphi_i + \sum_{j=0}^{2n-1}\left[c_0\widetilde{T}_j(t_i)Q + \frac{1}{2n}K_H(t_i,t_j)\right]\left|\gamma'(t_j)\right|\varphi_j = f_1(\gamma(t_i)), \end{cases}$$

де $\varphi_{0j} \approx \varphi_0(t_j)$, $\varphi_j \approx \varphi(t_j)$, $i = 0,...,2n-1$.

Обчисливши апроксимаційні значення густин у вузлах і використовуючи інтегральне подання розв’язку (1.15) отримуємо наближений розв’язок прямої мішаної задачі Діріхле-Неймана.

Коротко опишемо наближене розв’язування граничної задачі Неймана-Діріхле. Подібно до попереднього випадку введемо інтегральні оператори:

$$(S\psi)(x) := \int_\Gamma \Phi(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$(C\psi)(x) := \int_{\Gamma_0} \Phi(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

$$(N\psi)(x) := \int_{\Gamma} (T_x\Phi)(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_0,$$

$$(H\psi)(x) := \int_{\Gamma_0} (T_x\Phi)(x,y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_0.$$

В результаті гранична задача (1.5)-(1.11)-(1.12) редукується до системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} ((I+H)\varphi_0)(x) + (N\varphi)(x) = g_2(x), & x \in \Gamma_0, \\ (C\varphi_0)(x) + (S\varphi)(x) = f_2(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.17}$$

Вектор-функції φ_0 і φ підлягають визначенню.

Має місце такий результат про коректність системи (1.17).

Теорема 1.4. Для $m \in \mathrm{N}, m \le p$, де p характеризує гладкість Γ_0 і Γ, для $g_2 \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma_0)$ і для $f_2 \in C^{m,\alpha}(\Gamma)$ система інтегральних рівнянь (1.17) має єдиний розв'язок $\varphi_0 \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma_0)$ і $\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\Gamma)$, який неперервно залежить від вхідних даних.

Після параметризації, виділення наявних особливостей і застосування методу квадратур отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2n-1}\left[c_0\widetilde{T}_j(t_i)Q + \frac{1}{2n}K_H(\gamma_0(t_i),\gamma_0(t_j))\right]\left|\gamma_0'(t_j)\right|\varphi_{0j} + \\ + \varphi_{0i} + \sum_{j=0}^{2n-1}\frac{1}{2n}\left(T_{\gamma_0(t)}\Phi\right)(\gamma_0(t_i),\gamma(t_j))\left|\gamma'(t_j)\right|\varphi_j = g_2(\gamma_0(t_i)) \\ \sum_{j=0}^{2n-1}\frac{1}{2n}\Phi(\gamma(t_i),\gamma_0(t_j))\left|\gamma_0'(t_j)\right|\varphi_{0j} + \\ + \sum_{j=0}^{2n-1}\left[-\frac{c_1}{2}R_j(t_i)I + \frac{1}{2n}K_S(\gamma(t_i),\gamma(t_j))\right]\left|\gamma'(t_j)\right|\varphi_j = f_2(\gamma(t_i)), \end{cases}$$

де $\varphi_{0j} \approx \varphi_0(t_j)$, $\varphi_j \approx \varphi(t_j)$ і ядра K_S and K_H обчислюються аналогічно до попереднього випадку.

Чисельні експерименти. 1. Для першого прикладу виберемо лінійну вектор-функцію $u = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ в якості точного розв'язку, постійні Ляме

$\lambda = \mu = 1$ і параметр дискретизації $n = 32$. Граничні криві мають таке переметричне подання (див. рисунок 1.2):

$$\Gamma_0 = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1(t) = r(t)\cos t, x_2(t) = r(t)\sin t, r(t) = \sqrt{\cos^2 t + 0.25\sin^2 t}\right\},$$

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1(t) = 3\cos t, x_2(t) = 2\sin t\}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

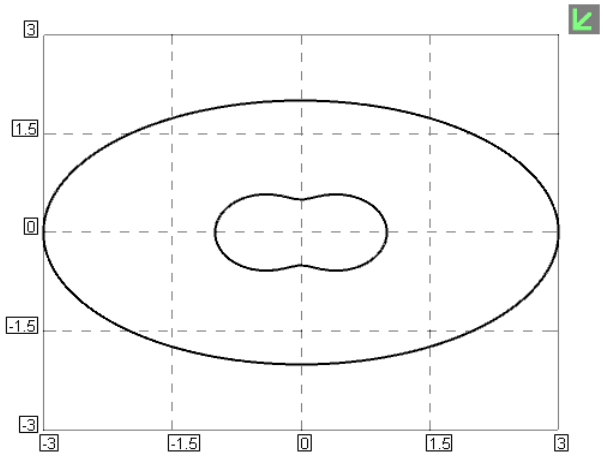


Рисунок 1.2 – Вигляд області для прикладу 1

На графіках (рисунок 1.3) показано похибки обчислення переміщень і напружень за допомогою описаного методу.

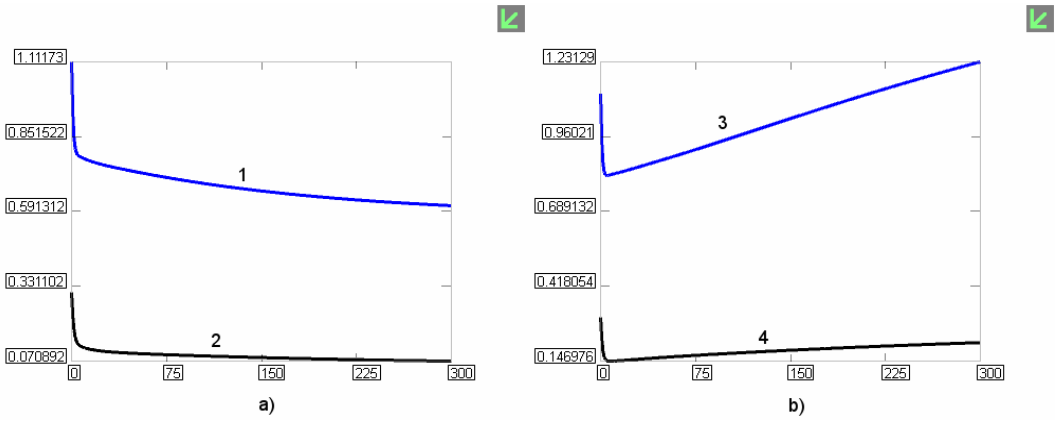


Рисунок 1.3 – L_2-похибки після 300 альтернуючих ітерацій

a) – похибки напружень (1.1) і переміщень (1.2) у випадку точних даних Коші;

b) – похибки напружень (1.3) і переміщень (1.4)

у випадку 5% шуму у вхідних даних

На рисунок 1.4 зображено точний розв’язок, а на рисунок 1.5 – результати реконструкції.

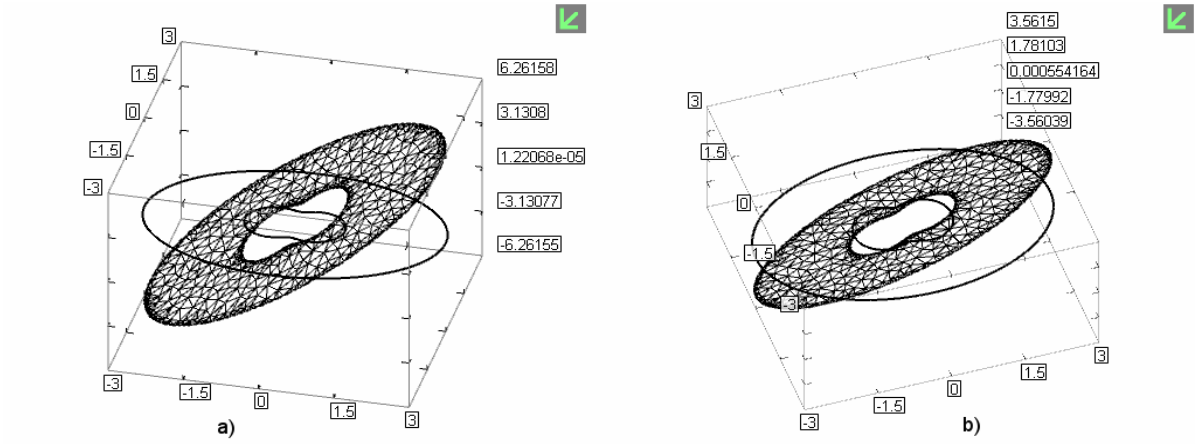


Рисунок 1.4 – Точний розв’язок задачі: a) u_1 і b) u_2

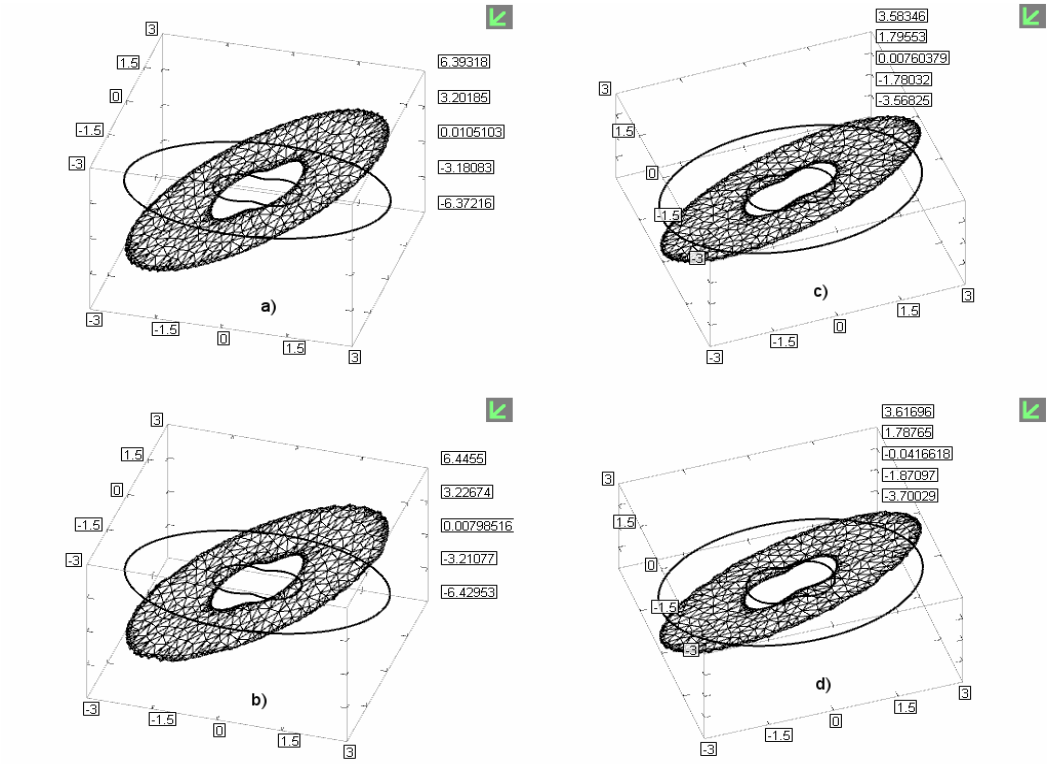


Рисунок 1.5 – Реконструкція: a) і c) – наближення для u_1 і u_2 після 300 ітерацій для точних вхідних даних; b) і d) – після 15 ітерацій (найменша похибка) для даних з 5% похибкою

2. В другому прикладі точний розв'язок вибрано як звуження стовпця фундаментальної матриці (1.9) $u(x) = \Phi_1(x, y^*), y^* = (0,0)$ постійні Ляме і кількість точок колокації такі ж як і у попередньому прикладі, граничні криві мають вигляд (рисунок 1.6):

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \mid x_1(t) = 0.2\cos t, x_2(t) = 0.4\sin t - 0.3\sin^2 t + 0.25\},$$

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1(t) = 0.5\cos t, x_2(t) = \sin t\}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

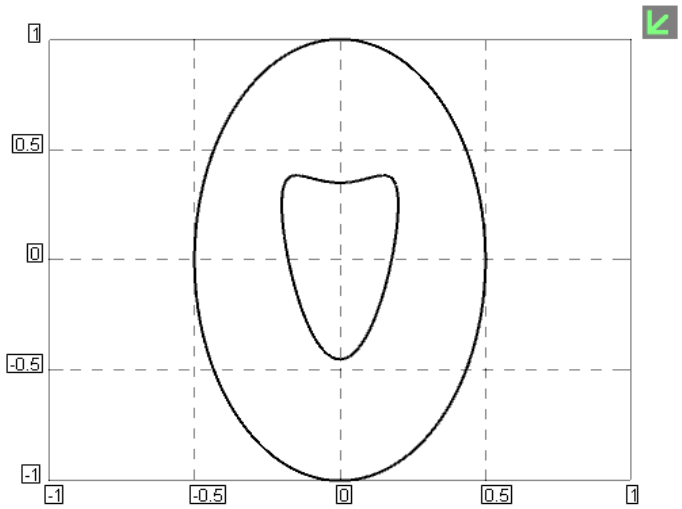


Рисунок 1.6 – Вигляд області для прикладу 2

Як і у попередньому прикладі дані Коші було згенеровано з точного розв'язку задачі. Похибки отримані при наближеному розв'язуванні зображено на рисунок 1.7.

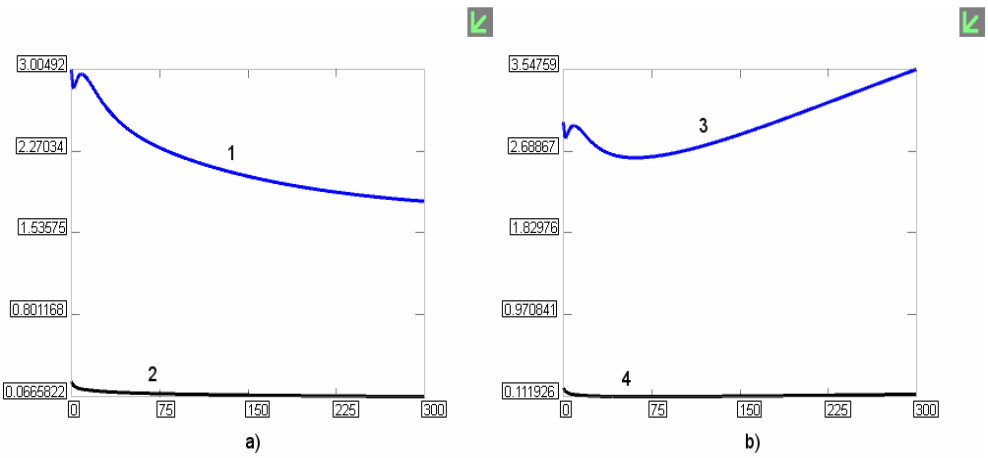


Рисунок 1.7 – L_2-похибки після 300 альтернуючих ітерацій:

a) – похибки напружень (1.1) і переміщень (1.2) у випадку точних даних Коші;

b) – похибки напружень (1.3) і переміщень (1.4)

у випадку 5% похибки вхідних даних

Для порівняння на рисунку 1.8 зображено точний розв’язок задачі (переміщення).

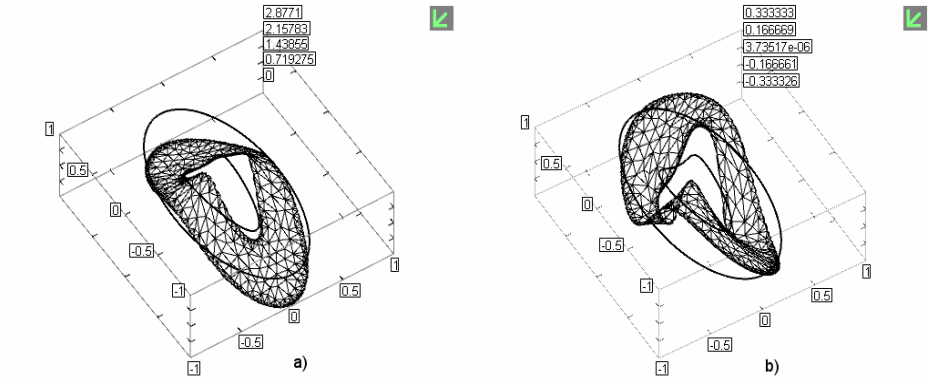


Рисунок 1.8 – Точний розв’язок: a) u_1 і b) u_2

Результати реконструкції поля переміщень зображено на рисунку 1.9.

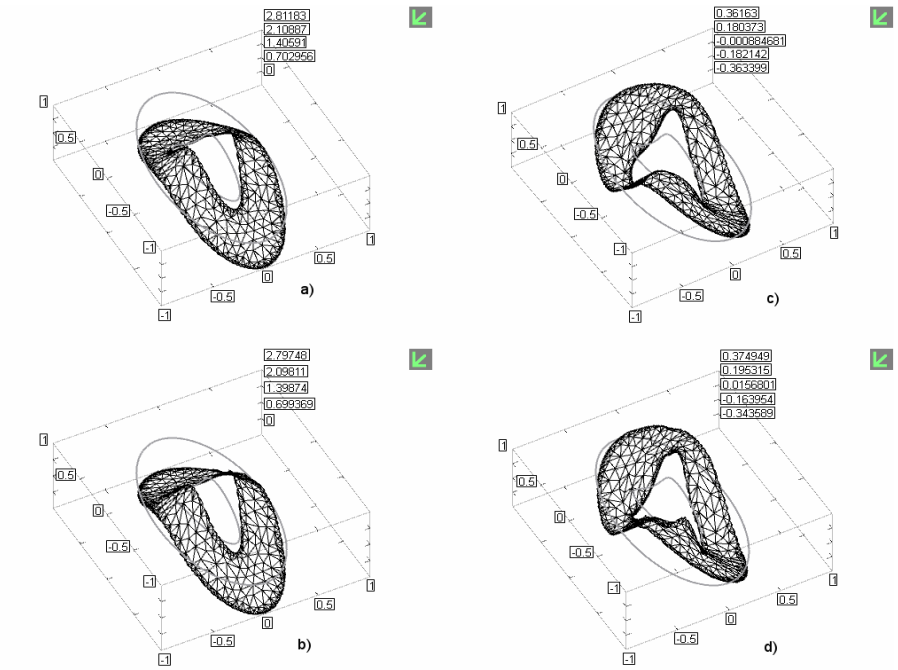


Рисунок 1.9 – Реконструкція поля переміщень u_1 і u_2:
a) і c) –після 300 ітерацій у випадку точних вхідних даних;
b) і d) –після 50 ітерацій (найменша похибка)
у випадку 5% похибки у вхідних даних

1.3 Параболічна задача Коші

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена двозв'язна область на площині з достатньо гладкими внутрішньою границею Γ_1 і зовнішньою Γ_0 (див. рисунок 1.10) і $T > 0$ деяка константа. Розглядається задача Коші для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega \times (0,T), \\ u = \varphi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u = \psi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

де граничні функції φ і ψ належать простору $L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$.

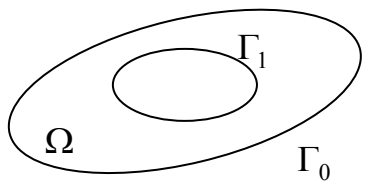


Рисунок 1.10

Нашим завданням є знаходження $u\big|_{\Gamma_1\times(0,T)}$. Отже ми розглядаємо проблему реконструювання температури на внутрішній границі області за відомими температурою і тепловим потоком на зовнішній границі. Дана лінійна обернена задача є некоректною в тому сенсі, що розв'язок не є неперервно залежним від вхідних даних. Одним із широковживаних підходів до розв'язання некоректних задач є регуляризація Тихонова. Проте такий метод призводить до зміни оператора задачі. Існують методи, які з одного боку володіють регуляризуючими властивостями, а з другого – зберігають оператор задачі. Власне в даній роботі до задачі (1.18) розвивається підхід, оснований на методі Ландвебера. При цьому для наближеного розв'язування отримуваних прямих задач використовується метод інтегральних рівнянь.

Ітераційний регуляризуючий алгоритм. Для наближеного розв'язування задачі (1.18) пропонується ітераційний метод, на кожному кроці якого потрібно розв'язувати два типи прямих мішаних коректних початково-крайових задач для параболічного оператора $(\partial_t - \Delta)$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega\times(0,\ T), \\ u = \eta, & \text{на } \Gamma_1\times(0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u = \psi, & \text{на } \Gamma_0\times(0,T), \\ u(x,0) = 0, & \text{для } x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.19}$$

а також спряжену до неї:

$$\begin{cases} \partial_t v + \Delta v = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ v = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} v = \varsigma, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ v(x,T) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.20}$$

Відомо, якщо $\eta \in L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$ і $\psi \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$, тоді існує єдиний слабкий розв'язок $u \in L^2(\Omega \times (0,T))$ задачі (1.19), який неперервно залежить від вхідних даних. Для $\varsigma \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ спряжена задача (1.20), також, є коректно поставленою і $v \in L^2(\Omega \times (0,T))$.

Опишемо ітераційну процедуру розв'язування задачі (1.1):

0. Вибираємо довільне початкове наближення $\eta_0 \in L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$.

1. Наближення $u_0\big|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$ обчислюємо, як розв'язок мішаної початково-крайової задачі Діріхле-Неймана:

$$\begin{cases} \partial_t u_0 - \Delta u_0 = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ u_0 = \eta_0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u_0 = \psi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u_0(x,0) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

2. Обчислюємо значення $\left.\dfrac{\partial v_0}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1 \times (0,T)}$, як розв'язок спряженої задачі:

$$\begin{cases} \partial_t v_0 + \Delta v_0 = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ v_0 = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} v_0 = u_0 - \varphi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ v_0(x,T) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

3. Знаючи u_{k-1} і v_{k-1}, визначаємо $u_k\big|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$, розв'язавши задачу Діріхле-Неймана:

$$\begin{cases} \partial_t u_k - \Delta u_k = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ u_k = \eta_k = \eta_{k-1} + \gamma \dfrac{\partial}{\partial \nu} v_{k-1}, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u_k = \psi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u_k(x,0) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

4. Розв'язавши спряжену задачу

$$\begin{cases} \partial_t v_k + \Delta v_k = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ v_k = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} v_k = u_k - \varphi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ v_k(x,T) = 0, & \text{для } x \in \Omega, \end{cases}$$

знаходимо $\left.\dfrac{\partial v_k}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1 \times (0,T)}$ і переходимо на крок **3**.

Критерієм зупинки ітераційного процесу може служити принцип нев'язки Морозова.

Покажемо, що метод володіє регуляризуючими властивостями. Введемо оператор $K : L^2(\Gamma_1 \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$, який визначається як $K\eta = u|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$, для $\eta \in L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$, де u розв'язок мішаної початково-крайової задачі Діріхле-Неймана:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ u = \eta, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u = 0, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Аналогічно задаємо оператор $G : L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ як $G\psi = u|_{\Gamma_0 \times (0,T)}$, для $\psi \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$, де u розв'язок мішаної початково-крайової задачі Діріхле-Неймана:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ u = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u = \psi, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Якщо u є розв'язком (1.19), тоді за лінійністю $u\big|_{\Gamma_0 \times (0,T)} = K\eta + G\psi$. І навпаки, якщо η – розв'язок операторного рівняння:

$$K\eta = \varphi - G\psi\,, \tag{1.21}$$

то розв'язок граничної задачі (1.19) задовольняє $u\big|_{\Gamma_0 \times (0,T)} = \varphi$, тобто він є розв'язком задачі Коші. Отже, знаходження розв'язку $u\big|_{\Gamma_1 \times (0,T)}$ задачі Коші (1.18) еквівалентне розв'язуванню операторного рівняння (1.21). Визначимо спряжений оператор $K^* : L^2(\Gamma_0 \times (0,T)) \to L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$ як $K^*\varsigma = -\dfrac{\partial}{\partial \nu} v\Big|_{\Gamma_1 \times (0,T)}$ для $\varsigma \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$, де v розв'язок спряженої задачі Діріхле-Неймана:

$$\begin{cases} \partial_t v + \Delta v = 0, & \text{в } \Omega \times (0,\ T), \\ v = 0, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} v = \varsigma, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ v(x,T) = 0, & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

З опису ітераційного процесу маємо:

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \gamma \frac{\partial}{\partial \nu} v_{k-1}\Big|_{\Gamma_1 \times (0,T)} = \eta_{k-1} - \gamma K^* \left(u_{k-1}\big|_{\Gamma_0 \times (0,T)} - \varphi \right) =$$
$$= \eta_{k-1} - \gamma K^* \left(K\eta_{k-1} - (\varphi - G\psi) \right).$$

Останнє співвідношення є нічим іншим як відомим в літературі методом Ландвебера, який відноситься до регуляризуючих алгоритмів.

Стосовно збіжності розглянутого методу, то справедливим є наступне твердження:

Теорема 1.5. Нехай $u \in L^2(\Omega \times (0,T))$ розв'язок задачі Коші, а u_k – k-те наближення ітераційного процесу. Якщо константа γ належить проміжку $0 < \gamma < \dfrac{1}{\|K\|^2}$, тоді:

$$\|u - u_k\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \to 0, \text{ при } k \to \infty.$$

Метод граничних інтегральних рівнянь. На кожному кроці ітераційного процесу потрібно розв'язувати мішані нестаціонарні задачі виду:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{в } \Omega \times (0,T), \\ u = f_1, & \text{на } \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u = f_0, & \text{на } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0, & \text{при } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

Один з ефективних підходів для чисельного розв'язування таких задач є метод інтегральних рівнянь, застосування якого можливе у різних варіантах. Скористаємось для часткової дискретизації методом Роте. Ведемо рівновіддалений поділ інтервалу $(0,T)$:

$$t_i = (i+1)\tau, \; i = -1,0,\ldots,N, \; \tau = T/(N+1).$$

Після заміни похідної за часом відповідною скінченною різницею, до розв'язування отримаємо послідовність стаціонарних мішаних граничних задач.

$$\begin{cases} \Delta u_n - \dfrac{1}{\tau} u_n = \dfrac{1}{\tau} u_{n-1}, & \text{в } \Omega, \\ u_n = f_{1n}, & \text{на } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \nu} = f_{0n}, & \text{на } \Gamma_0, \end{cases}$$

де

$$u_n(x) \approx u(x,t_n), \; f_{1n}(x) = f_1(x,t_n), \; f_{0n}(x) = f_0(x,t_n), \; n = 0,\ldots,N \text{ і } u_{-1} = 0.$$

Для розв'язання останніх використовується непрямий метод граничних інтегральних рівнянь, а саме послідовність розв'язків u_n записується у вигляді композиції аналогів потенціалів простого та подвійного шару:

$$u_n(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_{\Gamma_1}\varphi_m^1(y)\Phi_{n-m}(x,y)ds(y)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_{\Gamma_0}\varphi_m^0(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)ds(y), \quad (1.23)$$

де φ_n^i, $i=1,2$, $n=0,\ldots,N$ – невідомі густини, а Φ_n – послідовність фундаментальних розв'язків. Після підстановки такого подання розв'язку у граничні умови задач (1.22) та використання теореми про неперервне продовження потенціалу простого шару і нормальної похідної від потенціалу подвійного шару на границю області, одержимо послідовність систем інтегральних рівнянь першого роду:

$$\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\varphi_n^1(y)\Phi_0(x,y)ds(y)+\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_0}\varphi_n^0(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_0(x,y)ds(y)= \\ \qquad =f_{1n}(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\Gamma_1}\varphi_m^1(y)\Phi_{n-m}(x,y)ds(y)- \\ \qquad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\Gamma_0}\varphi_m^0(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)ds(y),\ x\in\Gamma_1, \\ \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_1}\varphi_n^1(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\Phi_0(x,y)ds(y)+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\Gamma_0}\varphi_n^0(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_0(x,y)ds(y)= \\ \qquad =f_{0n}(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\Gamma_1}\varphi_m^1(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\Phi_{n-m}(x,y)ds(y)- \\ \qquad -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\Gamma_0}\varphi_m^0(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)ds(y),\ x\in\Gamma_0.\end{cases}$$

Користуючись параметричним представленням границі

$$\Gamma_i=\{x_i(t)=(x_{i1}(t),x_{i2}(t)),\quad t\in[0,2\pi]\},\ i=0,1,$$

виконаємо заміну змінних в інтегральних рівняннях. Також у випадку граничної умови Неймана для спрощення використовується теорема про зв'язок між нормальною похідною від потенціалу подвійного шару та потенціалом простого шару. Після цього проводиться адитивне виділення гіперсингулярної та логарифмічної особливості у відповідних інтегралах. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu_n^1(\sigma)\left\{Q_1^0(s,\sigma)\ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{\sigma-s}{2}\right)+L_1^0(s,\sigma)\right\}d\sigma+ \\ \quad +\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu_n^0(\sigma)H_{10}^0(s,\sigma)d\sigma=G_n^1(s), \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu_n^1(\sigma)H_{01}^0(s,\sigma)d\sigma+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu_n^{'0}(\sigma)\cot\dfrac{\sigma-s}{2}d\sigma- \\ \quad -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu_n^0(\sigma)\left\{Q_0^0(s,\sigma)\ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{\sigma-s}{2}\right)+L_0^0(s,\sigma)\right\}d\sigma=G_n^0(s). \end{cases} \tag{1.24}$$

Тут $\mu_n^k(s):=\varphi_n^k(x_k(s))|x_k'(s)|$, ядра H_{ij}^0, Q_i^0, L_i^0, $i,j=0,1$, $i\neq j$ відомі і неперервні, а особливості згущені в вагах $\cot\dfrac{\sigma-s}{2}$, $\ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{\sigma-s}{2}\right)$ і G_n^k – рекурентно визначені праві частини.

Зауважимо, що ці інтегральні рівняння є коректними у відповідних просторах Соболєва.

Теорема 1.6. Для $\Gamma_l\in C^m$, $l=0,1$, $m\geq 3$, $f_{0n}\in H^p[0,2\pi]$ і $f_{1n}\in H^{p-1}[0,2\pi]$, $n=0,\ldots,N, p<m$ кожна система інтегральних рівнянь послідовності (1.24) має єдині розв'язки $\mu_n^0\in H^p[0,2\pi]$ і $\mu_n^1\in H^{p-1}[0,2\pi]$.

Наближене розв'язування інтегральних рівнянь (1.24) здійснюється методом дискретної колокації. При цьому для обчислення інтегралів використовуються спеціальні квадратурні формули без насичення точності, які базуються на тригонометричній інтерполяції :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\sigma)\,d\sigma\approx\frac{1}{2M}\sum_{k=0}^{2M-1}g(s_k),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma\approx\sum_{k=0}^{2M-1}R_k(s)g(s_k)$$

і

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g'(\sigma)\cot\frac{s-\sigma}{2}d\sigma\approx\sum_{k=0}^{2M-1}P_k(s)g(s_k),$$

де $s_j = jh,\ h = \pi / M, j = 0,1,...,2M-1, M \in N$ і R_j, P_j – відомі вагові функції.

Після застосування виписаних квадратурних формул до відповідних інтегралів у послідовності (1.24) і подальшої колокації з використанням в якості точок колокації квадратурних вузлів отримуємо послідовність систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{2M-1} \left\{ \mu^1_{n,k} \left[Q^1_0(s_i, s_k) R_k(s_i) + \dfrac{1}{2M} L^1_0(s_i, s_k) \right] + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{2M} \mu^0_{n,k} H^0_{10}(s_i, s_k) \right\} = \widetilde{G}^0_n(s_i), \\ \sum\limits_{k=0}^{2M-1} \left\{ \dfrac{1}{2M} \mu^1_{n,k} H^0_{01}(s_i, s_k) + \right. \\ \qquad \left. + \mu^0_{n,k} \left[P_k(s_i) + Q^0_0(s_i, s_k) R_k(s_i) + \dfrac{1}{2M} L^0_0(s_i, s_k) \right] \right\} = \widetilde{G}^1_n(s_i), \end{cases} \tag{1.25}$$

де $i = 0, \ldots, 2M-1$, $n = 0, \ldots, N$ і $\widetilde{G}^k_n$ – апроксимації правих частин систем (1.24), також отримані шляхом застосування приведених квадратур. Для апроксимації густин $\widetilde{\mu}^l_n$, побудованих у вигляді інтерполяційних тригонометричних поліномів з використанням знайдених розв'язків $\mu^l_{n,k}$ систем (1.25) справедливими є оцінки похибок:

$$\| \mu^l_n - \widetilde{\mu}^l_n \|_q \le C^l_n M^{q-p} \| \mu^l_n \|_p$$

з $1 \le q \le p,\ \dfrac{3}{2} < p$, $l = 0,1$ і деякими постійними $C^l_n > 0$.

Наближений розв'язок мішаної задачі (1.22), відповідно до (1.23), обчислюється на кожному часовому шарі за формулою:

$$u(x, t_n) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{2M-1} \left[\mu^1_{m,k} \Phi_{n-m}(x, x_1(s_k)) + \mu^0_{m,k} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi_{n-m}(x,y) \Big|_{y = x_0(s_k)} \right],$$

$$x \in \Omega, n = 0, \ldots, N.$$

Ефективність описаного способу наближеного розв’язування задачі Коші для рівняння теплопровідності підтверджується проведеними чисельними експериментами.

2 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У процесі проектування електронно-променевих приладів постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів, яку називають електронно-оптичною системою. Будуючи відповідну математичну модель, окремі електроди доцільно подавати у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Однак наявність досить складних форм сучасних конструкцій електродів суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, оскільки воно пов'язане із знаходженням невідомих величин саме на граничних поверхнях. Тому ефективним виявилось застосування апарату теорії груп для класу краєвих задач, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку. Останнє дозволяє звести початкову проблему до розв'язання послідовності незалежних ІР, де інтегрування здійснюється лише по одній із конгруентних складових поверхні. Це створює передумови до розпаралелення процесу розв'язання задачі в цілому. Щоправда, врахування цієї властивості при розв'язуванні кожної конкретної задачі вимагає індивідуального підходу.

2.1 Постановка проблеми та відповідна наближена схема

Нехай у евклідовому просторі $\mathbf{R}^3$ розташована незамкнена поверхня S, обмежена кусково-гладким контуром скінченної довжини ∂S, тобто $S := S \bigcup \partial S$. Припустимо, що S належить до класу поверхонь Ліпшиця. Через M, P, N і т. д. позначимо точки в $\mathbf{R}^3$. Розв'язок розглядуваної диференціальної задачі шукатимемо в області $\Omega_s := \mathbf{R}^3 \setminus \overline{S}$ за умови

двосторонності S, а саме, необхідно знайти функцію $u(P) \in H^1(\Omega_s, \Delta)$, яка задовольняє умови:

$$\Delta u = 0, \text{ в } \Omega_s;$$

$$\delta^{\pm} u = g_{\pm}, \text{ на } S; \tag{2.1}$$

$$\lim_{|P| \to \infty} u(P) = 0, \quad P \in \Omega_s^-,$$

де $\delta^{\pm} : H^1(\Omega_s^-) \to H^{1/2}(S)$ – оператори сліду [17, 20, 15, 24, 122, 123, 132, 163, 181], $g_{\pm}$ – задані значення шуканої функції на S, відповідно з додатної та від'ємної сторони, а

$$H^1(\Omega_s, \Delta) := \left\{ u \,\middle|\, u \in H^1(\Omega_s), \Delta u \in L_2(\Omega_s) \right\}.$$

Відомо [83], що за умов існування розв'язок $u(P)$ задачі (2.1) можна подати у вигляді

$$u(P) = \iint_S K(P,M)\,\tau(M)\,\mathrm{d}S_M - u_0(P), \quad P \in \Omega_s,$$

де

$$K(P,M) := 1/\operatorname{dist}(P,M),$$

$$u_0(P) := \iint_S \frac{\partial K(P,M)}{\partial n_M} \left[g(M) \right] \mathrm{d}S_M,$$

причому

$$[g] := g_- - g_+ \in H_{00}^{1/2}(S),$$

а $\tau \in H_{00}^{-1/2}(S)$ – єдиний розв'язок інтегрального рівняння (ІР)

$$K\tau \equiv \iint_S K(P,M)\,\tau(M)\,\mathrm{d}S_M = F(P), \quad P \in S, \tag{2.2}$$

за умови, що

$$F(P) := \frac{1}{2}\left(g_-(P) + g_+(P) \right) + u_0(P) \in H^{1/2}(S).$$

Зауважимо, що ІР (2.2) еквівалентне задачі (2.1), а його розв'язуваність виражається нерівностями

$$m_1 \| \tau \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le \| K\tau \|_{H^{1/2}(S)} \le m_2 \| \tau \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \quad (0 < m_1 \le m_2).$$

При електростатичній інтерпретації (2.1) вважатимемо, що $g_- = g_+$. За цих умов ІР (2.2) дещо спрощується в такому розумінні, що $F(P)$ виражає граничне значення потенціалу на S ($F(P) \equiv \text{const}$). Далі, запроваджуючи параметризацію S,

$$M := \{x(\alpha,\beta),\, y(\alpha,\beta),\, z(\alpha,\beta);\ (\alpha,\beta) \in \overline{D} := [-1,1]^2\},$$

$$P := \{x(\alpha_0,\beta_0),\, y(\alpha_0,\beta_0),\, z(\alpha_0,\beta_0);\ (\alpha_0,\beta_0) \in D := (-1,1)^2\},$$

а також зберігаючи в (2.2) позначення щодо K, τ, F, отримаємо для знаходження невідомої «густини розподілу зарядів» τ таке двовимірне ІР

$$\iint\limits_{\Delta} \tau(\alpha,\beta)\, K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\, J(\alpha,\beta)\, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = f(\alpha_0,\beta_0), \quad (\alpha,\beta) \in D, \tag{2.3}$$

де

$$K(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) := \Big\{[x(\alpha,\beta) - x(\alpha_0,\beta_0)]^2 + \\ + [y(\alpha,\beta) - y(\alpha_0,\beta_0)]^2 + [z(\alpha,\beta) - z(\alpha_0,\beta_0)]^2\Big\}^{1/2},$$

$J(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta$ – елемент поверхні S у локальних координатах (α,β), пов'язаних з S. Зауважимо також, що від функцій $x(\alpha,\beta)$, $y(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$, які виражають декартові координати (x, y, z) точок на поверхні S, вимагаємо, як мінімум, неперервної диференційованості в $\overline{D}$, оскільки

$$J(\alpha,\beta) := \Big[\, E(\alpha,\beta)\, G(\alpha,\beta) - F^2(\alpha,\beta)\, \Big]^{1/2},$$

а

$$E(\alpha,\beta) := (x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2,$$

$$G(\alpha,\beta) := (x'_\beta)^2 + (y'_\beta)^2 + (z'_\beta)^2,$$

$$F(\alpha,\beta) := x'_\alpha x'_\beta + y'_\alpha y'_\beta + z'_\alpha z'_\beta.$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо задачу (2.1), коли в ролі S виступає одна прямокутна пластина, яка визначається координатами своїх

вершин $A_j := (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, $j = \overline{1,4}$. Відповідні параметричні рівняння для такої пластини можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} x_i(\alpha,\beta) := 0{,}5\sum_{j=1}^{4} x_j\,\varphi_j(\alpha,\beta), \\ y_i(\alpha,\beta) := 0{,}5\sum_{j=1}^{4} y_j\,\varphi_j(\alpha,\beta), \\ z_i(\alpha,\beta) := 0{,}5\sum_{j=1}^{4} z_j\,\varphi_j(\alpha,\beta), \end{cases} \tag{2.4}$$

де

$$\varphi_j(\alpha,\beta) := (1+(-1)^k\alpha)(1+(-1)^l\beta),$$

$$k = \left[\frac{j}{2}\right]+1, \quad l = \left[\frac{j-1}{2}\right]+1, \quad j = \overline{1,4}.$$

Далі будемо вважати, що розташування прямокутної пластини S у просторі $\mathbf{R}^3$ задовольняє умову: протилежні ребра хоча б однієї пари ребер є паралельні до будь-якої координатної осі. Тоді, враховуючи параметризацію (2.4) та обчисливши коефіцієнти відповідної квадратичної форми, отримаємо (2.3) у вигляді

$$\sqrt{EG}\iint_D \frac{\tau(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\mathrm{E}(\alpha-\alpha_0)^2+\mathrm{G}(\beta-\beta_0)^2}} = F(\alpha_0,\beta_0), \quad (\alpha_0,\beta_0)\in D. \tag{2.5}$$

Параметричні рівняння (2.4) можна також використовувати для подання довільної чотирикутної пластини, яка визначається координатами своїх вершин, що лежать в одній площині. За умови паралельності одного ребра пластини до будь-якої з координатних осей отримано аналог ІР (2.5) з дещо іншим ядром. Тому в процесі застосування до такого ІР розглядуваної чисельно-аналітичної процедури розв’язування [18, 19, 29, 127, 125] використовують спеціальні заміни змінних [127], необхідність у яких виникає при обчисленні деяких подвійних, як власних, так і невласних, інтегралів.

Для побудови наближеної схеми розв'язування (2.5) розіб'ємо область $\overline{D}$ на $N_\alpha \times N_\beta$ прямокутних елементів

$$D_{kl} := [\alpha_{k-1}, \alpha_k] \times [\beta_{l-1}, \beta_l], \quad k = \overline{1, N_\alpha}, \quad l = \overline{1, N_\beta},$$

де

$$\begin{cases} \alpha_k := h_\alpha k - 1, \quad k = \overline{0, N_\alpha}, \\ \beta_l := h_\beta l - 1, \quad l = \overline{0, N_\beta}, \end{cases} \quad h_\alpha := \frac{2}{N_\alpha}, \quad h_\beta := \frac{2}{N_\beta}.$$

У відповідності з таким подрібненням $\overline{D}$ ІР (2.5) формально набуває вигляду

$$\sqrt{EG} \sum_{k=1}^{N_\alpha} \sum_{l=1}^{N_\beta} \iint_{D_{kl}} \frac{\tau(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\mathrm{E}(\alpha - \alpha_0)^2 + \mathrm{G}(\beta - \beta_0)^2}} = F(\alpha_0, \beta_0), \quad (\alpha_0, \beta_0) \in D. \qquad (2.6)$$

Для знаходження наближеного розв'язку $\tau(\alpha,\beta)$ побудуємо його локальні апроксимації на кожному елементі D_{kl} шляхом запровадження такої заміни змінних

$$\begin{cases} \alpha_k(\xi, \eta) = \dfrac{1}{2} h_\alpha (2k - 1 + \xi) - 1, \quad k = \overline{1, N_\alpha}, \\ \beta_l(\xi, \eta) = \dfrac{1}{2} h_\beta (2l - 1 + \eta) - 1, \quad l = \overline{1, N_\beta}, \quad -1 \le \xi, \eta \le 1, \end{cases}$$

і подання відповідно до неї

$$\tau_{kl}(\xi, \eta) := \tau(\alpha_k(\xi, \eta), \beta_l(\xi, \eta))$$

у вигляді

$$\tau_{kl}(\xi, \eta) = \sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n} \sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n} \tau_{ef} \psi_{nef}(\xi, \eta). \qquad (2.7)$$

Тут τ_{kl} – шукані значення функції $\tau(\alpha,\beta)$ у вузлових точках елемента D_{kl}; n – порядок використаної апроксимації ($n = \overline{0, 3}$); $\sigma_n(p)$ ($p \in \{k, l\}$) – функція зв'язку між нумерацією елементів D_{kl} та вузлових точок,

$$\sigma_n(p) = n(p - 1) + p(1 - \mathrm{sign}(n)), \quad p \in \{k, l\},$$

$\psi_{nef}(\xi, \eta)$ – відповідно до n функції – форми.

Далі, враховуючи (2.7), отримаємо дискретний аналог (2.5)

$$\sum_{k=1}^{N_\alpha}\sum_{l=1}^{N_\beta}\sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n}\sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n}\tau_{ef}I_{kl}^{(nef)}(\alpha_0,\beta_0)=F(\alpha_0,\beta_0),\quad (\alpha_0,\beta_0)\in D,$$

де

$$I_{kl}^{(nef)}(\alpha_0,\beta_0)=\frac{1}{4}h_\alpha h_\beta\sqrt{EG}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_{nef}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}h_\alpha\sqrt{E}\,\xi+\left(\frac{2k-1}{2}h_\alpha-1\right)\sqrt{E}-\alpha_0\sqrt{E}\right)^2+\left(\frac{1}{2}h_\beta\sqrt{G}\,\eta+\left(\frac{2l-1}{2}h_\beta-1\right)\sqrt{G}-\beta_0\sqrt{G}\right)^2}}.$$

Вибираючи (α_0,β_0) у згаданих вище вузлових точках елементів D_{kl}, отримаємо для знаходження τ_{ef} систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Зауважимо, що порядок цієї системи

$$N_A=\left|\,\mathrm{sign}(n)(nN_\alpha+1)(nN_\beta+1)-(n-1)^2N_\alpha N_\beta\,\right|,$$

а інтеграли $I_{kl}^{(nef)}(\alpha_0,\beta_0)$ можна обчислити аналітично за спеціальними формулами.

У відповідності з запровадженою апроксимацією $\tau(\alpha,\beta)$ в межах кожного елемента D_{kl} наведемо конкретні подання $\tau_{kl}(\xi,\eta)$ при різних значеннях параметра n.

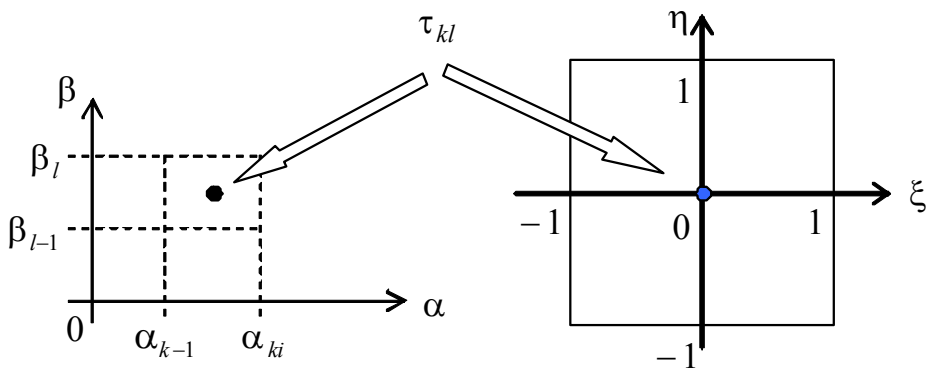


Рисунок 2.1 – Розташування вузла у випадку кусково-постійної апроксимації

При використанні кусково-постійної апроксимації на D_{kl} функція $\tau_{kl}(\xi,\eta)$ подається у вигляді (див. рисунок 2.1)

$$\tau_{kl} \equiv \tau(\alpha_k - \frac{1}{2}h_\alpha, \beta_l - \frac{1}{2}h_\beta),$$

$$\psi_{0kl}(\xi,\eta) \equiv 1, \quad -1 \le \xi,\eta \le 1, \quad k = \overline{1, N_\alpha}, \quad l = \overline{1, N_\beta},$$

$$\sigma_0(p) = p, \quad p \in \{k,l\}.$$

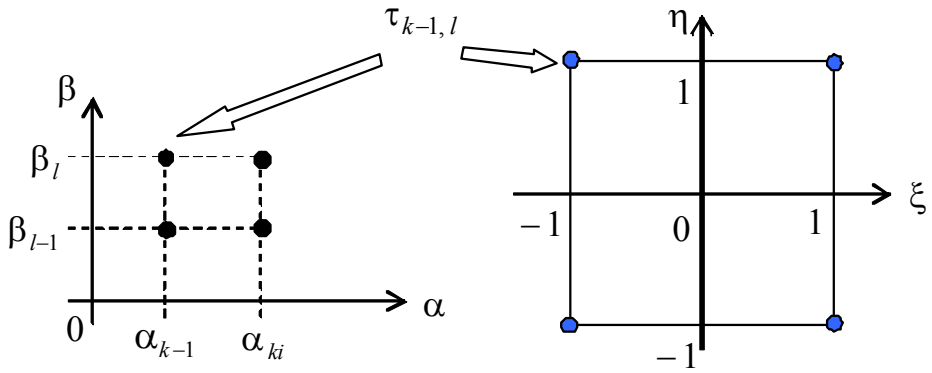


Рисунок 2.2 – Розташування вузлів у випадку білінійної апроксимації

У випадку білінійної апроксимації $\tau_{kl}(\xi,\eta)$ на D_{kl} матимемо (див. рисунок 2.2)

$$\tau_{kl}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\tau_{k-1,\,l-1}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{1}{4}\tau_{k,\,l-1}(1+\xi)(1-\eta) +$$
$$+\frac{1}{4}\tau_{k,\,l}(1+\xi)(1+\eta) + \frac{1}{4}\tau_{k-1,\,l}(1-\xi)(1+\eta).$$

$$\psi_{1kl}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+(-1)^{k+e}\xi)(1+(-1)^{l+f}\eta), \quad -1 \le \xi,\eta \le 1, \quad k = \overline{1, N_\alpha}, \quad l = \overline{1, N_\beta},$$

$$\sigma_1(p) = p - 1, \quad p \in \{k,l\}.$$

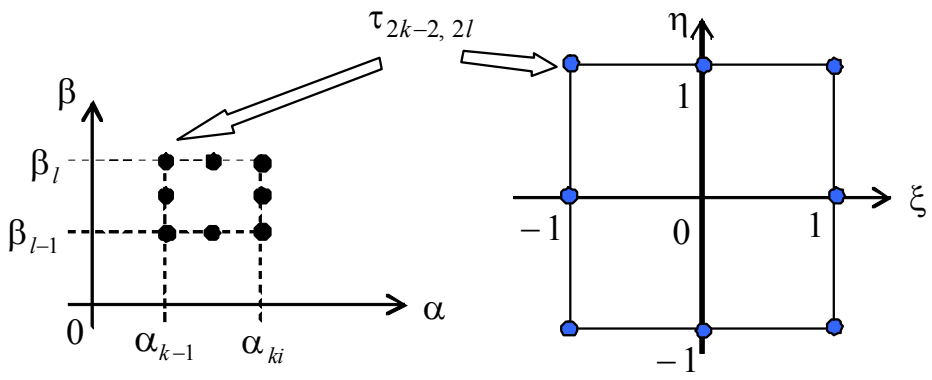


Рисунок 2.3 – Розташування вузлів у випадку біквадратичної апроксимації

У випадку біквадратичної апроксимації $\tau_{kl}(\xi,\eta)$ на D_{kl} отримаємо (див. рисунок 2.3)

$$\tau_{kl}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\Big(\tau_{2k-2,\,2l-2}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)+\tau_{2k,\,2l-2}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)+$$
$$+\tau_{2k,\,2l}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)+\tau_{2k-2,\,2l}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\tau_{2k-1,\,2l-2}(1-\xi^2)(1-\eta)+\tau_{2k,\,2l-1}(1+\xi)(1-\eta^2)+$$
$$+\tau_{2k-1,\,2l}(1-\xi^2)(1+\eta)+\tau_{2k-2,\,2l-1}(1-\xi)(1-\eta^2)\Big),$$

$$\sigma_2(p)=2(p-1),\quad p\in\{k,l\},\quad -1\le\xi,\eta\le 1,\quad k=\overline{1,N_\alpha},\quad l=\overline{1,N_\beta}.$$

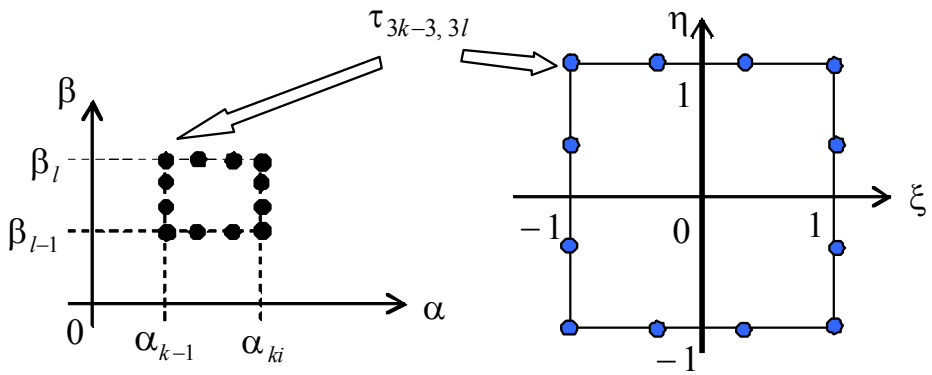


Рисунок 2.4 – Розташування вузлів у випадку бікубічної апроксимації

У випадку використання бікубічної апроксимації на D_{kl} отримаємо в представленні $\tau_{kl}(\xi,\eta)$ 12 доданків (див. рисунок 2.4)

$$\tau_{kl}(\xi,\eta)=\frac{1}{32}\Big(\,\tau_{3k-3,\,3l-3}(1-\xi)\,(1-\eta)\,(9\xi^3+9\eta^2-10)+$$
$$+\tau_{3k,\,3l-3}(1+\xi)\,(1-\eta)\,(9\xi^3+9\eta^2-10)+\tau_{3k,\,3l}(1+\xi)\,(1+\eta)\,(9\xi^3+9\eta^2-10)+$$
$$+\tau_{3k-3,\,3l}(1-\xi)\,(1+\eta)\,(9\xi^3+9\eta^2-10)\,\Big)+$$
$$+\frac{9}{32}\Big(\,\tau_{3k-2,\,3l-3}(1-\xi^2)\,(1-\eta)\,(1-3\xi)+$$
$$+\tau_{3k,\,3l-2}(1+\xi)\,(1-\eta^2)\,(1-3\xi)+\tau_{3k-1,\,3l}(1-\xi^2)\,(1+\eta)\,(1+3\xi)+$$
$$+\tau_{3k,\,3l-1}(1+\xi)\,(1-\eta^2)\,(1+3\xi)\,\Big)+$$
$$+\frac{9}{32}\Big(\,\tau_{3k-1,\,3l-3}(1-\xi^2)\,(1-\eta)\,(1+3\xi)+$$
$$+\tau_{3k,\,3l-1}(1+\xi)\,(1-\eta^2)\,(1+3\xi)+\tau_{3k-2,\,3l}(1-\xi^2)\,(1+\eta)\,(1-3\xi)+$$
$$+\tau_{3k-3,\,3l-2}(1-\xi)\,(1-\eta^2)\,(1-3\xi)\,\Big),$$
$$\sigma_3(p)=3(p-1),\quad p\in\{k,l\},\quad -1\le\xi,\eta\le1,\quad k=\overline{1,N_\alpha},\quad l=\overline{1,N_\beta}.$$

Після знаходження $\{\tau_{ef}\}$ для обчислення потенціалу в довільній точці $P\in\Omega_S$ логічно скористатися таким дискретним аналогом інтегрального подання розв'язку задачі (1.1)

$$u(P)=\sum_{k=1}^{N_\alpha}\sum_{l=1}^{N_\beta}\sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n}\sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n}\tau_{ef}J_{kl}^{(nef)}(P),$$

де

$$J_{kl}^{(nef)}(P):=\frac{1}{4}h_\alpha\,h_\beta\sqrt{EG}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_{nef}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}h_\alpha\sqrt{E}\,\xi+\left(\frac{2k-1}{2}h_\alpha-1\right)\sqrt{E}-\frac{a_0}{\sqrt{E}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}h_\beta\sqrt{G}\,\eta+\left(\frac{2l-1}{2}h_\beta-1\right)\sqrt{G}-\frac{a_0}{\sqrt{G}}\right)^2+c_0}},$$

а константи a_0, b_0 та $c_0>0$ визначаються з координат точки P. Інтеграли $J_{kl}^{(nef)}(P)$ обчислюють аналітично за спеціальними формулами [18, 19, 127, 125].

2.2 Наближене розв'язування окремих модельних задач

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля, утвореного нерухомими в просторі та незмінними в часі електричними зарядами, розподіленими на пластині з такими координатами вершин $A_1 = (-1, -1, -1)$, $A_2 = (1, -1, -1)$, $A_3 = (1, 1, -1)$, $A_4 = (-1, 1, -1)$. Граничне значення потенціалу $F(P) \equiv 1$, $P \in S$. За рівномірної сітки пластина S розбивалася на N^2 елементів. Обчислення проводилися при $N = 10$ та $N = 20$ з використанням кусково-постійної, білінійної, біквадратичної та бікубічної апроксимацій. Для контролю за точністю розрахунків відтворювали значення потенціалу на пластині в окремих точках, які не співпадали з вузлами інтерполяції шуканої функції $\tau(\alpha, \beta)$ (див. рисунок 2.5). Результати обчислень представлені у таблицях 2.1-2.4, рисунок 2.6.

Використання кусково постійної апроксимації

Використання білінійних, біквадратичних та бікубічних базисних функцій

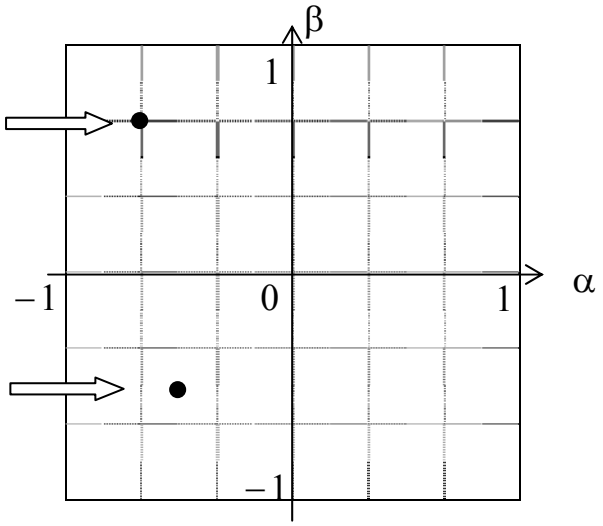


Рисунок 2.5 – Вибір «проміжних» точок при різних способах апроксимації шуканої «густини розподілу зарядів» $\tau(\alpha, \beta)$

Таблиця 2.1 – Потенціал в проміжних точках сітки у випадку кусково-постійної апроксимації

α	β	*n*=0, *N*=10	Похибка, *N*=10	α	β	*n*=0, *N*=20	Похибка, *N*=20
0.9500	0.9500	0.9029	0.0971	0.9750	0.9750	0.9209	0.0791
0.8000	0.9500	0.9650	0.0350	0.9000	0.9750	0.9717	0.0283
0.8000	0.8000	1.0338	0.0338	0.8000	0.9750	0.9637	0.0363
0.6000	0.6000	1.0000	0.0000	0.8000	0.8000	1.0000	0.0000

Таблиця 2.2 – Потенціал в проміжних точках сітки у випадку білінійної апроксимації

α	β	*n*=1, *N*=10	Похибка, *N*=10	α	β	*n*=1, *N*=20	Похибка, *N*=20
0.9000	0.9000	1.1521	0.1521	0.9500	0.9500	1.0868	0.0868
0.9000	0.7000	1.0483	0.0483	0.9500	0.8500	1.0296	0.0296
0.7000	0.7000	0.9832	0.0168	0.8500	0.8500	0.9901	0.0099
0.5000	0.5000	1.0027	0.0027	0.7500	0.7500	1.0016	0.0016
0.3000	0.3000	0.9998	0.0002	0.6500	0.6500	1.0000	0.0000
0.3000	0.1000	1.0000	0.0000				

Таблиця 2.3 – Потенціал в проміжних точках сітки у випадку біквадратичної апроксимації

α	β	*n*=2, *N*=10	Похибка, *N*=10	α	β	*n*=2, *N*=20	Похибка, *N*=20
0.9000	0.9000	0.9979	0.0021	0.9500	0.9500	1.0050	0.0050
0.9000	0.7000	1.0030	0.0030	0.9500	0.8500	1.0026	0.0026
0.7000	0.7000	0.9998	0.0002	0.9500	0.0500	1.0020	0.0020
0.5000	0.5000	1.0000	0.0000	0.8500	0.8500	1.0000	0.0000
0.3000	0.3000	1.0000	0.0000	0.7500	0.7500	1.0000	0.0000
0.3000	0.1000	1.0000	0.0000	0.6500	0.6500	1.0000	0.0000

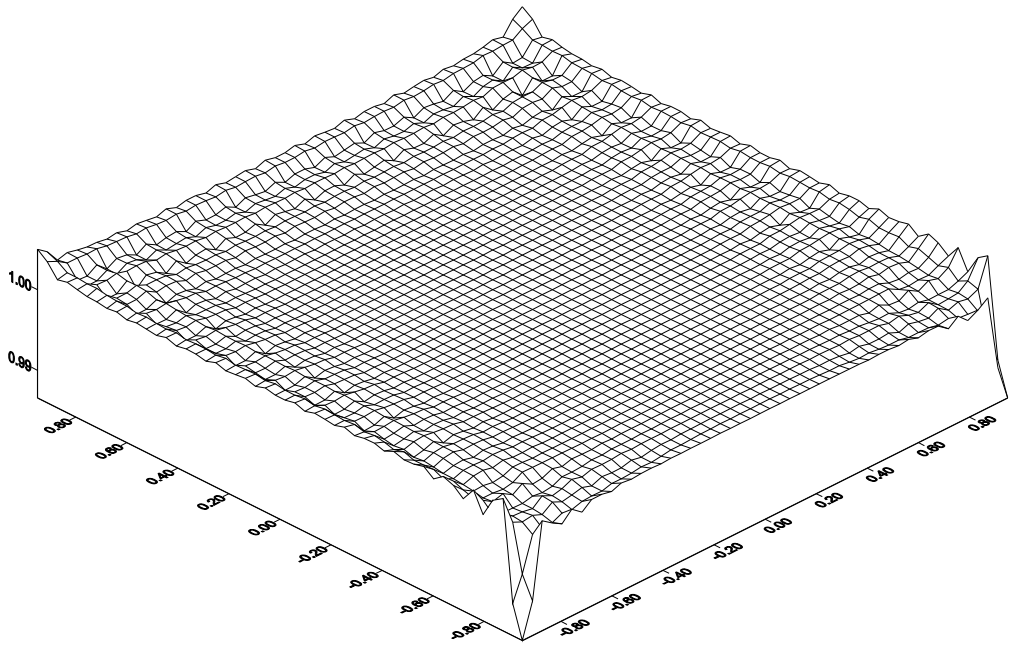


Рисунок 2.6 – Відтворення потенціалу на пластині S у «проміжних» точках сітки у випадку біквадратичної апроксимації при $N = 20$

Таблиця 2.4 – Потенціал в проміжних точках сітки у випадку бікубічної апроксимації

α	β	n=3, N=10	Похибка, N=10	α	β	n=3, N=20	Похибка, N=20
0.9000	0.9000	0.9799	0.0201	0.9500	0.9500	0.9942	0.0058
0.9000	0.7000	0.9959	0.0041	0.9500	0.8500	0.9982	0.0018
0.7000	0.7000	1.0003	0.0003	0.9500	0.0500	0.9987	0.0013
0.5000	0.5000	1.0000	0.0000	0.8500	0.8500	1.0002	0.0002
0.3000	0.3000	1.0000	0.0000	0.7500	0.7500	1.0000	0.0000
0.3000	0.1000	1.0000	0.0000	0.6500	0.6500	1.0000	0.0000

2.3 Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку

Розглянемо питання оцінки похибки наближеного розв'язку ІР (2.6). Використаємо ефективний на практиці апостеріорний спосіб оцінки. Згідно наших припущень щодо розв'язності ІР (2.2) оператор K – ізоморфізм із $H_{00}^{-1/2}(S)$ в $H^{1/2}(S)$. Припустимо, що $\tau_h(\alpha,\beta)$ – наближений розв'язок ІР типу (2.6), який належить до обраного простору апроксимацій ($n=\overline{0,3}$). Розв'язок задачі (2.1) у будь-якій точці $p\in\Omega_s$ шукали в інтегральному вигляді. Тому на підставі $\tau_h(\alpha,\beta)$ наближене значення цього розв'язку є

$$u_h(P)=(K\tau_h)(P).$$

Функцію похибки $e_u := u-u_h$ відповідно можна обчислити за формулою

$$e_u = K\,\tau - K\,\tau_h = K\,(\tau-\tau_h) = K\,e_\tau, \qquad (2.8)$$

де u – теоретичне значення розв'язку (2.1), а $e_\tau := \tau-\tau_h$ – похибка наближеного значення «густини розподілу зарядів». Легко бачити, що e_τ є розв'язком такого ІР

$$K\, e_\tau = F - K\, \tau_h\,, \qquad (2.9)$$

Отже, для знаходження e_u на S потрібно розв'язати ІР (2.9) і скористатися (2.8). Як відомо [23, 29, 83, 150, 195], розв'язок ІР (2.6) поводить себе нерегулярно лише в околі контуру розімкненої поверхні S. Тому відтворюємо функцію e_u лише на «екстремальних» елементах D_{kl}^e – там, де вона може приймати максимальне значення [23, 83, 150]. Далі перевіряємо лише умову досягнення наперед заданої точності ε:

$$\frac{\| e_u \|_{H^{1/2}(D_{kl}^e)}}{\sqrt{\| u_h \|^2_{H^{1/2}(D_{kl}^e)} + \| e_u \|^2_{H^{1/2}(D_{kl}^e)}}} \le \frac{\| e_\tau \|_{H_{00}^{-1/2}(D_{kl}^e)}}{\sqrt{\| \tau_h \|^2_{H_{00}^{-1/2}(D_{kl}^e)} + \| e_\tau \|^2_{H_{00}^{-1/2}(D_{kl}^e)}}} < \varepsilon \qquad (2.10)$$

Якщо на «екстремальному» елементі умова (2.10) не виконується, то необхідно розбити цей елемент на кілька і розв'язати задачу повторно на густішій сітці. При перевірці умови (2.10) необхідно обчислювати норми деяких функцій в просторі $H_{00}^{-1/2}(D_{kl}^e)$. З практичної точки зору це не завжди виправдовується, оскільки e_τ і τ_h отримується нами як поліноміальні апроксимації розв'язків (2.9) і (2.6). Для їх об'єктивної оцінки можна скористатись нормою в $L_2(D_{kl}^e)$ або її ваговим аналогом $\| \cdot \|_{L_2,\rho}$, де в якості ваги розглянути функцію відстані від будь-якої точки D_{kl}^e до контуру ∂S.

Таблиця 2.5 – Похибка e_u в «проміжних» точках сітки у випадку біквадратичної апроксимації

α	β	n=2, N=10	Похибка, N=10
0.9000	0.9000	0.1518	0.0003
0.9000	0.7000	0.1526	0.0005
0.7000	0.7000	0.1521	0.0000

Для знаходження функції e_u необхідно розв'язувати задачу подібну до

початкової, лише з іншими вхідними даними та використовуючи вищий порядок апроксимації. Це, безумовно, є певним недоліком досліджуваної методики. У зв'язку з цим розглянемо альтернативний варіант застосування цього підходу до задачі про пластину з використанням білінійної апроксимації та $N = 10$ (результати див. таблицю 2.2). Використовуючи для розв'язування (2.9) біквадратичну апроксимацію з тією ж самою кількістю елементів, стосовно функції e_u отримаємо такі покращені значення (див. таблицю 2.5).

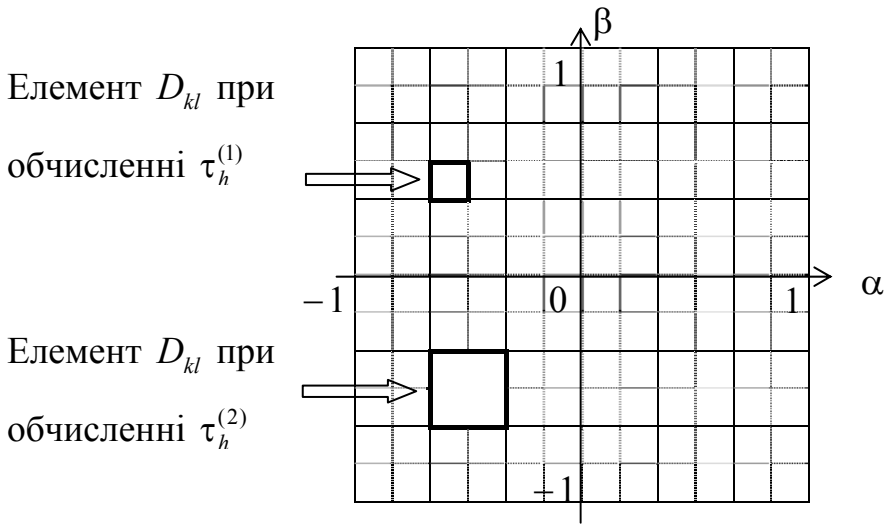


Рисунок 2.7 – Модифікація щільності сітки при обчисленні e_u^2

Розглянемо ще один спосіб оцінки похибки отримуваних результатів. Припустимо, що функція $\tau_h^{(1)}$ отримана при використанні білінійної апроксимації на густішій сітці. Тоді для обчислення e_u в (2.8) в якості τ оберемо функцію $\tau_h^{(2)}(\alpha, \beta)$, побудовану за значеннями $\tau_h^{(1)}$ у вузлах сітки на підставі вже біквадратичної апроксимації (див. рисунок 2.7). Зауважимо, що в цьому випадку

$$e_u^{(1)} = K\tau_h^{(2)} - K\tau_h^{(1)}.$$

Результати обчислень подані в таблиці 2.6. Вони ілюструють досить простий і ефективний спосіб оцінки e_u.

Таблиця 2.6 – Потенціал в «проміжних» точках сітки при обчисленні похибки e_u^2

α	β	n=1, N=10	n=2, N=10	Похибка e_u^2
0.9000	0.9000	1.1521	0.9979	0.1542
0.9000	0.7000	1.0483	1.0030	0.0453
0.7000	0.7000	0.9832	0.9998	0.0166
0.5000	0.5000	1.0027	1.0000	0.0027
0.3000	0.3000	0.9998	1.0000	0.0002
0.3000	0.1000	1.0000	1.0000	0.0000

2.4 Розв’язування однієї наближеної до практики задачі

У процесі розв’язування однієї реальної задачі електростатики проілюструємо наведену вище методику побудови та аналізу наближеної схеми, розглянемо можливості її оптимізації, а також оцінимо похибку отримуваних результатів.

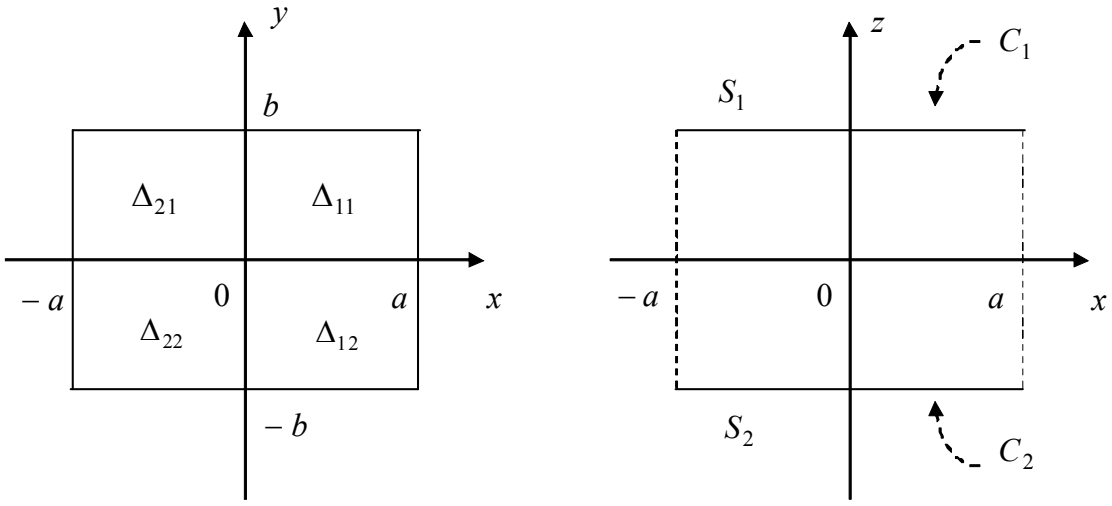


Рисунок 2.8 – Проекції пластин S_1 і S_2 на координатні площини

Нехай потрібно розрахувати поле плоского конденсатора, інформацію про геометричні властивості якого подано у вигляді проекції на координатні площини XY і YZ (див. рисунок 2.8). З точки зору запровадженої термінології поверхня S є сукупністю двох паралельних пластин S_1 і S_2 однакового розміру, симетрично розташованих відносно площини XY на відстані $2h$ одна від другої відповідно із граничними значеннями потенціалів C_1 і C_2 (довільні сталі), відповідно.

У даному конкретному випадку аналогом ІР (2.5) буде така система ІР

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Delta} \tau_1(x,y)\,K(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy + \\ \qquad + \iint\limits_{\Delta} \tau_2(x,y)\,K_h(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = C_1, \quad P := (x_0,y_0) \in S_1, \\ \iint\limits_{\Delta} \tau_1(x,y)\,K_h(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy + \\ \qquad + \iint\limits_{\Delta} \tau_2(x,y)\,K(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = C_2, \quad P := (x_0,y_0) \in S_2, \end{cases} \tag{2.11}$$

де

$$\Delta := [-a,a]\times[-b,b],$$

$$K(x,y;x_0,y_0) := \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{-1/2},$$

$$K_h(x,y;x_0,y_0) := \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 4h^2\right]^{-1/2},$$

$\{\tau_1(x,y), \tau_2(x,y), (x,y)\in\Delta\}$ – сукупна «густина розподілу зарядів» на $S := S_1 \cup S_2$. Зауважимо також, що

$$\Delta = \bigcup_{i,j=1}^{2} \Delta_{ij},$$

де Δ_{ij} – конгруентні складові Δ (див. рисунок 2.8). Оскільки початкова задача володіє абелевою групою симетрії другого порядку, від системи ІР (2.11) можна перейти до двох незалежних ІР по конгруентній складовій S_1 [194]

$$\iint\limits_{\Delta} \sigma_1(x,y)\,(K+K_h)(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = F_1, \quad (x_0,y_0)\in S_1, \tag{2.12}$$

$$\iint_{\Delta} \sigma_2(x,y)(K-K_h)(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = F_2, \quad (x_0,y_0)\in S_2, \tag{2.13}$$

де

$$\sigma_1(x,y) := \tau_1(x,y)+\tau_2(x,y),$$

$$\sigma_2(x,y) := \tau_1(x,y)-\tau_2(x,y),$$

$$F_1 := C_1+C_2, \quad F_1 := C_1-C_2.$$

Праві частини і (11) і (12) постійні, тому шукані розв'язки σ_1 і σ_2 симетричні відносно осей $0x$ і $0y$. Це дає можливість подати ІР (2.12), (2.13) у вигляді

$$\iint_{\Delta} \sigma_1(x,y)(K+K_h)(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = F_1, \quad P\in\Delta_{11}, \tag{2.14}$$

$$\iint_{\Delta} \sigma_2(x,y)(K-K_h)(x,y;x_0,y_0)\,dx\,dy = F_2, \quad P\in\Delta_{11}, \tag{2.15}$$

де σ_1 у (2.14) і σ_2 у (2.15) – звуження шуканих розв'язків на Δ_{11}. Далі, розв'язуючи (2.14), (2.15), знаходимо

$$\tau_1(x,y) := \frac{1}{2}\big(\sigma_1(x,y)+\sigma_2(x,y)\big),$$

$$\tau_2(x,y) := \frac{1}{2}\big(\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)\big).$$

ІР (2.14), (2.15) розв'язували методом колокації із використанням кусково-постійних базисних функцій. Розбиття на елементи проводили в області $\Delta_{11} := (0,a)\times(0,b)$. «Екстремальним» вважаємо елемент $D_{N_xN_y}$, який включає кутову точку пластини S_1. Відомо [12, 45, 83], що функції σ_1 і σ_2 в околі кутової точки S_1 і при підході до контуру мають особливість вигляду

$$\Omega(x,y) = \frac{\big[(a-x)(b-y)\big]^{1/2}}{(a-x)^{\gamma}+(b-y)^{\gamma}},$$

де $\gamma \approx 1{,}7034$ [52]. Від цієї особливості можна позбавитися шляхом запровадження у відповідних інтегралах спеціальних замін змінних. Це значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування (2.14), (2.15) і не дає можливості скористатися простою і ефективною чисельно-аналітичною

схемою [19, 127, 125]. Тому для досягнення потрібної точності результатів в умовах «ігнорування» особливості $\Omega(x, y)$ у поданні шуканого розв'язку компенсувати її відсутність можна лише шляхом згущення сітки в околі кутової точки пластини.

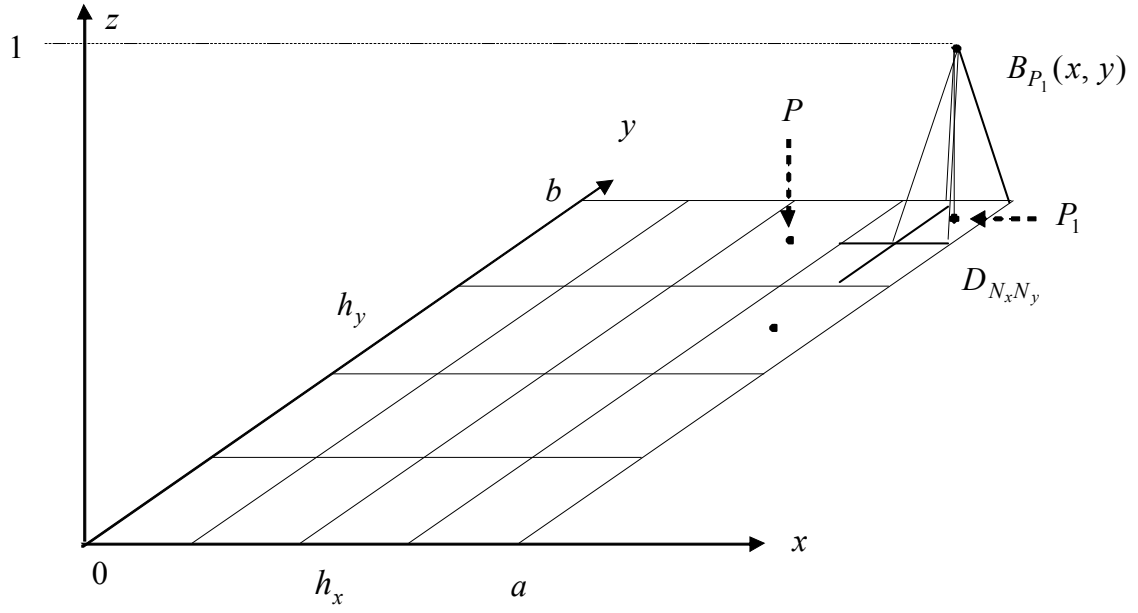


Рисунок 2.9 – Ілюстрація схеми «уточнення» розв'язку ІР шляхом вибору точки P_1 на кутовому елементі

Отже, нехай потрібно наближено розв'язати ІР (2.14) з наперед заданою точністю ε. Припустимо, що в результаті розв'язання відповідної СЛАР тримали $\sigma_{1\varepsilon}(x, y)$. Перевірка задоволення граничної умови полягає в обчисленні $\left(K_1\sigma_{1\varepsilon}\right)(P_1)$, де $P_1 := \left\{ a - \frac{h_x}{4}, b - \frac{h_y}{4} \right\}$ – так звана контрольна точка, що лежить в околі кутової точки пластини S_1 на «екстремальному» елементі $D_{N_xN_y} := \left[a - h_x, a \right] \times \left[b - h_y, b \right]$ (див. рисунок 2.9). Далі, враховуючи подання функції похибки

$$e_{\sigma_1} := \sigma_1 - \sigma_{1\varepsilon}$$

у вигляді

$$e_{\sigma_1}(x,y) = \lambda_1 B_{P_1}(x,y),$$

Знаходимо невідомий параметр λ_1 шляхом колокації (2.14) в точці P_1:

$$\lambda_1 = \frac{F_1 - \left(K_1\sigma_{1\varepsilon}\right)(P_1)}{\left(K_1\sigma_{1\varepsilon}\right)(P_1)}.$$

Слід зауважити, що така проста формула для обчислення параметра λ_1 пов'язана із фінітністю кусково-лінійної бабл-функції $B_{P_1}(x,y)$:

$$\operatorname{supp} B_{P_1}(x,y) = D_{N_x N_y}^{1/4} := \left[a - \frac{h_x}{2}, a\right] \times \left[b - \frac{h_y}{2}, b\right].$$

Подріблення (згущення) сітки тепер пов'язане з перевіркою умов типу (2.10). Аналогічна процедура здійснюється при наближеному розв'язуванні ІР (2.15). У таблиці 2.7 наведені результати розв'язання ІР (2.14).

Таблиця 2.7 – Потенціал в центральних «проміжних» точках сітки на пластині S_1 у випадку використання білінійної бабл-функції при F_1=0, F_2=–10

N	x	y	u_h	λ_1	ε_e
4	0.9375	0.9375	0.6102	0.5244	0.4225
5	0.9375	0.9375	0.7451	0.6133	0.3867
	0.9500	0.9500	0.6353	0.6133	0.3867
10	0.9375	0.9375	1.0992	1.0171	0.2906
	0.9500	0.9500	1.000	1.0171	0.2906
	0.9750	0.9750	0.6976	1.0171	0.2906
10	0.9375	0.9375	1.0061	1.7564	0.2198
	0.9500	0.9500	1.0856	1.7564	0.2198
	0.9750	0.9750	1.0000	1.7564	0.2198
	0.9875	0.9875	0.7517	1.7564	0.2198

2.5 Використання специфіки деяких граничних задач теорії потенціалу при їх числовому аналізі

Повернемося до задачі розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора зображеного на рисунку 2.10.

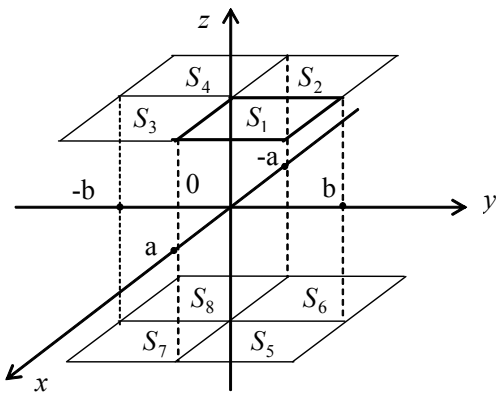


Рисунок 2.10 – Розміщення пластин паралельного конденсатора

Як і раніше, при математичному моделюванні проблеми інформація про геометрію заряджених електродів подається у вигляді деякої сукупності S двох паралельних прямокутних пластин. Очевидно, що поверхню S можна розглядати як сукупність восьми конгруентних складових S_i $\left(i=\overline{1,8}\right)$ (див. рисунок 2.10). Подамо початкове ІР у відповідності з таким подрібненням S у вигляді системи ІР

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4}\iint\limits_{\Delta_i}\rho_i(x,y)\cdot K(x,y;\,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum\limits_{i=5}^{8}\iint\limits_{\Delta_i}\rho_i(x,y)\cdot K_h(x,y;\,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \\ \qquad =f_k(x_0,y_0),\quad (x_0,y_0)\in S_k,\quad k=\overline{1,4}; \\ \sum\limits_{i=1}^{4}\iint\limits_{\Delta_i}\rho_i(x,y)\cdot K_h(x,y;\,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum\limits_{i=5}^{8}\iint\limits_{\Delta_i}\rho_i(x,y)\cdot K(x,y;\,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \\ \qquad =f_k(x_0,y_0),\quad (x_0,y_0)\in S_k,\quad k=\overline{5,8}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Тут $\{\rho_i(x, y), (x, y) \in \Delta_i, i = \overline{1, 8}\}$ – шукана сукупна «густина розподілу зарядів» на S;

$$\Delta_1 = \Delta_5 := [0, \tilde{a}] \times [0, \tilde{b}], \quad \Delta_2 = \Delta_6 := [-\tilde{a}, 0] \times [0, \tilde{b}],$$

$$\Delta_3 = \Delta_7 := [0, a] \times [-\tilde{b}, 0], \ \Delta_4 = \Delta_8 := [-\tilde{a}, 0] \times [-\tilde{b}, 0];$$

$$K(x, y; x_0, y_0) := \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}};$$

$$K_h(x, y; x_0, y_0) := \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 4h^2}};$$

$2h$ – відстань між пластинами.

Далі врахуємо те, що поверхня S володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку $\{\tau_i\}_{i=1}^{8}$, яка, в свою чергу, є прямим добутком абелевих підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$, де e – тотожне перетворення, а τ_x, τ_y, τ_z – дзеркальне відображення від трьох попарно ортогональних площин $\{yz\}$, $\{xz\}$, $\{xy\}$, відповідно. Тобто елементами групи є такі лінійні перетворення:

$$\tau_1 := e, \quad \tau_2 := \tau_x, \quad \tau_3 := \tau_y, \quad \tau_4 := \tau_x \circ \tau_y,$$

$$\tau_5 := \tau_z, \quad \tau_6 := \tau_x \circ \tau_z, \quad \tau_7 := \tau_y \circ \tau_z, \quad \tau_8 := \tau_x \circ \tau_y \circ \tau_z.$$

Оскільки невідомі функції $\rho_i(x, y)$ залежать лише від двох незалежних змінних, то очевидно, що

$$\tau_1 = \tau_5 = \tau_1^{-1} = \tau_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \tau_6 = \tau_2^{-1} = \tau_6^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \tau_7 = \tau_3^{-1} = \tau_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \tau_8 = \tau_4^{-1} = \tau_8^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для подальшого перетворення системи (2.16), у відповідності з загальними ідеями [22, 143, 142] доцільно скористатись такими позначеннями:

$$a := \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \quad b := \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}},$$

$$c := \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}, \quad d := \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}},$$

$$e := \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+4h^2}}, \quad f := \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+4h^2}},$$

$$g := \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+4h^2}}, \quad h := \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+4h^2}}.$$

Далі в системі ІР (2.16) перейдемо до нового базису:

$$\rho'_i(x,y) := \rho_i\left[\tau_i^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right], \; i=\overline{1,8};$$

$$f'_k(x_0,y_0) := f_k\left[\tau_k^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right], \; k=\overline{1,8}.$$

На основі запровадженої «заміни змінних», проведеної також і в ядрах ІР, систему (2.16) можна подати у вигляді

$$\iint\limits_{\Delta_1} \sum_{j=1}^{8} a'_{ij}\cdot\rho'_j(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f'_i(x_0,y_0), \; i=\overline{1,8}, \tag{2.17}$$

$$(x_0,y_0)\in(0,\,\tilde{a})\times(0,\,\tilde{b}),$$

де

$$A' := \left(a'_{ij}\right)_{i,j=1}^{8} = \begin{Vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{Vmatrix}.$$

Отже, на даному етапі отримано систему восьми ІР, де інтегрування ведеться лише по одній складовій поверхні – S_1.

У свою чергу, оскільки підгрупи $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$ є циклічними групами, то таблиця їх характерів має один і той же вигляд [194]:

Таблиця 2.8 – Характери груп

	e	τ
χ^1	1	1
χ^2	1	-1

де $\tau := \tau_x \vee \tau_y \vee \tau_z$. Звідси ми можемо обчислити характери групи восьмого порядку $\{\tau_i\}_{i=1}^{8}$, взявши прямий добуток матриць характерів (матриць Фур'є) підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$. В результаті отримаємо

$$F := \left(F_{ji}\right)_{j,\, i=1}^{8} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи пряме і обернене перетворення Фур'є, матрицю A' можна звести до діагонального вигляду [142], а систему (2.17) «розщепити» на вісім незалежних ІР

$$\iint\limits_{\Delta_1} A_j \overline{\rho}_j(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \overline{f}_j(x_0, y_0),\ j = \overline{1, 8}, \tag{2.18}$$

$$(x_0, y_0) \in (0, \tilde{a}) \times (0, \tilde{b}),$$

де

$$\overline{\rho}_j(x, y) = \sum_{i=1}^{8} F_{ji} \cdot \rho_i'(x, y), (x, y) \in \Delta_1, \tag{2.19}$$

$$\overline{f}_j(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{8} F_{ji} \cdot f_i'(x_0, y_0),$$

а A_j – елементи діагональної матриці $F \cdot A' \cdot F^{-1}$, які обчислюються за формулами:

$$A_1 = a + b + c + d + e + f + g + h,$$

$$A_2 = a - b - c + d + e - f - g + h,$$

$$A_3 = a + b - c + d - e + f - g - h,$$

$$A_4 = a - b + c + d - e - f + g - h,$$

$$A_5 = a + b + c - d + e - f - g - h,$$

$$A_6 = a - b - c - d + e + f + g - h,$$

$$A_7 = a + b - c - d - e - f + g + h,$$

$$A_8 = a - b + c - d - e + f - g + h.$$

Розв'язавши наближено вісім незалежних ІР (2.18) методом колокації, а потім систему (2.19), одержимо значення функцій $\rho_i'(x, y)$ ($i = \overline{1, 8}$), за допомогою яких можна обчислити потенціал в будь-якій точці $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ простору за формулою:

$$u(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \iint_{\Delta_1} \left[\frac{\rho_1'(x, y)}{\sqrt{(x_1' - \overline{x})^2 + (y_1' - \overline{y})^2 + (\overline{z} - h)^2}} + \frac{\rho_2'(x, y)}{\sqrt{(x_2' + \overline{x})^2 + (y_2' - \overline{y})^2 + (\overline{z} - h)^2}} + \right.$$

$$\frac{\rho_3'(x, y)}{\sqrt{(x_3' - \overline{x})^2 + (y_3' + \overline{y})^2 + (\overline{z} - h)^2}} + \frac{\rho_4'(x, y)}{\sqrt{(x_4' + \overline{x})^2 + (y_4' + \overline{y})^2 + (\overline{z} - h)^2}} +$$

$$\frac{\rho_5'(x, y)}{\sqrt{(x_5' - \overline{x})^2 + (y_5' - \overline{y})^2 + (\overline{z} + h)^2}} + \frac{\rho_6'(x, y)}{\sqrt{(x_6' + \overline{x})^2 + (y_6' - \overline{y})^2 + (\overline{z} + h)^2}} +$$

$$\left. \frac{\rho_7'(x, y)}{\sqrt{(x_7' - \overline{x})^2 + (y_7' + \overline{y})^2 + (\overline{z} + h)^2}} + \frac{\rho_8'(x, y)}{\sqrt{(x_8' + \overline{x})^2 + (y'_8 + \overline{y})^2 + (\overline{z} + h)^2}} \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

де

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \tau_i^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; i = \overline{1, 8}.$$

Використання запропонованого вище підходу дозволяє протестувати вихідну задачу для довільних граничних значень потенціалу. На рисунках 2.11,2.12 представлено розподіл ліній рівного потенціалу в площині $x = 0$ при різних співвідношеннях довжини ($\tilde{a}$) та ширини ($\tilde{b}$) пластини, з використанням кусково-постійної апроксимації густини ІР з відповідними граничними значеннями потенціалу: $f_1 = 1$; $f_2 = -100$. Кількість точок колокації при поділі складової S_1 рівна 100.

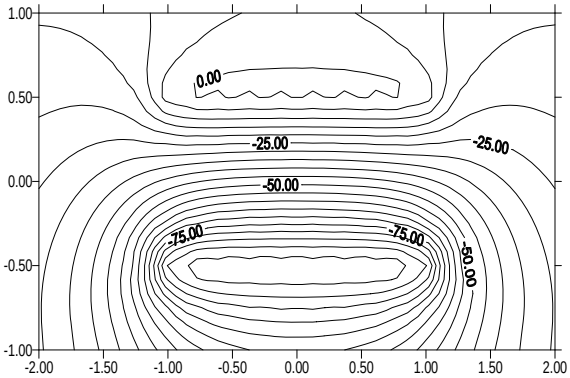


Рисунок 2.11 – Розподіл ліній рівня в площині $x = 0$ при $\tilde{a}/\tilde{b} = 1$

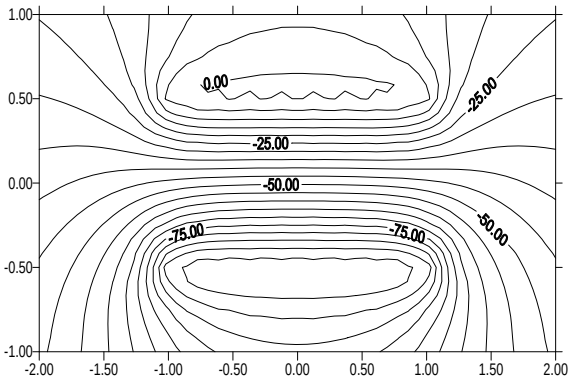


Рисунок 2.12 – Розподіл ліній рівня в площині $x = 0$ при $\tilde{a}/\tilde{b} = 16$

Для відтворення якісної картини поля в площині, яка утворюється як результат центрального поперечного перерізу досліджуваної системи заряджених

електродів доцільно обмежитись при розв'язуванні просторової задачі деяким «плоским» її наближенням. На рисунку 2.13 наведено розподіл ліній рівного потенціалу при розв'язуванні відповідної «плоскої» задачі, а в таблиці 2.9 для порівняння представлено значення потенціалу в деяких контрольних точках при розв'язуванні просторової задачі і відповідного «плоского» наближення.

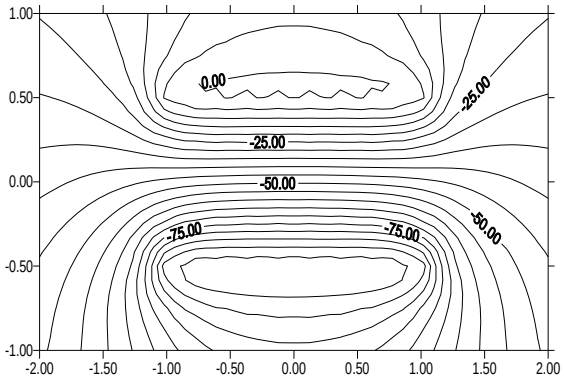


Рисунок 2.13 – Розподіл ліній рівня «плоскої» задачі

Таблиця 2.9 – Потенціал електростатичного поля у точках площини x=0

(y, z)	$u \quad (\tilde{a}/\tilde{b}=16)$	«плоске» наближення
(-1.00, -0.75)	-79.3731	-79.3729
(-1.00, -0.25)	-66.4593	-66.4594
(-1.00, 0.00)	-46.3909	-46.3910
(-1.00, 0.25)	-27.0001	-27.0004
(-1.00, 0.75)	-10.4086	-10.4082
(-0.75, -0.50)	-99.9925	-99.9930
(1.00, 0.75)	-10.4086	-10.4082
(2.00, -1.00)	-48.9304	-48.9307

Слід зауважити, що при розв'язуванні «плоскої» задачі з довільними граничними значеннями потенціалів на електродах необхідно обчислити

спеціальну адитивну сталу C, яка фігурує в інтегральному поданні поля [128]. У нашому випадку $C = -49.5$.

2.6 Оцінювання похибки

Не зменшуючи загальності, розглянемо одне із восьми незалежних ІР (2.18):

$$\left(K\overline{\rho}_1\right)(x_0,\ y_0) \equiv \iint\limits_{\Delta_1} A_1 \overline{\rho}_1(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{f}_1(x_0, y_0), \tag{2.20}$$

$$(x_0, y_0) \in (0,\ a) \times (0,\ b).$$

Наближене розв'язування даного рівняння здійснюємо методом колокації з використанням кусково-постійних базисних функцій. Поділ на елементи проводимо відносно $\Delta_1 = [0,\ \widetilde{a}] \times \left[0,\ \widetilde{b}\right]$. «Екстремальним» вважаємо елемент $D_{N_x N_y} := [\widetilde{a} - h_x,\ \widetilde{a}] \times \left[\widetilde{b} - h_y, \widetilde{b}\right]$, який відповідає кутовій точці складової S_1 (див. рисунок 2.14). Тут

$$h_x = \frac{\widetilde{a}}{N_x}, \quad h_x = \frac{\widetilde{b}}{N_x},$$

де N_x, N_y – кількість точок поділу відрізків $[0,\ \widetilde{a}]$, $\left[0,\ \widetilde{b}\right]$, відповідно. Слід зауважити, що без врахування наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь ми повинні були б врахувати особливості розв'язку в околі восьми кутових точок поверхні S, що суттєво ускладнює весь алгоритм обчислень.

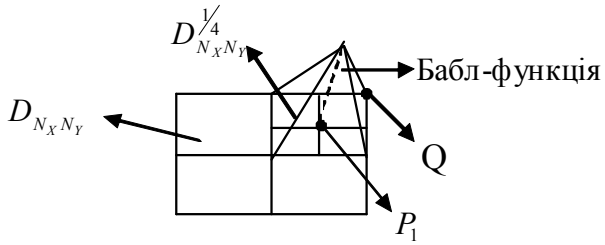


Рисунок 2.14 – Схематичне представлення «екстремального» елемента

Припустимо, що в результаті розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимує відповідне операторне рівняння, отримано наближений розв'язок $\overline{\rho}_{1\varepsilon}(P)$, аналіз якого так чи інакше вимагає дослідження властивостей його похибки $\varepsilon_{\rho_1} := \overline{\rho}_1 - \overline{\rho}_{1\varepsilon}$.

Обмежимось побудовою наближень e_{ρ_1} до реальної похибки ε_{ρ_1}. Перевірка задоволення граничної умови полягає в обчислені потенціалу в деякій контрольній точці P_1, що лежить в околі кутової точки складової S_1 і відповідає «екстремальному» елементу $D_{N_x N_y}$. Далі подамо функцію-похибки e_{ρ_1} у вигляді

$$e_{\rho_1} = \lambda_1 \cdot B_{P_1}(x, y)$$

і знайдемо невідомий параметр λ_1 шляхом колокації (2.20) саме в точці

$$P_1 := \left\{ \widetilde{a} - \frac{h_x}{4}, \widetilde{b} - \frac{h_y}{4} \right\}:$$

$$\lambda_1 = \frac{\overline{f}_1(P_1) - \left(K\overline{\rho}_1\right)(P_1)}{\left(K B_{P_1}\right)(P_1)}. \qquad (2.21)$$

Зауважимо, що така проста формула для обчислення параметра λ_1 пов'язана з фінітністю білінійної бабл-функції $B_{P_1}(x, y)$:

$$\operatorname{supp} B_{P_1}(x, y) = D^{1/4}_{N_x N_y} := \left[\widetilde{a} - \frac{h_x}{2}, \widetilde{a} \right] \times \left[\widetilde{b} - \frac{h_y}{2}, \widetilde{b} \right].$$

При обчисленні знаменника у формулі (2.21) зручно віднести елемент $D^{1/4}_{N_x N_y}$ до локальної системи координат (α, β) так, що $|\alpha| \le 1, \quad |\beta| \le 1$. Це дає можливість після представлення $\left(K B_{P_1}\right)(P_1)$ у вигляді суми чотирьох інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4:

$$I_1 := \int_{x_i - \widetilde{\Delta}_1}^{x_i} \int_{y_j - \widetilde{\Delta}_2}^{y_j} A_1 \cdot B^{(1)}_{P_1}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad I_2 := \int_{x_i}^{x_i + \widetilde{\Delta}_1} \int_{y_j - \widetilde{\Delta}_2}^{y_j} A_1 \cdot B^{(2)}_{P_1}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

$$I_3 := \int\limits_{x_i}^{x_i+\tilde{\Delta}_1} \int\limits_{y_j}^{y_j+\tilde{\Delta}_2} A_1 \cdot B_{P_1}^{(3)}(x,\, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad I_4 := \int\limits_{x_i-\tilde{\Delta}_1}^{x_i} \int\limits_{y_j}^{y_j+\tilde{\Delta}_2} A_1 \cdot B_{P_1}^{(4)}(x,\, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

де $\tilde{\Delta}_1 = \dfrac{h_x}{4}$, $\tilde{\Delta}_2 = \dfrac{h_y}{4}$, в кожному з них виконати деяку заміну змінних. Так, наприклад, для I_1 матимемо

$$x(\alpha,\, \beta) := \frac{2x_i - \tilde{\Delta}_1}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_1}{2} \cdot \alpha\,, \quad y(\alpha,\, \beta) := \frac{2y_j - \tilde{\Delta}_2}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2}{2} \cdot \beta\,, \quad -1 \le \alpha, \beta \le 1\,.$$

При цьому відповідні складові бабл-функції у локальних координатах такі

$$B^{(1)}(\alpha,\, \beta) = \frac{1}{4}(1+\alpha)(1+\beta), \quad B^{(2)}(\alpha,\, \beta) = \frac{1}{4}(1-\alpha)(1+\beta),$$

$$B^{(3)}(\alpha,\, \beta) = \frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\beta), \quad B^{(4)}(\alpha,\, \beta) = \frac{1}{4}(1+\alpha)(1-\beta).$$

Запроваджені вище величини для апостеріорних оцінювачів похибки на «екстремальному» елементі ми використовуємо з метою знаходження наближеного розв’язку (2.20) з наперед гарантованою точністю. Критерієм зупинки процесу уточнення наближеного розв’язку $\bar{\rho}_{1\varepsilon}(P)$ є деякий індикатор

$$\eta_{\rho_1} := \frac{\left\| e_{\rho_1}(x, y) \right\|_{L_2}}{\sqrt{\left\| e_{\rho_1}(x, y) \right\|_{L_2}^2 + \left\| \bar{\rho}_{1\varepsilon}(x, y) \right\|_{L_2}^2}} \cdot 100\%\,. \tag{2.22}$$

Якщо індикатор (2.22) не перевищує заданого допустимого рівня, то уточнення $\bar{\rho}_{1\varepsilon}$ припиняємо, інакше здійснюємо згущення сітки. В нашому випадку на першому кроці згущення сітки отримаємо чотири нових елементи $\left(D^{1/4}_{N_x N_y} \right)_i$, $\left(i = \overline{1,4} \right)$.

У таблиці 2.10 наведено значення потенціалу в деяких контрольних точках, що знаходяться в околі «екстремального» елемента до і після використання апостеріорного оцінювача похибки при допустимому рівні 10 %.

Таблиця 2.10 – Значення потенціалу у деяких контрольних точка у випадку використання білінійної бабл-функції

N_y	y	0,9375	0,8750	0,8125
	z	0,9375	0,9375	0,9375
4	u_0	0,8963	0,9454	0,9697
	u_1	1,0358	1,0189	1,0105
	λ_1	0,1395	0,0735	0,0408
	η	0,2116	0,1132	0,0631
5	u_0	0,9321	0,9792	–
	u_1	1,0234	1,0072	–
	λ_1	0,0913	0,0280	–
	η	0,1365	0,0421	–
6	u_0	0,9600	–	–
	u_1	1,0138	–	–
	λ_1	0,0538	–	–
	η	0,0794	–	–

2.7 Ітераційне уточнення розв’язків

Використовуючи частково описаний вище метод апостеріорного оцінювання похибки, розглянемо ітераційний процес уточнення наближених розв’язків ІР (2.20). На підставі попередньо отриманих методом колокації густин $\bar{\rho}_j(x,y)$ $j=\overline{1,8}$ з (2.18) в точках (x_i, y_p), де

$$x_i=(2i-1)\cdot\frac{h_x}{2},\quad i=\overline{1,N_x},\quad y_p=(2p-1)\cdot\frac{h_y}{2},\quad p=\overline{1,N_y},$$

знаходимо значення $\bar{\rho}_j(x,y)$ у вузлах сітки $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, де

$$\tilde{x}_k = (k-1)\cdot h_x, \quad k = \overline{1, N_x+1}, \quad \tilde{y}_l = (l-1)\cdot h_y, \quad l = \overline{1, N_y+1},$$

наступним чином:

1. В крайніх точках сітки, наприклад в точці $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_{N_y+1})$,

$$\bar{\rho}_j(\tilde{x}_1, \tilde{y}_{N_y+1}) := \bar{\rho}_j(x_1, y_{N_y});$$

2. Для точок $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_{N_y+1})$, $k = \overline{1, N_x}$,

$$\bar{\rho}_j(\tilde{x}_k, \tilde{y}_{N_y+1}) := \frac{1}{2}\left[\bar{\rho}_j(x_i, y_{N_y}) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_{N_y})\right], \quad i = \overline{1, N_x-1};$$

3. В точках $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, $k = \overline{2, N_x}$, $l = \overline{2, N_y}$, покладаємо

$$\bar{\rho}_j(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) := \frac{1}{4}\left[\bar{\rho}_j(x_i, y_p) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_p) + \bar{\rho}_j(x_i, y_{p+1}) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_{p+1})\right],$$

де $i = \overline{1, N_x-1}$, $p = \overline{1, N_y-1}$. Далі обчислюємо потенціал у вузлах сітки $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$. На основі бабл-функції, по аналогії з (2.21), знаходимо $\tilde{\lambda}_j$. На підставі знайдених значень густини у вузлах сітки перераховуємо $\bar{\rho}_j(x, y)$ в точках (x_i, y_p) за описаними вище правилами 1-3. Далі процедура ітераційного уточнення може повторюватись. Критерієм припинення таких обчислень може бути, наприклад, фіксація кількості ітерацій або ж виконання умови

$$\left\| e_{\rho_j}(x, y) \right\|_{L_2} \le \varepsilon.$$

У таблиці 2.11 наведено значення потенціалу в деяких контрольних точках, до і після використання ітераційного уточнення розв’язків.

Таблиця 2.11 – Потенціал u в деяких контрольних точках після використання ітераційного уточнення розв'язку ($\varepsilon = 0.01$)

y	z	ітерації			
		1	2	3	4
0,95	0,95	0,9029	0,8150	0,9357	0,9851
0,80	0,95	0,9650	0,8851	1,0318	–
0,60	0,95	0,9545	0,8892	1,0689	–
0,40	0,95	0,9569	0,8868	1,0786	–
0,20	0,95	0,9579	0,8876	1,0851	–
0,80	0,80	1,0338	–	–	–
0,60	0,60	1,0000	–	–	–

2.8 Аналіз "плоского" наближення суттєво-просторової проблеми

Нехай поверхні заряджених електродів нескінченно довгі циліндричні, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей. Нехай також згадані поверхні в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюють деяку сукупність розімкнених дуг. Тоді значення потенціалу в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому для розрахунку поля досить обчислити потенціал у довільній точці площини, тобто в просторі $\mathbf{R}^2$ [122]. Просторову задачу (2.1) можна трактувати як «плоску», якщо відслідковувати її ров'язок лише в певному перерізі, наприклад, $z = 0$ (див. рисунок 2.15).

Припустимо, що необхідно визначити функцію $u(K) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u(K) = 0, \quad K \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad K := (x, y), \tag{2.23}$$

за умови

$$u(K) = f(K), \quad K \in \Gamma, \quad \sup_{K \in \mathbf{R}^2} |u(K)| < +\infty .$$

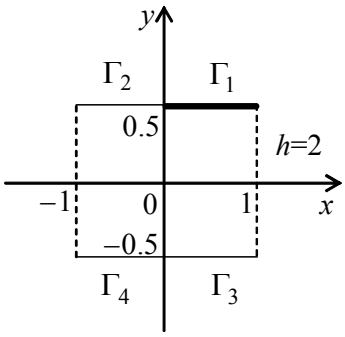


Рисунок 2.15 – «Плоска» електронно-оптична система

Нехай межа Γ у задачі (2.23) допускає розбиття на конгруентні складові Γ_i, $i = \overline{1,4}$, тобто

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i, \quad \Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing, \quad i \neq j .$$

Тоді розв'язок (2.23) можна подати у вигляді

$$U(L) = \int_{\Gamma} \Phi(K,L)\,\tau(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K + C, \quad L := (x_1, y_1) . \tag{2.24}$$

Тут

$$\Phi(K,L) := -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|K - L|}$$

– фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^2$ [123],

$$\tau(K) := q(K) - C \cdot \lambda(K),$$

де $\lambda(K)$ − розв'язок допоміжного інтегрального рівняння

$$\int_{\Gamma} \Phi(K,L)\,\lambda(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K = 1, \; L \in \Gamma, \tag{2.25}$$

$q(K)$ задовольняє рівняння

$$\int_{\Gamma} \Phi(K,L)\,q(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K = f_i(L), \; L \in \Gamma_i, \; i = \overline{1,4}, \tag{2.26}$$

причому константа C визначається з умови

$$\int_{\Gamma} \tau(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K = 0,$$

тобто

$$C = \left(\int_{\Gamma} q(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K\right) \Big/ \left(\int_{\Gamma} \lambda(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K\right),$$

а $f_i(L)$ – звуження $f(L)$ на Γ_i. Отже, знаходження $\tau(K)$ − сукупної густини розподілу зарядів уздовж Γ $\left(\tau(K) := \left\{\tau_i(K), K \in \Gamma_i; i = \overline{1,4}\right\}\right)$ – пов'язане із необхідністю розв'язання двох інтегральних рівнянь (2.25) і (2.26). Знайдена при цьому константа C забезпечує обмеженість шуканого розв'язку (2.23) на нескінченності при $|L| \to \infty$.

У поданні (2.24) враховано той факт, що граничні значення потенціалу на окремих ділянках межі можуть приймати довільні значення. При заданні антисиметричних умов константа $C = 0$.

Межа Γ володіє четвертою групою симетрії Клейна $c_{2\sigma} = \{e, c_2, \sigma_1, \sigma_2\}$, де e – тотожне перетворення, c_2 – поворот на кут π, а σ_1, σ_2 – дзеркальне відображення відносно осей ox і oy, відповідно. Легко бачити, що

$$\Gamma_i = \beta_i \Gamma_1, \quad i = \overline{1,4},$$

причому

$$\beta_1 := e, \quad \beta_2 := \sigma_2, \quad \beta_3 := \sigma_1, \quad \beta_4 := c_2.$$

Матриця поворотів на кут $\varphi = \pi$ має вигляд [194]:

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно $\beta_1^{-1} = \beta_1$, $\beta_2^{-1} = \beta_2$, $\beta_3^{-1} = \beta_3$, $\beta_4^{-1} = \beta_4$. Аналогічною групою симетрії володіє гранична задача (2.23) і відповідне їй інтегральне рівняння

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_i}\Phi(K,L)q_i(K)\,\mathrm{d}\Gamma_K = f_i(L), \quad L\in\Gamma_i, \quad i=\overline{1,4}. \qquad (2.27)$$

Використавши поняття згортки і перетворення Фур'є на скінченній групі [194], можна звести інтегральний оператор по дискретній змінній до діагонального вигляду. При цьому матриця перетворення Фур'є має вигляд [22, 143]

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Це, в свою чергу, відповідає перетворенню початкового ІР (2.27), заданого на всій граничній поверхні Γ, до чотирьох незалежних ІР, заданих на одній із конгруентних складових, наприклад, Γ_1. Останнє дозволяє уникнути числової нестійкості внаслідок зменшення порядку матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні. Дійсно, замість матриць розміру $N\cdot M\times N\cdot M$ отримуємо N матриць розміру $M\times M$, де M – число вузлів на одній з конгруентних складових межі, N – порядок симетрії задачі.

Для підтвердження ефективності запропонованої методики розглядалася задача розрахунку параметрів поля електронно-оптичної системи (див. рисунок 2.15). Аналогічно, як і у просторовому випадку, граничні значення потенціалу вибиралися антисиметричними: $f_1=f_2=1$, $f_3=f_4=-1$. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь здійснювалося методом колокації з апроксимацією шуканої густини кусково-постійними базисними функціями. При цьому отримані невласні інтеграли обчислювалися аналітично, а інтегрування здійснювалося лише по Γ_1. Досягнення потрібної точності результатів забезпечували шляхом згущення сітки в околі особливої точки ($\nu=(1,1)$) шуканого розв'язку.

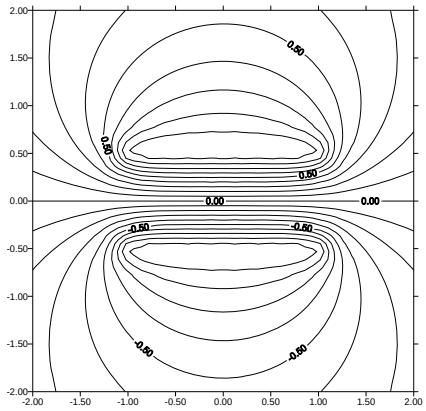


Рисунок 2.16 – Розподіл ліній рівня «плоскої» задачі

Результати отриманих обчислень представлені на рис. 2.16 у вигляді ліній рівного потенціалу. У таблиці 2.12 наведені значення розв’язку в деяких точках системи.

Таблиця 2.12 – Потенціал «плоского» електростатичного поля

x	*y*	*u*
2.000	2.000	0.26781000
1.500	1.500	0.36793800
1.500	1.000	0.38058300
1.000	1.000	0.59020900
1.000	0.500	0.93293100
1.000	0.250	0.38746600
0.500	0.500	0.99257100
0.500	0.250	0.49114900
0.000	0.500	0.99098600
0.000	0.250	0.49620500
0.000	0.000	0.00000000

Для досягнення аналогічної з просторовим випадком точності необхідно вибрати 40 точок колокації. Наявність симетрії у геометрії граничних контурів

дозволяє розв’язувати чотири незалежних ІР з інтегруванням лише по Γ_1 та отримати СЛАР з матрицею порядку 10×10. Останнє дозволяє проводити паралельні обчислення і в більш складних ситуаціях.

3 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Ми вивчаємо ітераційний метод з порядком $1+\sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних операторних рівнянь в банахових просторах. Побудовані алгоритми для конкретних олераторних рівнянь. Представлені нові результати локальної і напівлокальної збіжності у випадку, коли перші поділені різниці нелінійного оператора неперервні за Гьольдером. Побудовано квадратичну нелінійну мажоранту для нелінійного оператора, відповідно до накладених на нього умов. Отримані апріорні і апостеріорні оцінки похибки методу. Метод потребує практично такої ж кількості обчислень, як і класичний метод хорд, однак має вищий порядок збіжності. Ми застосували наші результати до чисельного розв'язування нелінійної крайової задачі другого порядку.

3.1 Вступ

Нехай F – нелінійний оператор, визначений на випуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння

$$F(x) = 0 \tag{3.1}$$

розглянемо алгоритм

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_{n+1}), n = 0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де, для кожних $x_n, y_n \in D, F(x_n, y_n)$ – обмежений лінійний оператор з X в Y, x_0, y_0 – задані.

Історія цього методу досить багата. Для функції $F: R \to R$ метод (3.2) був вперше розглянутий у праці [87] як прискорений варіант методу хорд. Для банахових просторів диференціальний аналог цього методу

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F'(y_n)]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{1}{2}[F'(y_n)]^{-1} F(x_{n+1}), n = 0,1,\ldots, x_0 = y_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

був запропонований М.Я. Бартішем [107]. Пізніше незалежно у різних формах і при різних умовах він був також запропонований і досліджений у працях інших авторів [12, 13]. Досить глибокі дослідження цих методів (3.2), (3.3) було проведено у працях українських математиків М.Я. Бартіша і Ю.М. Щербини [17, 16, 18, 106]. Проте при дослідженні цього методу (3.2) вимагалось існування поділеної різниці другого порядку оператора F та обмеженість її норми або неперервності за Ліпшицем (Гьольдером) поділеної різниці другого порядку.

У цій праці ми визначаємо поділені різниці для деяких нелінійних операторів і застосовуємо алгоритм (3.2) для розв’язування конкретних типів операторних рівнянь.

Ми проводимо дослідження локальної збіжності методу (3.2) (умови типу Коші) і напівлокальної збіжності (умови типу Канторовича [144]) при слабших умовах, ніж в усіх інших відомих працях. Зокрема, ми вимагаємо лише існування і неперервність за Гьольдером, так як і для класичного методу хорд [4, 21, 22]. Отримана формула залежності порядку збіжності від сталої Гьольдера. Крім того, ми вперше використовуємо методику мажорант для дослідження напівлокальної збіжності методу (3.2). Ми довели теорему про єдиність розв’язку.

Досліджені в [63, 72] ітераційні різницеві методи також вимагали існування і неперервність за Ліпшицем поділених різниць другого порядку. Вони збігаються локально до розв’язку з порядком збіжності 1.839... і 2 відповідно.

Для достатньо гладких функцій F і простих нулів ми можемо показати, що наближення, утворені ітераційним методом (3.2), асимптотично збігаються

до розв'язку принаймні з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$. Кількість обчислень на кожній ітерації є практично така сама у класичному методі хорд.

У цій праці ми розглядаємо відкриту опуклу множину D простору X і припускаємо, що F неперервно диференційована за Фреше в D. Ми припускаємо, що поділена різниця $F(x,y)$ задовольняє умову Гьольдера, якщо існує невід'ємна стала k така, що

$$\| F(x,y) - F(u,v)\| \le k(\| x-u\|^{\alpha} + \| y-v\|^{\alpha}), \alpha \in (0,1] \qquad (3.4)$$

для $x,y,u,v \in D$ з $x \ne y$ і $u \ne v$. У цьому випадку ми кажемо, що F має на D неперервну за Гьольдером поділену різницю. При цьому відомо [4], що існує похідна Фреше від F в D і вона задовольняє $F(x,x) = F'(x), x \in D$.

3.2 Поділені різниці і алгоритми методу (3.2) для конкретних операторних рівнянь

Означення 3.1. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на множині D лінійного простору X зі значеннями в лінійному просторі Y і x,y – дві точки з D. Лінійний оператор з X у Y, позначений $F(x,y)$, що задовольняє умову

$$F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y) \qquad (3.4)$$

називаємо поділеною різницею від F за точками x і y.

Розглянемо подання поділених різниць першого порядку для конкретних нелінійних операторів і запишемо також ітераційний алгоритм (3.2) для відповідних типів нелінійних операторних рівнянь. Зауважимо, що огляд різних означень поділених різниць і співвідношень між ними зроблено в [210].

1. Тепер розглянемо випадок, де $F: R^n \to R^n$. Застосуємо метод (3.2) до розв'язування нелінійних систем n дійсних рівнянь з n невідомими

$$F_i(x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3.5)$$

У цьому випадку поділена різниця $F(x,y)$ подається матрицею з елементами [4, 63, 71]

$$F(x,y)_{ij} = \frac{F_i(x_1,\ldots,x_j,y_{j+1},\ldots,y_n) - F_i(x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,\ldots,y_n)}{x_j - y_j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{3.6}$$

де функція $F(x,y)_{ij}$ з $x_j = y_j$ дорівнює $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_j,y_{j+1},\ldots,y_n)$.

Послідовні наближення $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}$ до розв'язку x^* у випадку (3.5) визначаємо з системи рівнянь для поправок

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} H_{ij}^{(k)}(x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = -F_i(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}),\\
&\sum_{j=1}^{n} H_{ij}^{(k)}(y_j^{(k+1)} - x_j^{(k+1)}) = -F_i(x_1^{(k+1)},\ldots,x_n^{(k+1)}),\\
&H_{ij}^{(k)} = \frac{F_i(x_1^{(k)},\ldots,x_j^{(k)},y_{j+1}^{(k)},\ldots,y_n^{(k)}) - F_i(x_1^{(k)},\ldots,x_{j-1}^{(k)},y_j^{(k)},\ldots,y_n^{(k)})}{x_j^{(k)} - y_j^{(k)}},\\
&i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 0,1,2,\ldots.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Легко бачити, що на кожній ітерації (3.7) необхідно розв'язати один раз дві системи лінійних рівнянь, але з однією й тою ж матрицею поділених різниць $H_{ij}^{(k)} = F(x^{(k)}, y^{(k)})_{ij}$.

2. Нехай задана крайова задача

$$\begin{cases} L[x] = \varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n,x) & \text{в області } B;\\ U_l[x] = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,m) & \text{на границі } \Gamma \text{ області } B, \end{cases} \tag{3.8}$$

де $L[x], U_l[x]$ – лінійні диференціальні вирази (у частинних чи звичайних похідних) від функцій $x = x(t_1,t_2,\ldots,t_n)$.

Розглянемо множину таких функцій $x = x(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, що задовольняють однорідні крайові умови $U_l[x] = 0$. На цій множині будемо визначати оператор $F(x)$ наступним чином:

$$\begin{cases} \Phi(x) = L[x] - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x) = 0 & \text{у області } B; \\ U_l[x] = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,m) & \text{на границі } \Gamma \text{ області } B. \end{cases} \tag{6}$$

Визначимо поділені різниці $F(x_1, x_2)h$ оператора $F(x)$ наступними рівностями

$$\begin{cases} \delta\Phi(x_1, x_2)h = L[h] - \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_2)}{x_1 - x_2} h; \\ U_l[h] = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,m). \end{cases} \tag{3.9}$$

Легко бачити, що для (3.9) умова (3.4) виконується.

Позначимо $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$, $y_{k+1} - x_{k+1} = \delta x_k$. Згідно методу (3.2)

$$\begin{aligned} F(x_k, y_k)\Delta x_k &= -F(x_k); \\ F(x_k, y_k)\delta x_k &= -F(x_{k+1}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

або

$$\begin{cases} L[\Delta x_k] - \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_k) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, y_k)}{x_k - y_k} \Delta x_k = -\Phi(x_k); \\ U_l[\Delta x_k] = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,m). \\ \\ L[\delta x_k] - \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_k) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, y_k)}{x_k - y_k} \delta x_k = -\Phi(x_{k+1}); \\ U_l[\delta x_k] = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,m). \end{cases}$$

Для кожного k для поправок $\Delta x_k, \delta x_k$ ми отримуємо дві лінійні крайові задачі. Нові наближення x_{k+1}, y_{k+1} ми отримуємо за правилом

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad y_{k+1} = x_{k+1} + \delta x_k \quad (k = 0,1,\ldots),$$

і $x_0 = x_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $y_0 = y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – початкові наближення до розв'язку x^* задачі (3.8).

3. Зокема, при розв'язуванні задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t)); \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

ми одержуємо алгоритм

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta x_k}{dt} = \dfrac{f(t,x_k) - f(t,y_k)}{x_k - y_k}\Delta x_k + f(t,x_k) - \dfrac{dx_k}{dt}; \\ \Delta x_k(t_0) = 0; \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k; \\ \\ \dfrac{d\delta x_k}{dt} = \dfrac{f(t,x_k) - f(t,y_k)}{x_k - y_k}\delta x_k + f(t,x_{k+1}) - \dfrac{dx_{k+1}}{dt}; \\ \delta x_k(t_0) = 0; \quad y_{k+1} = x_{k+1} + \delta x_k, \end{cases}$$

де $x_0(t), y_0(t)$ – початкові наближення до розв'язку x^* задачі (3.11). Зауважимо, що можна взяти

$$y_0(t) = \int_0^t f(s, x_0(s))ds.$$

4. Розглянемо тепер нелінійне інтегральне рівняння

$$F(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t,x(t))dt = 0,$$

де $K(s,t,x)$ – неперервна функція своїх аргументів, неперервно диференційована по x.

Визначимо поділену різницю оператора $F(x)$ за формулою

$$F(x,y)h(s) = h(s) - \int_0^1 \frac{K(s,t,x(t)) - K(s,t,y(t))}{x(t) - y(t)} h(t)dt. \tag{3.12}$$

Легко бачити, що для (3.12) умова (3.4) виконана. У цьому випадку наближення x_{k+1}, y_{k+1} повинні бути визначені з лінійних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} x_{k+1}(s) - x_k(s) - \int_0^1 H^{(k)}(s,t)(x_{k+1}(t) - x_k(t))dt = \\ = \int_0^1 K(s,t,x_k(t))dt - x_k(s), \\ y_{k+1}(s) - x_{k+1}(s) - \int_0^1 H^{(k)}(s,t)(y_{k+1}(t) - x_{k+1}(t))dt \\ = \int_0^1 K(s,t,x_{k+1}(t))dt - x_{k+1}(s), \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$H^{(k)}(s,t) = \frac{K(s,t,x_k(t)) - K(s,t,y_k(t))}{x_k(t) - y_k(t)}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

при цьому ми покладаємо, що ядро $H^{(k)}(s,t)$ зі значеннями $t = t_m$, в яких $x_k(t) - y_k(t)$ перетворюється в нуль, дорівнює $K'_x(s,t_m,x_k(t_m)$. при таких умовах

$$\lim_{t \to t_m} \frac{K(s,t,x_k(t)) - K(s,t,y_k(t))}{x_k(t) - y_k(t)} = K'_x(s,t_m,x_k(t_m))$$

ядро $H^{(k)}(s,t)$ є неперервне для всіх $t \in [0,1]$.

Рівняння (3.13) отримані із загальних формул (3.10), беручи до уваги значення $F(x,y)$ для даного випадку.

Зауважимо, що при розв'язуванні лінійних інтегральних рівнянь (3.13) методами квадратур ми одержимо на кожній ітерації дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь з однією матрицею.

Аналогічно до [209] можна визначити поділені різниці і записати відповідні алгоритми для інтегро-диференціальних рівнянь, функціональних рівнянь динамічного програмування і інших.

3.3 Локальна збіжність ітераційного процесу (3.2)

Теорема 3.2. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що рівняння $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$ і там існує оборотна похідна Фреше $F'(x^*)$. Нехай F має в D поділені різниці першого порядку, які задовольняють умову Гьольдера

$$\begin{aligned} &\| F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p_*(\| x-u\|^{\alpha} + \| y-v\|^{\alpha}), \\ &\alpha \in (0;1],\ p_* \ge 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Припустимо, що відкрита куля $U = U(x^*, r_*)$ з центром x^* і радіусом

$$r_*^{\alpha} = \frac{1}{(2+\sqrt{1+2^{\alpha}})p_*} \tag{3.15}$$

така, що $U \subset D$.

Тоді для $x_0, y_0 \in U$ ітераційний процес (3.2) добре визначений і генеровані ним послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$ і $\{y_n\}_{n\geq 0}$, які належать U, збігаються x^* і задовольняють наступні нерівності:

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq \frac{p_* \| y_n - x^* \|^\alpha}{1 - p_*(\| x_n - x^* \|^\alpha + \| y_n - x^* \|^\alpha)} \| x_n - x^* \|, \tag{3.16}$$

$$\| y_{n+1} - x^* \| \leq \frac{p_*(\| x_{n+1} - x_n \|^\alpha + \| y_n - x^* \|^\alpha)}{1 - p_*(\| x_n - x^* \|^\alpha + \| y_n - x^* \|^\alpha)} \| x_{n+1} - x^* \|. \tag{3.17}$$

Доведення. Позначимо A_n такий лінійний оператор $A_n = F(x_n, y_n)$. Легко бачити, що якщо $x_n, y_n \in U$, то A_n оборотний і і справедливі наступні нерівності

$$\begin{aligned} &\| [I - (I - F'(x^*)^{-1} A_n))^{-1} \| = \| A_n^{-1} F'(x^*) \| \\ &\leq (1 - p_*(\| x_n - x^* \|^\alpha + \| y_n - x^* \|^\alpha))^{-1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Дійсно, з формули (3.14) одержимо

$$\begin{aligned} &\| I - F'(x^*)^{-1} A_n \| = \| F'(x^*)^{-1} (F(x^*, x^*) - F(x_n, y_n)) \| \\ &\leq p_*(\| x_n - x^* \|^\alpha + \| y_n - x_* \|^\alpha). \end{aligned}$$

Із означення r_* ми маємо

$$2 p_* (r_*)^\alpha < \frac{2}{3} < 1. \tag{3.19}$$

Використовуючи теорему Банаха, ми отримаємо формулу (3.18). Далі ми одержимо оцінку

$$\begin{aligned} &\| x_{n+1} - x^* \| = \| x_n - x^* - A_n^{-1} (F(x_n) - F(x^*)) \| \\ &= \| - A_n^{-1} (F(x_n, x^*) - A_n)(x_n - x^*) \| \\ &\leq \| A_n^{-1} F'(x^*) \| \| F'(x^*)^{-1} (F(x_n, x^*) - A_n) \| \| x_n - x^* \|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Згідно умов теореми

$$\begin{aligned} &\| F'(x^*)^{-1} (F(x_n, x^*) - A_n) \| \\ &= \| F'(x^*)^{-1} (F(x_n, x^*) - F(x_n, y_n)) \| \leq p_* \| y_n - x^* \|^\alpha. \end{aligned}$$

З (3.18), (3.20) можна бачити, що отримується (3.16). Аналогічно з рівності

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1} - x^* = x_{n+1} - x^* - A_n^{-1}(F(x_{n+1}) - F(x^*)) \\
&= -A_n^{-1}(F(x_{n+1}, x^*) - A_n)(x_{n+1} - x^*) \\
&= A_n^{-1}F'(x^*)[F'(x^*)^{-1}(F(x_{n+1}, x^*) - A_n)](x_{n+1} - x^*)
\end{aligned}
$$

ми отримуємо оцінку (3.17). Далі з (3.15)-(3.17), (3.19) одержуємо

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r_*,$$

$$\|y_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r_*, \qquad n = 0,1,2\ldots.$$

Таким чином, ітераційний процес (3.2) добре визначений і послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$, які він генерує, належать U. Із останніх нерівностей і оцінок (3.16) та (3.17) одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|y_n - x^*\| = 0.$$

Доведення завершене.

Зауваження 3.3. Радіус збіжності r^*, отриманий у цій теоремі, є дещо менший, ніж радіус збіжності методу хорд [4] $r_*^{\alpha} = \dfrac{1}{3p_*}$.

Наслідок 3.4. Ітераційний процес (3.2) збігається локально до нуля функції F з R-порядком збіжності рівним принаймні $\dfrac{1+\alpha}{2} + \sqrt{(\dfrac{1+\alpha}{2})^2 + \alpha^2}$.

Доведення. Позначимо

$$a_n = \|x_n - x^*\|, b_n = \|y_n - x^*\|, \; n = 0,1,2,\ldots, \; C = \frac{p^*}{1 - p^*(a_0^{\alpha} + b_0^{\alpha})}.$$

Із (3.16) та (3.17) для $n = 0,1,2,\ldots$ ми отримаємо

$$a_{n+1} \leq \frac{p_* b_n^{\alpha} a_n}{1 - p_*(a_n^{\alpha} + b_n^{\alpha})} = C b_n^{\alpha} a_n, \tag{3.21}$$

$$
\begin{aligned}
&b_{n+1} \leq a_{n+1}C((a_{n+1} + a_n)^{\alpha} + b_n^{\alpha}) \leq a_{n+1}C((2a_n)^{\alpha} + b_n^{\alpha}) \\
&\leq a_{n+1}C((2a_n)^{\alpha} + C^{\alpha}((2a_0)^{\alpha} + b_0^{\alpha})^{\alpha} a_n^{\alpha}) \\
&= a_{n+1}a_n^{\alpha}[C(2^{\alpha} + C^{\alpha}((2a_0)^{\alpha} + b_0^{\alpha})^{\alpha})].
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Накінець, для достатньо великих натуральних чисел n із нерівності (3.21), враховуючи (3.22), ми отримаємо

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\le C a_n a_n^{\alpha} a_{n-1}^{\alpha^2} [C(2^{\alpha} + C^{\alpha}((2a_0)^{\alpha} + b_0^{\alpha})^{\alpha})]^{\alpha} \\ &= A a_n^{1+\alpha} a_{n-1}^{\alpha^2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

де $A = C^{1+\alpha}[2^{\alpha} + C^{\alpha}((2a_0)^{\alpha} + b_0^{\alpha})^{\alpha})]^{\alpha}$. Базуючись на (3.23), ми можемо записати рівняння для визначення порядку збіжності ітераційного процесу (3.2)

$$t^2 - (1+\alpha)t - \alpha^2 = 0.$$

R-порядком збіжності є єдиний додатний розв'язок $t^* = \frac{1+\alpha}{2} + \sqrt{(\frac{1+\alpha}{2})^2 + \alpha^2}$ цього рівняння.

Поклавши $\alpha = 1$ у формулі для t^*, що відповідає умові Ліпшиця, ми отримаємо $t^* = 1 + \sqrt{2}$.

3.4 Напівлокальна збіжність методу (3.2)

Теорема 3.5. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:

1) лінійний оператор $A_0 = F(x_0, y_0)$, де x_0, y_0 $(x_0 \ne y_0)$ є дві точки з D, має обернений,

2) a, c і p_0 – три невід'ємні числа такі, що

$$\|x_0 - y_0\| \le a, \|A_0^{-1} F(x_0)\| \le c, \ c > a \tag{3.24}$$

і в D виконується наступна умова Гьольдера $(\alpha \in (0,1])$

$$\|A_0^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p_0(\|x-u\|^{\alpha} + \|y-v\|^{\alpha}). \tag{3.25}$$

3) r_0 – невід'ємне число таке, що

$$r_0 \ge c/(1-\gamma), \ p_0(r_0^{\alpha} + 2(r_0 - a)^{\alpha}) < 1, \tag{3.26}$$

де $\gamma = p_0(r_0 - a)^\alpha/(1-[r_0^\alpha + (r_0 - a)^\alpha])$ (зауважимо, що $0 \le \gamma < 1$),

4) замкнена куля $U_0 = U(x_0, r_0)$ міститься в D.

Тоді:

(i) дійсні послідовності $\{t_n\}_{n\ge 0}$, $\{s_n\}_{n\ge 0}$, визначені як

$$t_0 = r_0, s_0 = r_0 - a, t_1 = r_0 - c, \tag{3.27}$$

і для $k \ge 0$

$$\begin{aligned} t_{k+1} - t_{k+2} &= \frac{p_0(s_k - t_{k+1})^\alpha}{1 - p_0[(t_0 - t_{k+1})^\alpha + (s_0 - s_{k+1})^\alpha]}(t_k - t_{k+1}), \\ &= B_{k+2}(t_k - t_{k+1}), \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} t_{k+1} - s_{k+1} &= \frac{p_0(s_k - t_{k+1})^\alpha}{1 - p_0[(t_0 - t_k)^\alpha + (s_0 - s_k)^\alpha]}(t_k - t_{k+1}) \\ &= C_{k+1}(t_k - t_{k+1}) \end{aligned}$$

невід'ємні, спадні і збігаються до деякого $t^* \in R$ такого, що $r_0 - c/(1-\gamma) \le t^* < t_0$.

(ii) Ітераційний процес (3.2) добре визначений і утворені ним послідовності $\{x_n\}_{n\ge 0}$ і $\{y_n\}_{n\ge 0}$ збігаються до розв'язку $x^* \in U(x_0, r_0)$ рівняння $F(x) = 0$. Крім того, справедливі нерівності

$$\|x_n - x^*\| \le t_n - t^*, \|y_n - x^*\| \le s_n - t^*, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{3.29}$$

і для $n \ge 1$

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{p_0(s_{n-1} - t_n)^\alpha}{1 - p_0[(t_0 - s_0)^\alpha + (t_0 - t_n)^\alpha + (t_0 - t^*)^\alpha]}(t_{n-1} - t_n). \tag{3.30}$$

Доведення. (i) Покажемо математичною індукцією, що виконуються нерівності ($n \ge 0$)

$$t_{n+1} \ge s_{n+1} \ge t_{n+2} \ge r_0 - \frac{1-\gamma^{n+2}}{1-\gamma}c \ge 0 \tag{3.30}$$

і

$$B_{n+2} \le \gamma, C_{n+1} \le \gamma. \tag{3.31}$$

Використовуючи (3.27) і (3.28) для $k = 0$, ми одержуємо

$$t_1 \geq t_2, s_1 \geq t_2, t_1 \geq s_1 \geq t_2 \geq r_0 - c(1+\gamma) \geq r_0 - c/(1-\gamma) \geq 0$$

і $B_2 \leq \gamma, C_1 \leq \gamma$ згідно (3.26), що доводить (3.27)-(3.28) для $n = 0$. Припустимо, що виконуються нерівності (3.30) і (3.31) для $k = 0,1,...,n-1$. Доведемо, що вони справедливі і для $k = n$.

Використовуючи (3.27) і (3.28), ми одержимо $t_{k+1} \geq s_{k+1} \geq t_{k+2}$ і остаточно $t_{k+1} \geq 0$ і $s_{k+1} \geq 0$ і згідно припущення математичної індукції

$$B_{k+2} \leq \frac{p_0 s_0^\alpha}{1 - p_0(t_0^\alpha + s_0^\alpha)} \leq \gamma,$$
$$C_{k+1} \leq \frac{p_0 s_0^\alpha}{1 - p_0(t_0^\alpha + s_0^\alpha)} \leq \gamma.$$

Накінець згідно (3.27), (3.28) і припущень індукції

$$t_{k+2} \geq s_{k+2} \geq t_{k+3} \geq r_0 - \frac{1-\gamma^{k+3}}{1-\gamma} c \geq 0.$$

Доведення індукції завершене.

(ii) Використовуючи математичну індукцію, доведемо, що ітераційний процес (3.2) добре визначений і що

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq t_n - t_{n+1}, \quad \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq t_{n+1} - s_{n+1}. \tag{3.31}$$

Тоді покажемо, що

$$\|y_n - y_{n+1}\| \leq \|y_n - x_n + x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq s_n - s_{n+1}.$$

Використовуючи (3.25), (3.24) і (3.27), ми доводимо, що (3.31) виконується для $n = 0$. Нехай k деяке невід'ємне число і для всіх $n \leq k$ нерівність (3.31) виконується. Якщо $A_{k+1} = F(x_{k+1}, y_{k+1})$, то згідно (3.25) одержимо

$$\begin{aligned}
&\|I - A_0^{-1} A_{k+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_0, y_0) \\
&- F(x_{k+1}, y_{k+1}))\| \leq p_0(\|x_0 - x_{k+1}\|^\alpha + \|y_0 - y_{k+1}\|^\alpha) \\
&\leq p_0[(t_0 - t_{k+1})^\alpha + (s_0 - s_{k+1})^\alpha] \leq p_0(t_0^\alpha + s_0^\alpha) \\
&\leq p_0[r_0^\alpha + (r_0 - a)^\alpha] < 1.
\end{aligned}$$

За теоремою A_{k+1} є оборотна і

$$\|A_{k+1}^{-1} A_0\| \leq (1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - y_{k+1}\|))^{-1}. \tag{3.32}$$

Далі доведемо, що ітераційний процес (3.2) добре визначений для $n = k+1$. Використовуючи нерівність (3.25) і тотожність

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}) - F(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - F(x_k) \\ &= [F(x_k, x_{k+1}) - F(x_k, y_k)](x_{k+1} - x_k), \end{aligned}$$

одержимо

$$\begin{aligned} &\| A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \\ &= \| A_0^{-1}[F(x_k, x_{k+1}) - F(x_k, y_k)](x_{k+1} - x_k)\| \\ &\le p_0 \|x_{k+1} - y_k\|^{\alpha} \|x_{k+1} - x_k\|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Із (3.2), (3.32) і (3.33) отримуємо

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le \frac{p_0 \|x_{k+1} - y_k\|^{\alpha}}{1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\|^{\alpha} + \|y_0 - y_{k+1}\|^{\alpha})} \|x_{k+1} - x_k\|,$$

$$\|x_{k+2} - y_{k+2}\| \le \frac{p_0 \|x_{k+2} - y_{k+1}\|^{\alpha}}{1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\|^{\alpha} + \|y_0 - y_{k+1}\|^{\alpha})} \|x_{k+2} - x_{k+1}\|.$$

Остаточно, використовуючи (3.31), (3.27) і (3.28), ми одержимо

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le t_{k+1} - t_{k+2}, \|x_{k+2} - y_{k+2}\| \le t_{k+2} - s_{k+2}.$$

Тобто ми довели, що ітераційий процес (3.2) добре визначений для кожного n. З цього отримаємо

$$\begin{aligned} &\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k,\ \|y_n - x_k\| \le s_n - t_k, \|y_n - y_k\| \le s_n - s_k, \\ &0 \le n \le k. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Дане твердження показує, що $\{x_n\}_{n\ge 0}$ і $\{y_n\}_{n\ge 0}$ є фундаментальними послідовностями, і вони збігаються в банаховому просторі X. Спрямувавши k до нескінченності у формулах (3.34), отримаємо (3.29). Легко бачити, що x^* є коренем рівняння $F(x) = 0$, бо згідно з (3.33), ми можемо записати

$$\begin{aligned} \| A_0^{-1} F(x_{k+1})\| &= \| A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \\ &\le p_0 \|y_k - x_{k+1}\|^{\alpha} \|x_k - x_{k+1}\| \to 0. \end{aligned}$$

при $k \to \infty$.

Тепер доведемо (3.30). Використовуючи умову Гьольдера (3.14), одержимо

$$\|I - A_0^{-1}F(x_n, x^*)\| = \|A_0^{-1}(F(x_0, y_0) - F(x_0, x_0)) + (F(x_0, x_0) -$$
$$- F(x_n, x^*))\| \le p_0(\|x_0 - y_0\|^\alpha + \|x_0 - x_n\|^\alpha + \|x_0 - x^*\|^\alpha) \le$$
$$\le p_0[(t_0 - s_0)^\alpha + (t_0 - t_n)^\alpha + (t_0 - t^*)^\alpha] < 1$$

відповідно до вибору r_0. За теоремою Банаха про обернений оператор, лінійний оператор $F(x_n, x^*)$ оборотний і

$$\|F(x_n, x^*)^{-1} A_0\| \le (1 - p_0(\|x_0 - y_0\|^\alpha + \|x_0 - x_n\|^\alpha + \|x_0 - x^*\|^\alpha))^{-1}.$$

Використовуючи тотожність

$$x_n - x^* = F(x_n, x^*)^{-1}(F(x_n) - F(x^*)) = ((F(x_n, x^*)^{-1})A_0)A_0^{-1}F(x_n),$$

одержимо (3.30). Теорема доведена.

Тепер можемо отримати результат єдиності.

Теорема 3.6. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:

1) виконуються умови теореми 3.5; 2) r_0 з теореми 3.5 додатково задовольняє умову

$$2p_0 r_0^\alpha + (r_0 - a)^\alpha + p_0 a^\alpha < 1. \qquad (3.35)$$

Тоді ітераційний алгоритм (3.2) добре визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}$ належить $U(x_0, r_0)$ і збігається до єдиного розв'язку x^* рівняння $F(x) = 0$ в $U(x_0, r_0)$.

Доведення. Існування розв'язку x^* рівняння $F(x) = 0$ було доведено в теоремі 3.5. Припустимо, що там існує інший розв'язок x^{**} цього рівняння в $U(x_0, r_0)$ з r_0, який задовольняє (3.26) і (3.35). З (3.2) і (3.25) отримуємо

$$x_{n+1} - x^{**} = A_n^{-1}A_0[A_0^{-1}(F(x_n, y_n) - F(x_n, x_n))(x_n - x^{**}) +$$
$$+ A_0^{-1}(F(x_n, x_n)(x_n - x^{**}) - (F(x_n) - F(x^{**}))].$$

Тепер використовуючи (3.25), (31.13) і (3.32), одержуємо

$$1\|x_{n+1}-x^{**}\| = \frac{p_0(t_n-s_n)^{\alpha}+p_0\|x_n-x^{**}\|^{\alpha}}{1-p_0((t_0-t_n)^{\alpha}+(s_0-s_n)^{\alpha})}\|x_n-x^{**}\| \le \\ \ldots \le q^{n+1}\|x_0-x^{**}\|, \tag{3.36}$$

де верхня границя дробу позначена q і $0<q<1$ відповідно до вибору r_0. Нерівність (3.36) породжує $x^{**} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Відзначимо, що оцінки (3.29) і (3.29) є апріорними оцінками похибки, оскільки ітерації $\{t_n\}_{n\ge 0}$ і $\{s_n\}_{n\ge 0}$ можна обчислити, якщо тільки t_0, s_0 і t_1 відомі.

У випадку, якщо поділена різниця $F(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця замість умови Гьольдера, ми можемо аналітично побудувати мажорантну функцію для нелінійного оператора F і отримати точніші оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу (3.2).

Теорема 3.7. Нехай F – нелінійний оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F(x_0, y_0)$, де $x_0, y_0 \in D\,(x_0 \ne y_0)$, має обернений і також існує три невід'ємні числа a, c і p_0 такі, що

$$\|x_0 - y_0\| \le a, \|A_0^{-1}F(x_0)\| \le c, c > a. \tag{3.37}$$

Припустимо, що виконуються наступна умова Ліпшиця на D

$$\|A_0^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\| \le p_0(\|x-u\|+\|y-v\|). \tag{3.38}$$

Нехай $2p_0a \le 1$, $r = \dfrac{1-p_0a}{2p_0}$ і h є поліном з дійсними коефіцієнтами

$$h(t) = -p_0t^2 + (1-p_0a)t.$$

Якщо задовольняється наступна нерівність

$$h(r) = \frac{(1-p_0a)^2}{4p_0} \ge (1-2p_0a)c \tag{3.39}$$

і замкнена куля $U_0 = U(x_0, r_0) \subset D$, де

$$r_0 = \frac{1 - p_0 a - \sqrt{(1 - p_0 a)^2 - 4 p_0 c (1 - 2 p_0 a)}}{2 p_0}$$

є єдиним розв'язком рівняння $h(t) = c(1 - 2p_0 a)$ на $(0, r]$, тоді ітераційний процес (3.2) добре визначений і генеровані ним послідовності $\{x_n\}_{n \geq 0}$ і $\{y_n\}_{n \geq 0}$ збігаються до розв'язку x^* рівняння $F(x) = 0$. Крім того, виконуються наступні нерівності

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n, \ \|y_n - x^*\| \leq s_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{3.40}$$

де

$$t_0 = r_0, s_0 = r_0 - a, \tag{3.41}$$

$$t_{n+1} = \frac{p_0 t_n s_n}{1 - p_0 a - 2 p_0 r_0 + p_0 (t_n + s_n)},$$
$$s_{n+1} = t_{n+1} \cdot \frac{p_0 (t_n + s_n - t_{n+1})}{1 - p_0 a - 2 p_0 r_0 + p_0 (t_n + s_n)}, \ n = 0,1,2,\ldots$$

Доведення. Зауважимо, що послідовності $\{t_n\}_{n \geq 0}$, $\{s_n\}_{n \geq 0}$ можна отримати застосуванням ітераційної процедури (3.2) до полінома

$$f(t) = p_0 t^2 + (1 - p_0 a - 2 p_0 r_0) t.$$

Легко бачити, що ці послідовності монотонно збігаються до нуля зі швидкістю порядку $1 + \sqrt{2}$. Також ми маємо

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_{n+2} &= \left(\frac{f(t_{n+1}) - f(s_{n+1})}{t_{n+1} - s_{n+1}}\right)^{-1} f(t_{n+1}) \\ &= \frac{p_0 (s_n - t_{n+1})}{1 - p_0 a - p_0 (2 t_0 - t_{n+1} - s_{n+1})} (t_n - t_{n+1}), \\ t_{n+2} - s_{n+2} &= \frac{p_0 (s_{n+1} - t_{n+2})}{1 - p_0 a - p_0 (2 t_0 - t_{n+1} - s_{n+1})} (t_{n+1} - t_{n+2}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Доведемо за допомогою математичної індукції, що ітераційний процес добре визначений і що

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq t_n - t_{n+1}, \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq t_{n+1} - s_{n+1}. \tag{3.43}$$

Тоді очевидно, що $\|y_n - y_{n+1}\| \le s_n - s_{n+1}$. Використовуючи (3.37), (3.39), (3.41) і той факт, що $t_0 - t_1 = \dfrac{h(r_0)}{1-2p_0 a} = c, t_0 - s_0 = a,$ ми доводимо, що (3.43) виконується для $n = 0$. Нехай k – невід'ємне число і для всіх $n \le k$ виконується (3.43). Якщо $A_{k+1} = F(x_{k+1}, y_{k+1}),$ то згідно (3.38) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|I - A_0^{-1}A_{k+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_0, y_0) - \\
&- F(x_{k+1}, y_{k+1}))\| \le p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - y_{k+1}\|) \\
&\le p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - x_0\| + \|x_0 - x_{k+1}\| \\
&+ \|x_{k+1} - y_{k+1}\|) \le p_0 a + p_0(2t_0 - t_{k+1} - s_{k+1}) \\
&< p_0 a + 2p_0 t_0 \le p_0 a + 2p_0 r \le p_0 a + 2p_0 \frac{1-p_0 a}{2p_0} = 1.
\end{aligned}$$

За теоремою Банаха ми маємо, що A_{k+1} є оборотний і

$$\|A_{k+1}^{-1}A_0\| \le (1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - y_{k+1}\|))^{-1}. \tag{3.44}$$

Далі доведемо, що ітераційний процес добре визначений для $n = k+1$. Використовуючи формулу (3.38) і тотожність

$$\begin{aligned}
&F(x_{k+1}) = F(x_{k+1}) - F(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - F(x_k) \\
&= [F(x_k, x_{k+1}) - F(x_k, y_k)](x_{k+1} - x_k),
\end{aligned}$$

одержимо

$$\begin{aligned}
&\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \\
&= \|A_0^{-1}[F(x_{k+1}, x_k) - F(x_k, y_k)](x_{k+1} - x_k)\| \\
&\le p_0\|x_{k+1} - y_k\|\,\|x_{k+1} - x_k\|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Із (3.2), (3.44) і (3.45) випливає, що

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le \frac{p_0\|x_{k+1} - y_k\|}{1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - y_{k+1}\|)}\|x_{k+1} - x_k\|,$$

$$\|x_{k+2} - y_{k+2}\| \le \frac{p_0\|x_{k+2} - y_{k+1}\|}{1 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|y_0 - y_{k+1}\|)}\|x_{k+2} - x_{k+1}\|.$$

Остаточно використовуючи (3.42) і (3.43), ми одержимо

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le t_{k+1} - t_{k+2},\ \|x_{k+2} - y_{k+2}\| \le t_{k+2} - s_{k+2}.$$

Отже, ми довели, що ітераційний процес добре визначений для кожного n. Із цього одержимо

$$\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k,\ \|y_n - x_k\| \le s_n - t_k,\ \|y_n - y_k\| \le s_n - s_k,\quad 0 \le n \le k. \tag{3.46}$$

Це твердження показує, що $\{x_n\}_{n\ge 0}$ і $\{y_n\}_{n\ge 0}$ є фундаментальними послідовностями, і вони збіжні в банаховому просторі X. Спрямувавши k до нескінченності у формулах (3.46), ми отримаємо (3.40). Легко бачити, що x^* є розв'язком $F(x) = 0$, тому що згідно (3.45), ми можемо записати

$$\begin{aligned}\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\| &= \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \\ &\le p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_k - y_k\|)\,\|x_k - x_{k+1}\| \to 0.\end{aligned} \tag{3.47}$$

де $k \to \infty$. Теорему доведено.

Аналогічно ми можемо отримати результат єдиності.

3.5 Апостеріорна оцінка похибки методу (3.2)

Якщо сталі a, c, p_0 відомі, тоді ми можемо обчислити послідовності $\{t_n\}_{n\ge 0}$ перед отриманням послідовності $\{x_n\}_{n\ge 0}$ за ітераційним алгоритмом (3.2). За допомогою нерівності (3.40) одержуємо апріорну оцінку похибки методу (3.2). Далі ми отримаємо апостеріорні оцінки похибки, які точніші, ніж відповідні апріорні оцінки.

Теорема 3.8. Нехай виконуються умови теореми 3.7. Позначимо

$$e_n = p_0\|x_n - y_{n-1}\|\,\|x_n - x_{n-1}\|,$$

$$g_n = 1 - p_0 a - 2p_0\|x_n - x_0\|.$$

Тоді для $n = 1,2,3,...$ справедливі оцінки

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{2e_n}{g_n + (g_n^2 - 4p_0 e_n)^{\frac{1}{2}}} \le t_n.$$

Доведення. З умови (3.38) одержуємо

$$\|I - A_0^{-1}F(x_n, x^*)\| = \|A_0^{-1}(F(x_0, y_0) - F(x_0, x_0) + F(x_0, x_0) -$$
$$- F(x_n, x_0) + F(x_n, x_0) - F(x_n, x^*)\| \le p_0(\|x_0 - y_0\| + \|x_n - x_0\|$$
$$+ \|x_0 - x_*\|) \le p_0 a + p_0(2\|x_n - x_0\| + \|x_n - x_*\|)$$
$$\le p_0 a + p_0(2t_0 - 2t_n + t_n) = p_0 a + 2p_0 t_0 - p_0 t_n < p_0 a + 2p_0 t_0.$$

Легко бачити, що $p_0 a + 2p_0 t_0 \le 1$. Тоді за теоремою Банаха поділена різниця $F(x_n, x^*)$ має обернену і

$$\|F(x_n, x^*)^{-1} A_0\| \le \frac{1}{1 - p_0(\|x_0 - y_0\| + \|x_n - x_0\| + \|x_0 - x_*\|)} \le (g_n - p_0\|x_n - x^*\|)^{-1}. \tag{3.48}$$

Із (3.4) ми можемо записати

$$x_n - x^* = F(x_n, x^*)^{-1}(F(x_n) - F(x^*) = (F(x_n, x^*)^{-1} A_0) A_0^{-1} F(x_n).$$

Використовуючи (3.47) і (3.48), ми одержуємо нерівність

$$\|x_n - x^*\| \le (g_n - p_0\|x_n - x^*\|)^{-1} e_n.$$

Звідси отримуємо

$$\|x_n - x^*\| \le 2\{g_n + (g_n^2 - 4p_0 e_n)^{\frac{1}{2}}\}^{-1} e_n.$$

$$t_n = \frac{p_0 t_n^2 + (1 - p_0 a - 2p_0 r_0) t_n}{p_0 t_n + (1 - p_0 a - 2p_0 r_0)}$$
$$= \frac{p_0(s_{n-1} - t_n)(t_{n-1} - t_n)}{1 - p_0 a - 2p_0(t_0 - t_n) - p_0 t_n}(t_{n-1} - t_n)$$
$$\ge \frac{e_n}{g_n - p_0\|x_n - x^*\|} \ge \|x_n - x^*\|.$$

Доведення завершене.

3.6 Застосування

На завершення роботи ми розв’яжемо конкретну крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння другого порядку, апроксимувавши її відповідною системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Зауважимо, що та сама

задача може бути зведена згідно параграфа 3.2 до розв'язування послідовності лінійних крайових задач. Ми застосуємо результати напівлокальної збіжності до прикладу, який розглядався іншими авторами [4, 34].

Ми розглядаємо нелінійну крайову задачу другого порядку:

$$\begin{aligned} &x'' + x^{1+p} = 0, \quad p \in (0,1], \\ &x(0) = x(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Поділимо інтервал $[0;1]$ на n підінтервали і покладемо $h = 1/(n+1)$. Нехай $\{t_k\}$ – точки поділу з $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = 1$. Стандартна апроксимація для другої похідної дається формулою

$$x_i'' \approx \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}, \quad x_i = x(t_i), \quad i = 1,...,n.$$

Покладемо $x_0 = x_{n+1} = 0$. В результаті ми одержимо для розв'язування систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - h^2 x_1^{1+p} = 0, \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} - h^2 x_i^{1+p} = 0, i = 2,\ldots,n-1, \\ -x_{n-1} + 2x_n - h^2 x_n^{1+p} = 0, \end{cases} \tag{3.50}$$

яку запишемо у матрично-векторній формі

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}, \; H(x) = h^2 \begin{pmatrix} x_1^{1+p} \\ x_2^{1+p} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{1+p} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді $F'(x) = A - H'(x) = A - h^2(1+p)\operatorname{diag}\{x_1^p, x_2^p, \ldots x_n^p\}$.

Гіпотези Ньютона-Канторовича в працях [87, 107, 96, 95, 106, 108, 230, 63] для розв'язування рівняння $F(x) = 0$ не можуть бути виконані. Ми не можемо оцінити другу похідну Фреше, оскільки це потребувало б оцінки величин x_i^{-p}, які можуть не існувати.

Поділену різницю першого порядку ми визначаємо за формулою (3.6). Тоді

$$F(x,y)=A-h^2\begin{pmatrix} \dfrac{x_1^{1+p}-y_1^{1+p}}{x_1-y_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{x_2^{1+p}-y_2^{1+p}}{x_2-y_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{x_n^{1+p}-y_n^{1+p}}{x_n-y_n} \end{pmatrix}.$$

Для оцінки $\|A_0^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\|$ у (3.25) дослідимо значення $\|F'(x)-F'(y)\|$. Ми будемо використовувати норму $\|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ для $x\in R^n$ і відповідну матричну норму $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ для $A\in R^n\times R^n$. Ми маємо

$$F(x,y)=\int_0^1 F'(x+t(y-x))dt.$$

Тоді для всіх $x,y\in R^n$, $x_i>0, y_i>0, (i=1,2,\dots,n)$, для максимум-норми ми одержимо [34]

$$\begin{aligned} &\|F'(x)-F'(y)\|=\|\mathrm{diag}\{h^2(1+p)(y_i^p-x_i^p)\}\|= \\ &=h^2(1+p)\max_{1\le i\le n}|y_i^p-x_i^p|\le \\ &\le h^2(1+p)\max_{1\le i\le n}|y_i-x_i|^p=h^2(1+p)\|y-x\|^p. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\|F(x,y)-F(u,v)\|\le\int_0^1\|F'(x+t(y-x))-F'(u+t(v-u))\|dt \\ &\le h^2(1+p)\int_0^1\|(1-t)(x-u)+t(y-v)\|^p dt \\ &\le h^2(1+p)\int_0^1\|(1-t)^p\|x-u\|^p+t^p\|y-v)\|^p dt \\ &=h^2(\|x-u\|^p+\|y-v\|)^p). \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} &\|A_0^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\|\le\|A_0^{-1}\|\,\|(F(x,y)-F(u,v))\| \\ &\le\|A_0^{-1}\|\,h^2(\|x-u\|^p+\|y-v\|)^p), \end{aligned}$$

і поділена різниця є неперервна за Гьольдером з постійною $p_0 = \| A_0^{-1} \| h^2$.

Тепер ми застосуємо метод (3.2) для розв'язування (3.50). Початкове і додаткове наближення були вибрані наступним чином

$$\widetilde{x}_i^{(0)} = 130\sin(\pi t_i),\ \widetilde{y}_i^{(0)} = \widetilde{x}_i^{(0)} + 10^{-4},\ i = 1,2,...,n.$$

Це наближення утворює наступний вектор:

$$\widetilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 4.01722e+001 \\ 7.64120e+001 \\ 1.05172e+002 \\ 1.23637e+002 \\ 1.30000e+002 \\ 1.23637e+002 \\ 1.05172e+002 \\ 7.64120e+001 \\ 4.01722e+001 \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи метод (3.2), після трьох ітерацій одержуємо

$$\widetilde{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.35744e+001 \\ 6.52035e+001 \\ 9.15675e+001 \\ 1.09169e+002 \\ 1.15365e+002 \\ 1.09169e+002 \\ 9.15675e+001 \\ 6.52035e+001 \\ 3.35744e+001 \end{pmatrix}, \widetilde{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.35739e+001 \\ 6.52024e+001 \\ 9.15660e+001 \\ 1.09167e+002 \\ 1.15363e+002 \\ 1.09167e+002 \\ 9.15660e+001 \\ 6.52024e+001 \\ 3.35739e+001 \end{pmatrix}.$$

Тепер візьмемо отримані вектори $\widetilde{x}^{(3)}, \widetilde{y}^{(3)}$ як стартові значення $x^{(0)} = \widetilde{x}^{(3)}$, $y^{(0)} = \widetilde{y}^{(3)}$ для нашої теореми 3.5 Ми одержуємо наступні результати:

$$a = 1.959104686477531e-003, \qquad c = 1.979481003930060e-003,$$
$$p_0 = 2.658847710508207e-001, \quad p = 0.5.$$

Виберемо $r_0 = 0.01$. Тоді за формулами (3.27)-(3.28) ми одержимо

$$t_0 = 1.000000000000000e-002, \quad s_0 = 8.040895313522469e-003,$$
$$t_1 = 8.020518996069941e-003, \quad s_1 = 8.018143208254686e-003,$$
$$t_2 = 8.018111677623910e-003, \quad s_2 = 8.018111562459251e-003,$$
$$t_3 = 8.018111562458307e-003, \quad \ldots, t^* = 8.01811156245e-003.$$

$$C_1 = 1.200207433431871e-003, \quad B_2 = 1.216136169658610e-003,$$
$$C_2 = 4.783939576478122e-005, \quad B_3 = 4.783978708624777e-005,$$
$$\gamma = 2.510839630798201e-002,$$

$$r_0 - c/(1-\gamma) = 2.030462665216887e-003 < t^* < t_0.$$

Легко бачити, що для даних значень гіпотези теорем 3.5 і 3.6 задовольняються. Згідно цих теорем, ітераційний алгоритм (3.2) є добре визначений, міститься в $U(x_0, r_0)$ і збігається до єдиного розв'язку x^* рівняння $F(x) = 0$ в $U(x_0, r_0)$.

Обчислення виконувалася з точністю $\varepsilon = 10^{-10}$. У випадку $n = 9$, $p = \frac{1}{2}$ розв'язок нелінійної різницевої задачі (3.50) був отриманий методом хорд за 10 ітерацій, методом Ньютона і методом з порядком $1+\sqrt{2}$ (3.3) за 5 ітерацій, і методом з порядком $1+\sqrt{2}$ (3.2) за 4 ітерації.

3.7 Висновки

У цій праці ми запропонували новий підхід для дослідження різницевого методу з порядком $1+\sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних рівнянь в банахових просторах. Ми визначили поділені різниці для типових нелінійних операторів і побудували деякі спеціальні алгоритми для рівнянь з цими операторами. Ми довели теореми про локальну і напівлокальну збіжність методів до локально єдиного розв'язку при умовах Гьольдера для поділених різниць першого порядку нелінійного оператора. Наведено приклад, до якого ми успішно застосували наші результати, а деякі інші подібні результати, існуючі в літературі, не можуть бути застосовані.

4 АДАПТИВНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

4.1 h-адаптивні схеми МСЕ для одновимірних крайових задач

В різноманітних застосуваннях комп'ютерного моделювання все більшої уваги приділяється надійним критеріям оцінки обчислених характеристик досліджуваних об'єктів та явищ. Особливу цінність такі критерії складають у виконанні обчислювальних експериментів із сингулярно збуреними крайовими та\чи початково-крайовими задачами, див., напр. [6]. З огляду на цю важливу обставину теорія числових методів останнім часом була доповнена таким потужним інструментарієм як апостеріорні оцінювачі похибок (АОП) апроксимацій МСЕ, див. огляди [82, 90] та монографії [3, 6, 104].

Детальна побудова АОП кусково лінійних апроксимацій МСЕ для крайових задач із звичайними диференціальними рівняннями другого порядку та побудова *h*–адаптивної схеми на їх основі нещодавно виконана в праці Абрамов-Ліпіна-Шинкаренко-Ямелинець [105]. За допущення, що така апроксимація $u_h = u_h(x)$ з достатньою точністю відтворює значення шуканого розв'язку $u = u(x)$ у вузлах x_i використаної сітки $\Im_h = \{K_{i+1/2}\}$, наближення до похибки $e := u - u_h$ на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$ знаходяться у вигляді кусково квадратичної функції бульбашкової структури

$$e(x) \cong b_{i+1/2}(x)\lambda_{i+1/2} := 4\frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)^2}\lambda_{i+1/2} \quad \forall x \in K_{i+1/2}. \tag{4.1}$$

Шуканий коефіцієнт $\lambda_{i+1/2}$ апостеріорного оцінювача (4.1) подає наближене значення похибки апроксимації МСЕ у центрі ваги $x_{i+1/2}$ скінченого елемента $K_{i+1/2}$ і незалежно від решти скінченних елементів поділу обчислюється із

лишку варіаційного рівняння

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{< l_{i+1/2}, b_{i+1/2} > - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \tag{4.2}$$

де $c_{i+1/2}(\cdot\,,\cdot)$ та $< l_{i+1/2}, \cdot >$ є складовими білінійної форми і лінійного функціоналу варіаційного рівняння розглядуваної задачі, визначені на скінченному елементі $K_{i+1/2}$. На цьому шляху обчислюється розподіл похибок між скінченними елементами сітки $\Im_h$ і приймаються рішення щодо її згущення\розрідження з метою досягнення рівномірного розподілу похибки наперед заданого рівня.

Тут ми продовжуємо цитоване вище дослідження [105] для випадку частинами квадратичних та частинами кубічних апроксимацій МСЕ. З огляду на цю мету текст укладено в такий спосіб. В п. 4.2 і п. 4.3 формулюється модельна крайова та відповідна їй варіаційна задачі і достатні умови однозначної розв’язуваності останньої. В п. 4.4 ми описуємо частинами квадратичну апроксимацію МСЕ на кожному скінченному елементі поділу з використанням локальної змінної і за певних допущень відносно наближеного інтегрування на скінченному елементі будуємо відповідну систему дискретизованих рівнянь МСЕ. Далі з використанням поліноміальної функції бульбашкової структури ми будуємо АОП для цих частинами квадратичних апроксимацій МСЕ. Такий АОП є поліномом третього порядку, що приймає нульові значення у вузлах скінченного елемента, і його відшукання вимагає розв’язування лише одного алгебричного рівняння. Ми подаємо його розв’язок у замкненому вигляді на підставі безпосередніх обчислень. Матеріал п. 4.5 повністю повторює щойно описаний шлях дослідження для випадку апроксимацій МСЕ, заснованих на кубічних поліномах Ерміта, та побудову АОП, який сконструйовано за допомогою частинами визначеного полінома четвертого порядку бульбашкової структури. Останній п. 4.6 доповнює теоретичний аналіз результатами числових експериментів.

Подібний підхід до побудови АОП розвинено в статтях Квасниця-Шинкаренко [148, 149] для апроксимацій МСЕ в задачах еластостатики, а також Шинкаренко-Козаревська [153] – в задачі дифузії-конвекції-реакції.

4.1.1 Постановка крайової задачі

Розглянемо крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$-\left[\mu(x)u'(x)\right]' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \qquad \forall x \in \left(0, L\right) \tag{4.3}$$

і задовольняє крайові умови

$$u(0) = 0, \qquad -\mu(L)u'(L) = \alpha\left[u(L) - \overline{u}\right]. \tag{4.4}$$

Тут $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ – задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma(x) \geq 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty\left(\Omega\right), \quad f \in L^2\left(\Omega\right), \end{cases} \tag{4.5}$$

а $\alpha \geq 0$, $\overline{u}$ – задані сталі.

4.1.2 Варіаційне формулювання крайової задачі

Крайова задача (4.3), (4.4) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u \in V := \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0\} \quad \textit{таку, що} \\ \qquad c(u, v) = < l, v > \qquad\qquad \forall v \in V \end{cases} \tag{4.6}$$

з такими білінійною формою та лінійним функціоналом

$$\begin{cases} c(u,v) := \int_0^L (\mu\, u'v' + \beta\, u'v + \sigma\, uv)dx + \alpha\, u(L)v(L), \\ < l,v > := \int_0^L fvdx + \alpha\, \bar{u}v(L) \qquad \forall u,v \in V. \end{cases} \tag{4.7}$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика можна переконатися, що варіаційна задача (4.6) коректно поставлена, якщо її дані задовольняють умови регулярності (4.5) і

$$\sigma - \tfrac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (0,L), \quad \alpha - \tfrac{1}{2}\beta(L) \geq 0. \tag{4.8}$$

За цих умов білінійна форма $c(\,.\,,.\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій V норму (відому під назвою енергетичної норми задачі)

$$\|v\|_V := \sqrt{c(v,v)} \qquad \forall v \in V. \tag{4.9}$$

4.1.3 Частинами квадратичні апроксимації МСЕ

4.1.3.1 *Локальні незалежні змінні на скінченних елементах*

Зафіксувавши натуральне N, поділимо відрізок $[0,L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} := x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, N-1$, так, що $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = L$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо, $x_{i+1/2} := (x_{i+1} + x_i)/2$ – це центр ваги скінченного елемента $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$.

На кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ введемо локальну координату ξ згідно правила:

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \tfrac{1}{2}(1-\xi)x_i + \tfrac{1}{2}(1+\xi)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ \qquad = x_{i+1/2} + \tfrac{1}{2}h_{i+1/2}\xi \qquad \forall \xi \in [-1,1]. \end{cases} \tag{4.10}$$

У визначенні (4.10) використано наступні позначення:

$$\theta(\xi) := \tfrac{1}{2}(1-\xi), \qquad \omega(\xi) := \tfrac{1}{2}(1+\xi). \tag{4.11}$$

Введення локальних координат на скінченних елементах створює, з одного боку, передумови для однотипного опису їхніх, скажімо, геометричних характеристик, а з іншого – дозволяє підготуватися, наприклад, до обчислення основних співвідношень МСЕ з використанням числового інтегрування квадратурами Гаусса.

4.1.3.2 *Квадратичний поліном на скінченному елементі*

На кожному скінченному елементі виберемо квадратичну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (4.6) у вигляді:

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \cong u_h(\xi) := \{2\theta(\xi)\left[\theta(\xi) - \tfrac{1}{2}\right]\}u_i + \\ \qquad\qquad + \{2\omega(\xi)\left[\omega(\xi) - \tfrac{1}{2}\right]\}u_{i+1} + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}u_{i+1/2}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \;\forall \xi \in [-1,+1], \;\; i = 0,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Отже, з огляду на диференціювання складених функцій та апроксимацію (4.3) ми одержуємо правило обчислення похідних вигляду:

$$u' \equiv \frac{du}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi}u[x(\xi)] \cong \frac{2}{h}\frac{du_h}{d\xi} \quad \forall K_{i+1/2},\, i = 0,\ldots,N-1. \tag{4.13}$$

Зауваження 4.1 Тут і нижче, щоб описати квадратичну апроксимацію із (4.3) як функцію глобальної змінної $x \in K_{i+1/2}$, достатньо замінити визначення (4.2) функцій $\theta = \theta(\xi)$ і $\omega = \omega(\xi)$ такими, як $\theta = \theta(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x_{i+1} - x)$, $\omega = \omega(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x - x_i) \quad \forall x \in K_{i+1/2}$.

4.1.3.3 *Обчислення на скінченному елементі*

З огляду на застосування класичних схем нам будуть потрібні обчислення складових варіаційного рівняння (4.6) вигляду

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u,v) := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\}dx + \alpha\, u(L)v(L)\delta_{N\,i+1}, \\ < l_{i+1/2}, v > := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} fvdx + \alpha\, \overline{u}v(L)\delta_{N\,i+1}, \qquad i = 0\;,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Так як і в [105], будемо виконувати інтегрування в (4.14) наближено із вживанням теореми про середнє в такий спосіб:

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u,v) \cong \mu_{i+1/2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u'v'dx + \beta_{i+1/2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u'vdx + \sigma_{i+1/2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} uvdx \\ \qquad\qquad + \alpha u(L)v(L)\delta_{N\ i+1}, \\ < l_{i+1/2}, v > \cong f_{i+1/2}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} vdx + \alpha\overline{u}v(L)\delta_{N\ i+1}, \qquad i = 0\ ,...,N-1, \end{cases} \tag{4.15}$$

де

$$\mu_{i+1/2} := \mu(x_{i+1/2}), \quad \beta_{i+1/2} := \beta(x_{i+1/2}), \quad \sigma_{i+1/2} := \sigma(x_{i+1/2}).$$

4.1.3.4 *Система дискретизованих рівнянь на скінченному елементі*

Твердження 4.1.1 *про структуру рівнянь МСЕ з квадратичною апроксимацією.*

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (4.6) відшуковується методом Гальоркіна з використанням квадратичних апроксимацій, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (4.12).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченому елементі $K_{i+1/2} = \left(x_i, x_{i+1}\right)$ має таку структуру

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\mu}{3h}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{6}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma h}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \qquad \forall K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0,1,\ \dots\ ,N-1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Доведення. Вибираючи в кожному із доданків (4.6) послідовно за допустимі функції $\{v_m\}_{m=1}^{3} := \{\, 2\theta(\theta - \tfrac{1}{2}),\ 2\omega(\omega - \tfrac{1}{2}),\ 4\theta\omega \,\}$ і приймаючи за u

апроксимацію із (4.3), після безпосередніх обчислень інтегралів від добутків поліноміальних функцій, одержуємо, що

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx\right\}_{m=1}^{3} = \frac{h_{i+1/2}}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h' v_m dx\right\}_{m=1}^{3} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h' v_m' dx\right\}_{m=1}^{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{h_{i+1/2}}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_m dx\right\}_{m=1}^{3} = \frac{h_{i+1/2}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Після виконання належних алгебричних обчислень з векторами (4.17)-(4.20) згідно з правилами (4.15) прийдемо до системи задекларованих лінійних алгебричних рівнянь (4.16).

За добре відомими правилами із систем рівнянь вигляду (4.16) укладається система лінійних алгебричних рівнянь для відшукання вузлових значень кусково квадратичної апроксимації МСЕ на довільних нерівномірних сітках.

Зауваження 4.1 Система рівнянь (4.16) впорядкована нами в такий спосіб, щоб попередньо на кожному скінченому елементі $K_{i+1/2}$ зручно було виконати конденсацію його внутрішнього параметра $u_{i+1/2}$, вилучивши в такий спосіб одне із трьох рівнянь системи (4.16). За цих умов, подібно як із кусково лінійними апроксимаціями, формується результуюча система дискретизованих рівнянь з трьох- діагональною матрицею, за деталями див., напр., [6].

4.1.3.5 *Апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій*

У випадку квадратичних апроксимацій вигляду (4.12) похибку їх наближення $e(x)=u(x)-u_h(x)$ на кожному скінченному елементі будемо апроксимувати кубічним поліномом вигляду

$$\begin{cases} e[x(\xi)] \cong e_{i+1/2}(\xi) := \lambda_{i+1/2}\, b_{i+1/2}(\xi) \\ \qquad\qquad\qquad \equiv \{\omega(\xi)\theta(\xi)\big[\theta(\xi)-\omega(\xi)\big]\}\lambda_{i+1/2}, \\ x(\xi)=\theta(\xi)x_i+\omega(\xi)x_{i+1}\ \forall\xi\in[-1,+1],\ \ i=0,...,N-1. \end{cases} \tag{4.21}$$

Теорема 4.1.1 *про апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій МСЕ.*

Нехай $\Im_h=\{K_{i+1/2}\}$ - деякий поділ відрізка $[0,L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2}=(x_i,x_{i+1}),\ h_{i+1/2}=x_{i+1}-x_i,\ i=0,...,N-1,\ h:=\max h_{i+1/2}$,на кожному із яких обчислено квадратичну апроксимацію u_h вигляду (4.12). Нехай на додаток до цього для оцінки точності знайденої апроксимації використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x):=\sum_{i=0}^{N-1}e_{i+1/2}(x)\equiv\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_{i+1/2}b_{i+1/2}(x), \tag{4.22}$$

де $\operatorname{supp} e_{i+1/2}\equiv\operatorname{supp} b_{i+1/2}:=K_{i+1/2}\quad i=0,...,N-1$.

Тоді будуть правильними такі ***твердження****:*

1. *Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (4.22) обчислюються за правилами*

$$\lambda_{i+1/2}\equiv e_h\left(x_{i+1/2}\right)=\frac{7}{2}\left\{h\frac{4\beta\left(u_{i+1}-2u_{i+1/2}+u_i\right)+h\sigma\left(u_{i+1}-u_i\right)}{42\mu+\sigma h^2}\right\}_{i+1/2}. \tag{4.23}$$

2. *Норма апостеріорного оцінювача похибки (4.21) та її розподіл між скінченними елементами визначається в такий спосіб*

$$\left\|e_h\right\|_V^2=\sum_{i=0}^{N-1}c_{i+1/2}(e_{i+1/2},e_{i+1/2})=\frac{1}{210}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda^2{}_{i+1/2}\left\{\frac{1}{h}\left(42\mu+h^2\sigma\right)\right\}_{i+1/2}. \tag{4.24}$$

Доведення. З огляду на задачу про апостеріорний оцінювач похибки та класичну схему Гальоркіна її розв'язування, за деталями див. [105], знаходимо, що

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{< l_{i+1/2}, b > - c_{i+1/2}(u_h, b)}{c_{i+1/2}(b,b)}. \tag{4.25}$$

Врешті, безпосередні обчислення приводять нас до таких значень складових останнього дробу

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(b,b) = \dfrac{1}{210}\left\{\dfrac{42}{h}\mu + h\sigma\right\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(u_h,b) = -\dfrac{1}{60}\left\{4\beta\left(u_{i+1} - 2u_{i+1/2} + u_i\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + h\sigma\left(u_{i+1} - u_i\right)\right\}_{i+1/2}, \\ < l_{i+1/2}, b >= 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

4.1.4 Частинами кубічні апроксимації МСЕ

4.1.4.1 Ермітові кубічні поліноми на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі виберемо кубічну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (4.6) у вигляді:

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta^2(\xi)\left[2\omega(\xi)+1\right]u_i \; + h\,\theta^2(\xi)\omega(\xi)u_i' + \\ \qquad\qquad + \omega^2(\xi)\left[2\theta(\xi)+1\right]u_{i+1} - h\,\omega^2(\xi)\theta(\xi)u_{i+1}', \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1,+1], \quad i = 0,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{4.27}$$

4.1.4.2 Основні співвідношення МСЕ на скінченному елементі

Твердження 4.1.2 *про структуру рівнянь МСЕ з кубічною апроксимацією.*

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (4.6) відшуковується методом Гальоркіна з використанням кубічних поліномів Ерміта, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (4.27).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченному елементі $K_{i+1/2}=\left(x_i,x_{i+1}\right)$, *має таку структуру*

$$\left\{\frac{\mu}{10h}\begin{bmatrix}36 & 3h & 3h & -36\\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h\\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h\\ -36 & -3h & -3h & 36\end{bmatrix}+\frac{\beta}{20}\begin{bmatrix}-30 & 6h & -6h & 30\\ -6h & 0 & -h^2 & 6h\\ 6h & h^2 & 0 & -6h\\ -30 & -6h & 6h & 30\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma h}{140}\begin{bmatrix}156 & 22h & -13h & 54\\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h\\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h\\ 54 & 13h & -22h & 156\end{bmatrix}\right\}_{i+1/2}\begin{bmatrix}u_i\\ u_i'\\ u_{i+1}'\\ u_{i+1}\end{bmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{fh}{2}\begin{bmatrix}3\\ h/2\\ -h/2\\ 3\end{bmatrix}\right\}_{i+1/2}\qquad \forall K_{i+1/2},\quad i=0,1,\ \dots\ ,N-1. \tag{4.28}$$

Доведення.

Як і раніше, вибираючи в кожному із доданків (4.15) послідовно за допустимі функції множини $\left\{v_i\right\}_{m=1}^{4}:=\left\{\theta^2(2\omega+1),\ 2\theta^2\omega,\ -2\omega^2\theta,\ \omega^2(2\theta+1)\right\}$ і підставляючи до них апроксимацію із (4.27), після подібних обчислень одержимо, що

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx\right\}_{m=1}^{4}=\frac{h}{420}\begin{bmatrix}156 & 22h & -13h & 54\\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h\\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h\\ 54 & 22h & -22h & 156\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_i'\\ u_{i+1}'\\ u_{i+1}\end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h' v_m dx\right\}_{m=1}^{4}=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}-30 & 6h & -6h & 30\\ -6h & 0 & -h^2 & 6h\\ 6h & h^2 & 0 & -6h\\ -30 & -6h & 6h & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ u_i'\\ u_{i+1}'\\ u_{i+1}\end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h' v_m' dx\right\}_{m=1}^{4} = \frac{1}{30}\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_i' \\ u_{i+1}' \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

$$\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f v_m dx\right\}_{m=1}^{4} = \frac{h}{12} f_{i+1/2}\begin{bmatrix} 6 \\ h \\ -h \\ 6 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

4.1.4.3 Апостеріорний оцінювач похибок кусково кубічних апроксимацій МСЕ

Оцінювач похибок апроксимацій МСЕ, обчислених з використанням ермітових кубічних поліномів вигляду (4.27), будемо будувати на кожному скінченному елементі з використанням поліномів четвертого порядку, а саме

$$e_h(\xi) := \lambda_{i+1/2} b(\xi) \equiv 16\theta_i^2(\xi)\omega_i^2(\xi)\lambda_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2},\ i = 0,...,N-1. \tag{4.33}$$

Теорема 4.1.2 *про апостеріорний оцінювач похибки частинами кубічних апроксимацій МСЕ.*

Нехай $\Im_h = \{K_{i+1/2}\}$ - деякий поділ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,...,N-1$, $h := \max h_{i+1/2}$, на кожному із яких обчислено кубічну апроксимацію u_h вигляду (4.27). Нехай на додаток до цього для оцінки точності знайденої апроксимації використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x), \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} b_{i+1/2}(\xi) := 16\left[\omega(\xi)\theta(\xi)\right]^2 = (1-\xi^2)^2 \\ \operatorname{supp} e_{i+1/2} \equiv \operatorname{supp} b_{i+1/2} := K_{i+1/2} \quad i = 0,...,N-1. \end{cases}$$

Тоді будуть правильними такі твердження:

1. *Коефіцієнти* $\lambda_{i+1/2}$ *розвинення (4.33) подають наближені значення похибки апроксимації* $u_h(x)$ *в центрах ваг кожного скінченного елемента; більше цього, правило його обчислення має вигляд*

$$\lambda_{i+1/2} = e_h\left(x_{i+1/2}\right) = \frac{< l_{i+1/2}, b_{i+1/2} > - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \tag{4.35}$$

де

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2}) = \dfrac{2}{105}\Big\{7(2\sigma h - 3\beta)u_i + h(\dfrac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma)u_i' \\ \qquad\qquad + 7(2\sigma h + 3\beta)u_{i+1} - h(\dfrac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma)u_{i+1}'\Big\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2}) = \dfrac{128}{315}\Big\{\dfrac{4}{h}\mu + h\sigma)\Big\}_{i+1/2}, \\ < l_{i+1/2}, b_{i+1/2} >= \dfrac{8}{15}\{hf\}_{i+1/2}, \qquad i = 0,...,N-1. \end{cases} \tag{4.36}$$

2. *Норма апостеріорного оцінювача похибки (4.33) та її розподіл між скінченними елементами обчислюється таким чином*

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2}(e_{i+1/2}, e_{i+1/2}) = \frac{128}{315}\sum_{i=0}^{N-1} \lambda^2{}_{i+1/2}\left\{\left(4\frac{\mu}{h} + h\sigma\right)\right\}_{i+1/2}. \tag{4.37}$$

4.1.5 Стратегія адаптування сітки

Виведені вище вирази для апостеріорних оцінювачів похибки на скінченному елементі використовувалися нами для побудови рекурсивного алгоритму адаптування розрахункової сітки в такий спосіб, щоб результуюча апроксимація МСЕ була знайдена на кожному скінченному елементі з наперед гарантованою точністю.

Докладніше, ми вибираємо за якість знайденої на сітці $\Im_h = \{K_{i+1/2}\}$ частинами визначеної квадратичної або кусково кубічної апроксимації u_h послідовність індикаторів

$$\eta_{i+1/2} := \sqrt{\frac{c_{i+1/2}(e_h, e_h)N}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}}100\%, \quad i = 0,...,N-1, \tag{4.38}$$

Індикатори похибки (4.38) визначають, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі. Якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то скінченний елемент поділяється на два нових додаванням нового вузла сітки в його центр ваги. Коли ж індикатор похибки певного скінченного елемента не перевищує допустимого рівня, то такий елемент без змін входитиме до нової розрахункової сітки. Процес уточнення апроксимацій МСЕ завершується за умови, що під час перегляду біжучої сітки не відбулося поділу жодного із її скінченних елементів.

4.1.6 Аналіз числових результатів

Розглянемо крайову задачу (4.3), (4.4) з наступними коефіцієнтами: $\mu = 1$, $\beta(x) = 3000(\frac{2}{3}L - x)$, $\sigma = 0$, $f = 3000$, $\alpha = 100000$, $\overline{u} = 0$. Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N_0 = 4$ скінченні елементи, допустимий рівень похибки $\varepsilon = 5\%$. Наближені розв'язки цієї задачі будувалися описаною вище процедурою $h-$адаптування із з використанням лінійних, квадратичних та кубічних ермітових апроксимацій МСЕ. Скрізь нижче вжито таких позначень: m – номер біжучого кроку адаптування; N_m – загальна кількість скінченних елементів поділу $\Im_h$; p_i – порядок швидкості збіжності схеми МСЕ в

середньоквадратичній нормі $|\cdot|_H$ $(i=0)$ та в енергетичній нормі $\|\cdot\|_V$ $(i=1)$ відповідно, $\delta_{\max}$ – максимальна відносна похибка на біжучій сітці,

$$\delta_{\max} = \max_{K_{i+1/2}\in\Im_h} \sqrt{\frac{\|e_{i+1/2}\|_V^2 N_m}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} \times 100\% . \tag{4.39}$$

За допущення, що показники збіжності апроксимацій МСЕ на нерівномірних поділах близькі до апріорних оцінок відносно параметра дискретизації $h_m := \dfrac{1}{N_m}$, їх порядки швидкості збіжності обчислювали згідно з правилом [149, 153]

$$p := \frac{\ln\|e^0\| - \ln\|e^m\|}{\ln N_m - \ln N_0}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{4.40}$$

де $\|\cdot\|$ – одна із норм $|\cdot|_H$ або $\|\cdot\|_V$.

4.1.6.1 ***Результати*** $h-$***адаптування з частинами лінійними апроксимаціями*** наведено на рисунку 4.1, рисунку 4.2 та в таблиці 4.1. Із останньої добре видно, що перші три кроки адаптування зводяться до рівномірного згущення сіток з подвоєнням кількості їх елементів. Основна причина такого поводження криється у високому рівні похибок наближення, зумовлених наявністю у структурі задачі точки повороту $x = 2L/3$.

Лише після належного пониження рівня похибок з четвертого кроку починається локальне згущення сіток власне в околі точки повороту. Ефективність цієї стратегії виражається у дещо завищених у порівнянні з передбачуваними теорією порядках збіжності в обох нормах.

4.1.6.2 ***Результати*** $h-$***адаптування з частинами квадратичними апроксимаціями*** наведено на рисунку 4.3, рисунку 4.4 та в таблиці 4.2. Характер збіжності дуже подібний до попереднього випадку, але з огляду на вищий степінь вжитих поліномів є монотонним і потребує меншої кількості

кроків адаптування. Відзначимо також, що на останньому кроці рівень максимальної відносної похибки із 7% понизився до 2%.

4.1.6.3 ***Результати $h-$адаптування з частинами кубічними апроксимаціями*** подано на рисунку 4.5, рисунку 4.6 та в таблиці 4.3. Зауважимо, що збільшення порядку поліноміальної апроксимації поряд із зменшенням кількості кроків адаптування приводить до суттєвого зменшення енергетичної норми похибки.

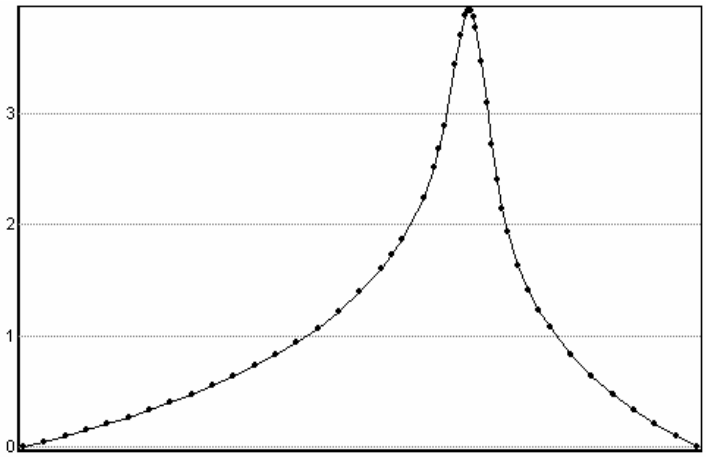


Рисунок 4.1 – Кусково лінійна апроксимація. Точками відзначено її значення у вузлах знайденого поділу із 47 елементів.

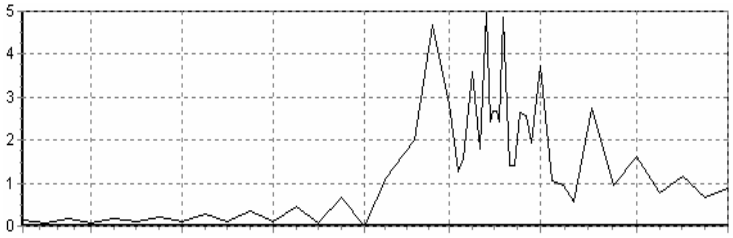


Рисунок 4.2 – Розподіл відносних похибок кусково-лінійної апроксимації на скінченних елементах після останнього кроку алгоритму.

Таблиця 4.1 – Характеристики покрокової збіжності h-адаптування з кусково лінійними апроксимаціями МСЕ

m	N	$\|e_h\|_V$	$\|u_h\|_V$	p_1	$\|e_h\|_H$	$\|u_h\|_H$	p_0	$\delta_{\max}$
0	4	69.8644	57.6909		1.71475	1.47796		106.98
1	8	84.1026	57.2641	-0.267	1.81804	1.45028	-0.084	118.22
2	16	40.3459	54.7685	0.396	0.633193	1.37752	0.719	60.42
3	32	5.0289	54.7226	1.265	0.046413	1.37488	1.736	39.90
4	37	2.37515	54.7439	1.520	0.014489	1.37594	2.146	18.81
5	44	1.47607	54.7475	1.609	0.007021	1.3763	2.293	9.66
6	47	1.08745	54.7475	1.690	0.005556	1.37637	2.327	4.95

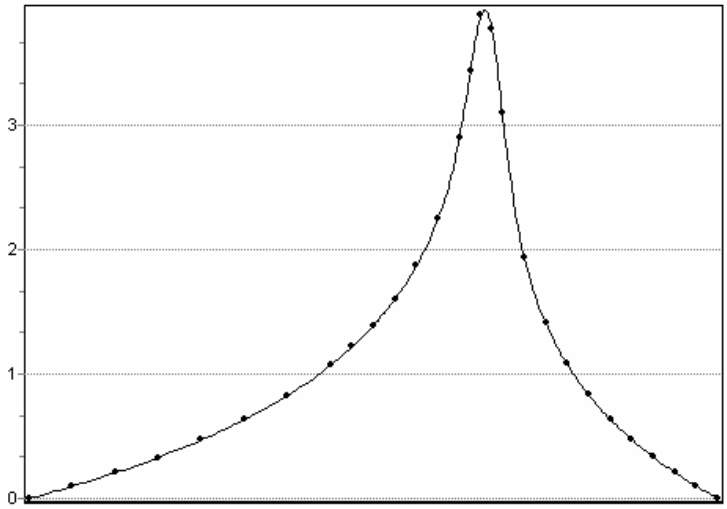


Рисунок 4.3 – Графік чисельного розв’язку (квадратичні апроксимації, 27 елементів).

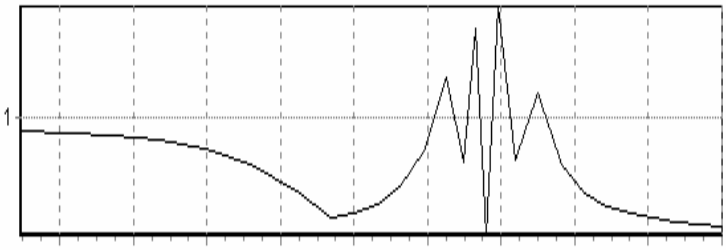


Рисунок 4.4 – Розподіл відносних похибок частинами квадратичних апроксимацій на скінченних елементах, обчислений після останнього кроку алгоритму

Таблиця 4.2 – Характеристики h–адаптивного МСЕ із кусково квадратичними апроксимаціями

m	N	$\lVert e_h \rVert_V$	$\lVert u_h \rVert_V$	p_1	$\lvert e_h \rvert_H$	$\lvert u_h \rvert_H$	p_0	$\delta_{\max}$
0	4	89.2692	59.1331		1.91545	1.50004		123.58
1	8	39.7882	54.9451	1.166	0.614825	1.38325	1.639	72.34
2	16	3.37218	54.6502	2.363	0.030465	1.37365	2.987	17.67
3	22	1.98262	54.6967	2.233	0.015793	1.37505	2.815	7.04
4	27	0.42426	54.7219	2.801	0.002306	1.37575	3.521	1.92

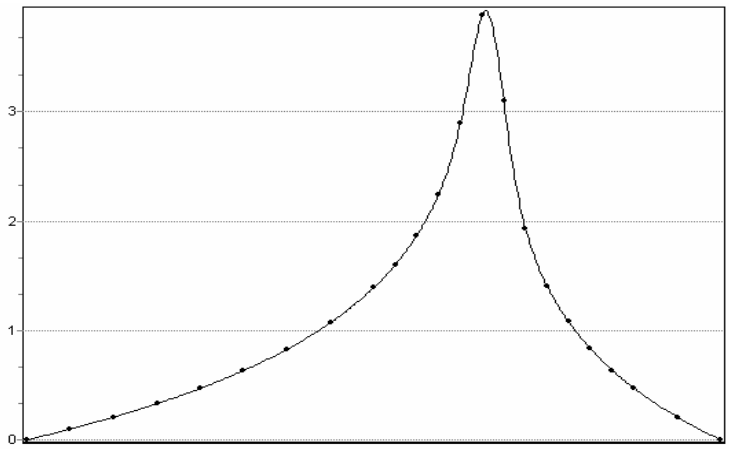


Рисунок 4.5 – Графік побудованої ермітової апроксимації МСЕ, точками відзначено її величини у вузлах знайденої сітки.

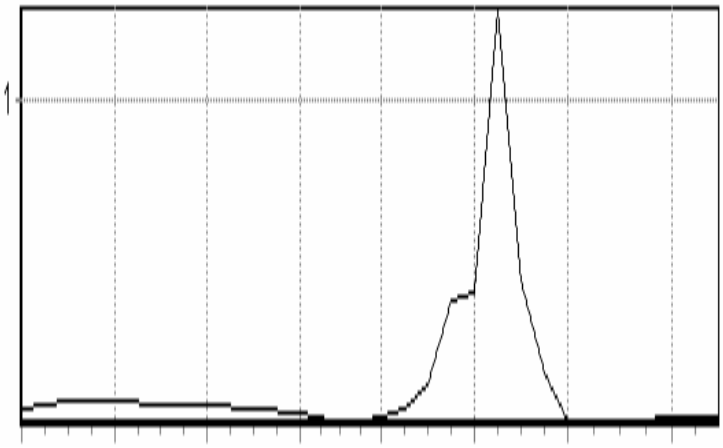


Рисунок 4.6 – Розподіл відносних похибок ермітових апроксимації між скінченними елементами після останнього кроку адаптування.

Таблиця 4.3 – Збіжність характеристик ермітових апроксимацій МСЕ в процесі адаптування

m	N	$\|e_h\|_V$	$\|u_h\|_V$	p_1	$\|e_h\|_H$	$\|u_h\|_H$	p_0	$\delta_{\max}$
0	4	17.2437	58.2447		0.419208	1.48196		51.23
1	6	14.2349	56.1691	0.473	0.331512	1.41588	0.579	36.36
2	12	3.93944	55.0118	1.344	0.071125	1.38339	1.615	9.95
3	22	0.17562	54.7327	2.691	0.001516	1.37604	3.298	1.28

4.1.7 Висновки

В даній роботі побудовано *h*-адаптивні схеми МСЕ для розв’язування лінійних крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Основу цих схем складає класична процедура Гальоркіна з просторами апроксимацій, що породжуються локально визначеними квадратичними або кубічними базисними функціями на кожному із скінченних елементів нерівномірних сіток. Приймаючи до уваги теорему про середнє для

обчислення інтегралу від добутку неперервних функцій сформульовано правила аналітичного обчислення складників системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ на скінченому елементі і в твердженнях 4.1.1 та 4.1.2 подано їхні значення, які є точними у випадку частинами постійних даних задачі як для квадратичних, так і кубічних базисних функцій. Зауважимо, що на основі цих співввідношень із застосуванням конденсації внутрішніх параметрів результуючі матриці кожної системи рівнянь МСЕ можна трансформувати до тридіагонального вигляду, притаманному випадку використання базисних функцій Куранта.

Щоб мати можливість обчислювати апроксимації МСЕ із наперед гарантованою точністю, кожна із запропонованих схем доповнена апостеріорними оцінювачами їхніх похибок, значення енергетичних норм яких обчислюються на кожному скінченному елементі незалежно від решти складових сітки. З огляду на задачу про лишок біжучої апроксимації МСЕ та допущення стосовно її достатньо точних вузлових значень сконструйовані АОП визначаються поліномом третього або четвертого порядків на скінченному елементі, коефіцієнти та норми яких подано у теоремах 4.1.1 та 4.1.2.

Нарешті, маючи за мету досягнення рівномірного розподілу норм похибок апроксимації на всіх скінченних елементах, тут запозичено стратегію згущення сіток із праць [105].

Апробація обчислювальних властивостей обох вище описаних числових схем засвідчила, що послідовне уточнення апроксимацій МСЕ із вжитою стратегією локального адаптування сіток здатне монотонно покращувати структури шуканих розв’язків із асимптотичними показниками порядків швидкості збіжності їхніх похибок до нульових значень енергетичних норм.

4.2 h-адаптивні схеми експоненціального МСЕ для двовимірних крайових задач

В багатьох математичних моделях дифузійно-конвективних процесів [71, 6, 53, 68, 70, 82, 91, 90, 93, 94, 104, 105, 111, 112, 113, 137, 140, 153, 169, 170, 183, 192, 199, 215] коефіцієнти біля старших похідних є малими порівняно з коефіцієнтами біля похідних нижчих порядків. Прикладами можуть бути задачі тепломасопереносу з великими числами Пекле, потоки Нав’є-Стокса з великими числами Рейнольдса і задачі магнітної гідродинаміки з великими числами Хартмана [53, 183]. Такі задачі називаються сингулярно збуреними, оскільки в граничному випадку при нульовому коефіцієнті дифузії диференціальні рівняння понижують порядок і деякі крайові умови стають надлишковими. Розв'язки таких задач можуть в той чи інший спосіб різко змінювати свою локальну структуру, наприклад, породжуючи так звані примежові шари примежові шари [53, 68, 70, 82]. Наявність цих та подібних особливостей робить сингулярно збурені задачі важкими для розв’язування як аналітичними, так і числовими методами. Зокрема, в різноманітних застосуваннях стають актуальними питання оцінки якості знайдених розв’язків чи\або їхньої похибки. Тому побудова та аналіз надійних числових схем для сингулярно збурених задач є однією із фундаментальних проблем комп’ютерного моделювання, див., напр. оглядові праці [53, 68, 70, 82].

На даний час розроблено низку схем методу скінчених елементів, адаптованих до сингулярно збурених задач конвекції-дифузії. Серед них можна виділити *h*-адаптивні схеми МСЕ [94, 104, 105, 111, 112, 113, 137, 140, 153], стабілізовані схеми [68], та методи експоненціальної підгонки [70, 82, 91, 90, 93, 94, 104, 105, 111, 112].

Дана робота присвячена побудові *h*-адаптивної схеми МСЕ для сингулярно збурених крайових задач конвекції-дифузії, особливості якої полягають у використанні стабілізуючого методу Петрова-Гальоркіна з експоненціальними

тестовими функціями [199] та побудованого тут апостеріорного оцінювача похибки у вигляді лінійної комбінації елементів нуль-простору оператора розглядуваної задачі. Зауважимо також, що застосування методу Петрова-Гальоркіна [199] дозволяє обчислювати апроксимації МСЕ як в певному сенсі найкращі наближення до шуканого розв'язку у кожному з допустимих просторів апроксимацій.

За допущення, що апроксимація МСЕ відтворює точні значення розв'язку у вузлах сітки, побудований АОП характеризує відхилення цієї апроксимації від функції, яка є точним розв'язком однорідного диференціального рівняння на кожному скінченному елементі триангуляції. З огляду на переваги використання неструктурованих сіток запропонована *h*-адаптивна схема вживає трикутні скінченні елементи з лінійними апроксимаціями.

Наведено результати числових експериментів для модельної задачі конвекції-дифузії, які підтверджують надійність запропонованої схеми та якість оцінювача похибок.

4.2.1 Модельна задача.

Розглянемо задачу для рівняння конвекції-дифузії: знайти функцію $u = u(x)$ таку, що

$$Lu := -\mu\Delta u + \beta \cdot \nabla u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = u_D \quad \text{на} \quad \Gamma := \partial\Omega. \tag{4.41}$$

Припустимо, що коефіцієнт дифузії $\mu = const > 0$, крім цього $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \gg \mu$. Дана задача є сингулярно збуреною через велику різницю швидкостей дифузії і конвективного перенесення. Для кращого розуміння сутті проблем, які при цьому виникають розглянемо одновимірний аналог задачі (4.41)
знайти функцію $u = u(x)$ таку, що

$$-\mu u'' + \beta u' = 0 \text{ на } [0, L], \; u(0) = u_0, \; u(L) = u_L, \tag{4.42}$$

яка має точний розв'язок $\dfrac{u-u_0}{u_L-u_0}=\dfrac{\exp[Px/L]-1}{\exp[P]-1}$, де число Пекле $P=\dfrac{\beta L}{\mu}$.

Модельна задача (4.42) може описувати, наприклад, розподіл температури усталеного (стаціонарного) потоку в каналі довжиною L. Тут β – швидкість потоку, μ – швидкість дифузії, u_0 і u_L задані значення температури на кінцях каналу. На рисунку 4.7 зображено графіки розв'язку задачі (4.42) при різних значеннях числа Пекле.

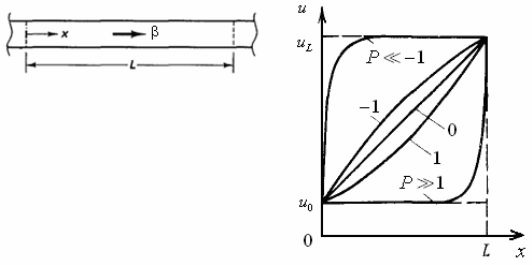


Рисунок 4.7 – Розв'язок задачі конвекції-дифузії при різних значеннях числа Пекле

З приведених графіків видно, що при великих числах Пекле значення температури різко змінюється в околі точки $x=0$ або $x=L$, що призводить до виникнення примежових шарів і втрати точності класичних методів апроксимацій даної задачі [183]. Найбільш раціональним способом відшукання чисельного наближення такого типу задач є використання експоненціальних схем [112, 183], які є рівномірно збіжні і здатні відтворювати точні значення розв'язку в вузлах дискретизації. Однак, не дивлячись на всі свої переваги такі схеми нечасто використовуються в обчислювальній практиці. Це пов'язано зі складністю обрахунку експоненціальних функцій та узагальненням таких схем на двовимірні задачі з не прямокутними областями. Деякі шляхи вирішення цих проблем описані в працях [93, 70, 9]. Тут лише коротко опишемо побудову експоненціальної схеми (позбавленої вище згаданих недоліків) для апроксимації задачі (4.41).

4.2.2 Експоненціальна схема МСЕ.

Поділимо область Ω на скінченні елементи K, одержану триангуляцію позначимо через $\mathcal{T}_h = \{K\}$, а її внутрішні вузли через $\{x^m\}_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{N}}$.

Як альтернативу класичному методу Рітца продемонструємо можливості методу Петрова-Гальоркіна, який у загальному випадку приводить до такої задачі:

задано простір апроксимацій $V_h \subset V := \{v \in H^1(\Omega) : u = 0 \ на \ \Gamma\}$

та тестових функцій $Y_h \subset V$, $\dim V_h = \dim Y_h = N < +\infty$;

знайти $u_h \in V_h$ такий, що

$$\int_\Omega [\mu \nabla w \cdot \nabla u_h + w\beta \cdot \nabla u_h] dx = \int_\Omega fw dx \quad \forall w \in Y_h. \tag{4.43}$$

Апроксимацію розв'язку будемо шукати у вигляді $u_h := \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j$, де $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ – базис простору V_h. Функція φ_m, має своїм носієм область

$$\operatorname{supp} \varphi_m \equiv \Omega_m := \{K \in \mathcal{T}_h : x^m \in \bar{K}\}, \ \varphi_m(x^m) \equiv 1, \ m = 1, \ldots, N.$$

За базис простору тестових функцій Y_h вибрано систему кусково-неперервних функцій $\{w_m\}_{m=1}^{N}$, означену згідно з правилами

$$w_m(x) := \varphi_m(x) \exp[(\mu^{-1}\beta) \cdot (a^m - x)], \quad m = 1, \ldots, N. \tag{4.44}$$

Точка a^m вибирається із вершин полігона Ω_m, щоб виконувалася умова

$$(\mu^{-1}\beta) \cdot (a^m - x) \le 0 \quad \forall x \in \Omega_m.$$

Тоді коефіцієнти системи лінійних алгебричних рівнянь схеми Петрова-Гальоркіна обчислюються згідно з правилами [199]

$$c_{mj} = \sum_{K\in\Omega_{mj}} \int_K [(\mu\nabla\varphi_m)\cdot\nabla\varphi_j + \sigma\varphi_j\varphi_m]\exp z_m\, dx, \quad \Omega_{mj} := \Omega_m \bigcap \Omega_j,$$
$$l_m = \sum_{K\in\Omega_m} \int_K f\varphi_m \exp z_m\, dx, \qquad m, j = 1,\ldots,N, \tag{4.45}$$

де $$z_m(x) := (\mu^{-1}\beta)\cdot(a^m - x), \quad m = 1,\ldots,N.$$

Зауважимо, що симетричність матриці $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^N$ буде зберігатися незалежно від типу базисних функцій $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$.

4.2.3 Побудова апостеріорного оцінювача та h-адаптивність.

Не зменшуючи загальності покладемо $f \equiv 0$ (це можна досягнути зведенням рівняння задачі (4.41) до однорідного). Контроль точності в процесі h-адаптування вимагає надійного апостеріорного оцінювача похибки. Для даної задачі апостеріорний оцінювач похибки на трикутнику K будуємо в наступному вигляді

$$\varepsilon_K(x) = \sqrt{|K|}\,|u_h(x) - v_h(x)| \qquad \forall x \in K,$$

де u_h відома на даному кроці адаптування апроксимація розв'язку і v_h – лінійна комбінації елементів нуль-простору оператора задачі L

$$v_h(x) = C_1 + C_2 \exp\left[\mu^{-1}\beta_1 x_1\right] + C_3 \exp\left[\mu^{-1}\beta_2 x_2\right].$$

Коефіцієнти C_i шукаємо з розв'язку системи лінійних рівнянь

$$v_h(x^i) = u_h(x^i), \qquad i = 1,2,3, \tag{4.46}$$

де x^i – вершини трикутника K.

Глобальну оцінку похибки будемо рахувати за середнє арифметичне локальних оцінювачів:

$$\varepsilon_\Omega = \sqrt{\sum_K \varepsilon_K^2(x^K)},$$

де x^K – центр ваги трикутника K.

Відповідно локальну і глобальну точні похибки будемо рахувати за формулами

$$E_K(x) = \sqrt{|K|}\,|u_h(x) - u(x)|, \quad E_\Omega = \sqrt{\sum_K E_K^2(x^K)}.$$

На кожній ітерації h-адаптивного процесу слід перебудовувати триангуляцію та розв'язати задачу (4.43) методом Петрова-Гальоркіна з експоненціальними тестовими функціями (4.44). Покращення триангуляції проводиться шляхом додавання нових вузлів в центри кіл описаних навколо трикутників, для яких виконується умова

$$\varepsilon_K \geq \alpha\varepsilon_{max}, \qquad \alpha \in (0,1),$$

де $\varepsilon_{max} = \max_K \varepsilon_K$. Критерієм зупинки процесу покрокового адаптування є обмеження:

$$\frac{\varepsilon_\Omega \cdot 100\%}{\sqrt{\sum_K |K|\,|u_h(x^K)|^2 + \varepsilon_\Omega^2}} \leq e_{tol}.$$

4.2.4 Числові експерименти.

Приведемо деякі результати обрахунку задачі (4.41) з використанням описаної вище процедури для побудови апостеріорного оцінювача похибки. Розглянемо задачу (4.41) на області $\Omega = \{(0,1)\times(0,1)\}$ з такими даними:

$\mu = 0.001, \quad \beta = (2,3)$,

$$f(x)=\exp\left(\frac{2(x_1-1)+3(x_2-1)}{\mu}\right)-(2+x_1)\exp\left(\frac{3(x_2-1)}{\mu}\right)x_1x_2^2-$$

$$-(x_2^2+6x_2-2\mu)\exp\left(\frac{2(x_1-1)}{\mu}\right)-2\mu x_1+x_1x_2^2+2x_2^2+6x_1x_2. \qquad (4.47)$$

Точний розв'язок цієї задачі

$$u(x_1,x_2)=x_1x_2^2-x_2^2\exp\left(\frac{2(x_1-1)}{\mu}\right)-x_1\exp\left(\frac{3(x_2-1)}{\mu}\right)+$$

$$+\exp\left(\frac{2(x_1-1)+3(x_2-1)}{\mu}\right) \qquad (4.48)$$

має чітко виражений примежовий шар уздовж границь $x_1=1$ та $x_2=1$.

Ітераційну процедуру адаптування розпочинали з триангуляції, зображеної на рисунку 4.8 (зліва). За параметри адаптування взято $\alpha=0.75$ та $e_{tol}=8\%$. На кожній ітерації розв'язуємо варіаційну задачу (4.43) за описаною вище схемою використовуючи кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів. При використанні апроксимацій вищих порядків для розв'язування системи (4.46) можна використовувати метод найменших квадратів. На заключній ітерації ми отримали триангуляцію (з 1662 трикутників та 1003 вузлів) зображену на рисунку 4.8 (справа). Як видно з рисунків, на всіх кроках адаптації сітка покращувалась виключно в околі примежового шару, де спостерігається найгірша точність апроксимації.

Деякі характеристики ітераційного процесу наведено в таблиці 4.4. З приведених даних видно, що коефіцієнт ефективності побудованого нами оцінювача ≈ 0.8. Порядок швидкості збіжності рахувався за формулою

$$p_i=2\frac{\ln\left(E_\Omega^i\right)-\ln\left(E_\Omega^1\right)}{\ln\left(N^1\right)-\ln\left(N^i\right)},$$

де $i=2,3,...,18$ позначає номер ітерації.

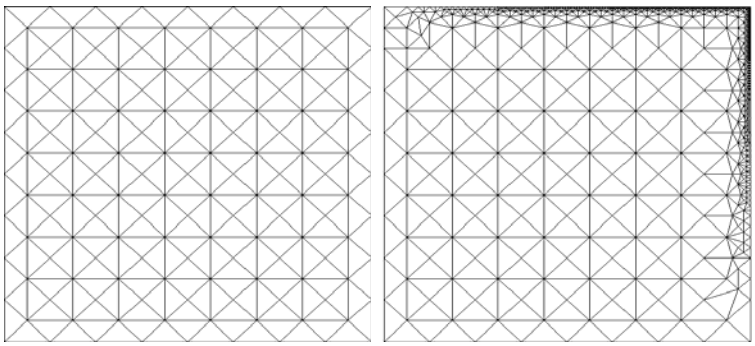


Рисунок 4.8 – Початкова (зліва) та результуюча (справа) триангуляції.

Таблиця 4.4 – Характеристика процесу h-адаптування

Ітерація	Вузли	Трикут.	ε_{max}	ε_{Ω}	E_{max}	E_{Ω}	$\varepsilon_{\Omega}/E_{\Omega}$	p
1	145	256	0.08494	0.03228	0.04286	0.10431	0.81	
2	149	260	0.08511	0.02463	0.04149	0.10766	0.79	
3	157	274	0.07793	0.02574	0.02755	0.09571	0.81	2.16
4	159	278	0.07166	0.01841	0.02328	0.09003	0.80	3.20
5	170	293	0.06759	0.01489	0.02196	0.08278	0.82	2.91
6	188	323	0.05857	0.01173	0.02141	0.07535	0.78	2.50
7	207	356	0.05363	0.01171	0.01443	0.06737	0.80	2.46
8	213	366	0.05039	0.00865	0.01191	0.06348	0.79	2.58
9	244	411	0.04690	0.00674	0.01088	0.05969	0.79	2.15
10	292	497	0.03931	0.00527	0.00739	0.05125	0.77	2.03
11	339	569	0.03592	0.00410	0.00584	0.04624	0.78	1.92
12	411	685	0.03226	0.00353	0.00548	0.04186	0.77	1.75
13	467	782	0.02949	0.00322	0.00381	0.03883	0.76	1.69
14	502	844	0.02788	0.00267	0.00351	0.03680	0.76	1.68
15	585	971	0.02582	0.00213	0.00295	0.03388	0.76	1.61
16	711	1174	0.02344	0.00174	0.00275	0.03082	0.76	1.53
17	855	1424	0.02098	0.00146	0.00192	0.02808	0.75	1.48
18	1003	1662	0.01926	0.00122	0.00164	0.02583	0.75	1.44

На рисунку 4.9 зображено точний розв'язок задачі (4.41) з даними (4.47) та графік апроксимації, побудованої на останньому кроці адаптування.

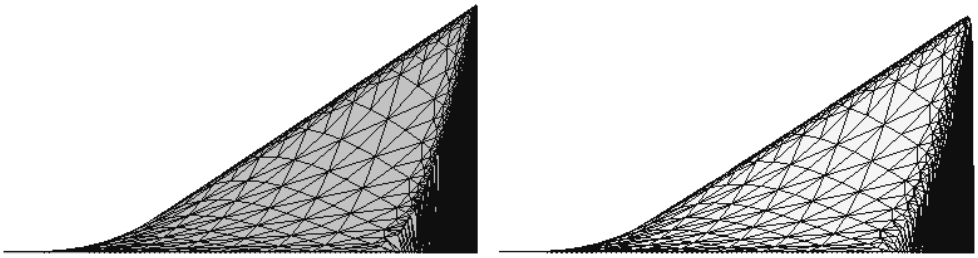


Рисунок 4.9 – Точний розв'язок (4.48) (зліва) та його апроксимація (справа).

4.2.5 Висновки

Побудований апостеріорний оцінювач похибок для двовимірних задач конвекції-дифузії здатний відтворювати поведінку похибки, що гарантує покращення триангуляцій виключно в околі примежового шару. Розроблена адаптивна схема МСЕ на основі симетризації методом Петрова-Гальоркіна дозволяє знаходити апроксимацію розв’язку задачі з наперед заданою точністю. Порівняння значень оцінювача з точною похибкою підтверджують його надійність. Обчислювальні експерименти демонструють ефективність запропонованої адаптивної схеми.

5 АДАПТИВНІ СХЕМИ МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧ П'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ

5.1 Побудова та аналіз апостеріорних оцінювачів похибок для стаціонарних задач п'єзоелектрики

Важливою властивістю сучасних числових схем, що застосовуються для розв'язування крайових задач, є можливість отримання апостеріорної оцінки похибок знайдених розв'язків. У багатьох випадках цю можливість реалізують побудовою апостеріорного оцінювача похибок. Сконструйовані АОП є індикаторами надійності і ефективності розробленої схеми. У випадку відшукання розв'язку з допомогою МСЕ, побудований АОП можна використати для покращення знайдених розв'язків (h-адаптивні схеми та схеми постпроцесорного уточнення). Приклади ефективного застосування АОП описані в [104, 149, 214, 229].

Розділ присвячений знаходженню АОП для лінійних і квадратичних апроксимацій МСЕ знайдених при розв'язуванні крайових задач п'єзоелектрики. Для відшукання АОП використовуються бабл-функції другого та четвертого порядків. У розв'язаних експериментальних задачах в якості моделі використовувався стержень виготовлений з п'єзокераміки PZT-4. Дане дослідження можна розглядати, як продовження досліджень [135, 149, 204]. Основні результати роботи ґрунтуються на крайових задачах п'єзоелектрики. Необхідно знайти невідомий вектор пружних зміщень $u=\{u_i(x)\}_{i=1}^{d}$ та електричний потенціал $p=p(x)$, що на обмеженій зв'язній області Ω точок $x=(x_1,\ldots,x_d)$ з евклідового простору R^d, з неперервною за Ліпшицем границею Г та одиничним вектором зовнішньої нормалі $n=(n_1,\ldots,n_d)$, де $n_i=cos(n,x_i)$, задовольняють рівняння:

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j} = \rho f_i, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u) - e_{kij}E_k(p), \ \varepsilon_{ij}(u) = 2^{-1}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \ \ в\ \Omega, \end{cases} \tag{5.49}$$

$$\begin{cases} u_i = 0 \ \ на\ \ \Gamma_u,\ \Gamma_u \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij}n_j = \widehat{\sigma}_i \ \ на\ \ \Gamma_\sigma,\ \ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \end{cases} \tag{5.50}$$

$$\begin{cases} \nabla.D(u,p) = \rho_*, \\ D_k(u,p) = g_{km}E_m(p) + e_{kij}\varepsilon_{ij}(u),\ E_k(p) = -p_{,k} \quad в\ \Omega, \end{cases} \tag{5.51}$$

$$\begin{cases} p = 0 \quad на\ \ \Gamma_p,\ \ \Gamma_p \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_p) > 0, \\ D.n = 0\ на\ \Gamma_d,\ \Gamma_d \subset \Gamma,\ \Gamma_d \bigcap \Gamma_p = \varnothing, \\ \int\limits_{\Gamma_e} D.nd\gamma = \rho_e,\ E_k(p) - n_k E_m(p) n_m = 0 \ \ на\ \Gamma_e,\ \Gamma_e = \Gamma \setminus \left(\Gamma_d \bigcap \Gamma_p\right). \end{cases} \tag{5.52}$$

Тут $f_i = f_i(x)$ - вектор об’ємних сил, $\{\sigma_{ij}\}$, $\{\varepsilon_{ij}\}$ - тензори пружних напружень і деформації, $\{D_k\}$ і $\{E_k\}$ - вектори індукції і напруженості електричного поля відповідно. Тензори $\{e_{kij}\}$, $\{c_{ijkm}\}$, $\{g_{ij}\}$ визначають модулі п’єзоелектрики, пружності і діелектричної проникності відповідно, ρ_*, ρ_e - густина внутрішніх зарядів та на електроді Γ_e відповідно, $\rho = \rho(x) > 0$ - густина маси п’єзоелектрика.

5.1.1 Постановка задач та попередні результати

Введемо простори допустимих функцій для зміщень та потенціалу

$$V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega)\right]^d \mid v = 0\ на\ \Gamma_u \right\},$$
$$Q = \left\{ q \in H^1(\Omega) \mid q = 0 \ \ на\ \Gamma_p,\ E(q) - E_k(q)n_k = 0\ на\ \Gamma_e \right\}.$$

Розглянемо варіаційну постановку стаціонарної задачі п’єзоелектрики

$$\begin{cases} \textit{задано } (l,r) \in \Phi' := V' \times Q'; \\ \textit{знайти } \psi = (u,p) \in V \times Q, \textit{ таку, що} \\ c(u,v) - e(p,v) = \langle l,v \rangle \quad \forall v \in V, \\ g(p,q) + e(q,u) = \langle r,q \rangle \quad \forall q \in Q, \end{cases} \tag{5.53}$$

за умови, що

$$\langle r,q \rangle = \int_\Omega \rho_* q dx + \rho_e q|_{\Gamma_e} \ \forall q \in V, \qquad c(u,v) = \int_\Omega c_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(v) dx,$$

$$e(q,v) = \int_\Omega e_{kij} E_k(q) \varepsilon_{ij}(v) dx, \qquad g(p,q) = \int_\Omega g_{km} E_k(p) E_m(q) dx,$$

$$\langle l,v \rangle = \int_\Omega \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i dx.$$

Для спрощення викладок, що стосуватимуться побудови АОП, визначимо нову білінійну форму $s(\psi,\varphi) = c(u,v) - e(p,v) + e(q,u) + g(p,q)$ і лінійний функціонал $\langle \chi,\varphi \rangle = \langle l,v \rangle + \langle r,q \rangle$, де $\varphi = (v,q) \in \Phi$, $\psi = (u,p) \in \Phi$. Використавши введені позначення, запишемо варіаційну задачу (5.53) в дещо іншому вигляді

$$\begin{cases} \textit{задано } (l,r) \in \Phi' := V' \times Q'; \\ \textit{знайти } \psi = (u,p) \in V \times Q, \textit{ таку, що} \\ s(\psi,\varphi) = \langle \chi,\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi. \end{cases} \tag{5.54}$$

Норму в просторі Φ будемо шукати наступним чином

$$|\varphi|_\Phi = \sqrt{s(\varphi,\varphi)} = \sqrt{c(v,v) + g(q,q)} = \sqrt{|v|_V^2 + |q|_Q^2}. \tag{5.55}$$

Ця норма є природною енергетичною нормою в просторі Φ. Відповідна норма в спряженому просторі Φ' є такою $|\chi|_{\Phi'} := \sup\limits_{0 \neq \varphi \in \Phi} \dfrac{|\langle \chi,\varphi \rangle|}{|\varphi|_\Phi}$.

Властивості фізичних величин, які фігурують у варіаційних постановках задач та доведення коректності можна знайти у [179, 227, 228].

5.1.2 Алгоритм побудови апроксимацій МСЕ для задач статики

Схема Гальоркіна передбачає перенесення розв'язку варіаційної задачі (5.53) з простору $\Phi := V \times Q$ до його певним чином вибраного скінченновимірного підпростору $\Phi_h := V_h \times Q_h$, $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$, $dim V_h = N(h) < +\infty$, $dim Q_h = M(h) < +\infty$. Таким чином, дискретизована за Гальоркіним задача (5.53) має вигляд

$$\begin{cases} \textit{задано } V_h \subset V,\, Q_h \subset Q;\; dim V_h < +\infty,\, dim Q_h < +\infty; \\ \textit{знайти } \psi_h = (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h, \textit{ таку, що} \\ c(u_h, v) - e(p_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h, \\ e(q, u_h) + g(p_h, q) = \langle r, q \rangle \quad \forall q \in Q_h \\ \textit{або } \; s(\psi_h, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \end{cases} \tag{5.56}$$

Якщо задача (5.53) є коректно поставленою, то цією властивістю володіє й дискретизована задача (5.56). Тоді існує єдиний розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h)$ такий, що

$$|\psi_h| := \sqrt{|u_h|_V^2 + |p_h|_Q^2} \le \frac{1}{\alpha}\sqrt{|l|_*^2 + |r|_*^2},\; \alpha = const > 0.$$

Коротко опишем алгоритм обчислення апроксимацій $\psi_h = (u_h, p_h)$, коли простір допустимих функцій будується за технологією МСЕ.

Поділимо область Ω на скінченні елементи K так, що вони утворюють тріангуляцію $\tau_h = \{K\}$, $h_k := diam\, K$, $h = \max\limits_{K \in \tau_h} h_k$. Позначимо через $\{x^m\}_{m=1}^{N(\tau_h)}$ систему всіх її вузлів і нехай $N_u := \{m \in N : x^m \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_u\}$, $N_p := \{m \in N : x^m \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_p\}$. Введемо систему скалярних функцій $w_i, i \in N_u$, такі, що $w_i(x^m) = \delta_{im}$, $m \in N_u$, $sup\, w_i \equiv \Omega_i := \{K \in \tau_h : x^i \in \bar{K}\}$, $w_i \in C(\Omega) \bigcap V$. Можна легко показати, що введена система функцій є лінійно-незалежною, тобто

$\forall\ x^m \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_u$, $\sum_{i \in N_u} \lambda_i w_i \left(x^m \right) = 0$, тоді і тільки тоді коли всі $\lambda_i = 0$, $\lambda_i \in R$. Цей факт дає можливість вибрати цю систему базисом простору апроксимації $V_h = C(\Omega) \bigcap V$. Тоді невідоме переміщення може бути подане у вигляді $u_h = \sum_{i \in N_u} w_i \bar{u}_i$, де $\bar{u}_i$ - невідомі коефіцієнти розкладу. Для апроксимації потенціалу виберемо простір $Q_h = C(\Omega) \bigcap Q$, де базисом виступає набір лінійно-незалежних скалярних функцій $z_i, i \in N_p$, такі, що $z_i \left(x^m \right) = \delta_{im}$, $m \in N_p$, $sup\, z_i \equiv \Omega_i := \left\{ K \in \tau_h : x^i \in \bar{K} \right\}$, $z_i \in C(\Omega) \bigcap Q$. Тоді розклад невідомого потенціалу в просторі Q_h є такий $p_h = \sum_{i \in N_p} z_i \bar{p}_i$, де $\bar{p}_i$ - невідомі скалярні коефіцієнти. Підставивши у рівняння задачі (5.55) введені розклади і взявши почергово замість v і q функції w_i, z_i відповідно, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\bar{u}_i$, $\bar{p}_i$.

5.1.3 Аналіз функціоналу похибок

Поряд з енергетичною нормою $|\cdot|_\Phi$ із (5.55) наділимо простір допустимих зміщень Φ стандартною нормою

$$\|\varphi\|_\Phi := \left\{ \int_\Omega \left[\varphi.\varphi + \varphi_{i,j}\varphi_{i,j} \right] dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_\Omega \left[v.v + v_{i,j}v_{i,j} + q.q + q_{i,j}q_{i,j} \right] dx \right\}^{1/2} \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

спряжений простір Φ' - нормою

$$\|\chi\|_* := \sup_{0 \neq \varphi \in \Phi} \frac{|< \chi, \varphi >|}{\|\varphi\|_\Phi}.$$

Пропозиція 5.1.3.1 про функціонал похибок.

Нехай $\psi \in \Phi$ – розв’язок задачі (5.54).

Для будь-якого фіксованого $w \in \Phi$ визначимо лінійний функціонал (джерел похибки) згідно з правилом

$$\varphi \in \Phi \to <\rho(w), \varphi> := <\chi, \varphi> - s(w, \varphi) \in R. \tag{5.57}$$

Тоді будуть правильними такі твердження

(!) $$\alpha \|\psi - w\|_{\Phi} \le \|\rho(w)\|_{*} \le \|s\| \|\psi - w\|_{\Phi} \qquad \forall w \in \Phi, \tag{5.58}$$

де $\alpha = const > 0$ така, що

$$s(\varphi, \varphi) \ge \alpha \|\varphi\|_{\Phi}^{2} \qquad \forall \varphi \in \Phi, \tag{5.59}$$

(!!) $$|\psi - w|_{\Phi} = |\rho(w)|_{*} := \sup_{0 \ne \varphi \in \Phi} \frac{|<\rho(w), \varphi>|}{|\varphi|_{\Phi}} \quad \forall w \in \Phi. \tag{5.60}$$

Доведення. Із визначення (5.57) та задачі (5.54) випливає, що

$$<\rho(w), v> = <\chi, \varphi> - s(w, \varphi) = s(\psi - w, \varphi) \qquad \forall \varphi, w \in V. \tag{5.61}$$

Звідси безпосередньо обчислюємо

$$|<\rho(w), \varphi>| \le \|s\| \|\psi - w\|_{\Phi} \|\varphi\|_{\Phi}$$

і

$$\|\rho(w)\|_{*} \le \|s\| \|\psi - w\|_{\Phi} \qquad \forall w \in \Phi. \tag{5.62}$$

Далі, приймаючи $\varphi = \psi - w$, із рівності (5.63) одержуємо, що

$$\alpha \|\psi - w\|_{\Phi}^{2} \le s(\psi - w, \psi - w) = <\rho(w), \psi - w> \le \|\rho(w)\|_{*} \|\psi - w\|_{\Phi} \quad \forall w \in \Phi, \tag{5.63}$$

що разом із (5.62) приводить до двосторонньої оцінки норми функціонала $\rho(w)$ в Φ' в термінах стандартної норми простору Φ.

Нарешті, замінивши в наших оцінках (5.62) та (5.63) норму $\|\cdot\|_{\Phi}$ на енергетичну норму $|\cdot|_{\Phi}$, отримаємо бажану рівність (5.60).

Для потреб адаптування в МСЕ важливим є такий наслідок.

Наслідок 5.1.3.1 про декомпозицію функціонала похибок.

Нехай $\tau_h = \{K\}$ – будь-яка регулярна тріангуляція області Ω і $h_K := diam\, K$, $h := \max_{K \in T_h} h_K$, за допомогою якої побудовано простір апроксимацій $\Phi_h \subset \Phi$ схеми МСЕ.

Тоді функціонал похибок (5.57) допускає таку декомпозицію

$$< \rho(w), \varphi >= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left\{ \left[\rho f + div\sigma(w) \right].v + \left[\rho_* + divD(w) \right].q \right\} dx -$$
$$\sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left[v_i \sigma_{ij}(w) n_j + q_k D_k(w) n_k \right] d\gamma + \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K \cap \Gamma_\sigma} \hat{\sigma} v d\gamma + \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K \cap \Gamma_e} \rho_e q d\gamma \ \forall w, \varphi \in V. \tag{5.64}$$

Розпочинаючи із наведення (5.61) за допомогою інтегрування частинами на кожному скінченному елементі, знайдемо, що

$$< \rho(w), \varphi >= s(\psi - w, \varphi) =$$
$$\sum_{K \in \tau_h} \int_K \begin{bmatrix} c_{ijkm} \varepsilon_{ij}\left(u - w^u\right) \varepsilon_{km}(v) + g_{km} E_k\left(p - w^p\right) E_m(q) \\ -e_{kij} E_k\left(p - w^p\right) \varepsilon_{ij}(v) + e_{kij} E_k(q) \varepsilon_{ij}\left(u - w^u\right) \end{bmatrix} dx = \tag{5.65}$$
$$= \sum_{K \in \tau_h} \left\{ \begin{array}{l} \int_K \left[\sigma_{ji,j}(w - \psi) v_i + D_k\left(w - \psi\right) q_k \right] dx + \\ \int_{\partial K} \left[v_i \sigma_{ij}(\psi - w) n_j + q_k D_k(\psi - w) n_k \right] d\gamma \end{array} \right\} \forall w, \varphi \in V.$$

Тепер врахуємо рівняння рівноваги та рівняння електричного поля крайової задачі п’єзоелектрики та неперервність функції $v_i \sigma_{ij}(u) n_j$ та $q_k D_k(\psi - w) n_k$ у разі переходу через спільну грань суміжних скінченних елементів. У результаті відповідних спрощень отримаємо задекларовану декомпозицію (5.64) функціонала похибок.

Схарактеризуємо зв’язок функціоналу (5.57) із похибкою дискретизації Гальоркіна.

Наслідок 5.1.3.2 про структуру функціонала похибок дискретизації Гальоркіна.

Нехай виконано умови пропозиції 5.1.3.1 та наслідку 5.1.3.1 і $\psi_h \in \Phi_h$ – апроксимація Гальоркіна, знайдена як розв’язок задачі (5.54).

Тоді будуть правильними такі твердження

$$<\rho(\psi_h),\varphi>=0 \qquad \forall\varphi\in\Phi_h, \tag{5.66}$$

$$<\rho(\psi_h),\varphi>=s(e,\varphi) \qquad \forall\varphi\in E:=\Phi\setminus\Phi_h,\ E=E^u\times E^p, \tag{5.67}$$

$$|e|_\Phi=|\psi-\psi_h|_\Phi=|\rho(\psi_h)|_* \ \forall h>0. \tag{5.68}$$

Доводять цей наслідок безпосередньо за допомогою обчислень на основі (5.61) при $w=\psi_h$.

5.1.4. Варіаційна задача для похибки дискретизації Гальоркіна

Наведені вище результати достатньо повно характеризують похибку дискретизації Гальоркіна $e=\psi-\psi_h$ з позицій функціонала $\rho(\psi_h)\in\Phi'$, визначеного в (5.57). Зокрема, з огляду на (5.67) ми тепер здатні сформулювати варіаційну задачу про відшукання похибки дискретизації Гальоркіна:

$$\begin{cases} \textit{задано апроксимацію Гальоркіна } \psi_h\in\Phi_h \textit{ для розв'язку} \\ \psi\in\Phi \textit{ задачі}(5.6),\ \Phi_h\subset\Phi; \\ \textit{знайти похибку } e:=\psi-\psi_h=\left(e^u,e^p\right)\in E:=\Phi\setminus\Phi_h \textit{ таку, що} \\ s(e,\varphi)=<\rho(\psi_h),\varphi> \qquad \forall\varphi\in E. \end{cases} \tag{5.69}$$

Знайти розв’язок (5.69) так само важко, як і вихідної задачі п’єзоелектрики (5.54) Тому тут ми вдамося до її дискретизації за схемою Гальоркіна в деякому скінченновимірному підпросторі із простору похибок E. Щоб у майбутньому цю процедуру можна було виконати на практиці легко, ми пов’яжемо її реалізацію із тріангуляцією $\tau_h=\{K\}$, за допомогою якої знайдено розв’язок $\psi_h\in\Phi_h$ дискретизованої задачі п’єзоелектрики (5.55), і сформулюємо таку задачу:

$$\begin{cases} \textit{задано } E_h \subset E,\ E_h = E_h^u \times E_h^p,\ \dim E_h^u = M^u < \infty, \dim E_h^p = M^p < \infty; \\ \textit{знайти } e_h = \left(e_h^u, e_h^p\right) \in E_h \textit{ такий, що} \\ s(e_h, \varphi) = <\rho(\psi_h), \varphi> \qquad \forall \varphi \in E_h. \end{cases} \tag{5.70}$$

Тепер, повертаючись до оцінки (5.58), ми здатні визначити важливий результат. ***Теорема 5.1.4.1*** про коректність задачі про похибку дискретизації.

Нехай варіаційна задача п'єзоелектрики (5.54) має єдиний розв'язок $\psi \in \Phi$ і $\psi_h \in \Phi_h$ – його апроксимація Гальоркіна, знайдена із (5.55) з довільним $h > 0$.

Тоді варіаційна задача (5.70) для відшукання апроксимації e_h похибки дискретизації $e = \psi - \psi_h \in E = \Phi \setminus \Phi_h$ є коректно поставленою і

$$\left|e_h\right|_\Phi \le \left|\rho(\psi_h)\right|_* , \tag{5.71}$$

$$\left|e_h\right|_\Phi^2 = \left|\rho(\psi_h)\right|_*^2 - \left|e - e_h\right|_\Phi^2 \quad \forall h > 0 . \tag{5.72}$$

Отже, енергетична норма апроксимації похибки дискретизації Гальоркіна не перевищує норми функціонала джерел похибки, причому, як свідчить (5.72), різницю між цими нормами можна оцінити, якщо ми в стані обчислити норму $\left|e - e_h\right|_V$. З цією метою можна скористатись інтерполяційними оцінками, типовими для апріорних похибок МСЕ.

Нижче ми пропонуємо процедуру обчислення енергетичних норм

$$\left|e_h\right|_K^2 := \int_K \left[c_{ijkm} \varepsilon_{ij}\left(e_h^u\right) \varepsilon_{km}\left(e_h^u\right) + g_{km} E_k\left(e_h^p\right) E_m\left(e_h^p\right) \right] dx \qquad \forall K \in \tau_h \tag{5.73}$$

з використанням бабл-функцій для побудови просторів E_h. Притаманна цим функціям ортогональність значно здешевлює знаходження (5.73) на кожному скінченному елементі K: насправді вона потребує на кожному з них розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь порядку $d+1$.

5.1.5 Бабл-апроксимація похибки дискретизації МСЕ

На заданій тріангуляції $\tau_h = \{K\}$ розглянемо кусково-визначену функцію $b \in H_0^1(\Omega)$ такого вигляду:

$$\begin{cases} b\big|_K := b_K \in H_0^1(K), \\ b(x_K) = 1 \qquad \forall K \in \tau_h \qquad \forall h > 0, \end{cases} \tag{5.74}$$

де x_K – точка, наприклад, центр ваги, скінченного елемента K.

Виберемо тепер в задачі (5.70) систему функцій $\{b_K\}_{K\in\tau_h}$ за базис простору E_h^u та E_h^p. Для простору E_h^p використаємо позначення $d_K \equiv b_K$. Визначимо наближення похибок в просторах E_h^u, E_h^p, як $e_h^u(x) = \sum_{K\in\tau_h} \Lambda_u^K b_K(x)$ та $e_h^u(x) = \sum_{K\in\tau_h} \lambda_p^K d_K$. При $x = x_K$ отримаємо, що

$$e_h^u(x_K) = \Lambda_u^K \ \textit{та}\ e_h^p(x_K) = \lambda_p^K. \tag{5.75}$$

Цей факт дає можливість нам сформулювати послідовність задач для знаходження апостеріорних оцінок похибок

$$\begin{cases} \textit{задано}\ \psi_h = (u_h, p_h) \in \Phi_h \\ \textit{знайти}\ \Lambda_u^K \in R^d, \lambda_p^K \in R\ \textit{такі, що} \\ c\left(e_h^u, b_K\right) - e\left(e_h^p, b_K\right) = \langle l, b_K \rangle - c\left(u_h, b_K\right) + e\left(p_h, b_K\right) \\ g\left(e_h^p, d_K\right) + e\left(d_K, e_h^u\right) = \langle r, d_K \rangle - g\left(p_h, d_K\right) - e\left(d_K, u_h\right). \end{cases} \tag{5.76}$$

Система (5.75) може бути подана у наступному матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} C & -E^T \\ E & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_u^K \\ \lambda_p^K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L \\ r \end{vmatrix},$$

де

$$C = c\left(b_K, b_K\right)S,\ E^T = e\left(d_K, b_K\right)I^T,\ G = g\left(d_K, d_K\right),\ E = e\left(d_K, b_K\right)I,$$
$$L = \left\langle l, b_K\right\rangle I^T - c\left(u_h, b_K\right) + e\left(p_h, b_K\right)I^T,\ r = \left\langle r, d_K\right\rangle - g\left(p_h, d_K\right) - e\left(d_K, u_h\right)I,$$

S – одинична матриця, I – одиничний вектор.

Отже, використання бабл-функцій дає змогу задачу відшукання системи векторів $\{\Lambda_u^K\}_{K\in\tau_h}$ та скалярних значень $\{\lambda_p^K\}_{K\in\tau_h}$ декомпонувати в незалежне послідовне розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь $d+1$–го порядку на кожному скінченному елементі тріангуляції τ_h.

Теорема 5.1.5.1 про оцінювачі апостеріорної похибки дискретизації.

Нехай $\psi_h \in \Phi_h$ – апроксимація Гальоркіна для розв'язку $\psi \in \Phi$ задачі п'єзоелектрики (5.54), знайдена на тріангуляції $\tau_h = \{K\}$. Нехай $\{b_K\}_{K\in\tau_h}$ є послідовністю функцій з властивостями (5.74).

Тоді апроксимація e_h похибки $e = \psi - \psi_h$ однозначно визначена лінійною комбінацією (5.75) шляхом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (5.76) і в цьому разі величини

$$\eta_K(\psi_h) := \left|e_h\right|_V \equiv \{\int_K \left[c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\left(e_h^u\right)\varepsilon_{km}\left(e_h^u\right) + g_{km}\varepsilon_k\left(e_h^p\right)E_m\left(e_h^p\right)\right]dx\}^{\frac{1}{2}}\ \ \forall K \in \tau_h \qquad (5.77)$$

та

$$\eta(\psi_h) := \{\sum_{K\in\tau_h} \eta_K^2(\psi_h)\}^{\frac{1}{2}}\ \ \forall h > 0 \qquad (5.78)$$

є локальними апостеріорними оцінювачами похибки наближення розв'язку на кожному скінченному елементі та тріангуляції в цілому, відповідно.

5.1.6 Числові експерименти з одновимірними задачами

Розроблені чисельні схеми були застосовані до ряду одновимірних модельних задач п'єзоелектрики. В ролі п'єзоелектрика використовувався

матеріал PZT-4 з наступними фізичними властивостями: густина $\rho = 7500\ кг/м^3$, модуль пружності $c = 13{,}9 \cdot 10^8\ H/м^2$, модуль п'єзоелктрики $e = 15{,}1\ K/м$, діелектрична проникливість $g = 730\ Ф/м$.

Обчислення норм знайдених числових результатів виконувалося за наступними правилами $\|u\|_V = \sqrt{c(u,u)},\ \forall u \in V$ та $\|p\|_Q = \sqrt{g(p,p)}, \forall p \in Q$, оскільки так визначені норми визначають значення потенціальної енергії п'єзоелектрика $\Pi = 2^{-1}\left(\|u\|_V^2 + \|p\|_Q^2\right)$. Відзначимо, що порядок швидкості збіжності величини w в просторі H можна обчислити згідно формули

$$p_H(w) = log_2\left(\|w_0\|_H - \|w_1\|_H\right) - log_2\left(\|w_1\|_H - \|w_2\|_H\right).$$

Значення відносної похибки величини H обчислювалось як $\varepsilon_H = \|e_H\|_S \|H\|_S^{-1}$.

Побудову АОП будемо здійснювати використовуючи бабл–функції другого порядку для лінійних апроксимацій і четвертого порядку для квадратичних. Перевагою використання бабл-функцій є можливість знаходження АОП на кожному скінченому елементі незалежно від інших елементів сітки, що позитивно впливає на використання наявних обчислювальних ресурсів. На наступних малюнках зображено вигляд застосованих бабл–функції

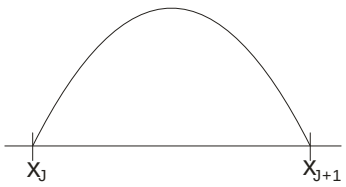


Рисунок 5.1 – Бабл-функція другого порядку.

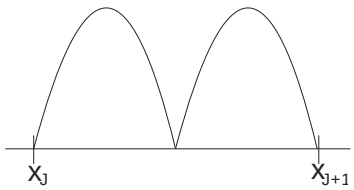


Рисунок 5.2 – Бабл-функція четвертого порядку.

Розглянемо формули для обчислення скалярних значень апостеріорних оцінок похибок у випадку одновимірних стаціонарних задач. Нехай $u_h = \sum_{i=1}^{m} u_h^i v_i$ і $p_h = \sum_{i=1}^{m} p_h^i q_i$ - розклади за базисом в просторах апроксимацій V_h і Q_h переміщення та потенціалу відповідно. Визначимо наближення похибок в просторах V_k, Q_k, як $e_h^u = \overline{e}_h^u b_K$ та $p_h^u = \overline{p}_h^u d_K$ і підставимо їх у (5.53). Виконавши низку перетворень отримаємо наступну систему з двох рівнянь для знаходження числових значень $\overline{e}_h^u, \overline{e}_h^p$

$$\begin{cases} \overline{e}_h^u c(b_K, b_K) - \overline{e}_h^p e(d_K, b_K) = \langle l, b_K \rangle - c(u_h, b_K) + e(p_h, b_K) \\ \overline{e}_h^p g(d_K, d_K) + \overline{e}_h^u e(d_K, b_K) = \langle r, d_K \rangle - g(p_h, d_K) - e(d_K, u_h) \end{cases}. \tag{5.79}$$

Зважаючи на властивості білінійних форм, що фігурують в системі (5.79), визначник системи $D = c(b_K, b_K) g(d_K, d_K) + e(d_K, b_K) e(d_K, b_K)$ є більший від нуля, а це означає, що система (5.79) має єдиний розв’язок. Розв’язавши її отримаємо апостеріорні оцінки похибок знайдених апроксимації МСЕ для зміщення і потенціалу

$$\overline{e}_h^u = \frac{\langle l, b_K \rangle - c(u_h, b_K) + e(p_h, b_K) + \overline{e}_h^p \cdot e(d_K, b_K)}{c(b_K, b_K)},$$

$$\overline{e}_h^p = \frac{\left(\langle r, d_K \rangle - g(p_h, d_K) - e(d_K, u_h)\right) c(b_K, b_K) - \left(\langle l, b_K \rangle - c(u_h, b_K) + e(p_h, b_K)\right) e(d_K, b_K)}{c(b_K, b_K) g(d_K, d_K) + e(d_K, b_K) e(d_K, b_K)}.$$

Розглянемо п’єзоелектричний стержень довжиною 1 м, який є закріплений і заземлений з лівої і правої сторін, тобто $\Omega = [0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$, $p(0) = p(1) = 0$. Всередині стержня наявні заряди густиною $\rho_* = 100\,Кл/м^3$ та діють внутрішні сили $f = 100\,H$.

На наступних малюнках зображені графіки числових розв’язків для переміщення та потенціалу отриманих з використанням лінійних апроксимацій на 8 скінченних елементах. Також зображено відповідні обчислені похибки знайдені з допомогою бабл-функцій другого порядку.

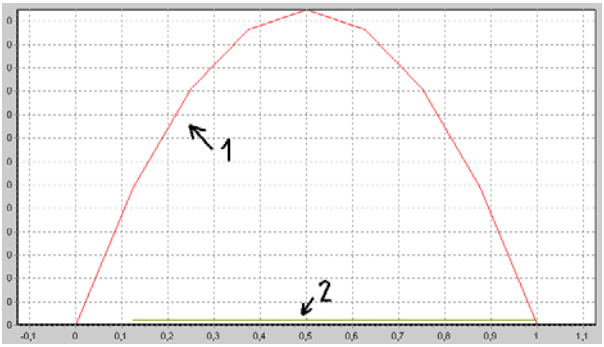


Рисунок 5.3 – Значення переміщення (5.49) і його похибки (5.50).

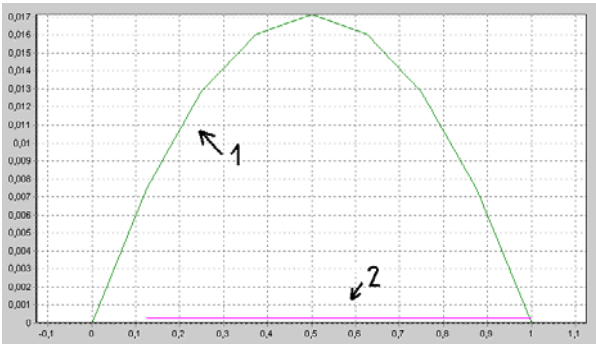


Рисунок 5.4 – Значення потенціалу (5.49) і його похибки (5.50).

У таблиці 5.1 наведено норми знайдених оцінювачів у випадку використання лінійних та квадратичних апроксимації. Наведено обрахований показники швидкості збіжності *p*.

Таблиця 5.1 – Норми похибок та показники швидкості збіжності

		8	16	32
$u_h \in P_1(K)$	$\left\|e^u\right\|_V$	0,72589	0,36294	0,18147
$p_h \in P_1(K)$	$\left\|e^p\right\|_Q$	0,13356	0,06678	0,03339
$u_h \in P_2(K)$	$\left\|e^u\right\|_V$	3,71951e-6	1,85975e-6	9,29878e-7
$p_h \in P_2(K)$	$\left\|e^p\right\|_Q$	6,84396e-7	3,42198e-7	1,71099e-7

У випадку лінійних апроксимацій отримані числові результати узгоджуються з теоретичними. Для квадратичних апроксимацій отримані показники швидкості збіжності є меншими ніж очікувалося. Поясненням цьому є квадратичний характер знайденого розв’язку. Тобто використання квадратичних апроксимацій автоматично дає змогу досить точно визначити невідомі коефіцієнти розкладу розв’язку. Тому, значення норми оцінювача є фактично оцінкою неточності обчислень на заданій сітці.

Таблиця 5.2 дає змогу проаналізувати динаміку зменшення відносної похибки зі згущенням сітки у два рази.

Таблиця 5.2 – Значення відносної похибки

		8	16	32
$u_h \in P_1(K)$	ε_u	12,6%	6,26%	3,12%
$p_h \in P_1(K)$	ε_p	12,5%	6,25%	3,12%
$u_h \in P_2(K)$	ε_u	6,5*10-5%	3,1*10-5%	1,6*10-5%
$p_h \in P_2(K)$	ε_p	6,4*10-5%	3,2*10-5%	1,6*10-5%

Значення відносних похибок говорять про те, що використання квадратичних апроксимацій дає значно кращі результати ніж застосування лінійних на сітках з однаковою кількість розрахункових вузлів.

У розділі 5.1 розглянуто застосування МСЕ до розв’язування одновимірних стаціонарних задач п’єзоелектрики. Для цих задач сформульовано варіаційну постановку, виконано дискретизацію Гальоркіна та

побудовано відповідні чисельні схеми для знаходження розв'язку. Сформульовано задачу про похибку. На основі властивостей бабл-функцій та задачі про похибку побудовано апостеріорні оцінки похибок. Отримані схеми реалізовано у вигляді програмного забезпечення. Наочне підтвердження ефективності та надійності запропонованих схем продемонстровано низкою обчислювальних експериментів з використанням розробленого програмного забезпечення.

Одержані АОП можна застосовувати для аналізу побудованої чисельної схеми, побудови $h-$адаптивної схеми та постпроцесорної схеми уточнення МСЕ.

5.2 Конструювання h-адаптивних схем методу скінченних елементів для задач п'єзоелектрики

Серед різноманітних застосувань п'єзоелектриків див. напр. [14, 105, 157, 182] важливе місце займає їх використання як сенсорів напружено-деформованого стану інженерних конструкцій. У таких випадках п'єзоелектрик відіграє роль закріпленої вставки, яка приймає навантаження підконтрольного пристрою і передає його характеристику у вигляді електричних потенціалів до пункту аналізу даних, який певним чином реагує на зміст одержаної інформації. Надійність подібних систем контролю істотною мірою залежить від повноти знання фізико-механічної структури п'єзоелектрика та особливостей взаємообміну енергією між механічним і електричним полями. З огляду на складність аналізу взаємодії фізико-механічних полів у п'єзоелектриках важливим є створення засобів обчислювального експерименту, які б гарантували одержання результатів з наперед заданою точністю.

У цьому зв'язку метою дослідження є побудова $h-$ адаптивної схеми МСЕ, яка створює згаданий інструментарій комп'ютерного моделювання в

проблемі п’єзоефекту. В п. 5.2.1 ми формулюємо крайову та відповідну їй варіаційну задачу п’єзоелектрики, яка вивчалась у працях [157]. В п. 5.2.2, беручи за основу класичну процедуру Гальоркіна, сформульовано задачу про відшукання апроксимацій МСЕ в термінах зміщень і електричного потенціалу, а також задачу про апостеріорний оцінювач їх похибки. Хоча задача п’єзоелектрики належить до змішаних варіаційних задач все ж у цьому випадку вдалося поширити техніку побудови АОП, запозичену нами із праць [138, 148] для задач еластостатики. В п. 5.2.3 і п. 5.2.4 пропонується конкретна реалізація абстрактної схеми з використанням кусково-лінійних апроксимацій зміщень і потенціалу на трикутних поділах, а також кусково-квадратичних апроксимація похибок, які дають змогу обчислювати її на межах скінченого елемента. В останньому пункті результати числового експерименту підтверджують надійність запропонованої методики.

5.2.1 Формулювання стаціонарної задачі п’єзоелектрики.

Нижче будемо розглядати таку крайову задачу взаємодії фізико-механічних полів у п’єзоелектриках. Нехай розглядуваний п’єзоелектрик займає обмежену зв’язну область Ω точок $x=(x_1,\ldots,x_d)$ евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею Г та одиничним вектором зовнішньої нормалі $n=(n_1,\ldots,n_d)$, де $n_i=\cos(n,x_i)$. Знайти вектор пружних зміщень $u=\{u_i(x)\}_{i=1}^{d}$ та електричний потенціал $p=p(x)$ такі, що задовольняють рівняння еластостатики та електричного поля (тут і скрізь нижче передбачається звичайне підсумовування за індексами, які повторюються)

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j}=\rho f_i, \\ \sigma_{ij}=c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)-e_{kij}E_k(p), \\ \varepsilon_{ij}(u)=\dfrac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \quad в\ \Omega, \end{cases} \tag{5.80}$$

$$\begin{cases} D_{m,m} = \rho_*, \\ D_k = g_{km} E_m(p) + e_{kij} \varepsilon_{ij}(u), \\ E_k(p) = -p_{,k} \quad в \ \Omega, \end{cases} \tag{5.81}$$

крайовим умовам

$$\begin{cases} u_i = 0 \quad на \quad \Gamma_u, \ \Gamma_u \subset \Gamma, \ mes(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij} n_j = \widehat{\sigma}_i \ \ на \quad \Gamma_\sigma, \ \ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\ p = 0 \quad на \quad \Gamma_p, \Gamma_p \subset \Gamma, \ mes(\Gamma_p) > 0, \\ D_k n_k = \widehat{D} \ \ на \quad \Gamma_d, \ \Gamma_d = \Gamma \setminus \Gamma_p. \end{cases} \tag{5.82}$$

Тут $\rho = \rho(x)$ - густина маси п'єзоелектрика, $f_i = \{f_i(x)\}$ - вектор об'ємних сил, $\rho_* = \rho_*(x)$ - густина внутрішніх зарядів, $\sigma_{ij}(x)$ і $\varepsilon_{ij}(x)$ - компоненти симетричних тензорів напружень і деформацій, $D_k(x)$ і $E_k(x)$ компоненти векторів індукції і напруженості електричного поля відповідно. Складові $c_{ijkm}(x)$ описують тензор пружності п'єзоелектрика зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності, $e_{kij}(x)$ і $g_{ij}(x)$ визначають модулі п'єзоелектрики і діелектричної проникності, $\widehat{\sigma} = \{\widehat{\sigma}_i(x)\}$ та $\widehat{D} = \widehat{D}(x)$ - задані вектори поверхневих сил та електричної індукції відповідно. Детальні відомості стосовно фізико-механічних характеристик п'єзоелектриків та моделі п'єзоефекту можна знайти у монографіях [48, 138, 157, 179, 182] та ін.

Введемо простори допустимих пружних зміщень та електричних потенціалів

$$V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega) \right]^d : v = 0 \ на \ \Gamma_u \right\}, \ Q = \left\{ q \in H^1(\Omega) : \ q = 0 \ \ на \ \Gamma_p \right\}, \tag{5.83}$$

відповідно і позначимо через $\Phi := V \times Q$ та спряжений до нього простір $\Phi' := V' \times Q'$. З огляду на крайову задачу п'єзоелектрики (5.80)-(5.82) наведемо відповідну їй варіаційну постановку [227]

$$\begin{cases} \textit{задано } (l,r)\in\Phi'; \textit{ знайти } \phi=(u,p)\in\Phi \textit{ такі, що} \\ \quad c(u,v)-e(p,v)=\langle l,v\rangle, \ \ \forall v\in V, \\ \quad g(p,q)+e(q,u)=\langle r,q\rangle, \ \ \forall q\in Q, \end{cases} \tag{5.84}$$

де білінійні і лінійні форми визначаються такими виразами

$$c(u,v)=\int_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,$$

$$e(q,v)=\int_{\Omega} e_{kij}E_k(q)\varepsilon_{ij}(v)dx \ \ \forall u,v\in V,$$

$$\langle l,v\rangle=\int_{\Omega}\rho f_i v_i dx+\int_{\Gamma_\sigma}\widehat{\sigma}_i v_i d\gamma \ \forall u,v\in V,$$

$$g(p,q)=\int_{\Omega} g_{km}E_k(p)E_m(q)dx,$$

$$\langle r,q\rangle=\int_{\Gamma_d} q\widehat{D}_i n_i d\gamma \ \ \forall p,q\in Q.$$

Щоб спростити наші викладки, визначимо на просторі $\Phi=V\times Q$ білінійну форму

$$\begin{aligned} \Pi(\phi,\varphi) &:= c(u,v)+g(p,q) \\ &+ \ \left[e(q,u)-e(p,v)\right] \ \ \forall\phi=(u,p),\ \varphi=(v,q)\in\Phi \end{aligned} \tag{5.85}$$

і лінійний функціонал

$$\langle\chi,\varphi\rangle=\langle l,v\rangle+\langle r,q\rangle \ \ \forall\varphi=(v,q)\in\Phi. \tag{5.86}$$

Використавши ці позначення, надамо задачі (5.84) дещо коротшого запису

$$\begin{cases} \textit{задано } \ \chi\in\Phi'; \\ \textit{знайти вектор } \phi=(u,p)\in\Phi \textit{ такий, що} \\ \qquad \Pi(\phi,\varphi)=\langle\chi,\varphi\rangle \ \ \forall\varphi=(v,q)\in\Phi. \end{cases} \tag{5.87}$$

Зважаючи на властивості білінійних форм задачі (5.84) [227], корисно ввести на просторах допустимих функцій енергетичні норми

$$\begin{cases} \|u\|_V = c^{1/2}(u,u) & \forall u \in V \\ \|p\|_Q = g^{1/2}(p,p) & \forall p \in Q \end{cases} \tag{5.88}$$

та

$$\|\varphi\|_\Phi^2 = \sqrt{\|v\|_V^2 + \|q\|_Q^2} \quad \forall \varphi = (v,q) \in \Phi. \tag{5.89}$$

5.2.2 Задача про похибку апроксимацій МСЕ.

Наслідуючи техніку [227], опишемо основні етапи побудови апроксимацій АОП апроксимацій МСЕ, поширені на задачі п'єзоелектрики та анонсовані у [14]. Як індикатор потреби адаптування зручно використовувати АОП.

Застосування схеми Гальоркіна передбачає перенесення пошуку розв'язку варіаційної задачі (5.87) з простору Φ до його певним чином вибраного скінченновимірного підпростору $\Phi_h \subset \Phi$, $dim\Phi_h = N(h) < +\infty$. Таким чином, дискретизована за Гальоркіним задача (5.87) має вигляд:

$$\begin{cases} \textit{задано } \chi \in \Phi'; \textit{ знайти } \phi_h = (u_h, p_h) \in \Phi_h \textit{ такий, що} \\ \Pi(\phi_h, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \end{cases} \tag{5.90}$$

З огляду на (5.90) ми тепер здатні сформулювати варіаційну задачу про відшукання похибки дискретизації МСЕ:

$$\begin{cases} \textit{задано апроксимацію } \phi_h \in \Phi_h; \\ \textit{знайти похибку } e := \phi - \phi_h = (\gamma, \xi) \in E := \Phi \setminus \Phi_h \textit{ таку, що} \\ \Pi(e,\varphi) = <\rho(\phi_h), \varphi> = \langle \chi, \varphi \rangle - \Pi(\phi_h, \varphi) \quad \forall \varphi \in E. \end{cases} \tag{5.91}$$

Тепер вдамося до дискретизації задачі (5.91) за вже вжитою схемою Гальоркіна у деякому скінченновимірному підпросторі E_h із простору похибок E. Власне в такий спосіб ми приходимо до задачі про апостеріорний оцінювач похибки апроксимації МСЕ:

$$\begin{cases} \textit{задано апроксимацію } \phi_h \in \Phi_h \textit{ та } E_h \subset E,\ dim\, E_h < +\infty; \\ \textit{знайти оцінювач } e_h := \left(\gamma_h, \xi_h\right) \in E_h \textit{ такий, що} \\ \qquad \Pi(e_h, \varphi) = <\rho(\phi_h), \varphi> \qquad \forall \varphi \in E_h. \end{cases} \tag{5.92}$$

Якщо в той чи інший спосіб задача про апостеріорний оцінювач похибки (5.92) вже розв'язана, то значення енергетичної норми

$$\left\|e_h\right\|_{\Phi}^2 = \Pi(e_h, e_h) = <\rho(\phi_h), e_h> \tag{5.93}$$

говорить нам про приблизну величину похибки знайденої апроксимації МСЕ $\phi_h \in \Phi_h$.

З огляду на намір реалізувати описану схему на основі технології МСЕ, принагідно відзначимо, що вона в природний спосіб надає інформацію про локальний розподіл похибки в області Ω. Точніше, якщо для обчислень використовується поділ $\Im_h$ області Ω на скінченні елементи, $\Im_h = \left\{K\right\}$, то апостеріорний оцінювач похибки e_h кусковим чином визначається на кожному елементі K. Тому його норма (5.93) природно подається у вигляді суми

$$\left\|e_h\right\|_{\Phi}^2 = \sum_{K \in \Im_h} \eta_K^2\left(e_h\right), \tag{5.94}$$

де $\eta_K\left(e_h\right)$ називають індикатором похибки на елементі K, який визначається нормою оцінювача $\left|e_h\right|_K$ на ньому

$$\eta_K^2\left(e_h\right) = \left|e_h\right|_K^2 := \int_K \left[c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\left(\gamma_h\right)\varepsilon_{km}\left(\gamma_h\right) + g_{km}E_k\left(\xi_h\right)E_m\left(\xi_h\right)\right]dx \ \ \forall K \in \Im_h. \tag{5.95}$$

Ця важлива риса схем МСЕ дозволяє створювати системи керування похибками апроксимацій МСЕ за допомогою цільового згущення/розрідження скінченних елементів на підставі різних критеріїв, наприклад, досягнення однакового наперед задекларованого рівня похибки для усіх елементів поділу [105].

5.2.3 Кусково лінійні апроксимації МСЕ.

Нижче ми будемо використовувати поділ $\Im_h$ області Ω на трикутні скінченні елементи K, $h_K := diam\, K$, $h := \max\limits_{K \in \Im_h} h_K$. Розглядаючи трикутник K з вершинами $A_i = (x_i, y_i), i = 1,2,3$, див. рисунок 5.5, введемо на ньому барицентричні координати [14]

$$L_i(x,y) := \frac{(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x - (x_j - x_m)y}{2|K|}, \qquad (5.96)$$
$$i = 1,2,3, \quad i \to j \to m \to i,$$

за допомогою яких визначимо кусково лінійні апроксимації зміщень та електричного потенціалу , наприклад,

$$p(x,y) \cong p^K(x,y) := \sum_{i=1}^{3} p_i^K L_i(x,y) \;\; \forall (x,y) \in K \;\; \forall K \in \Im_h. \qquad (5.97)$$

В такий спосіб ми неявно визначаємо найпростіший з можливих скінченновимірних просторів апроксимацій $\Phi_h \subset \Phi$. Його елементи мають кусково постійні градієнти на поділі $\Im_h$, що може суттєво спрощувати обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебричних рівнянь задачі (5.90). З огляду на багатократне формування і розв’язування таких рівнянь в процесі $h-$адаптування аргумент "простих обчислень" може відігравати вирішальну роль у практиці застосувань.

5.2.4 Апроксимація апостеріорний оцінювач похибки.

За вибору такої структури наближень зміщень і потенціалу побудова простору апроксимацій похибок E_h для розв’язування задачі про оцінювач

(5.92) вимагає певної кмітливості. Шуканий апостеріорний оцінювач похибки на трикутнику K окреслимо виразом

$$e_K(x,y) := 4L_1(x,y)L_2(x,y)\begin{pmatrix}\gamma_K^{12}\\ \xi_K^{12}\end{pmatrix} + 4L_2(x,y)L_3(x,y)\begin{pmatrix}\gamma_K^{23}\\ \xi_K^{23}\end{pmatrix} + 4L_3(x,y)L_1(x,y)\begin{pmatrix}\gamma_K^{31}\\ \xi_K^{31}\end{pmatrix} \quad \forall(x,y)\in K \quad \forall K\in\Im_h, \tag{5.98}$$

коефіцієнти якого $e_K^{ij} = \left(\gamma_K^{ij}, \xi_K^{ij}\right)^T$ будемо послідовно обчислювати в наступний спосіб. Наприклад, для знаходження значення $e_K^{12} = \left(\gamma_K^{12}, \xi_K^{12}\right)^T$ ми утворюємо чотирикутник $Q := K \cup K'$, де скінченний елемент K' має спільну сторону A_1A_2 з трикутником K, див. рисунок 5.5. Позначивши його барицентричні координати через $L_i' = L_i'(x,y)$, ми розглядаємо кусково визначену квадратичну функцію

$$b_Q(x,y) := \begin{cases} 4L_1(x,y)L_2(x,y) & \forall(x,y)\in K \\ 4L_1'(x,y)L_2'(x,y) & \forall(x,y)\in K' \end{cases},$$

з $sup\, b_Q = \overline{Q}$.

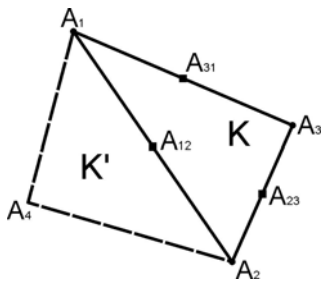


Рисунок 5.5 – Створення чотирикутника $Q = K' \cup K$ для обчислення e_K^{12}.

Тепер, припускаючи, що шуканий оцінювач похибки на чотирикутнику Q має вигляд:

$$e_Q(x,y) := b_Q(x,y)e_K^{12} \quad \forall (x,y) \in Q,$$

можемо знайти вектор e_K^{12} як розв'язок задачі (5.92) із базисом простору E_h у вигляді:

$$\varphi^1 = (b_Q, 0, 0),\ \varphi^2 = (0, b_Q, 0),\ \varphi^3 = (0, 0, b_Q).$$

Відзначимо, що з огляду на виконану побудову обчислене значення вектора e_K^{12} надає нам точкове наближення до похибки апроксимації МСЕ у центрі $A_{12} = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$ відрізка A_1A_2,

$$e(A_{12}) \cong e_h(A_{12}) = e_K^{12}. \tag{5.99}$$

Подібним чином обчислюється решта коефіцієнтів e_K^{23}, e_K^{31} апостеріорного оцінювача похибки апроксимації МСЕ (5.98) на скінченному елементі K.

5.2.5 Критерій та стратегія адаптування.

Приймаючи до уваги запропонований в п. 5.2.4 постпроцесорний за своїм характером спосіб обчислення похибки апроксимації МСЕ, можна сформулювати задачу про відшукання апроксимацій з наперед гарантованою точністю наближення до точного розв'язку $\phi \in \Phi$ варіаційної задачі п'єзоелектрики (5.87). Точніше, далі ми будемо орієнтуватися на розв'язування такої задачі оптимізації [148]:

$$\begin{cases} \textit{задано допустимий рівень } \theta = const > 0 \textit{ відносної похибки апроксимації} \\ \quad \textit{в енергетичній нормі } \|\cdot\|_{\Phi} \textit{ простору допустимих функцій } \Phi; \\ \textit{знайти поділ } \Im_h = \{K\} \textit{ для побудови простору апроксимацій } \Phi_h \subset \Phi \\ \quad \textit{таку, що апроксимація Гальоркіна } \phi_h \in \Phi_h, \textit{ знайдена із задачі } (5.42), \\ \quad \textit{задовольняє умову точночті} \\ \qquad \dfrac{\eta_K(e_h)}{\sqrt{M_h^{-1}\left[\|\phi_h\|_{\Phi}^2 + \eta^2(e_h)\right]}} \times 100\% \le \theta \quad \forall K \in \Im_h, \\ \textit{де } M_h \textit{ – кількість скінченних елементів поділу } \Im_h. \end{cases} \tag{5.100}$$

Наведена вище задача (5.100) розв’язана нами ітераційним шляхом послідовного локального адаптування біжучих тріангуляцій в такий спосіб. Якщо критерій задекларованої точності із (5.100) не виконується на елементі K, то ми додаємо його центр ваги до існуючої множини вузлів. Після декларування всіх нових вузлів генерується черговий поділ $\Im_h$ згідно алгоритму тріангуляції Делоне. Цей рекурентний процес завершується на тому поділі жоден елемент якого не порушує умови (5.100).

5.2.6 Аналіз результатів обчислювального експерименту.

Розроблену $h-$адаптивна схема МСЕ із пп. 5.2.2-5.2.5 застосовані до ряду модельних задач п’єзоелектрики. Відзначимо, що порядок швидкості збіжності p_h можна обчислити згідно формули

$$p_h := 2\frac{ln\|e_h^m\| - ln\|e_h^k\|}{ln\,N_k - ln\,N_m},\ 0 \le m,\ k = m+1, m+2, \ldots .$$

Розглянемо квадратну пластинку виготовлену з ніобіт літію розмірами $1 \times 1\ см$, одна сторона якої є закріплена і заземлена, тобто $\Omega = (0, 0.01) \times (0, 0.01)$,

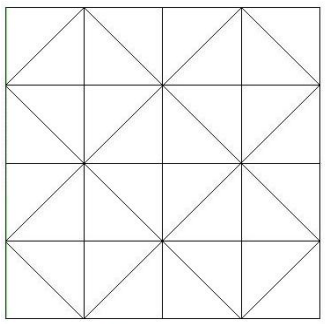
$u(x,0)=0$, $p(x,0)=0$. На вертикальній стороні $x=0.01$ діє сила $g=5\cdot 10^6\ H/м^2$.

Початкова тріангуляція складалась з 32 скінченних елементів. Використання лінійних апроксимацій генерує 25 вузлів. Задамо рівень точності 5%. На рисунку 5.6 зображено тріангуляції отримані внаслідок адаптування сітки у місцях найбільших похибок. Як і очікувалося, найбільші значення похибки розпізнаються АОП на елементах околу закріпленої межі. Власне на їхній множині послідовно відбувається локальне згущення сітки трикутників, яке врешті-решт ідентифікує, що структура шуканих розв'язків містить особливості в околах вершин закріпленого краю. Більше цього, різниця структур побудованої сітки в околах цих вершин виразно вказує на різницю локальної поведінки розв'язку у цих регіонах: система керування розподілом вузлів згущує сітку біля навантаженого краю пластини.

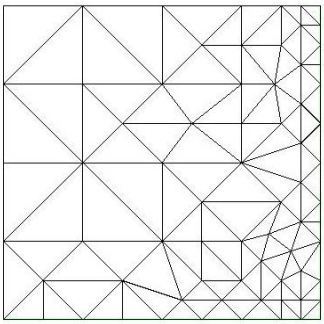
Стосовно особливостей збіжності пропонованої h-адаптивної схеми МСЕ можна зробити висновки на підставі даних таблиці 5.3.

Графіки рисунка 5.7(а) показують, що близьке до лінійного зростання кількості вузлів і скінченних елементів на початкових кроках адаптування сповільнює їх приріст на заключних кроках.

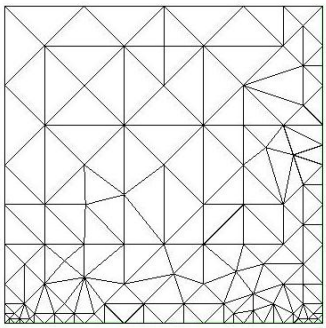
Відповідно до цього монотонно зростають обчислені значення енергетичної норми апроксимацій МСЕ, які на останніх кроках збігаються з точністю до 6-ти значущих цифр. Подібно, послідовність відносних похибок $\delta_h := \dfrac{\|e_h\|\cdot 100\%}{\sqrt{\|\phi_h\|_\Phi^2+\|e_h\|_\Phi^2}}$ утворює незростаючу числову послідовність, яка зменшується зі згущенням поділів (рисунок 5.7(б)).



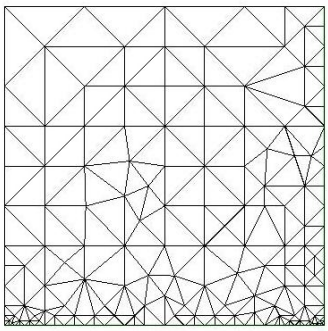
$k = 0$



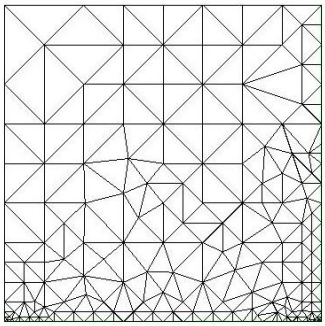
$k = 3$



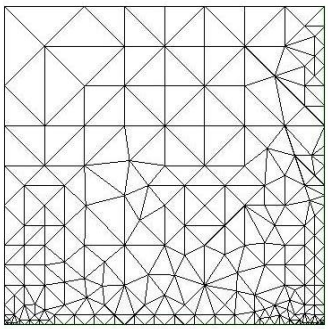
$k = 6$



$k = 9$



$k = 12$

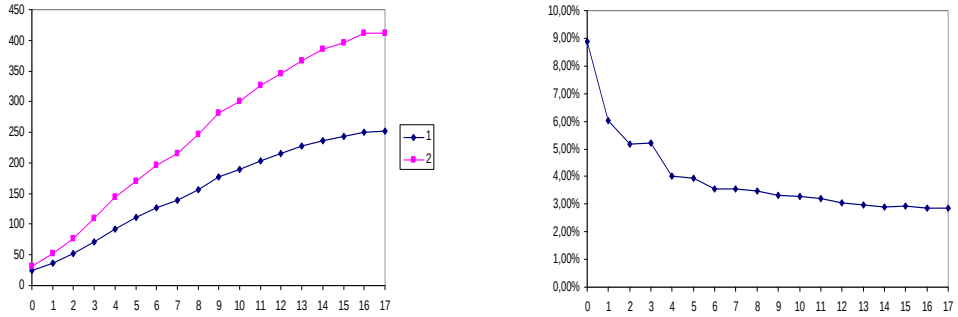


$k = 15$

Рисунок 5.6 – Побудовані тріангуляції.

Таблиця 5.3 – Покрокові результати адаптування. Тут k – номер кроку адаптування, M_h - кількість скінченних елементів, N_h - кількість вузлів поділу $\Im_h$.

k	N_h	M_h	$min\, h_k$	$max\, h_k$	$\lvert\phi_h\rvert_\Phi \times 10^{-6}$	$\lvert e_h\rvert_\Phi \times 10^{-6}$	δ_h%	p_h
0	25	32	0,35355	0,35355	294878	26243	8,9%	
1	36	52	0,17678	0,35355	307219	18547	6,0%	1,90
2	52	77	0,12500	0,35355	312277	16146	5,2%	1,33
3	71	109	0,08839	0,35355	313242	16349	5,2%	0,91
4	92	144	0,04419	0,35355	315418	12628	4,0%	1,12
5	111	171	0,03125	0,35355	315680	12497	4,0%	0,99
6	126	196	0,02210	0,25000	316217	11248	3,6%	1,05
7	139	216	0,02210	0,25000	316551	11283	3,6%	0,98
8	157	247	0,01563	0,25000	316964	11042	3,5%	0,94
9	178	281	0,01105	0,25000	317252	10519	3,3%	0,93
10	189	301	0,01105	0,25000	317407	10447	3,3%	0,91
11	203	326	0,01105	0,25000	317548	10132	3,2%	0,91
12	215	346	0,00781	0,25000	317744	9739	3,1%	0,92
13	227	367	0,00552	0,25000	317823	9487	3,0%	0,92
14	237	385	0,00552	0,25000	317964	9262	2,9%	0,92
15	243	397	0,00552	0,25000	318041	9282	2,9%	0,91
16	251	411	0,00552	0,25000	318089	9105	2,9%	0,92
17	252	412	0,00552	0,25000	318089	9091	2,9%	0,93



а) б)

Рисунок 5.7 – а) Збіжність рекурентного адаптування поділу (1 - M_h, 2 - N_h), б) Збіжність відносних похибок δ_h.

Отже, запропоновано h-адаптивну схему МСЕ для розв’язування двовимірних стаціонарних задач п’єзоелектрики з наперед гарантованою точністю обчислення наближень. Для цих задач сформульовано варіаційну постановку, виконано дискретизацію Гальоркіна та побудовано відповідні чисельні схеми для знаходження розв’язку. Сформульовано задачу про похибку. На основі властивостей бабл-функцій та задачі про похибку побудовано апостеріорні оцінювачі похибок. Отримані схеми реалізовано у вигляді програмного забезпечення. Наочне підтвердження ефективності та надійності запропонованих схем продемонстровано низкою обчислювальних експериментів з використанням розробленого програмного забезпечення.

Equation Chapter 6 Section 16 МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ) ДЛЯ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

6.1 Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті

Важливим питанням для життя та діяльності людини є ефективне використання водних ресурсів планети. Для передбачення імовірних наслідків використання та управління водними ресурсами, необхідно вивчати та моделювати цикл кругообігу води в природі. Важливу роль в вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. Гідрологічні системи складаються з багатьох взаємопов'язаних між собою етапів кругообігу води на планеті. В загальному дослідження цілої такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певну частину області, що бере участь в кругообігу води. В розглядуваній області проводиться вертикальна декомпозиція області задачі – ця область розбивається на шари: приземний шар атмосфери, поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов.

Важливим процесом для дослідження є етап фільтрації [146, 158, 187] оскільки він вагомо залежить від решти етапів гідрологічної системи, таких як випадання опадів, русловий стік, потік в озерах і водоймах. Також процес фільтрації безпосередньо залежить від діяльності людини (меліорація, будівля гідроспоруд), тому його вивчення дає можливість зрозуміти процес формування ґрунтових вод і передбачувати наслідки діяльності людини.

Моделі для опису фільтрації води в різних шарах ґрунту відрізняються

одна від одної забезпеченістю даними, можливістю перевірки на адекватність в реальних умовах.

Для опису процесу фільтрації пропонується два основних підходи: гідравлічний та гідродинамічний [165, 187].

При гідравлічному підході в області фільтрації виділяють елементарний об’єм для якого записують рівняння балансу притоку та відтоку води. Для отримання рівняння, що описує процес фільтрації використовують граничний перехід коли виділений об’єм ґрунту прямує до нуля. Отримане рівняння називають рівнянням Буссінеска. З допомогою даного рівняння можна знайти скалярну характеристику потоку фільтрації – п’єзометричний тиск. Для опису часткових видів фільтрації на основі рівняння Буссінеска будують його спрощені формулювання, які відомі в літературі під назвами рівнянь планової та профільної фільтрації.

Використовуючи гідродинамічний підхід для отримання рівнянь, що описують процес фільтрації, застосовується підхід механіки суцільного середовища до опису руху середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями фільтрації. Невідомими величинами, що входять в дані рівняння є п’єзометричний тиск, швидкість та густина потоку фільтрації.

Дослідимо модель отриману з використанням основних рівнянь фільтрації. Особливістю цієї моделі є врахування густини фільтруючої рідини, що є важливим при дослідженні фільтрації стисливих рідин, а також при напірній фільтрації води з великими значеннями тиску.

З огляду на те, що для багатьох задач фільтрації є характерна наявність вільної поверхні [165, 187, 193], наводиться побудова та дискретизація варіаційної задачі фільтрації. Для побудови дискретизованої задачі використовувалась схема Гальоркіна та однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі [224]. Отриману дискретизовану задачу можна розв’язати методом скінченних елементів [190, 224], який дозволяє знаходити вигляд

змінної області визначення задачі в часі без її перерозбиття на скінченні елементи [193].

Розглянемо основні рівняння, які використовуються для побудови математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті.

6.1.1 Побудова математичної моделі

Для побудови математичної моделі використаємо основні рівняння фільтрації:

рівняння збереження енергії [165, 187]

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon}+\nabla h=0, \tag{6.1}$$

де $h=\dfrac{p}{\rho g}+z$ – п’єзометричний тиск,

та рівняння збереження маси [165, 187]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n)+\nabla.(\rho\boldsymbol{\upsilon})=0. \tag{6.2}$$

Рівняння (6.1) та (6.2) утворюють систему чотирьох скалярних рівнянь з п’ятьма невідомими, $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, h, \rho$ тому для замикання цієї системи рівнянь їх необхідно доповнити рівнянням стану рідини. Загальний вид рівняння стану виберемо у вигляді (6.3), в якому задається залежність густини рідини фільтрації від тиску.

$$\rho=\rho(p). \tag{6.3}$$

Одним з прикладів аналітичного вигляду рівняння стану рідини [165] може бути

$$\rho=\rho_0 e^{\beta(p-p_0)}, \tag{6.4}$$

де ρ_0, p_0 - деякі початкові значення густини та тиску відповідно, β - певна задана функція яка залежить від типу рідини.

Використавши (6.4) виразимо залежність тиску та п'єзометричного напору від густини рідини. Ці залежності мають вигляд (6.5) та (6.6) відповідно

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), \tag{6.5}$$

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 + \frac{1}{\beta} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right) + z. \tag{6.6}$$

Виключивши з (6.1) та (6.2), тиск та п'єзометричний тиск приходимо до замкнутої системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon} + f(\rho)\nabla\rho + \vec{i_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) + \nabla.(\rho\boldsymbol{\upsilon}) = 0 \end{cases} \quad в\ \Omega \times [0,T), \tag{6.7}$$

де

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g} - \frac{p_0}{g} - \frac{1}{\beta g} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

6.1.2 Постановка задачі

Розглянемо (6.7) в певній області $\Omega \subset R^3$ на проміжку часу $(0;T]$. Шуканими величинами виступають швидкість $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}(x,y,z)$ та густина $\rho = \rho(x,y,z)$.

Доповнимо (6.7) початковими та крайовими умовами:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\upsilon}\big|_{t=0} = \boldsymbol{\upsilon}^* \\ \rho\big|_{t=0} = \rho^* \end{array}\right. \quad в\ \Omega. \tag{6.8}$$

Крайову умову виберемо у вигляді:

$$\rho\boldsymbol{\upsilon}.\mathbf{n} = q^* \quad на\ \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \quad \Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial\Omega. \tag{6.9}$$

В загальному випадку область фільтрації Ω є трьохвимірною областю. Прийнявши, що параметри фільтраційного потоку є незмінні вздовж горизонтального виміру, будемо розглядати двохвимірну область фільтрації $\tilde{\Omega}$, що є вертикальним перерізом області Ω (див. рисунок 6.1).

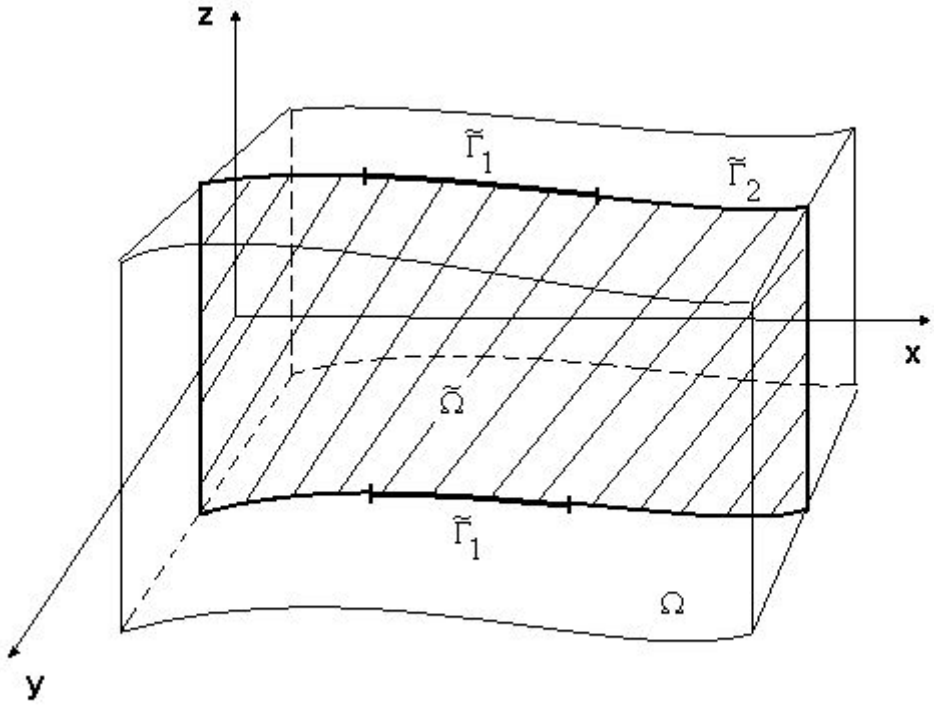


Рисунок 6.1 – Область фільтрації Ω

Запишемо математичну постановку задачі для області $\tilde{\Omega} \subset R^2$.

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\upsilon}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\upsilon}+f(\rho)\nabla\rho+\vec{i_2}=0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n)+\nabla.(\rho\boldsymbol{\upsilon})=0 \end{cases} \quad в\,\tilde{\Omega}\times[0,T),$$

$$f(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\beta g}-\frac{p_0}{g}-\frac{1}{\beta g}ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right). \tag{6.10}$$

Початкові умови:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\upsilon}\big|_{t=0}=\boldsymbol{\upsilon}^* \\ \rho\big|_{t=0}=\rho^* \end{array}\right. \quad в\,\tilde{\Omega}. \tag{6.11}$$

Крайові умови:

$$\rho\boldsymbol{\upsilon}.\mathbf{n}=q^* \;\; на\;\tilde{\Gamma}_1\subset\partial\tilde{\Omega}, \qquad \tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_1\bigcup\tilde{\Gamma}_2=\partial\tilde{\Omega}. \tag{6.12}$$

6.1.3 Варіаційна постановка задачі

$$\begin{cases} Задано\;\boldsymbol{\upsilon}_0,\rho_0\in L^2(\tilde{\Omega}),\; l\in L^2(0,T;V_2'). \\ Знайти \quad \boldsymbol{\upsilon}(t)\in L^2(0,T;V_1),\rho(t)\in L^2(0,T;V_2)\;такі,\;що: \\ \frac{1}{g}(\boldsymbol{\upsilon}'(t),\varphi)+\frac{1}{k}(\boldsymbol{\upsilon}(t),\varphi)+(\mathbf{i}_2,\varphi)+b(f(\rho),\nabla\rho,\varphi)=0 \quad \forall\varphi\in V_1, \\ \left((\rho n)',\psi\right)-b_n(\rho;\boldsymbol{\upsilon}(t),\psi)=-<l,\psi> \quad \forall\psi\in V_2, \\ (\boldsymbol{\upsilon}(0)-\boldsymbol{\upsilon}_0,\phi)=0, \\ (\rho(0)-\rho_0,\psi)=0, \end{cases} \tag{6.13}$$

де $V_2^{'}$ – спряжений до V_2 простір.

Форми, що входять в (6.13), мають наступний вигляд:

$$< l,u >= \int_{\Gamma_1} \left\{ q^* u \right\} d\gamma,$$

$$b\left(c;\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \int_{\tilde{\Omega}} \left\{ c\, \mathbf{u}.\mathbf{v} \right\} d\tilde{\Omega},$$

$$b_n\left(c;\mathbf{u},v\right) = b\left(c;\mathbf{u},\nabla v\right) - \int_{\Gamma_2} \left\{ c\,\mathbf{u}.\mathbf{v}\, v \right\} d\gamma,$$

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \int_{\tilde{\Omega}} \left\{ \mathbf{u}.\mathbf{v} \right\} d\tilde{\Omega}.$$

6.1.4 Напівдискретизація Гальоркіна

Виберемо послідовність щільно вкладених скінченновимірних просторів $\left\{V_h^1\right\} \subset V_1$ та $\left\{V_h^2\right\} \subset V_2$ таких що $dim V_h^i = N(h) \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$, $i = 1,2$. Розкладемо шукані величини за базисом вибраних відповідних скінченновимірних просторів:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\upsilon}_h\left(t\right) &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\upsilon}_k\left(t\right) C_i\left(x,y\right), \\ \rho_h\left(t\right) &= \sum_{k=1}^{N} \rho_k\left(t\right) L_i\left(x,y\right), \end{aligned} \tag{6.14}$$

тоді напівдискретизована варіаційна задача задачі (6.13) запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \textit{Задано } h > 0, \boldsymbol{\upsilon}_0, \rho_0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right), l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\ \textit{Знайти} \quad \boldsymbol{\upsilon}_h\left(t\right) \in L^2\left(0,T;V_h^1\right), \rho_h(t) \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \textit{ такі, що :} \\ \dfrac{1}{g}\left(\boldsymbol{\upsilon}_h'\left(t\right),\varphi\right) + \dfrac{1}{k}\left(\boldsymbol{\upsilon}_h\left(t\right),\varphi\right) + \left(\mathbf{i}_2,\varphi\right) + b\left(f\left(\rho_h\right),\nabla\rho_h,\varphi\right) = 0 \quad \forall\varphi \in V_1; \\ \left(\left(\rho_h n\right)',\psi\right) - b_n\left(\rho_h;\boldsymbol{\upsilon}_h(t),\psi\right) = -< l,\psi > \quad \forall\psi \in V_2; \\ \left(\boldsymbol{\upsilon}_h\left(0\right) - \boldsymbol{\upsilon}_0,\phi\right) = 0, \\ \left(\rho_h\left(0\right) - \rho_0,\psi\right) = 0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Врахувавши (6.14) очевидно, що розв'язання задачі (6.13) звелось до відшукання коефіцієнтів $\boldsymbol{\upsilon}_h(t), \rho_h(t)$ з (6.15).

6.1.5 Дискретизація задачі за часовою змінною

Розділимо відрізок часу [0,T] на (N_T+1) рівних частин $\left[t_j, t_{j+1}\right]$, $j = 0, \ldots, N_T+1$.

Застосувавши до (6.15) однокрокову рекурентну схему дискретизації в часі, метод побудови проекційного рівняння [224] та знехтувавши нелінійними доданками порядку $O\left(\Delta t^2\right)$, перейдемо до дискретизованої рекурентної системи рівнянь.

$$\begin{cases} \textit{Задано параметри } \Delta t > 0, \theta > 0 \textit{ та } h > 0, \boldsymbol{\upsilon}_h^0, \rho_h^0 \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right), l \in L^2\left(0,T;V_2'\right). \\ \textit{Знайти} \quad \boldsymbol{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^1\right), \rho_h^{j+\frac{1}{2}} \in L^2\left(0,T;V_h^2\right) \textit{ такі, що}: \\ \Delta t \dfrac{1}{g} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}}(i_m,\varphi) + \dfrac{1}{k} \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta (i_m,\varphi) + \rho_i^{j+\frac{1}{2}} \Delta t \theta\, b(f(\rho), L_i, \varphi) = \\ -(\mathbf{i}_2,\varphi) - \dfrac{1}{k} \upsilon_m^j (i_m,\varphi) - \rho_i^j b(f(\rho), L_i, \varphi); \quad \forall \varphi \in V_1 \\ \rho_i^{j+\frac{1}{2}} (n_m^{j+1} + \theta \Delta t\, n_m^{j+\frac{1}{2}})(L_i L_m, \psi) - \\ \Delta t \theta (\rho_i^{j+\frac{1}{2}} \upsilon_m^j + \upsilon_m^{j+\frac{1}{2}} \rho_i^j) b_n(L_i; C_m, \psi) = \\ < l_{j+\frac{1}{2}}, \psi > - \rho_i^j n_m^{j+\frac{1}{2}} (L_i L_m, \psi) + \rho_i^j \upsilon_m^j b_n(L_i; C_m, \psi); \quad \forall \psi \in V_2 \\ \boldsymbol{\upsilon}_h^{j+1} = \boldsymbol{\upsilon}_h^j + \Delta t \boldsymbol{\upsilon}_h^{j+\frac{1}{2}}; j = 0, \ldots, N_T - 1; \\ \rho_h^{j+1} = \rho_h^j + \Delta t \rho_h^{j+\frac{1}{2}}; j = 0, \ldots, N_T - 1, \end{cases} \tag{6.16}$$

де

$$\boldsymbol{\upsilon}_{h\Delta t}(t) = \boldsymbol{\upsilon}_h^{\,j} + \Delta t\omega\left(t_j, t\right)\boldsymbol{\upsilon}_h^{\,j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right], j = 0, \ldots, N_T,$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_h^{\,j+\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}_h^{\,j+1} - \boldsymbol{\upsilon}_h^{\,j}}{\Delta t},$$

$$\rho_{h\Delta t}(t) = \rho_h^{\,j} + \Delta t\omega\left(t_j, t\right)\rho_h^{\,j+\frac{1}{2}}; \quad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right], j = 0, \ldots, N_T,$$

$$\rho_h^{\,j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_h^{\,j+1} - \rho_h^{\,j}}{\Delta t},$$

$$< l_{\Delta t}, v > = < l_{j+\frac{1}{2}}, v > = < l(t_{j+\frac{1}{2}}), v >, t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t, \ \forall t \in \left[t_j, t_{j+1}\right].$$

Невідомими в (6.16) виступають значення дискретизованої за просторовими змінними функцій $\boldsymbol{\upsilon}_h, \rho_h$ в момент часу t_{j+1} ,тобто $\boldsymbol{\upsilon}_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$. Значення $\boldsymbol{\upsilon}_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$ знаходяться за допомогою рекурентної формули, стартові значення для якої $\boldsymbol{\upsilon}_h^{j+1}, \rho_h^{j+1}$ ми отримуємо з початкових умов задачі (6.15).

6.2 Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини

Сьогодні гідрологічні системи, до яких можна зачислити річкові басейни, ріки, озера, зазнають сильного антропогенного впливу. Господарська діяльність на водозборі, використання водних ресурсів та зумовлені перетворенням природного середовища регіональні і глобальні зміни клімату не можуть не спричинити зміни у гідрологічному циклі та в процесах формування річкового стоку.

Виникає потреба оцінювати ці зміни і, якщо можливо, передбачити стан гідрологічних систем у майбутньому. Деколи такі оцінки можна зробити на підставі даних експериментальних дослідів шляхом порівняння гідрологічних характеристик до і після антропогенного впливу. Однак можливості таких оцінок дуже обмежені, оскільки гідрометеорологічні умови сильно змінюються [121, 159]. Головні перспективи розвитку методів досліджень і передбачень

поведінки природних систем на даний час вирішуються за допомогою їх математичного моделювання.

6.2.1 Виведення рівнянь руху потоку

Запишемо систему рівнянь, що характеризують рух рідини:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right); \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right); \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right). \tag{6.20}$$

Рівняння (6.17) – це рівняння нерозривності для нестисливої рідини, а (6.18) – (6.20) – рівняння Нав’є – Стокса.

Приймемо за координатну лінію x_1 лінію середнього дна, а за координатні лінії x_2 і x_3 – прямі, що лежать у нормальній до лінії дна площині так, що x_2 напрямлене горизонтально. Припущення про малість глибини потоку порівняно з радіусом кривини лінії середнього дна пов’язане якраз із цим вибором системи координат.

Нехай далі u,v,w і X, Y, Z – проекції вектора швидкості v і вектора прискорення об’ємних сил F на осі x_1, x_2, x_3.

Проінтегруємо рівняння (6.17) за площею поперечного перерізу потоку (рисунок 6.2), не роблячи поки що ніяких припущень про форму вільної поверхні:

$$\frac{1}{F}\int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_0}^{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = 0. \qquad (6.21)$$

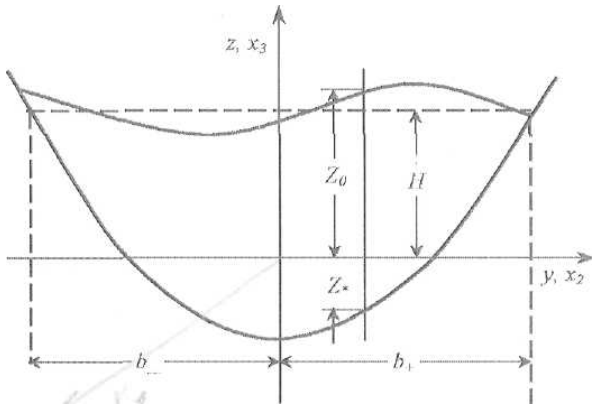


Рисунок 6.2 – Поперечний переріз потоку

Використаємо формулу диференціювання під знаком інтеграла, і враховуючи симетричність русла відносно площини *XOZ*, коли всі інтеграли за *F*, що містять $\frac{\partial}{\partial y}$, дорівнюють нулю, отримаємо

$$\frac{1}{F}\int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_0}^{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = 0. \qquad (6.22)$$

Оскільки ж на поверхні дна потоку $(z = z_0)$ вектор швидкості дорівнює нулю, то $u_{z=z_0} = 0$.

Використаємо формулу

$$w_{z=H} = \frac{\partial H}{\partial t} + u_{z=H}\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (6.23)$$

і те, що величина $\int_{b_-}^{b_+}\int_{z_0}^{H} udzdy = Q$ – це розхід потоку, тоді рівняння (6.22) запишемо так:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t}B = 0. \qquad (6.24)$$

Перейдемо до рівнянь руху. Очевидно, що для потоку в полі сили тяжіння $X = g\,sin\delta, Y = 0, Z = -g\,cos\delta = -g_*$, де g – прискорення сили тяжіння, δ– гострий кут між горизонтальною площиною і дотичною до лінії середнього дна. Проінтегруємо рівняння (6.20) за z і використаємо знову формулу диференціювання під знаком інтеграла, формулу (6.23) і те, що на вільній поверхні $(z = H)$ всі напруження дорівнюють нулю, одержимо

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_H}{\rho} + \left(H - z_0\right) g_* - w^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{H} w dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{H} wu dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{H} wv d\xi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{H} \tau_{zx} dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{H} \tau_{zy} dz - \tau_{zz}\right). \tag{6.25}$$

Величина p_H у цій формулі є тиском на вільній поверхні.

Підставимо це значення p в рівняння (6.18), проінтегруємо результат за площею поперечного перерізу F: за z від z_0 до H і за y від b_- до b_+, після простих, але дуже кропітких перетворень отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_*}^{z_0} u dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{b_-}^{b_+} dy \int_{z_*}^{z_0} u^2 dz = \\ = g\left(sin\delta - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\int_{b_-}^{b_+}\int_{z_*}^{z_0} dz dy - \frac{1}{\rho}\int_{b_-}^{b_+}\left(\tau_{zx}\right)_{z=z_*} dy + A + I_u + R_u + I_v + R_v + D. \tag{6.26}$$

Для другого члена правої частини в гідравліці турбулентних потоків визначено відомий емпіричний вираз

$$\frac{1}{\rho g F}\int_{b_-}^{b_+}\left(\tau_{zx}\right)_{z=z_*} dy = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{U^2}{C^2 R}, \tag{6.27}$$

де $K = CF\sqrt{R}$ – пропускна здатність русла; К – його гідравлічний радіус; С – коефіцієнт Шезі. Тепер рівняння (6.26) матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F} U \frac{\partial F}{\partial t}\right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R} + \varepsilon. \tag{6.28}$$

Тут

$$\varepsilon = \frac{1}{gF}\left(A + I_u + I_v + R_u + R_v + D\right). \qquad (6.29)$$

Якщо в рівнянні (6.28) знехтувати членом ε і прийняти α=const, то отримаємо звичайне гідравлічне рівняння одновимірного невстановленого, повільно-змінного руху.

Отже, наша система матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0; \qquad (6.30)$$

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial \alpha U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{F}U\frac{\partial F}{\partial t}\right) = i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2 R}.$$

6.2.2 Дослідження стійкості встановленого потоку

Розглянемо наслідки малої зміни рівномірного потоку в псевдопризматичному руслі. За цих умов припустимо, що

$$H = H_0 + \Delta H; \qquad Q = Q_0 + \Delta Q; \qquad K = K_0 + K_0'\Delta H, \qquad (6.31)$$

де H_0, Q_0, K_0 – сталі значення, які зберігають H, Q, K за умов рівномірного потоку; $K' = \dfrac{dK}{dH}$.

Запишемо перше і друге рівняння системи (6.30) через розхід потоку Q і пропускну здатність русла $K = CF\sqrt{R}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(HB)}{\partial t} = 0; \\ &\frac{1}{g}\frac{1}{F}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\alpha}{g}\frac{QB}{F^2}\frac{\partial H}{\partial t} + \left(1 - \alpha\frac{Q^2 B}{F^3 g}\right)\frac{\partial H}{\partial x} + \alpha\frac{Q}{F^2 g}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{iK^2 - Q^2}{K^2}. \end{aligned} \qquad (6.32)$$

Підставимо значення H і Q з (6.31) в систему (6.32):

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial x}+\frac{\partial\left(B\Delta H\right)}{\partial t}=0;$$

$$\frac{1}{g}\frac{1}{F}\frac{\partial \Delta Q}{\partial t}-\frac{\alpha}{g}\frac{QB}{F^2}\frac{\partial \Delta H}{\partial t}+\left(1-\alpha\frac{Q^2B}{F^3g}\right)\frac{\partial \Delta H}{\partial x}+\alpha\frac{Q}{F^2g}\frac{\partial \Delta Q}{\partial x}=$$

$$=\frac{Q_0^2\left(K_0+K_0'\Delta H\right)^2-\left(Q_0+\Delta Q\right)^2K_0^2}{K_0^2\left(K_0+K_0'\Delta H\right)^2}.$$

Уведемо заміну $s=\frac{B}{F}x;\qquad \tau=t\sqrt{\frac{gB}{F}}.$

У першому рівнянні системи (6.32) перший доданок домножимо на Q, а другий доданок – на F. У другому рівнянні системи (6.32) перший і четвертий доданки домножимо на Q, одержимо

$$Q\frac{\partial \Delta Q/Q}{\partial x}+F\frac{\partial\left(B\Delta H/F\right)}{\partial t}=0$$

$$\frac{1}{g}\frac{1}{F}Q\frac{\partial \Delta Q/Q}{\partial t}-\frac{\alpha}{g}\frac{QB}{F^2}\frac{\partial \Delta H}{\partial t}+\left(1-\alpha\frac{Q^2B}{F^3g}\right)\frac{\partial \Delta H}{\partial x}+\alpha\frac{Q^2}{F^2g}\frac{\partial \Delta Q/Q}{\partial x}=$$

$$=\frac{Q_0^2\left(K_0+K_0'\Delta H\right)^2-\left(Q_0+\Delta Q\right)^2K_0^2}{K_0^2\left(K_0+K_0'\Delta H\right)^2}.$$

Позначимо $u=\frac{\Delta Q}{Q};\quad h=\frac{B\Delta H}{F}.$

Тоді система набуде вигляду

$$\sqrt{\frac{Q^2B}{F^3g}}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial \tau}=0;$$

$$\sqrt{\frac{Q^2B}{F^3g}}\frac{\partial u}{\partial \tau}-\alpha\sqrt{\frac{Q^2B}{F^3g}}\frac{\partial h}{\partial \tau}+(1-\alpha\frac{Q^2B}{F^3g})\frac{\partial h}{\partial s}+\alpha\frac{Q^2B}{F^3g}\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{2Q^2KK'\Delta H}{K^2K^2}\frac{B}{F}\frac{F}{B}-\frac{2Q\Delta QK^2}{K^2K^2}\frac{Q}{Q}.$$

Нехай $\lambda=\sqrt{\frac{Q^2B}{F^3g}};\qquad \mu=\frac{K'F}{BK}$, тоді

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial \tau}=0;$$
$$\lambda\frac{\partial u}{\partial \tau}-\alpha\lambda\frac{\partial h}{\partial \tau}+\left(1-\alpha\lambda^2\right)\frac{\partial h}{\partial s}+\alpha\lambda^2\frac{\partial u}{\partial s}=2i\left(\mu h-u\right). \tag{6.33}$$

У [147] доведено що, система (6.33) є стійкою, якщо виконується така умова:

$$\frac{1}{\lambda^2}>\mu^2-2\alpha\mu+\alpha. \tag{6.34}$$

При $\alpha=1$ критерій (6.34) переходить у критерій Ведерникова – Іваса :

$$\frac{1}{\lambda}=\mu-1. \tag{6.35}$$

6.2.3 Формулювання початково-крайової задачі

Виконаємо в другому рівнянні системи (6.30) заміну $\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{B}$, отримаємо

$$\frac{\partial\left(UF\right)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}=0;$$
$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}U\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\alpha-1}{g}\frac{U}{F}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{U^2}{C^2R}=i, \tag{6.36}$$

де g = 9,8 м/с – прискорення сили тяжіння; c=const – коефіцієнт Шезі; $i=sin\delta=\text{const}$ – нахил лінії середнього дна; $B=b_-+b_+=\text{const}$ – ширина вільної поверхні; R=const – гідравлічний радіус русла; α – відомий у гідравліці коректив середньої швидкості.

Доповнимо ці рівняння початковими:

$$U\big|_{t=0}=u_0\left(x\right),\qquad F\big|_{t=0}=f_0\left(x\right)\qquad \text{на } \left[0,L\right]$$

та крайовими:

$$U(t,0)=0, \quad F(t,0)=0$$

умовами отримаємо початково-крайову задачу знаходження невідомих *U, F*.

6.2.4 Про коректив швидкості потоку

Коефіцієнт α використовують для врахування нерівномірності розподілу швидкостей по живому перерізу потоку.Значення коефіцієнта є в таких межах:

$$\begin{cases} 1<\alpha<1{,}3\text{, якщо рух рідини нерівномірний;} \\ 1<\alpha<6\text{, якщо рух невстановлений.} \end{cases}$$

У плоскому рівномірному потоці з логарифмічним розподілом усереднених швидкостей величина α визначена за формулою [121, 134]

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\chi^2}\frac{g}{C^2},$$

де χ – параметр Кармана.

6.2.5 Варіаційна задача

Уведемо простори допустимих функцій

$$H := L^2(\Omega), \qquad V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, v(0)=0 \right\}.$$

Для побудови варіаційної задачі домножимо перше рівняння задачі (6.36) на довільну функцію $\varphi \in V$, друге – на $\psi \in V$ і результати проінтегруємо за областю Ω.

Уведемо такі білінійні форми:

$$a(u,f,\varphi)=\int_{\Omega} u\frac{\partial f}{\partial x}\varphi dx,$$
$$b(u,\varphi)=\int_{\Omega} u\varphi dx,$$
$$c(u,\varphi)=\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\varphi dx,$$
$$d(u,f,\varphi)=\int_{\Omega} uf\varphi dx,$$

а також лінійний оператор

$$l(\varphi)=\int_{\Omega} i\varphi dx.$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (6.36) запишемо так:

$$\begin{cases} \textit{Задано}:\ \ u_*, f_* \in H; \\ \textit{знайти пару}\ (u,h)\in L^2(0,T;V\times V)\ \textit{таку, що}: \\ a(u,f,\varphi)+a(f,u,\varphi)+b(f',\varphi)=0; \\ \dfrac{1}{g}b(u',\psi)+\dfrac{\alpha}{g}a(u,u,\psi)+\dfrac{1}{B}c(f,\psi)+\dfrac{1}{C^2R}d(u,u,\psi)-\dfrac{\alpha-1}{g}d(w,f',\psi)=\langle l,\psi\rangle; \\ b(u(0)-u_0,\varphi)=0, \qquad b(f(0)-f_0,\psi)=0. \end{cases} \tag{6.37}$$

6.2.6 Дискретизація за часовою змінною

Для побудови обчислювальної схеми розв’язку варіаційної задачі виконаємо напівдискретизацію варіаційної задачі в часі. Розділимо відрізок часу $[0,T]$ на N_T+1 однакові (хоча це необов’язково) частини $[t_j,t_{j+1}]$ завдовжки $\Delta t=t_{j+1}-t_j,\ \ j=0,...,N_T$.

На кожному відрізку $[t_j,t_{j+1}]$ шукаємо розв’язки задачі (6.37).

Розв'язки $u(x,t), f(x,t) \in L^2(0,T;V)$ цієї задачі апроксимуємо поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x,t) = \{1-\omega(t)\} u^j(x) + \omega(t) u^{j+1}(x); \\ f_{\Delta t}(x,t) = \{1-\omega(t)\} f^j(x) + \omega(t) f^{j+1}(x); \\ t \in [t_j, t_{i+1}], \quad j = 0,1,...,N_T - 1, \quad \omega(t_j, t) = \dfrac{t - t_j}{\Delta t}; \end{cases} \tag{6.38}$$

з невідомими функціями $u^j(x), \quad f^j(x) \in V_h$.

Для функціонала $l(x,t) \in V_h^1$ задачі (6.37) будемо використовувати апроксимації вигляду

$$l_{\Delta t}(x,t) = l_{j+1/2} = l(t_{j+1/2}, x). \tag{6.39}$$

6.2.7 Проекційні рівняння

У просторі $L^2(t_j, t_{j+1})$ зі скалярним добутком $(.,.)$ виберемо функції $\xi(t), \eta(t)$ такі, що

$$(\xi,1)\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(\tau)d\tau \neq 0, \qquad (\eta,1)\int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta(\tau)d\tau \neq 0,$$

і будемо домагатися, щоб нев'язка підстановки апроксимацій (6.38), (6.39) у варіаційне рівняння задачі (6.37) була ортогональна до функцій $\xi(t), \eta(t)$ відносно скалярного добутку на проміжку (t_j, t_{j+1}).

Тоді

$$\begin{cases} b\left(f^{j+1/2},\varphi\right)+\Delta t\gamma\left[a\left(u^{j},f^{j+1/2},\varphi\right)+a\left(u^{j+1/2},f^{j},\varphi\right)+a\left(f^{j+1/2},u^{j},\varphi\right)+a\left(f^{j},u^{j+1/2},\varphi\right)\right]= \\ \qquad\qquad =-a\left(u^{j},f^{j},\varphi\right)-a\left(f^{j},u^{j},\varphi\right); \\ \frac{1}{g}b\left(u^{j+1/2},\psi\right)+\frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left[a\left(u^{j},u^{j+1/2},\psi\right)+a\left(u^{j+1/2},u^{j},\psi\right)\right]+\frac{1}{B}\Delta t\beta c\left(f^{j+1/2},\psi\right)+ \\ \qquad +\frac{2}{C^{2}R}\Delta t\beta d\left(u^{j},u^{j+1/2},\psi\right)-\frac{\alpha-1}{g}d(w^{j},f^{j+1/2},\psi)= \\ \qquad =\left\langle l_{j+1/2},\psi\right\rangle-\frac{\alpha}{g}a\left(u^{j},u^{j},\psi\right)-\frac{1}{B}c\left(f^{j},\psi\right)-\frac{1}{C^{2}R}d\left(u^{j},u^{j},\psi\right), \end{cases} \tag{6.40}$$

у яких уведені такі позначення:

$$a\left(u,f,\varphi\right)=\int_{\Omega}u\frac{\partial f}{\partial x}\varphi dx;$$

$$b\left(u,\varphi\right)=\int_{\Omega}u\varphi dx;$$

$$c\left(u,\varphi\right)=\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}\varphi dx;$$

$$d\left(u,f,\varphi\right)=\int_{\Omega}uf\varphi dx;$$

$$\left\langle l,\varphi\right\rangle=\int_{\Omega}i\varphi dx.$$

Також для скорочення запису введемо такі позначення:

$$u^{j}=u^{j}\left(x\right),\qquad f^{j}=f^{j}\left(x\right);$$

$$u^{j+1/2}=u^{j+1/2}\left(x\right)=\frac{u^{j+1}\left(x\right)-u^{j}\left(x\right)}{\Delta t};\quad f^{j+1/2}=f^{j+1/2}\left(x\right)=\frac{f^{j+1}\left(x\right)-f^{j}\left(x\right)}{\Delta t}.$$

З (6.40) можна визначити $u^{j+1/2},f^{j+1/2}$. Коефіцієнти рекурентної схеми визначені за формулами

$$\gamma=\frac{(\omega^{2},\xi)}{(\xi,1)},\beta=\frac{(\omega^{2},\eta)}{(\eta,1)}.$$

6.2.8 Рекурентна схема

$$
\begin{cases}
\textit{Задано } \Delta t, \omega(t) = const > 0, u^j, f^j \in V \times V. \\
\textit{Знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in V \times V \textit{ такі, що:} \\
b\left(f^{j+1/2}, \varphi\right) + \Delta t \gamma \left[a\left(u^j, f^{j+1/2}, \varphi\right) + a\left(u^{j+1/2}, f^j, \varphi\right) + a\left(f^{j+1/2}, u^j, \varphi\right) + a\left(f^j, u^{j+1/2}, \varphi\right) \right] = \\
= -a\left(u^j, f^j, \varphi\right) - a\left(f^j, u^j, \varphi\right); \\
\frac{1}{g} b\left(u^{j+1/2}, \psi\right) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta \left[a\left(u^j, u^{j+1/2}, \psi\right) + a\left(u^{j+1/2}, u^j, \psi\right) \right] + \frac{1}{B} \Delta t \beta c\left(f^{j+1/2}, \psi\right) + \\
+ \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d\left(u^j, u^{j+1/2}, \psi\right) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \\
= \left\langle l_{j+1/2}, \psi \right\rangle - \frac{\alpha}{g} a\left(u^j, u^j, \psi\right) - \frac{1}{B} c\left(f^j, \psi\right) - \frac{1}{C^2 R} d\left(u^j, u^j, \psi\right); \\
u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}.
\end{cases}
\tag{6.41}
$$

Схема передбачає, що початковий розв’язок $\left(u^0, f^0\right)$ визначений початковими умовами.

6.2.9 Дискретизація Гальоркіна

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій V_h з простору V з властивостями $dim V_h \xrightarrow[h \to 0]{} \infty$.

Тоді $\left(u_h, v_h\right)$ – напівдискретна апроксимація розв’язку $\left(u, f\right)$.

Виберемо базис $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{N}$ простору апроксимацій V_h. Задачу знаходження розв’язку варіаційної задачі за дискретизацією Гальоркіна формулюють так:

$$\begin{cases} \textit{Задано } u_0, f_0 \in V, \textit{ знайти пару } : \left(u_h, f_h\right) \in L^2\left(0,T; V_h \times V_h\right) \textit{ таку, що:} \\ b\left(f_h^{j+1/2}, \varphi\right) + \Delta t\gamma\left[a\left(u_h^j, f_h^{j+1/2}, \varphi\right) + a\left(u_h^{j+1/2}, f_h^j, \varphi\right) + a\left(f_h^{j+1/2}, u_h^j, \varphi\right) + \right. \\ \left. + a\left(f_h^j, u_h^{j+1/2}, \varphi\right)\right] = -a\left(u_h^j, f_h^j, \varphi\right) - a\left(f_h^j, u_h^j, \varphi\right); \\ \frac{1}{g} b\left(u_h^{j+1/2}, \psi\right) + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left[a\left(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi\right) + a\left(u_h^{j+1/2}, u_h^j, \psi\right)\right] + \frac{1}{B}\Delta t\beta c\left(f_h^{j+1/2}, \psi\right) + \\ + \frac{2}{C^2 R}\Delta t\beta d\left(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi\right) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \left\langle l_{j+1/2}, \psi\right\rangle - \frac{\alpha}{g} a\left(u_h^j, u_h^j, \psi\right) - \\ - \frac{1}{B} c\left(f_h^j, \psi\right) - \frac{1}{C^2 R} d\left(u_h^j, u_h^j, \psi\right); \\ u_h^{j+1} = u_h^j + \Delta t u_h^{j+1/2}, f_h^{j+1} = f_h^j + \Delta t f_h^{j+1/2}. \end{cases} \quad (6.42)$$

Апроксимація Гальоркіна u_h та f_h однозначно визначена такими розкладами:

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i^j \varphi_i(x), f_h^j(x) = \sum_{i=1}^{N} F_i^j \varphi_i(x) \quad (6.43)$$

за функціями базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ і невідомими коефіцієнтами $U = \{U_i\}_{i=1}^N, F = \{F_i\}_{i=1}^N$.

З використанням матричних позначень рекурентна схема (6.41) допускає еквівалентне зображення:

$$\begin{cases} \textit{Задано: } \Delta t, \omega(t) = const > 0,\ u^j, f^j \in R^n. \\ \textit{Знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in R^n \textit{ такі, що:} \\ \left[B1 + \Delta t\gamma A1\left(u^j\right) + \Delta t\gamma A2\left(u^j\right)\right] f^{j+1/2} + \left[\Delta t\gamma A3\left(f^j\right) + \Delta t\gamma A4\left(f^j\right)\right] u^{j+1/2} = \\ = -AP1\left(u^j, f^j\right) - AP2\left(f^j, u^j\right); \\ \left[\frac{1}{B}\Delta t\beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j)\right] f^{j+1/2} + \left[\frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left(A5\left(u^j\right) + A6\left(u^j\right)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{C^2 R} 2\Delta t\beta D1(u^j)\right] u^{j+1/2} = L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j); \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{cases} \quad (6.44)$$

З накладанням матриць отримаємо такий вигляд рекурентної схеми:

$$\begin{cases} \textit{Задано: } \Delta t, \gamma, \beta = const > 0; u^j, f^j \in R^n. \\ \textit{Знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in R^n \textit{ такі, що:} \\ \begin{pmatrix} B1 + \Delta t\gamma A1\left(u^j\right) + \Delta t\gamma A2\left(u^j\right) & \Delta t\gamma A3\left(f^j\right) + \Delta t\gamma A4\left(f^j\right) \\ \frac{1}{B}\Delta t\beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j) & \frac{1}{g}B2 + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left(A5\left(u^j\right) + A6\left(u^j\right)\right) + \frac{1}{C^2 R} 2\Delta t\beta D1(u^j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{j+1/2} \\ u^{j+1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -AP1\left(u^j, f^j\right) - AP2\left(f^j, u^j\right) \\ L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j) \end{pmatrix}; \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{cases}$$

6.2.10 Кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів

Для розв’язування задачі напівдискретизації Гальоркіна на практиці широко використовують кусково-лінійні апроксимації методу скінченних елементів.

Відрізок $[0, L]$ роділимо за допомогою послідовності рівновіддалених вузлів: $x_i = i \cdot h, i = 0, ..., N, h = \frac{L}{N}$ на N скінченних відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., N - 1$.

Неперервні кусково-визначені базисні функції $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ з простору V_h вибираємо у вигляді лінійних поліномів

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le x_{i-1},\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1}\le x\le x_i,\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i\le x\le x_{i+1},\\ 0, & x_i\le x\le L.\end{cases}$$

Тоді на кожному відрізку напівдискретну апроксимацію наведемо у вигляді

$$u_h^k(x)=\sum_{j=i}^{i+1}U^k\varphi_j(x),$$

$$f_h^k(x)=\sum_{j=i}^{i+1}F^k\varphi_j(x),\qquad \forall h>0,\quad \forall x>[x_i,x_{i+1}],$$

де

$$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ 1, & i=j;\end{cases}$$

$u_h^k(x_i)=U_i^k, f_h^k(x_i)=F_i^k, i=0,1,...,N$ – наближені розв’язки у вузлах сітки.

Рівняння на відрізку $[x_i,x_{i+1}]$ перепишемо у вигляді

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=i}^{i+1}\Big[\Big[b1_{ij}+\Delta t\gamma\, a1_{ij}(u^k)+\Delta t\gamma\, a2_{ij}(u^k)\Big]F^{k+1/2}+\Big[\Delta t\gamma\, a3_{ij}(f^k)+\Delta t\gamma\, a4_{ij}(f^k)\Big]U^{k+1/2}\Big]=\\ \qquad\qquad =-ap1_i(u^k,f^k)-ap2_i(f^k,u^k)\\ \sum\limits_{j=i}^{i+1}\Big[\Big[\dfrac{1}{B}\Delta t\beta c_{ij}+\dfrac{\alpha-1}{g}d2_{ij}(w^k)\Big]F^{k+1/2}+\Big[\dfrac{1}{g}b2_{ij}+\dfrac{\alpha}{g}\Delta t\beta\Big(a5_{ij}(u^k)+a6_{ij}(u^k)\Big)+\\ +\dfrac{1}{C^2R}2\Delta t\beta\, d1_{ij}(u^k)\Big]U^{k+1/2}\Big]=l_i^{k+1/2}-\dfrac{\alpha}{g}ap3_i(u^k,u^k)-\dfrac{1}{B}cp_i(f^k)-\dfrac{1}{C^2R}dp_i(u^k,u^k),\end{cases}$$

де

$$B1=\{b1_{ij}\}_{i,j}^N=\{b(\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A1\left(u_h^k\right)=\left\{a1_{ij}\left(u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(u_h^k,\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)\frac{\partial\left(\varphi_i(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A2\left(u_h^k\right)=\left\{a2_{ij}\left(u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(\varphi_i,u_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \varphi_i(x)\frac{\partial\left(u_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A3\left(u_h^k\right)=\left\{a3_{ij}\left(f_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(\varphi_i,f_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \varphi_i(x)\frac{\partial\left(f_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A4\left(f_h^k\right)=\left\{a4_{ij}\left(f_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(f_h^k,\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L f_h^k(x)\frac{\partial\left(\varphi_i(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$AP1\left(u_h^k,f_h^k\right)=\left\{ap1_i\left(u_h^k,f_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(u_h^k,f_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)\frac{\partial\left(f_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$AP2\left(f_h^k,u_h^k\right)=\left\{ap2_i\left(f_h^k,u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(f_h^k,u_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L f_h^k(x)\frac{\partial\left(u_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$C=\left\{c_{ij}\right\}_{i,j}^N=\left\{c\left(\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$B2=\left\{b2_{ij}\right\}_{i,j}^N=\left\{b\left(\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A5\left(u_h^k\right)=\left\{a5_{ij}\left(u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(u_h^k,\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)\frac{\partial\left(\varphi_i(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$A6\left(u_h^k\right)=\left\{a6_{ij}\left(u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(\varphi_i,u_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \varphi_i(x)\frac{\partial\left(u_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$D1\left(u_h^k\right)=\left\{d_{ij}\left(u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{d\left(u_h^k,\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$D2\left(w_h^k\right)=\left\{d_{ij}\left(w_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{d\left(w_h^k,\varphi_i,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L w_h^k(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$AP3\left(u_h^k,u_h^k\right)=\left\{ap3_i\left(u_h^k,u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{a\left(u_h^k,u_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)\frac{\partial\left(u_h^k(x)\right)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$CP\left(f_h^k\right)=\left\{cp_i\right\}_{i,j}^N=\left\{c\left(f_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L \frac{\partial f_h^k(x)}{\partial x}\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N;$$

$$DP\left(u_h^k,u_h^k\right)=\left\{dp_i\left(u_h^k,u_h^k\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{d\left(u_h^k,u_h^k,\varphi_j\right)\right\}_{i,j=1}^N=\left\{\int_0^L u_h^k(x)u_h^k(x)\varphi_j(x)dx\right\}_{i,j=1}^N.$$

Оскільки, матриця системи є блоково-діагональною, то для розв’язування її використаємо метод Холецького. У цій системі значення параметрів γ,β рекурентних рівнянь вибираємо з умов їхньої стійкості та забезпечення бажаної точності.

6.2.11 Тестові приклади

Приклад 1. Розглянемо приклад з відомим аналітичним розв’язком:

$$\frac{\partial(uf)}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}=0;$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{u}{g}\frac{\partial \alpha u}{\partial x}-\frac{1}{g}\frac{(\alpha-1)}{f}u\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{u^2}{C^2R}=i+G(x,t);$$

$$u\big|_{t=0}=-x,\qquad f\big|_{t=0}=x;$$

$$u(t,0)=0,\qquad f(t,0)=0,$$

де

$$G(x,t)=\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{x}{g}+\frac{\alpha x}{g}+\frac{2(\alpha-1)}{g}+\frac{(1+t)^4}{B}+\frac{x^2}{C^2R}\right)-i\,.$$

Точний аналітичний розв'язок цієї задачі запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u^*(x,t)=-\dfrac{x}{(1+t)} \\ f^*(x,t)=x(1+t)^2 \end{cases}.$$

Цей приклад обчислювали для розбиттів відрізка $x\in[0,1]$ на 20, 40, 80 скінченних елементів і з кроком $\Delta t=0.01$. Результати обчислень зображені на рисунках 6.3–6.9.

Нижче подаються графіки зміни площі поперечного перерізу та швидкості в часі.

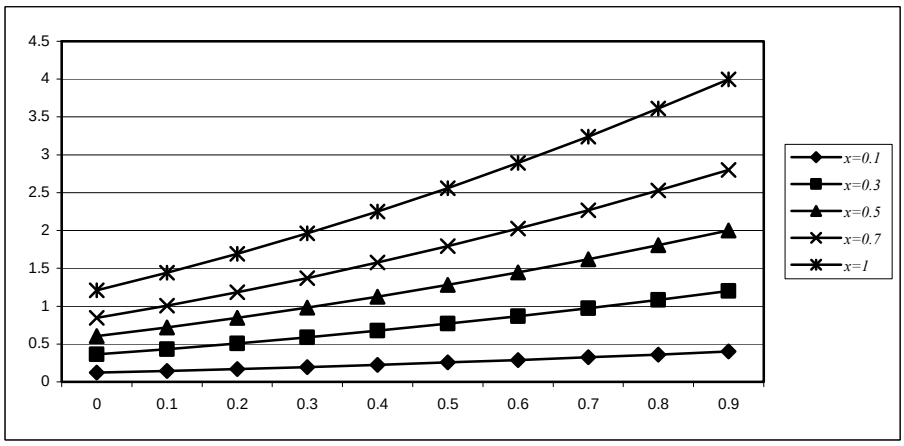


Рисунок 6.3 – Площа в різні моменти часу *t*

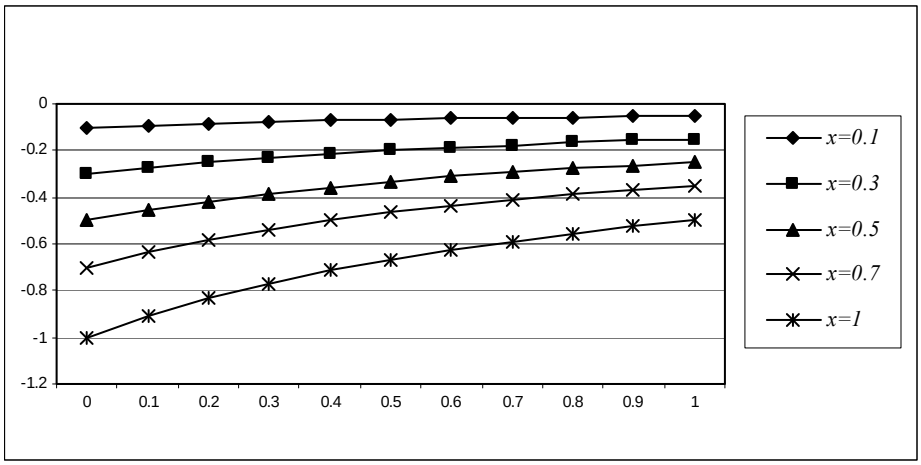


Рисунок 6.4 – Швидкість в різні моменти часу *t*

Далі показано зміна значень відносної та абсолютної похибки для швидкості та площі поперечного перерізу.

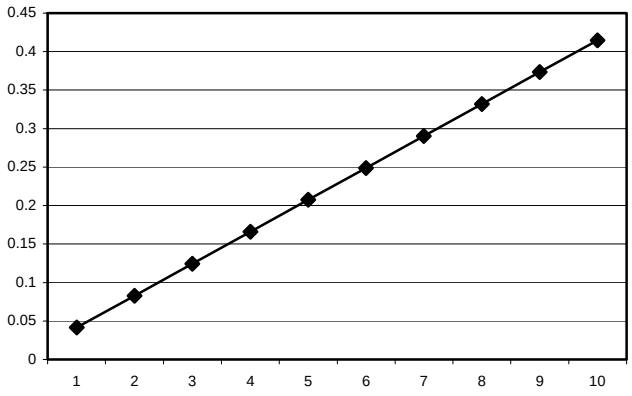


Рисунок 6.5 – Значення абсолютної похибки *U*

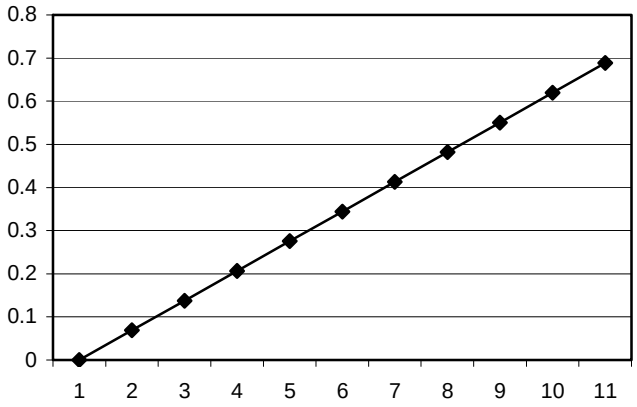


Рисунок 6.6 – Значення абсолютної похибки *F*

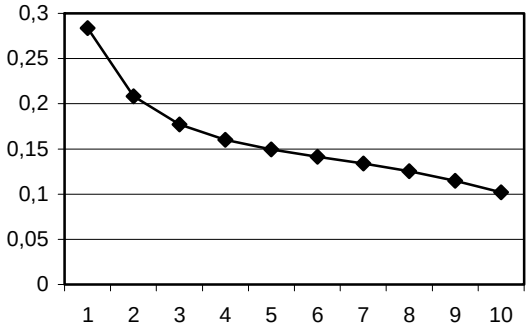


Рисунок 6.7 – Відносна похибка *U* (%)

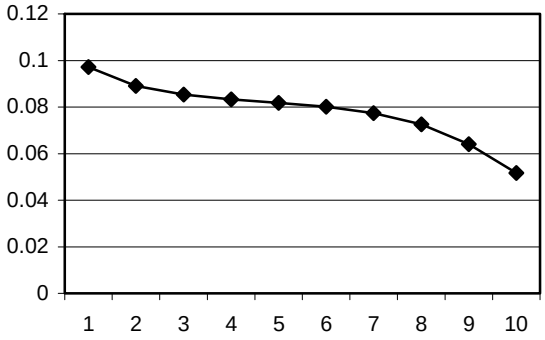


Рисунок 6.8 – Відносна похибка *F* (%)

Норму похибки для функції *F,* як і для *U,* обчислювали за такою формулою:

$$\left\|e_{\Delta th}\right\|^2 = \int_0^T \int_0^1 \left(f_{h\Delta t} - f\right)^2 dxdt = \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^1 \left(f_{h\Delta t} - f\right)^2 dxdt =$$

$$= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 \left(f_{h\Delta t}\left(x, t_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(x, t_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)^2 dx .$$

Порядок збіжності за просторовою змінною знаходили зі співвідношення

$$K = Log_2 \frac{\left\|e_{\Delta th}\right\|^2 - \left\|e_{\Delta t\frac{h}{2}}\right\|^2}{\left\|e_{\Delta t\frac{h}{2}}\right\|^2 - \left\|e_{\Delta t\frac{h}{4}}\right\|^2} .$$

Отримано порядок збіжності для функції *F*, який дорівнює 1.925635, аналогічно для функції *U* – 2.40379. Подібно обчислювали порядки збіжності за часом, для функції *F*: *K* = 5.007565 ; для функції *U*: *K* = 4.996095. Для різних типів річок вибрано такі значення параметра α :

$\alpha = 1$ – рівнинні,

$1 < \alpha \le 1.07$ – напівгірські,

$1.07 < \alpha < 6$ – гірські річки.

Задано такі значення параметра α: $\alpha = 1$; $\alpha = 1.05$; $\alpha = 2$.

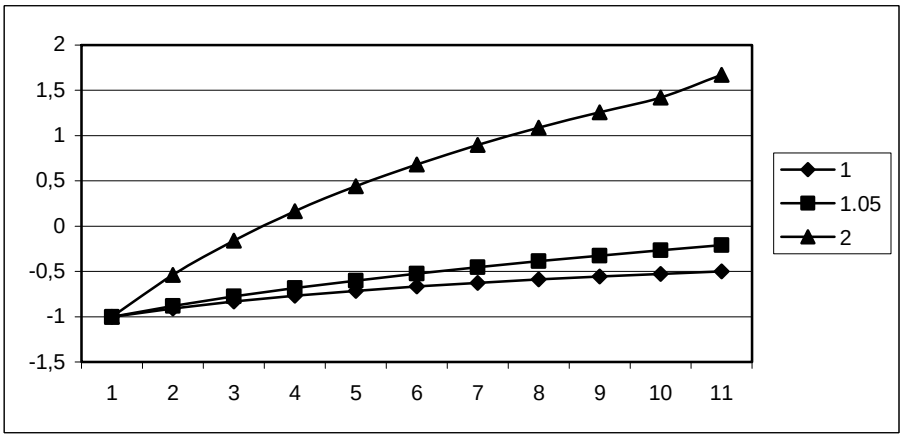


Рисунок 6.9 – Значення швидкості при різних параметрах α

Приклад 2. Числові результати порівнювали з результатами лабораторних досліджень, опублікованих у [201].

Оскільки ширина русла *b* стала і дорівнює 0,838 *м*, відомі початкова висота h_0 та розхід потоку Q_0, то за формулою $u_0 = \frac{Q_0}{h_0 b}$ можна знайти початкову швидкість, яка дорівнює 0.378831. Згідно з [156], з формули $R = \left(C_0 n_0\right)^6$ отримуємо значення гідравлічного радіуса русла. Підставимо ці дані у програму й отримаємо результати (див. таблицю 6.1).

Наведені результати засвідчують достовірність отриманих даних з програми, хоча збіг результатів приблизний, бо у статті результати одержані під час лабораторних дослідів за ідеальних умов.

Таблиця 6.1 – Порівняння числових результатів з лабораторними дослідженнями

1. №	2. h_0, м	3. R	4. Нахил дна, $\times 10^{-5}$	5. Глибина потоку, мм							6. C_0	7. n_0
				8. h_1	9. h_2	10. h_3	11. h_4	12. h_5	13. h_6	14. h_7		
15. Рівномірний потік Q_0 = 10 л/с												
1. Теплов	31,5	0,034	123,90	31,0	28,3	25,0	20,9	18,0	14,9	11,4	63,41	0,009
Програма	31,5	0,034	123,90	31	30,2	24,9	24,2	23,3	22,5	20,2	63,41	0,009
2. Теплов	34,0	0,031	100,20	34,1	31,9	29,0	25,5	22,9	19,9	16,7	62,45	0,009
Програма	34,0	0,031	100,20	34	32,2	28,6	25,1	24,8	23,3	20,2	62,45	0,009
3. Теплов	40,0	0,034	74,81	40,0	38,1	35,9	32,9	30,9	28,5	25,8	57,08	0,010
Програма	40,0	0,034	74,81	39,9	38,1	35,7	33	30,91	28,7	28,1	57,08	0,010
4. Теплов	46,5	0,031	49,50	46,6	45,4	43,5	41,1	40,0	38,1	36,0	56,34	0,010
Програма	46,5	0,031	49,50	46,5	46,4	46,2	45,2	42,2	41	36,2	56,34	0,010
5. Теплов	62,8	0,061	24,12	62,8	61,9	60,9	59,4	58,6	57,5	56,6	52,35	0,012
Програма	62,8	0,061	24,12	62,7	62,5	62,1	61,1	59,7	57,3	56,4	52,35	0,012
6. Теплов	80,8	0,082	12,49	80,8	80,4	79,7	79,0	78,2	77,7	77,0	50,75	0,013
Програма	80,8	0,082	12,49	80,8	80,6	80,3	79,1	78,5	77,68	75,4	50,75	0,013
7. Теплов	99,5	0,075	5,12	99,5	99,2	98,9	98,2	97,9	97,6	97,3	59,09	0,011
Програма	99,5	0,075	5,12	99,4	99,2	99	98,5	97,7	97,4	97,1	59,09	0,011

6.3 Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології

Історично перші методики вивчення біомеханіки зубів людини мали в основі фізичний експеримент. Серед них широкого застосування набули фотопружні системи (Caputo зі співавт., 1974), лазерна голографічна інтерферометрія (Burstone і Pryputniewicz, 1980) тощо.

Стрімкий розвиток комп'ютерних технологій сприяв появі як нових напрямів у науці, так і розширенню досліджень у класичних її галузях. Не стала винятком і біомеханіка, аналіз математичних моделей якої потребує великої кількості обчислень. У стоматології через складність об'єктів дослідження цей напрям почав розвиватися порівняно недавно, разом із досягненням певної межі потужності електронно-обчислювальними засобами. Втім, сьогодні ця межа все ще не дає змоги моделювати зубощелепний апарат у цілому. Тому більшість сучасних числових досліджень обмежена аналізом пружно-деформованого стану окремого зуба або його протеза за умови силових і температурних навантажень.

Якісно нового етапу розвитку числові експерименти досягли з появою методу скінченних елементів (МСЕ), який добре пристосований до складної геометрії досліджуваних об'єктів. Його перші застосування у сфері стоматології були зосереджені на розв'язуванні стаціонарних задач (Thresher and Saito, 1973; Takahashi et al., 1980; Moss et al., 1985; Kawasaki et al., 1987) [10, 37, 40, 65]. Сьогодні кількість публікацій з використання МСЕ у цій галузі охоплює широкий спектр різноманітних проблем біомеханіки від класичних статичних задач міцності системи зуб – щелепа до новітніх методик вивчення її поведінки у динаміці. Серед них переважають дослідження впливу анізотропії м'яких тканин зуба на його пружно-деформований стан за умови силових і температурних навантажень, урахування пористості кісткових тканин, а також вивчення наслідків включення у систему зуб – щелепа різноманітних

імплантантів. Відчутна різниця у клінічній поведінці здорового зуба та його протеза стала ще однією з вагомих причин урізноманітнення публікацій.

Згадане розмаїття та численність напрямів сучасних досліджень з моделювання біомеханічних систем у стоматології потребують систематичного огляду наявної наукової літератури, що і стало нашою метою.

6.3.1 Математичні моделі у стоматології

З огляду на функціональне призначення елементи зубощелепного апарату людини є достатньо твердими і пружними, тому для їхнього моделювання переважно застосовують співвідношення механіки деформівного твердого тіла. Втім, природна складність як геометрії, так і його структурної будови без потужних обчислювальних засобів зумовили появу цілої ієрархії спрощених моделей, які з різним успіхом прогнозували поведінку зуба під дією зовнішніх навантажень.

Один з найвагоміших внесків у цьому напрямі зробив А. Шварц, який у монографії [224] виокремив головні аксіоми і поняття біомеханіки зубощелепного апарату. Його теорія грунтувалась головно на спрощенні реальних процесів жування до аналізу поведінки систем з двох тіл: зуб – зуб, зуб – їжа, їжа – зуб. У цьому разі розглянуто різні способи її навантаження (в декількох точках, під певним кутом тощо), а також вплив інших фізико-механічних параметрів, наприклад, матеріалу зуба. Всі запропоновані спрощення мали на меті зведення вихідної задачі до класичних моделей теорії опору матеріалів. Для цього в зубі, як твердому тілі, вводили у розгляд поняття центра опору (C_{re} на рисунку 6.10) та центра обертання (C_{ro}), відносно яких вивчали його поступальні та обертальні рухи в альвеолярній лунці. Зокрема, відносно центра опору обчислювали моменти руйнівних зусиль $R_{оп}$, N_1, $F_т$, які брали визначальними у прогнозуванні реакції зуба на навантаження. Для

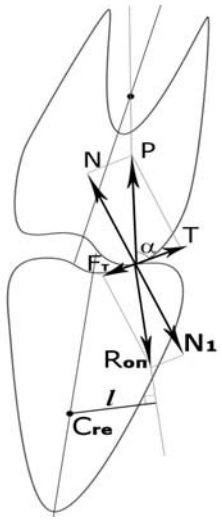


Рисунок 6.10 – Розміщення векторів сил моделі зуб -– зуб за А. Шварцом

розрахунку використовували сили тертя, що виникають на межі контактних поверхонь, а також кути нахилів коронок зубів. Важливим припущенням такого підходу було розміщення обох центральних точок на поздовжній осі зуба, через що рівнодійна всіх реакцій на навантаження проходить саме через центр опору. Втім, реальне розміщення центра опору в широких межах залежить від геометрії та розмірів зуба, морфологічних та фізико-механічних характеристик його тканин і навіть умов навантаження [64, 66, 92], що призвело до складних експериментальних досліджень за допомогою лазерно-голографічних технологій, магнетичних сенсорів тощо. Ще більші проблеми в цієї моделі з визначенням місцеположення центра обертання, яке змінюється у часі, ускладнюючи цим прогнозування еволюції поведінки зуба.

Окремим напрямом у літературі стали намагання перенести ідеї А. Шварца на системи (зокрема, в ортодонтії), що складаються з декількох зубів, а то й щелепи загалом [27, 32, 61, 79, 101]. Для визначення центрів опору та обертання таких систем будували відповідні математичні моделі. Однак через надзвичайну складність вихідної задачі вони змушено опирались на масу штучно введених у модель параметрів, для визначення яких проводили численні клінічні дослідження. Зрештою однозначного висновку щодо успіш

ності такого підходу так і не зроблено.

Одним з відомих наступників А. Шварца у вдосконаленні спрощених моделей не тільки зуба, а й зубощелепного апарату став вітчизняний дослідник А.Н. Чуйко. В працях він критикував модель зуба як важеля першого роду [216], у якому достатні умови рівноваги трактували на рівні найпростіших законів механіки, наприклад, плече В має бути більшим від плеча А (рисунок 6.11).

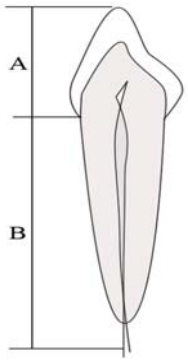


Рисунок 6.11 – Зуб як важіль першого роду

Натомість А.Н. Чуйко запропоновав альтернативну модель з двох балок різної жорсткості. Втім, ні ці уточнення, ні низка наступних так і не змогли адекватно змоделювати очевидно визначальний факт органічної цілісності системи зуб – щелепа. Головною перепоною на шляху подальшого розвитку спрощених моделей став тонкий шар періодонта, який завдяки м’якості та анізотропності сильно узалежнював поведінку системи від геометрії контакту зуба з кістковими тканинами.

Фантастичний злет швидкодії обчислювальної техніки, що почався наприкінці XX ст., суттєво змінив підходи та засоби моделювання. Раніше недосяжно затратні числові схеми аналізу швидко опановували щораз нові горизонти складності розв’язуваних задач. Зокрема, поява методу скінченних елементів (МСЕ) максимально знизила залежність обчислювальних схем від геометрії досліджуваних об’єктів, що цілком відповідало потребам

моделювання у сфері стоматології. Звичні, але часто вкрай складні проблеми якнайліпшої підгонки моделі досліджуваного об’єкта набором простіших моделей з відомими аналітичними методами аналізу змінились на універсальні доволі незалежні етапи реалізації числових схем:

- дискретизація геометрії об’єкта;
- вибір простору апроксимацій;
- побудова і розв’язування системи (систем) алгебричних рівнянь;
- візуалізація результатів.

У багатьох галузях застосування слабо формалізованим, а тому і найбільш трудомістким для програмної реалізації етапом є побудова сітки МСЕ (далі без втрати загальності послуговуватимемось саме його термінологією). Зрозуміло, що це (чи не передусім) стосується стоматології з її абсолютно некласичними геометричними формами багатокомпонентних шаруватих структурно-неоднорідних об’єктів (доволі детально геометричні вимірювання зубів наведено в працях [130, 200]).

Перші скінченно-елементні моделі в стоматології з огляду на тогочасний рівень ресурсів комп’ютера були не більш, ніж двовимірними (Thresher and Saito, 1973; Takahashi et al., 1980; Williams and Edmundson, 1984; Матвійчук О., 1997) [10, 37, 40, 65]. Втім з їхньою допомогою все ж вдалося скласти узагальнену картину пружно-деформованого стану зуба за умови функціонального навантаження. Зокрема в праці [174] описано механічну природу походження відомого клиноподібного дефекту у пришийкових ділянках як наслідок саме специфіки форми та структури людського зуба. Поступово виявляли геометричні параметри, що найбільше впливають на концентрацію напружень: кривина поверхні окремих шарів зуба, наявність скатів та їхніх кутів нахилу, ступінь гостроти апекса кореня та його довжини тощо [60, 85]. Були навіть спроби розв’язування задач оптимізації [141, 145, 173, 89] (зрозуміло, в сфері ортодонтії).

Отриману свободу у виборі геометрії доповнювали новими можливостями

врахування крайових умов задачі про функціональне навантаження. Численні дослідження реакції зуба на дію сил різної інтенсивності під різноманітними кутами [38, 65, 69, 92, 100, 102] засвідчили природну пристосованість його геометрії більше до вертикальних навантажень [38, 52, 64].

Двовимірні моделі з огляду на складність геометрії вихідної задачі могли претендувати лише на якісне описання пружно-деформованого стану досліджуваного об’єкта. Проте цього було достатньо для аналізу взаємовпливу різних складових елементів зуба. Автори наукових публікацій намагалися охопити моделлю якомога більше таких шарів [151, 58]. Крім того, були спроби введення в розгляд різного роду імплантантів (пломби, штифти тощо) [189, 200].

Незважаючи на всі уточнення, найбільшою проблемою двовимірних моделей залишалось урахування крайових умов у разі виокремлення досліджуваної галузі із загальної системи зубощелепного апарату. Адекватне моделювання цих умов, що були принципово різними у напрямах вздовж і впоперек зубного ряду, потребували переходу до трьох просторових координат.

Перші дослідники тривимірних моделей (Tanne et al., 1987, Middleton et al., 1990) вимушено нехтували складною структурою зуба в намаганні з’ясувати найбільш загальні закономірності його поведінки як складової частини цілого жувального апарату. Однак швидке зростання обчислювальних потужностей комп’ютерів давало змогу будувати щораз детальніші сітки скінченних елементів, що з часом почали враховувати як шарувату будову зуба, так і складні умови його закріплення [9, 37, 40, 46, 55, 102]. Отримувані розв’язки щораз ліпше відповідали реальним значенням поля напружень у зубі за умов доброго підбору фізико-механічних параметрів його складових елементів. Проте згаданий підбір параметрів виявився доволі непростою справою, оскільки їхні значення варіювали у широкому діапазоні не тільки для різних об’єктів, а й у межах одного зуба. Це зумовило появу значної кількості публікацій [25, 40, 62, 84, 92, 103]. На підставі огляду більш ніж 50 з них

наводимо найвживаніші в числових розрахунках інтервали зміни модуля Юнга та коефіцієнта Пуасона тканин зубощелепного апарату, (таблиця 6.2).

Однією з основних причин доволі широких діапазонів варіювання наведених вище параметрів тканин (особливо періодонта та дентину) є анізотропія матеріалу. Дослідниками [7, 25, 35, 39, 46, 58] запропоновано низку моделей, що описують ті, чи інші її варіанти.

Таблиця 6.2 – Найбільше використовувані значення механічних характеристик тканин зуба

Шари зуба	**Модуль Юнга *E*, МРа**	**Стала Пуасона *P***
Зуб	$1{,}8\cdot10^4 – 2\cdot10^4$	0,3
Кістка	$1{,}1\cdot10^4 – 1{,}38\cdot10^4$; $2\cdot10^3$	0,26–0,3
Спонгіозна	$0{,}4\cdot10^4 – 0{,}5\cdot10^4$	0,3–0,32
Кортикальна	$1{,}37\cdot10^4 – 2\cdot10^4$	0,3
Емаль	$0{,}28\cdot10^4$; $2\cdot10^4$; $7{,}9\cdot10^4 – 8{,}4\cdot10^4$	0,28–0,33
Дентин	$1{,}5\cdot10^4 – 2\cdot10^4$	0,25–0,31
Цемент	$1{,}5\cdot10^4 – 2{,}3\cdot10^4$	0,31
Періодонт	0,2–0,68; 2,5–3,2*; 5–6,8;	0,45–0,49
Пульпа (нерв)	2,03–2,07	0,45

Наприклад, у праці [7] дентин розглянуто як множину перитубулярних канальців, оточених міжтрубною речовиною (рисунок 6.12). Його матеріал подано як трансверсально-ізотропний з урахуванням п’яти незалежних

* На різних рівнях кореня [216]

параметрів. Отриманий унаслідок цього розподіл напружень у системі емаль - дентин -кістка засвідчили, що механічні властивості дентину змінюються у напрямі вздовж канальців: його еластичність найменша в околі пульпи і найбільша на межі з кісткою.

Проблеми виокремлення досліджуваної ділянки зуба із загальної системи зубощелепного апарату вище обговорено згідно з історією її вивчення. Однак

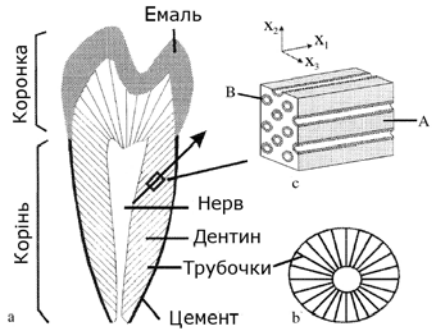


Рисунок 6.12 – Анізотропія дентину:
a – осьовий переріз премоляра;
b – поперечний переріз дентину;
c – вирізка дентину.
A – міжтрубна речовина;
B – перитубулярний каналець [7].

порівняно недавні результати аналізу впливу тонкого шару періодонта на загальний рівноважний стан зуба під навантаженням [177, 31, 37, 40, 46, 66] ставлять під сумнів окремі попередні навіть уже доволі визнані факти. Врахування у моделі порівняно м’якого і сильно анізотропного періодонта, незважаючи на тонкість його шару, може принципово змінити картину пружно-деформованого стану системи загалом. Про однозначні висновки говорити ще рано, оскільки дослідження у цьому напрямі тільки розгортаються. Зважаючи на значний і щораз більший інтерес до них далі продовжимо обговорення проблем моделювання шару періодонта, підсумувавши наведений вище огляд розвитку моделей у стоматології такою схемою, (рисунок 6.13).

За будовою періодонт складається з майже паралельних фіброволокон, які

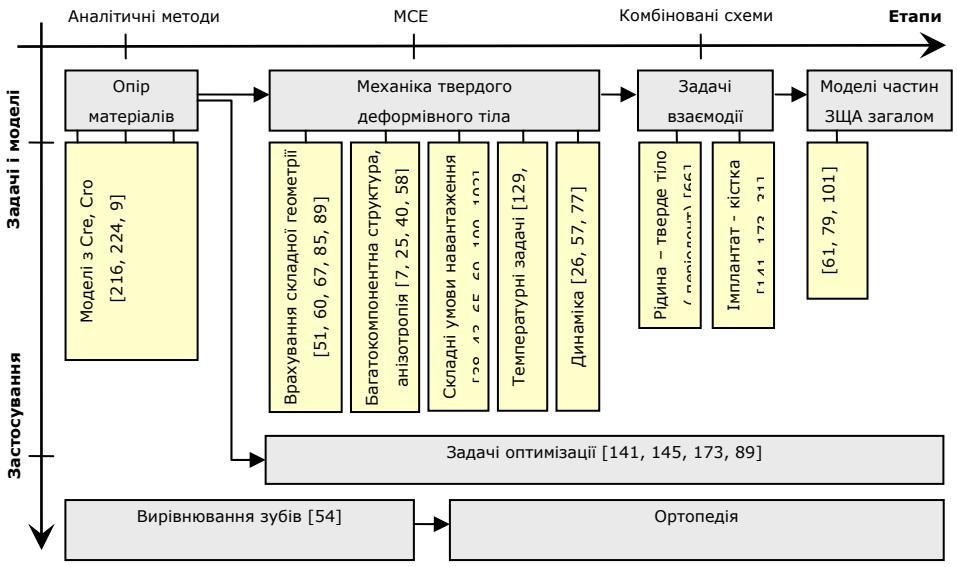


Рисунок 6.13 – Розвиток математичних моделей у стоматології

вростають у цемент зуба з одного боку і альвеолярну кістку – з іншого, що зумовлює добре виражену анізотропію його матеріалу. Крім анізотропії, механічні властивості періодонта за показниками твердості та пружності сильно відрізняються від решти складових елементів конструкції зуб – щелепа і погано відповідають співвідношенням лінійної теорії пружності. Тому моделювання шару періодонта пов’язане зі значними математичними та обчислювальними труднощами, через що в багатьох дослідженнях механічні властивості пародонта по-різному намагаються адаптувати до ізотропних моделей.

Одним з перших системні спроби вивчення періодонта зробив А. Шварца [224]. Уже на найпростіших важільних моделях він запропонував низку важливих висновків: “…значення напружень у періодонті пропорційна до стиску періодонта й обернено пропорційна до його товщини…”, “…дотичні напруження в кожній точці періодонта значно менші від нормальних…” тощо. Подальший розвиток моделювання шару періодонта через складність вихідної задачі супроводжувався спробами врахування та нехтування тими чи іншими його властивостями. Низку публікацій з цього приводу нижче ми згрупуємо за

окремими напрямами досліджень.

Ізотропні моделі періодонта. Цей підхід властивий числовому аналізу багатокомпонентних моделей зуба засобами сучасних потужних універсальних програмних комплексів, які реалізують схеми МСЕ для широкого класу задач [133, 177, 64]. Одним з прикладів такого дослідження є праця [64], де в межах лінійної теорії пружності та за припущення ізотропності пародонта проведено числовий експеримент на тривимірних скінченно-елементних моделях поведінки зуба за умови різноманітних силових навантажень. Велику увагу приділено обчисленню ефективних усереднених (для моделювання ізотропії) фізико-механічних характеристик пародонта, для чого виконано значний обсяг високоточних фізичних експериментів на великій кількості людей. Результатом стали значення модуля Юнга пародонта (ізотропне наближення) – 10^3 МПа,

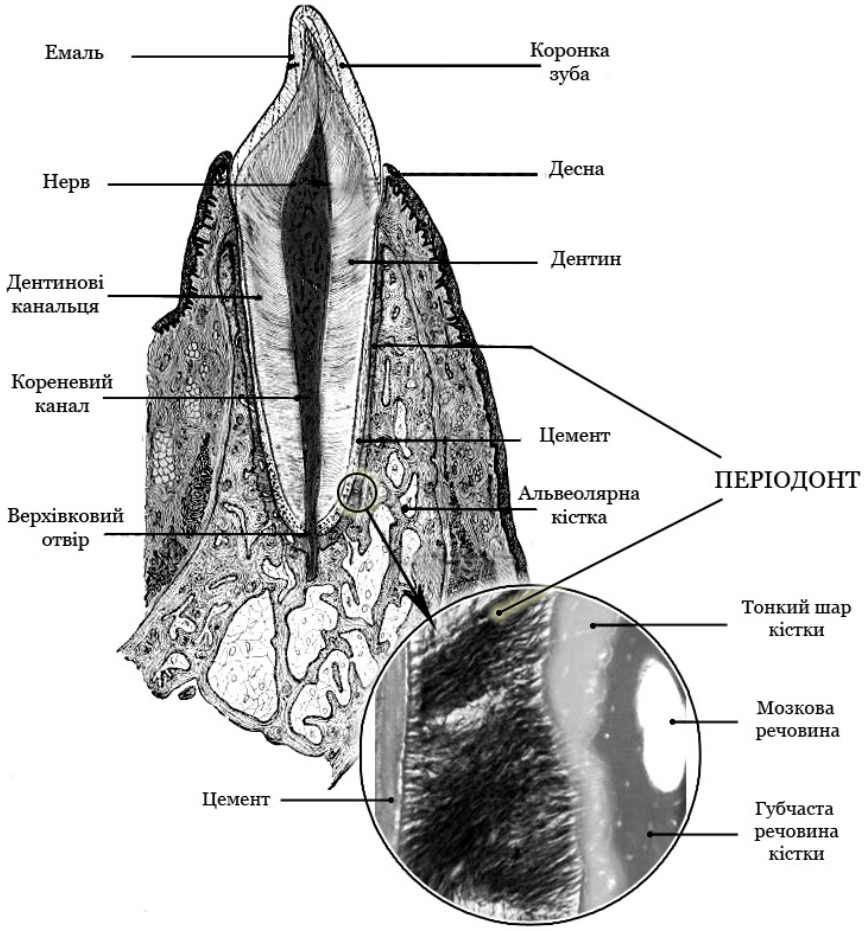


Рисунок 6.14 – Анатомія зуба людини [81]

коефіцієнт Пуассона – 0.45. У цьому разі автори звертають увагу на значну мінливість характеристик пародонта як між різними людьми, так і з їхнім віком та зі зміною інших параметрів. З огляду на це питання застосовності використаних ізотропних моделей теорії пружності для описання поведінки реальних об’єктів обмежена посиланням на висновки інших авторів. Однозначним же твердженням є принципова необхідність урахування шару періодонта для достовірного моделювання реальних процесів реакції зуба на навантаження.

Нелінійна поведінка пародонта. На відміну від інших твердих компонент зубощелепної системи, нелінійна залежність модуля Юнга пародонта від умов його навантаження є доволі відчутною. Це стало предметом низки досліджень [25, 40, 62, 92, 103]. Характерний для багатьох з них прийом застосовано в [25], де на підставі фізичного експерименту виміряно відхилення зуба у пришийковій ділянці під дією горизонтально прикладених сил різної інтенсивності (рисунок 6.15). Визначену нелінійну залежність апроксимовано двома прямими лініями, яким відповідають два ефективні значення модуля Юнга: E1=0.085MPa, E2=4.3MPa. Однак нелінійна поведінка пародонта виявляється не тільки залежно від прикладеної сили. Наприклад, у праці [77] на підставі експериментів з зубами бика доведено, що час дії цієї сили також є джерелом нелінійності. Тому для виконання числових розрахунків пружні моделі там комбінувались з в’язкопружними.

Анізотропні моделі періодонта. Фіброволоконна будова пародонта чітко відображає структуру його анізотропії, яка визначена двома головними напрямами – удовж і впоперек волокон. Тому різноманіття моделей у публікаціях [10, 64] обмежене вибором того чи іншого напряму волокон з урахуванням різних параметрів жорсткості цих волокон на розтяг та стиск. Внутрішнє розміщення шару періодонта разом зі швидкою втратою його властивостей поза межами живого оточення сильно ускладнює пряме фізичне експериментування з його тканинами. Тому більшість числових досліджень [25,

66] мають на меті лише якісний аналіз головних характеристик його поведінки у широкому (гіпотетичному) діапазоні зміни фізико-механічних параметрів пародонта.

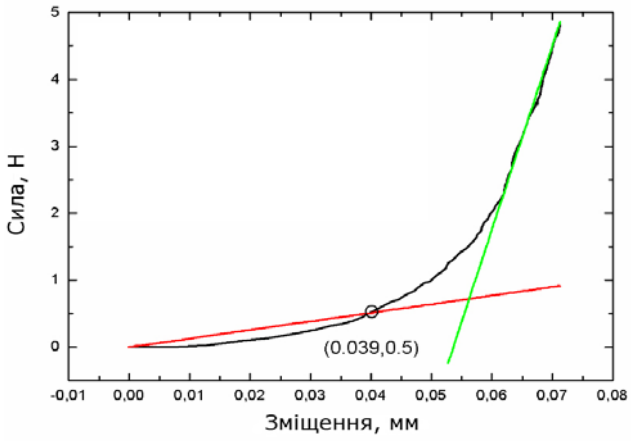


Рисунок 6.15 – Залежність зміщень шийки зуба від величини горизонтально прикладеної сили

Типовим таким дослідженням є праця [64] , у якій засобами скінченно-елементного аналізу з позицій вивчення зміщень центрів опору та обертання зуба виконано порівняння його реакції на навантаження за умов вибору трьох характерних напрямів фіброволокон: горизонтальний, нормальний до межі періодонта та відповідний експериментальним даним. Доволі несподівано найбільшу відповідність фізичним спостереженням продемонструвала модель із горизонтальним напрямом волокон, при чому таке їхнє розташування не відповідає реальній анатомії зуба. Отож, для уточнення вибраної моделі треба враховувати додаткові особливості поведінки періодонта. Серед претендентів на включення в модель автори зазначають той факт, що періодонт містить 14 різних типів фіброволокон у перехресних напрямах з різною концентрацією по висоті зуба.

Для продовження обговорення сучасних проблем у моделюванні періодонта звертаємо увагу на працю [40], у якій ретельно узагальнено дослідження пародонта багатьма авторами, (таблиця 6.3).

Таблиця 6.3 – Фізико-механічні властивості пародонта людини, використані у попередніх працях

Посилання	**Модуль Юнга, МРа**	**Стала Пуасона**	**Зуб**	**Метод**
Yamada(1970)	1,4	–	Усі зуби	Експеримент
Thresher and Saito (1973)	1379	0,45	Верхній різець	2d-МСЕ
Atkinson and Ralph (1977)	3,8	–	Нижній премоляр	Експеримент
Yettram et al. (1977)	0,18	0,49	Верхній різець	2d-МСЕ
Takahashi et al.(1980)	9,8	0,45	Нижні зуби	2d-МСЕ
Atmaran and Mohammed (1981)	175–350***	0,45	Моляр	2d-МСЕ
Williams and Edmundson (1984)	0,5–100**	0–0,45**	Однокореневий	2d-МСЕ
Mandel et al. (1986)	3	–	Нижній премоляр	Експеримент
Siegele et al. (1986)	0,26; 8,5*	0,28	Верхній різець	2d-МСЕ
Tanne et al. (1987)	0,69	0,49	Нижній премоляр	3d-МСЕ
Farah et al. (1988)	6,9	0,45	Нижній моляр	2d-МСЕ
Andersen et al. (1991)	0,07	0,49	Нижній премоляр	Експеримент, 3d-МСЕ
Jones et al. (2001)	1	0,45	Верхній різець	Експеримент, 3d-МСЕ
Middleton et al. (1996)	0,75–1,5***	0,45	Ікло	2d-МСЕ
Rees and Jacobsen (1997)	50	0,49	Нижн. премоляр	Експеримент, 2d-МСЕ
Yoshida et al. (2001)	0,25–0,96**	0,45	Верхній різець	Експеримент, 3d-МСЕ
Poppe et al. (2002)	0,05; 0,28*	0,30	Різці, ікла	Експеримент, 3d-МСЕ

*Розрахунки з урахуванням білінійної поведінки модуля пружності. **Розрахунки з урахуванням різних значень модуля Юнга. ***Розрахунки з урахуванням двокомпонентної структури періодонта.

6.3.3 Моделі в імплантології

Комп'ютерні моделі "живих" зубів людини дають змогу пояснити, а отже, і запобігти розвитку окремих негативних процесів, що призводять до захворювання зубощелепної системи. Втім до керування ні геометричними формами, ні фізико-механічними параметрами жива система зі зрозумілих причин не надається. Звідси стає зрозумілою особлива увага дослідників до сфери ортопедії з її широким набором задач оптимізації конструкцій у протезуванні.

Як і в лікувальній стоматології тематичні напрями досліджень задач ортопедії розвивались за принципами відповідності практичних потреб поточному рівню розвитку обчислювальної техніки. Відповідно до цих напрямів розглянемо окремі публікації.

Пломби та інші імплантати живого зуба. Пломби є найпоширенішими і найзручнішими для аналізу а допомогою числових методів протезами, через що їхньому вивченню присвячена велика кількість праць. Доволі умовно їх можна згрупувати за трьома розділами.

Найчисленніші за кількістю публікацій дослідження залежності пружно-деформованого стану зуба від геометричних характеристик пломби. Типовими прикладами таких праць є [139, 5, 99], де вивчено параметри міцності системи зуб - пломба залежно від товщини збережених бічних стінок зуба за різних умов реставрації (наприклад, з внутрішнім або зовнішнім розміщенням імплантанта) та функціонального навантаження.

Значна кількість публікацій (наприклад [129, 80]) містить порівняльний аналіз поведінки різноманітних матеріалів (метал, пластмаса, кераміка, композити та ін.) як наповнювачів пломби. Предметом обговорення тут є проблеми технологічної взаємодії штучних матеріалів з тканинами зуба та між собою, раціональний підбір фізичних характеристик імплантатів тощо.

Доволі часто трапляються праці із включенням у досліджувані моделі різноманітних додаткових параметрів та шуканих величин. Зокрема в [2, 15] вивчено вплив температури на функціональну придатність вкладок з різноманітними коефіцієнтами теплового розширення.

Штифтові та еластичні включення. Методика уведення металевого штифта в канал кореня зруйнованого зуба для фіксування його штучної коронкової частини сьогодні широко запроваджена у практику протезування [161, 211, 49, 97] (рисунок 6.16).

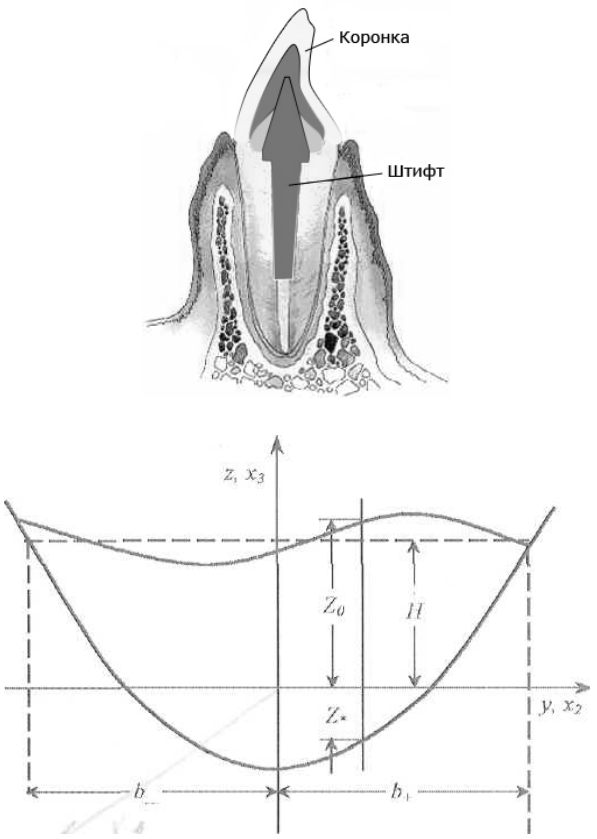


Рисунок 6.16 – Штифтове включення [211]

Проте механіка такого з’єднання кореня і базису пов’язана із вкрай високим рівнем концентрацій напруженого стану в околі їхнього контакту зі штифтом. Дослідженням з цього приводу присвячена велика кількість публікацій [131, 161, 47, 51, 89]. Серед вирішуваних у них проблем центральним є питання підбору оптимальних за функціональністю

геометричних та фізичних параметрів штифта, які забезпечують надійне з'єднання елементів протеза між собою за допустимого рівня пружного стану в околі контакту. Наприклад, у [89] для цього виконано порівняння МСЕ-моделі здорового зуба та відновленого за допомогою конусоподібного, циліндричного й інших типів штифтів, виготовлених зі сталі, титану, карбону, скловолокна.

Низка праць [161, 47] містить аналіз проблеми забезпечення потрібного розподілу навантаження від штучного базису зуба між його коренем та слизовою. У цьому напрямі показовими є дослідження [161], у яких завдяки введенню еластичного прошарку між протезом та слизовою досягають рівномірного навантаження слизової по всій площі контакту.

Аналіз взаємодії імплантатів з прилеглими кістковими тканинами. Ділянка контакту будь-якої живої тканини та імплантата апріорі містить потенційну небезпеку взаємної несумісності і, вочевидь, стоматологія не є винятком. Це пояснює значну кількість досліджень у напрямі запобігання ресорбції кісткової тканини та виникненню інших різноманітних дегісценцій [145, 104, 42]. Із біомеханічних чиників у літературі найчастіше вивчають вплив функціонального навантаження на концентрацію напружень у зоні контакту. Переважно для цього застосовують 2D та 3D МСЕ-моделі. Зокрема, в [124] зазначено, що штифтові з'єднання значно ліпше працюють в умовах вертикальних осьових навантажень, аніж під дією горизонтальних складових зусиль, які здебільшого притаманні переднім різцям, а отже, їм не рекомендовані. Схожі дослідження для місткоподібних конструкцій виконані в [145].

Стабілізувальний вплив шару періодонта на загальний напружений стан зуба послугував прототипом цікавої ідеї про кріплення металевого штифта у дентині кореня зуба не класичним жорстким цементним склеюванням, а за допомогою м'якої прокладки, так званого пери-імплантанта, що клінічно подібний до м'якої тканини навколо здорового зуба. В [31] на 2D та 3D моделях проаналізовано напружений стан в околі такого з'єднання. Підтверджено

підвищену стійкість досліджуваної системи з імплантатом до динамічних навантажень.

Для пацієнтів з вузькими альвеолярними кістковими відростками використання імплантантів поєднують з підвищеним ризиком механічного перевантаження кісткової опори. Серед досліджень у цьому напрямі варто назвати [33].

Протезні конструкції загалом (у тім числі багатоелементні та місткоподібні). Потреби числового моделювання поведінки навіть окремого зуба через складність його багатошарової геометрії в багатьох випадках перевищують можливості сучасної комп'ютерної техніки. Тому розрахунки цілого щелепного апарату людини чи навіть його частини потребують настільки значного спрощення моделей окремих його елементів, що отримувані результати можуть претендувати максимум на якісний характер.

Дещо ліпша ситуація з багатокомпонентними протезними конструкціями, які за не менш складної форми, аніж зуби, все ж мають значно простішу внутрішню будову. Переважна кількість публікацій у цьому напрямі присвячена вивченню трьох типів цих конструкцій: місткоподібних протезів, частково знімних та бюгельних [145, 160, 104, 44].

Типовим прикладом таких досліджень є праця [160], у якій розглянуто 2D модель заміщення двох премолярів та одного моляра протезом за умови вертикального навантаження (рисунок 6.17). Аналіз напруженого стану в системі із застосуванням різних конструкцій протеза дав змогу для цього випадку пропонувати саме бюгельний варіант, який забезпечує найоптимальніший розподіл жувального навантаження на опорні зуби і протезне ложе.

Складність 3D моделей для багатокомпонентних протезів спонукає дослідників поєднувати числові та натуральні експерименти, як це зроблено, наприклад, у [145]. Для звуження галузі, яку вивчають, до прийнятних за кількістю обчислень меж частину крайових умов на її границі отримують

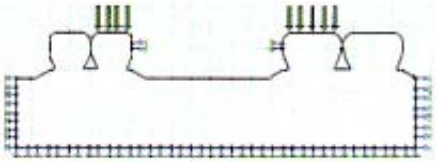


Рисунок 6.17 – Точки закріплення навантажень у разі заміщення дефекту зубного ряду мостоподібним протезом [160].

тензометричними вимірюваннями. Втім за розглянутих у праці умов протезування та функціонального навантаження на конструкцію обчислений рівень напруженого стану в ділянці контакту живої тканини та протеза наближається до фізіологічно допустимого. Це приводить до доволі типової для цього напряму досліджень ситуації, коли для надійного обґрунтування тих чи інших висновків та рекомендацій у модель необхідно закладати свідомо достатній запас міцності для компенсації динамічних, нелінійних, мікробіологічних та інших чинників ризику руйнування протезних конструкцій. Зокрема, оцінка розміру нелінійної складової напруженого стану для жорстких та нежорстких видів з’єднань вивчена в [44].

Задачі оптимізації у протезуванні. Ітераційність відомих сьогодні методів оптимізації числових моделей передбачає цілеспрямований перебір допустимих варіантів конструкції протеза. Проте якщо функцію цілі тут доволі легко визначити (допустимий рівень напружень, максимальна вага, тощо), то формулювання геометричних обмежень для числової моделі виглядає реальним лише для найпростіших за формою імплантантів. Це підтверджує порівняно невелика кількість знайдених нами публікацій у цьому напрямі, серед яких до огляду пропонуємо [141, 173, 42]. Зокрема, в [7] розглянуто задачу про проектування незнімного протеза у випадках кінцевого дефекту зубного ряду та повної відсутності зубів за методикою, що передбачає наявність деякої кількості імплантантів як опор для майбутньої протезної конструкції. Для оптимізації їхньої кількості та геометричних параметрів (довжини та діаметра) засобами програмного комплексу FEMLAB побудовано МСЕ-модель

(рисунок 6.18), за допомогою якої контролювали рівень пружно-деформованого стану кістки щелепи. На підставі низки числових експериментів дано чіткі рекомендації щодо кількості, розміщення та параметрів імплантованих штифтів.

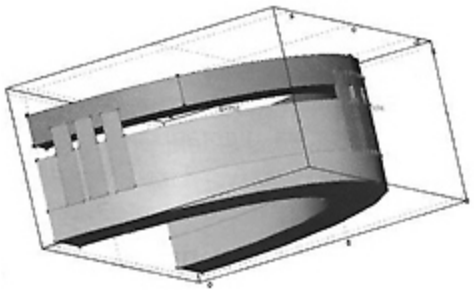


Рисунок 6.18 – Графічна модель повної відсутності зубів нижньої щелепи, заміщеної незнімним протезом з опорою на остеоінтегровані імплантати [141]

6.3.4 Програмне забезпечення комп'ютерного моделювання у стоматології

Перші прикладні програми аналізу поведінки зуба за умов функціонального навантаження реалізували доволі специфічні (з огляду на вимушену простоту) математичні моделі. Головним завданням був пошук витончених засобів боротьби зі слабкістю тогочасної обчислювальної техніки, через що розробка таких програм, межуючи з мистецтвом, потребувала значних затрат.

Поява МСЕ, підтримана вибуховим зростанням потужності комп'ютерів, привела до створення універсальних програмних комплексів як автоматичного проектування (AutoCAD [47], SolidWorks [216], Pro/ENGINEER та ін.), так і багатоцільових програм, що реалізують МСЕ (ANSYS [43, 25, 89], ABAQUS [30, 47, 58, 66], COSMOS [216, 10, 40, 103], NASTRAN [8], PATRAN [7, 37] та ін.). Опираючись на універсальність і надійність їхніх засобів моделювання, переважна більшість дослідників тепер змогла зосередитись на вирішенні

безпосередніх задач у вибраній галузі. З цієї причини, зокрема в стоматології, в оглянутих нами сучасних наукових публікаціях авторські програмні розробки майже не трапляються.

Проте універсальність потужних програмних комплексів зручна за умови розв'язування задач для конструкцій, що складаються з частин класичної геометрії. Побудова ж сітки скінченних елементів для реальних стоматологічних об'єктів саме через цю універсальність украй трудомістка, особливо, коли йдеться про необхідність варіювання геометрією досліджуваного об'єкта. Очевидною є потреба у розробці та уніфікації спеціалізованих до задач стоматології засобів тріангуляції складних багатокомпонентних областей [161, 177, 104].

Проблеми з просторовою дискретизацією особливо відчутні в разі запровадження комп'ютерного аналізу в клінічну практику [205, 218]. Крім обчислювальної техніки, вочевидь, додатково потрібні засоби сканування геометрії досліджуваного об'єкта. Класичним прикладом такого тандему є прилади родини CEREC, що містять програмний пакет конструювання CEREC 3D [205]. Спеціалізація таких програмно-апаратних комплексів забезпечує швидкий аналіз моделі вибраного об'єкта, однак платою за це є слабка їх придатність для наукових досліджень.

6.3.5 Висновки

Отже, початкове різноманіття в моделях та способах їхнього дослідження перших праць у галузі стоматологічної біомеханіки поступово зникає. Тематика публікацій у цьому напрямі стає щораз усталенішою з постійним ухилом у бік експериментування з численними моделями, зреалізованими засобами стандартних МСЕ-пакетів.

Сьогодні день визнаною математичною моделлю поведінки зубощелепної системи за умов функціонального навантаження є рівняння тривимірної теорії пружності. Розроблені відповідні комп'ютерні моделі доволі успішно долають більшість проблем, пов'язаних із складною геометрією та шаруватою структурою стоматологічних об'єктів. Очікуване подальше зростання потужності обчислювальної техніки вже в недалекому майбутньому дасть змогу аналізувати повну модель зубощелепного апарату з імплантантами та протезними елементами включно.

Однак ці доволі оптимістичні прогнози в наукових публікаціях сьогодні звучать уже не так впевнено, як раніше. Щораз частіше з'являються свідчення, що такий погляд на моделювання задач біомеханіки поступово переживає себе. Уточнення комп'ютерних моделей екстенсивним шляхом згущення скінченно-елементних сіток виправданий (можливо) більше для геометрично складних систем, які добре надаються до наближення лінійними моделями. Багатокомпонентні ж конструктивно складні сильно неоднорідні біосистеми переважно демонструють нелінійну поведінку, що у черговий раз засвідчує приклад з вирішальним для поведінки зубощелепної системи значенням прошарку періодонта.

Головною розвиненою методологією сучасного апарата числового аналізу нелінійних задач залишається все та ж їхня лінеаризація. Отже, до уваги беруть лише перші головні власні форми взаємодії системи з навколишнім середовищем. Щодо до біосистем такий підхід у багатьох випадках виявився занадто спрощеним. На наш погляд, перспективу подальшого розвитку матимуть нелінійні моделі у парі з новими сучасними синергетичними підходами до їхнього аналізу.

6.4 Комп'ютерне моделювання багатокореневих зубів в умовах силового навантаження

У сфері стоматології складність геометрії об'єктів дослідження є головною проблемою їх комп'ютерного моделювання. Відомі програмні пакети скінчено-елементного аналізу багатокомпонентних просторових конструкцій неповно підтримують украй некласичні шаруваті форми стоматологічних об'єктів, оскільки їх графічні засоби побудови розрахункових сіток спрямовані на максимальну універсальність досліджуваних задач. Через це більшість сучасних публікацій на дану тематику обмежуються аналізом напружено-деформованого стану зуба у значній мірі спрощеною геометрією, зокрема найчастіше в однокореневому варіанті. Наявність декількох коренів принципово змінює поведінку зуба під навантаженням (що використано природою для найкращої відповідності окремих типів зубів своєму функціональному призначенню), а, отже, й потребує вивчення.

Згадані проблеми комп'ютерного моделювання багатокореневих об'єктів до недавнього часу отримували за фізичним експериментом (фотопружні системи, лазерна голографічна інтерферометрія) як основного інструменту здобування інформації про їх поведінку в умовах функціонального навантаження. Однак, постійне зростання потужності обчислювальної техніки та удосконалення алгоритмів дискретизації досліджуваних областей зумовлюють все частішу появу у літературі чисельних експериментів з такими об'єктами, наприклад, з двокореневими нижньощелепними премолярами [103]. Втім, авторам даної публікації так і не вдалось знайти опублікованих результатів чисельного аналізу специфіки поведінки трикореневих зубів під навантаженням [171]. Заповнення цієї прогалини є метою даної роботи.

6.4.1 Матеріал і методи дослідження

Поставимо за мету продемонструвати якісну картину реакції напруженого стану трикореневого зуба на функціональне навантаження. До розгляду візьмемо нижньощелепний трикореневий моляр, геометричні параметри якого подані у таблиці 6.4, а математичну модель напружено-деформованого стану

Таблиця 6.4 – Геометричні виміри шарів зубів

	В області шийки зуба	На поверхні коронки	На апексі кореня
Нерв	3мм	-	-
Дентин	0,5мм	2мм	0,5мм
Емаль	0,5мм	0,5мм	-
Кістка	0,5мм	-	-

матеріалу зуба в умовах силового навантаження виберемо тривимірні рівняння статичної теорії пружності. Задачу відшукання вектора переміщень опишемо наступним чином.

Нехай система зуб-кістка займає зв'язну область Ω з кусково-гладкою границею Γ (див. рисунок 6.19).

Знайти $u = \left(u_x, u_y, u_z \right) \in \Omega$ такий, що задовільняє наступні співвідношення:

– рівняння рівноваги $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ в Ω,

– закон Гука для ізотропного тіла $\sigma_{ij} = \partial \varepsilon_{ij}$ в Ω,

– крайові умови навантаження $\sigma_{ij} \cos\left(n, x_i\right) = F_{x_i}$ на Γ_σ,

– крайові умови закріплення $u_{x_i} = 0$ *на* Γ_u,

де $\sigma_{ij}, \varepsilon_{i,j}$ $(i, j = \overline{1,3},)$ – компоненти тензорів напружень та деформацій, $P = \left(P_x, P_y, P_z \right)$ – вектор навантаження, $\Gamma = \Gamma_\sigma \bigcup \Gamma_u$ – границя області.

Побудову чисельних схем розв’язування даної задачі виконано із застосуванням методу Гальоркіна з просторовою апроксимацією за методом скінчених елементів (МСЕ) [88, 104]/

Для відтворення складної геометрії досліджуваної області авторами розроблено спеціалізоване програмне забезпечення (DENTA-FEM.3D), яке на відміну відстандартних пакетів з використанням 3D-сканувань, дає змогу гнучко експериментувати з некласичними формами складових шарів зуба з можливістю контролю за якістю просторової дискретизації. В основу універсальності цього забезпечення покладено можливість подання складових елементів всієї системи у вигляді довільного набору криволінійних шестигранників (суперелементів), на кожному з яких сітка скінчених елементів генерується з використанням ізопараметричних перетворень координат сирендипового типу. Розроблено оптимальні способи збереження інформації про зв’язки між суперелементами та рекурсивні алгоритми об’єднання їх поділу у єдину сітку скінчених елементів.

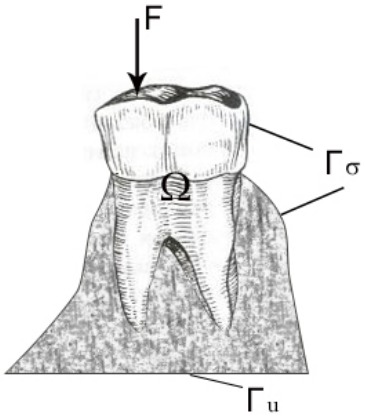


Рисунок 6.19 – Система зуб-кістка

Такий підхід забезпечує мінімізацію кількості вхідних даних про геометрію шарів зуба, а також простоту модифікації їх кількості та форми у залежності від потрібного напрямку досліджень.

Модель зуба, вибраного у даній роботі для дослідження, отримали шляхом виокремлення прямокутного сегменту у щелепі, як це показано на рисунку 6.20. На сторони бічних зрізів кістки накладено крайові умови симетрії нормальних переміщень а її нижня грань вважається жортско закріпленою (це відзначено чорним кольором на рисунку 6.22.)

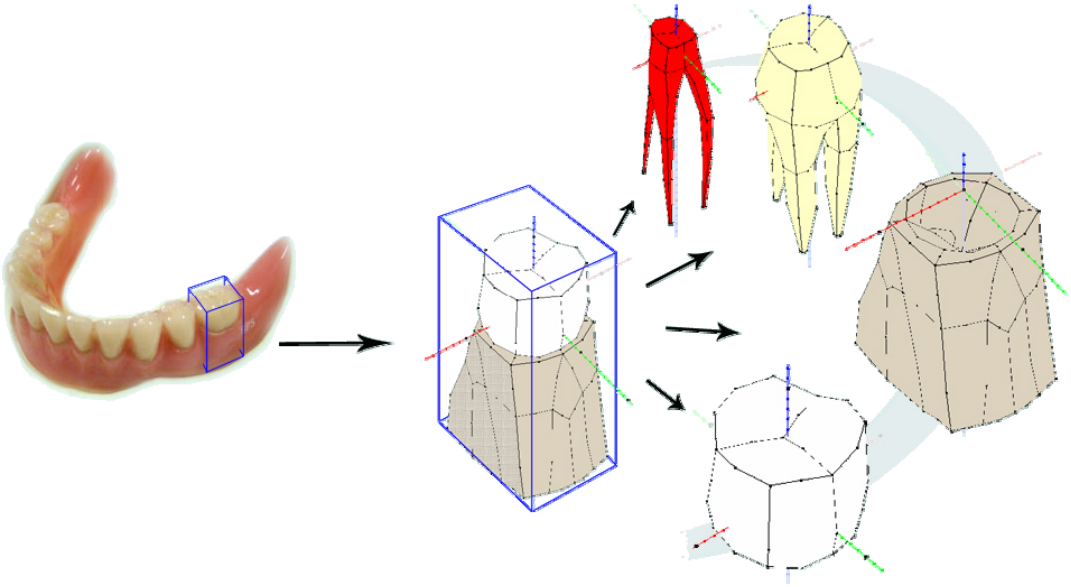


Рисунок 6.20 – Компонентна структура просторової моделі трикореневого зуба

У дослідженні враховано чотири шари зуба: нерв, дентин, емаль та кістку. Матеріали цих компонент вважаємо ізотропними. Механічні властивості більшості з них, зокрема значення модуля Юнга і сталої Пуасона (див. таблицю 6.5), дають змогу моделювання зубо-щелепного сегменту як окремого твердого деформівного тіла. Виняток становить лише пульпа, структура якої являє собою м’яку волокнисту речовину, нелінійністю параметрів якої, на наш погляд, можна знехтувати.

Таблиця 6.5 – Механічні властивості матеріалів зубів

Шари зуба	**Модуль Юнга, E (MPa)**	**Стала Пуасона, P**
Кістка	2x103	0,3
Емаль	8x104	0,3
Дентин	2x104	0,3
Пульпа (нерв)	2,03	0,45

Засобами DENTA-FEM.3D геометрія досліджуваного тіла та його шарів описується множиною з 52-ох суперелементів (рисунок 6.21), на основі яких згенеровано сітку з 678 скінченнх елементів (1235 вузлів) (рисунок 6.22). При цьому передбачено згущення сітки в областях апріорі найбільш чутливих до руйнівних напружень при навантаженнях: тонкі стінки твердих шарів, стики різних середовищ, тощо.

Приймемо, що на оклюзивну область емалі діє постійний у часі тиск інтенсивності F=200H. Фізіологічні процеси жування, що відбуваються з участю багатокореневих зубів, характеризуються головним чином вертикальними навантаженнями їжі на зуб або зуба на зуб. Тому напрям сили тиску вважатимемо нормальним до поверхні прикладання.

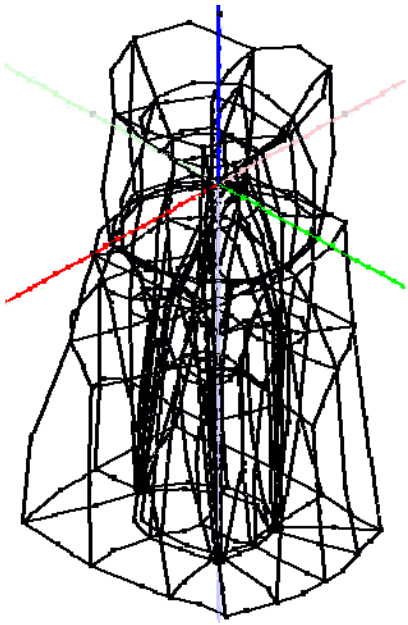


Рисунок 6.21 – Сітка суперелементів трикореневого зуба

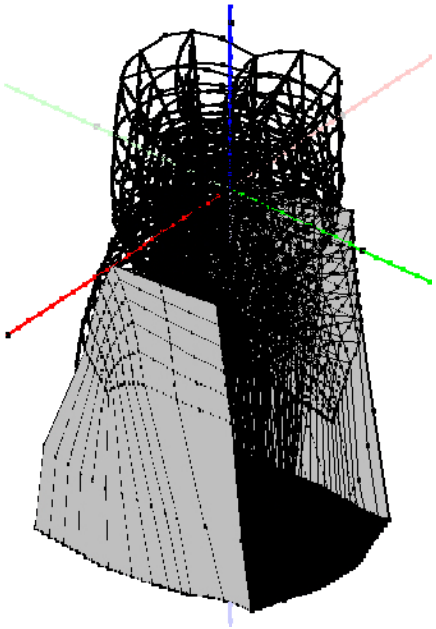


Рисунок 6.22 – Сітка скінчених елементів трикореневого зуба

6.4.2 Результати дослідження та їх обговорення

Розглянемо два принципово різних випадки вертикального навантаження: на повну поверхню коронкової частини зуба (рисунок 6.23а) та локальне навантаження на її частину (рисунок 6.23б,д,с).

У першому випадку (рисунок 6.23а) зусилля головним чином зосереджені на стику шарів зуба та на його поверхні, особливо у пришийковій ділянці (б – дентин, с – емаль, д – кістка). Тут і далі червоним кольором зображено розтягуючі головні напруження, а синім – стискаючі. Насиченість кольору позначає рівень напруженого стану.

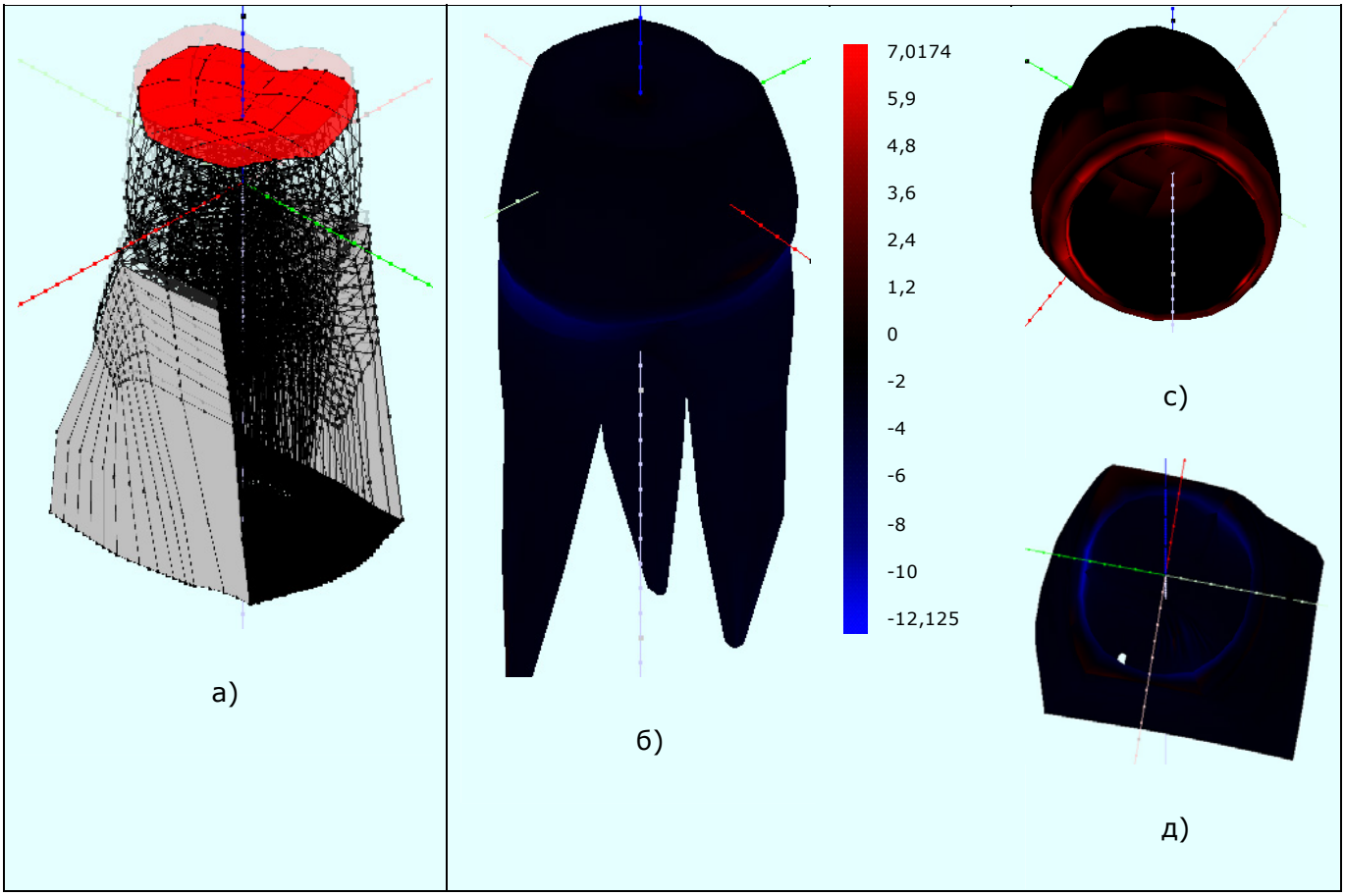


Рисунок 6.23 – Якісна картина розподілу напружень в трикореневому зубі: а) навантаження(червоним) і закріплення(сірим і чорним) зуба, напівпрозорим видно деформації; б, в, г) якісна картина розподілу напружень, що виникають у дентині, емалі та кістці відповідно.

Спостерігається концентрація розтягуючих напружень на зовнішній стороні емалі близько до шийки зуба і стискаючих – з її середини. Зосередження зусиль (через твердість емалі) на тонкому краю створює умови для виникнення надщерблень та мікротріщин у пришийковій ділянці, а відтак і подальшого її руйнування, що підтверджується стоматологічною практикою.

Відносно невеликі в цілому значення напружень в матеріалі дентину загрозливо зростають у тому ж пришийковому районі. У порівнянні з емаллю ці значення є на порядок меншими, проте через пористу структуру дентину можуть провокувати відомі з практики випадки клиновидного дефекту [174].

Таким чином, значну частину стискаючих напружень на зуб приймають на себе дентин і кістка в області шийки моляра. Як і дентин, кістка є пористим матеріалом, що підсилює ступінь вразливості зуба і створює додаткову небезпеку його руйнування. Втім, остаточність даного твердження потребує подальшої перевірки, позаяк у здоровому зубі природою передбачена наявність тонкого волокнистого прошарку між кісткою і дентином – періодонту, що значно зменшує навантаження на опорні тканини щелепи. Функціональна потреба у такому шарі особливо відчутна при встановленні імплантатів у щелепу людини, де основа штучного зуба (міцний металевий штифт чи гвинт) жорстко стикується з шарами кістки.

У моделі трикореневого зуба, що досліджується, шар періодонту не враховується у зв’язку з обмеженістю ресурсів комп’ютера. Проте вивчення властивостей та поведінки даного шару у одно- і двокореневих зубах є метою подальших досліджень авторів даної роботи.

Інший спосіб навантаження зображено на рисунку 6.24а.

Стискаючі і розтягуючі напруження на поверхні шарів зуба тепер розподіляються наступним чином: в областях під навантаженням домінюють додатні значення, відповідно на решті ділянках – від’ємні.

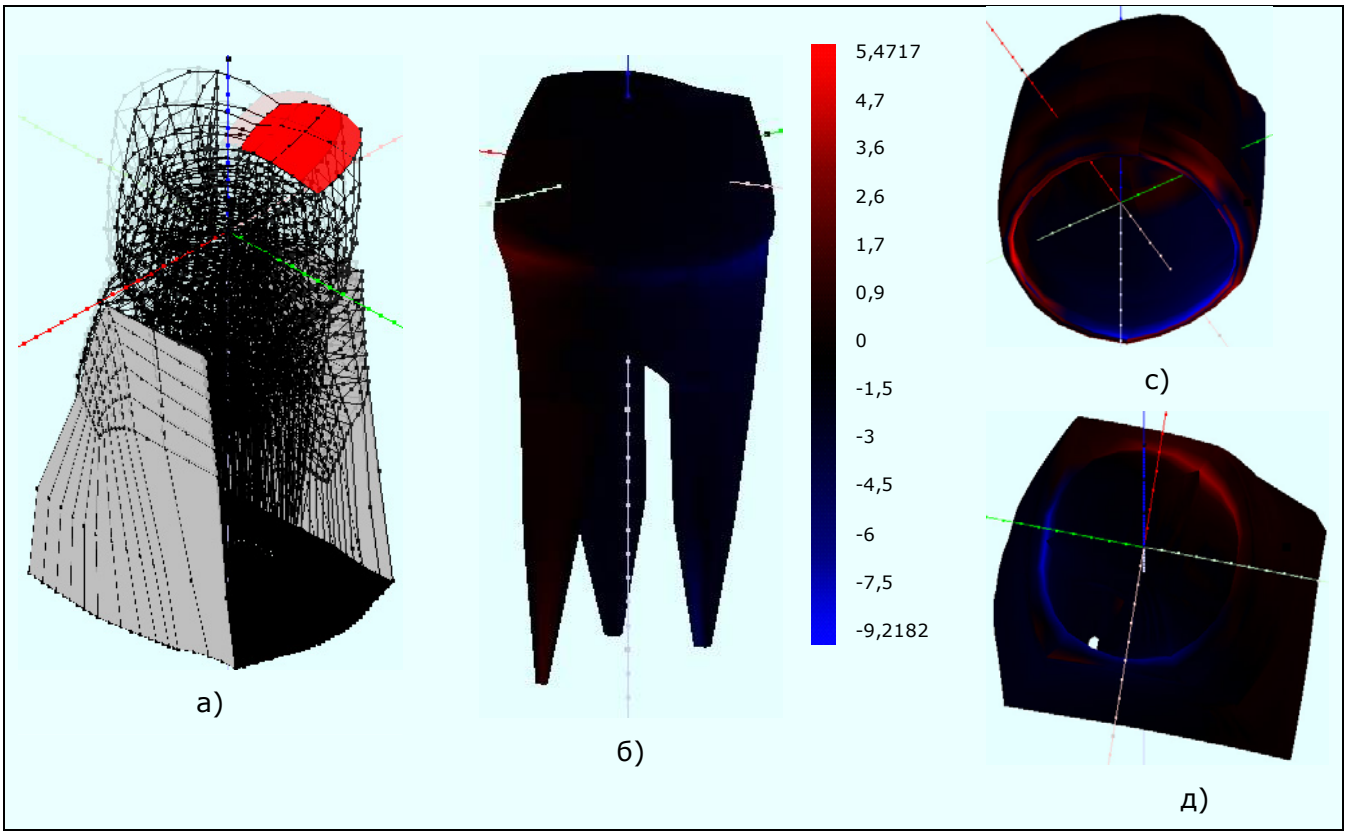


Рисунок 6.24 – Якісна картина розподілу напружень в трикореневому зубі: а) навантаження(червоним) і закріплення(сірим і чорним) зуба, напівпрозорим видно деформації; б, в, г) якісна картина розподілу напружень, що виникають у дентині, емалі та кістці відповідно.

Реакція зуба на жувальне навантаження, розподіл подрібненої їжі у щелепі, а також ріст нових зубів у щелепі, можуть провокувати виникнення напружень від дії сусідніх зубів. Цей випадок моделюємо прикладенням тиску до бічної поверхні коронки зуба (рисунок 6.25а).

На відміну від попередніх двох розглянутих способів, у даному випадку максимальне абсолютне значення розтягуючих головних напружень є більшим, ніж стискаючих.

Запропоновані у роботі алгоритми побудови просторових скінчено-елементних сіток дають змогу будувати якісні тривимірні апроксимації складних багатошарових стоматологічних об’єктів.

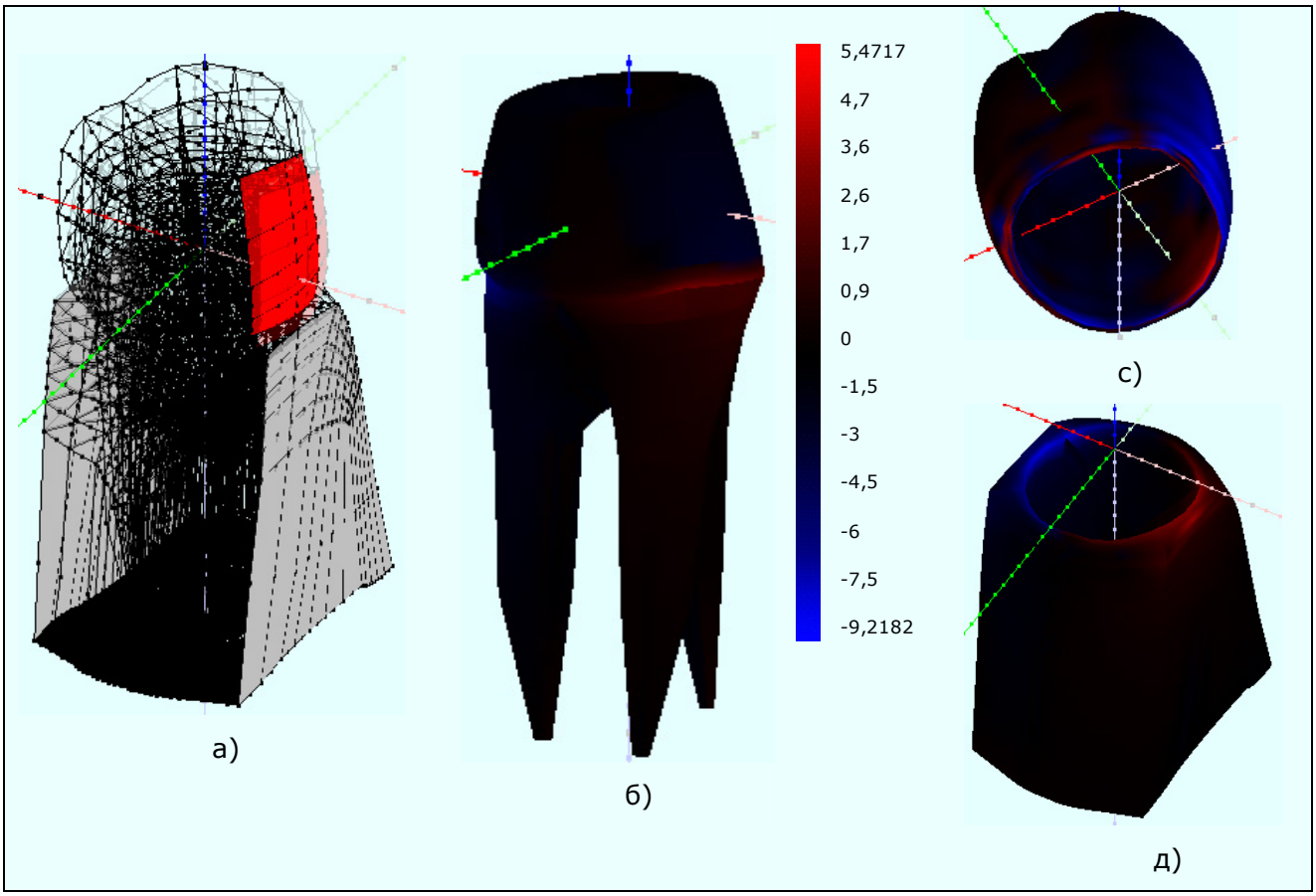


Рисунок 6.25 – Якісна картина розподілу напружень в трикореневому зубі: а) навантаження(червоним) і закріплення(сірим і чорним) зуба, напівпрозорим видно деформації; б, в, г) якісна картина розподілу напружень, що виникають у дентині, емалі та кістці відповідно.

Отримана з їх допомогою трьохвимірна модель багатокореневого зуба є достатньо детальною для формування якісної картини напружено-деформованого стану трикореневого моляра в умовах функціональних навантажень.

На основі низки чисельних експериментів з цією моделлю доведено, що найбільші руйнівні напруження у зубі виникають на стику шару емалі та дентину у пришийковій ділянці за будь-яких умов силового навантаження.

Якихось специфічних значних концентрацій напруженого стану, що викликані наявністю у зубі саме трьох коренів у проведених дослідженнях не виявлено.

6.5 Визначення нестаціонарного температурного поля в пластині за змішаних умов теплообміну на основі штучних нейронних мереж

Розв'язуванню стаціонарних і нестаціонарних температурних задач присвячено багато праць. У кожному конкретному випадку вибір методу розв'язування залежить від складності досліджуваної задачі, простоти числової реалізації математичної моделі [109, 152, 109, 110, 178, 184, 114, 115, 203, 206, 119, 225].

Розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності пластин із композитних матеріалів мають важливе практичне значення. Для розрахунку пластин із композитних матеріалів за дії силових і температурних полів необхідно залучати моделі, які враховують специфічні особливості матеріалу, зокрема анізотропію, термочутливість. У цьому разі певне ускладнення математичної моделі потребує застосування ефективних методів їхньої реалізації [167, 184]. Окрім того, зазначимо, що розв'язування відомими числовими методами [109, 178, 203, 212] параболічних диференціальних рівнянь через залежність розв'язку від часу потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому пошук нових ефективних методів розв'язування цього класу задач далі актуальний.

У [186] операторним методом і методом граничного переходу отримано точні й наближені рівняння узагальненої теплопровідності анізотропних та ізотропних пластин. У [184] для наближеного розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності застосовано метод апроксимації функції температури та її похідної поліномами Лежандра. У такий спосіб тривимірну щодо

просторових координат температурну задачу зредуковано до двовимірної. У [167, 184] побудовані моделі враховують задані граничні умови теплообміну на лицьових поверхнях пластини. Для достатньо тонких пластин приймають лінійний розподіл температури за товщиною. Таке припущення суттєво спрощує пошук розв’язку задачі теплопровідності. У [167] наведено нестаціонарні рівняння теплопровідності тонких анізотропних пластин, побудовані методом розвинення температури в ряд за поліномами Лежандра, для таких граничних умов теплообміну на лицьових поверхнях: задані конвективний теплообмін між поверхнею пластини і зовнішнім середовищем; розподіл температури; густина теплових потоків; а також мішані умови (наприклад, на одній поверхні задано температуру, а на іншій – конвективний теплообмін, або тепловий потік та конвективний теплообмін). Один із варіантів системи диференціальних рівнянь, яка описує нестаціонарне температурне поле трансверсально ізотропної пластини, ми використаємо.

У [206] запропоновано альтернативний підхід для наближеного розв’язування початково-крайової задачі теплопровідності, що ґрунтується на реалізації проекційно-сіткової схеми мультисітковим методом на рекурентній штучній нейронній мережі. Апробацію алгоритму виконано на задачі теплопровідності стрижня й досліджено достовірність отримуваних результатів шляхом порівняння їх з розв’язками, що знайдені іншими методами.

Мета цієї роботи – дослідити можливість застосування новітньої технології штучних нейронних мереж до розв’язування нестаціонарних задач теплопровідності для пластин за змішаних граничних умов теплообміну й проаналізувати вплив параметрів анізотропії матеріалу і часу на розподіл температури.

6.5.1 Формулювання задачі

Розглянемо тонку анізотропну пластину сталої товщини $2H$, віднесену до декартової системи координат x, y, z. Координатні лінії збігаються з напрямом анізотропії. Координата z спрямована у напрямі нормалі до серединної поверхні пластини ($z = 0$ – рівняння серединної поверхні). Пластину нагріває зовнішнє середовище внаслідок теплообміну через її лицьові ($z = \pm H$) і бічну поверхні. Температури середовища на цих поверхнях є незалежними функціями. Припускаємо, що теплофізичні характеристики матеріалу пластини не залежать від температури, що спрощує математичну модель.

На лицьових поверхнях задано конвективний теплообмін між пластиною і зовнішнім середовищем згідно з законом Ньютона

$$\lambda_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \pm \alpha_z^{\pm} \left(\theta - \theta_c^{\pm} \right) = 0 \text{ при } z = \pm H, \tag{6.45}$$

де $\theta = \theta(x, y, z, \tau)$ – температура в довільній точці (x, y, z) пластини в момент часу τ; $\alpha_z^{\pm}$, $\theta_c^{\pm}$ – коефіцієнти тепловіддачі і температура середовища на поверхнях $z = \pm H$.

Якщо внутрішні джерела тепла відсутні, то температуру анізотропної пластини в момент часу τ визначають з рівняння теплопровідності [185]

$$\Delta \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a_z} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \tag{6.46}$$

де $\Delta = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $k_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{zz}}$ $(i, j = x, y)$; $a_z = \frac{\lambda_{zz}}{c_v}$ – коефіцієнт температуропровідності в напрямі осі z; λ_{ij} – коефіцієнти теплопровідності.

Розв’язок рівняння (6.46) повинен задовольняти, крім умови (6.45), ще початкову умову, яка задає розподіл температури у пластині в початковий

момент часу $\tau = 0$, а також граничні умови теплообміну на її бічній поверхні. Початкова умова має вигляд

$$\theta(x, y, z, \tau) = \theta_0(x, y, z) \text{ при } \tau = 0, \tag{6.47}$$

де $\theta_0(x, y, z)$ – відома функція.

Для формулювання задачі теплопровідності пластини використовують такі граничні умови теплообміну з зовнішнім середовищем: а) граничні умови першого роду (на поверхні пластини задано розподіл температури); б) граничні умови другого роду (задано густину теплового потоку); в) граничні умови теплообміну третього роду (потік тепла через поверхню пластини пропорційний до різниці температур поверхні пластини та зовнішнього середовища). У випадку змішаних граничних умов теплообміну на частинах поверхні пластини задають різні з перелічених вище умов. Розглянемо випадок, коли одна частина бічної поверхні пластини теплоізольована, а на другій її частині задана температура.

Визначення нестаціонарного температурного поля в анізотропній пластині навіть зі сталими теплофізичними характеристиками у точному формулюванні пов’язане зі значними, не завжди подоланними математичними труднощами. Тому для розв’язування такого класу задач застосовують різного рівня апроксимаційні моделі, числова реалізація яких передбачає розвиток ефективних високоточних методів. Далі сформулюємо математичну модель нестаціонарної теплопровідності трансверсально ізотропної пластини за змішаних граничних умов теплообміну в рамках першого наближення [184] та наведемо побудований ефективний алгоритм на основі ШНМ, який реалізує високоточний розв’язок досліджуваної задачі. Особливостям наближеного розв’язування лінійних крайових та початково-крайових задач з застосуванням мультисіткового ітераційного нейронного методу присвячені праці [207, 206].

6.5.2 Математична модель нестаціонарної теплопровідності тонкої трансверсально ізотропної пластини

Для визначення температурного поля, що змінюється з часом, у тонкій трансверсально ізотропній пластині за мішаних граничних умов теплообміну на її поверхнях використаємо рівняння теплопровідності [167], які є двовимірним аналогом рівняння (6.46). Рівняння отримано методом апроксимації функції температури θ та її похідної $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$ поліномами Лежандра. Відповідно до [184], визначаємо

$$\theta = \sum_{k=0}^{n} T_k p_k(z/H), \quad Q = \frac{\partial\theta}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n+1} Q_k p_k(z/H) dz,$$

де коефіцієнти розвинень T_k і Q_k пов'язані співвідношеннями $\dfrac{T_k}{H} = \dfrac{Q_{k-1}}{2(k-1)+1} - \dfrac{Q_{k+1}}{2k+1}$; $T_k = \dfrac{2k+1}{2H}\int_{-H}^{H}\theta p_k(z/H)dz$, p_k – поліноми Лежандра.

Для достатньо тонких пластин приймають лінійний розподіл температури за товщиною

$$\theta = T_0 + T_1\frac{z}{H} \tag{6.48}$$

та, відповідно, $Q = Q_0 + Q_1\dfrac{z}{H} + \dfrac{1}{2}Q_2\left(3\dfrac{z^2}{H^2} - 1\right)$.

У формулі (6.48) $T_0 = \dfrac{1}{2H}\int_{-H}^{H}\theta\, dz$, $T_1 = \dfrac{3}{2H^2}\int_{-H}^{H}\theta\, z\, dz$ – інтегральні характеристики температури.

У випадку першого наближення [184] для визначення інтегральних характеристик температури T_0 і T_1 (див. формулу (6.48)) застосуємо відповідну систему двох диференціальних рівнянь з частинними похідними (першого порядку за часовою координатою і другого порядку за просторовими

координатами). Залежно від заданих граничних умов теплообміну на лицьових поверхнях $z = \pm H$ маємо зв'язану чи незв'язану систему диференціальних рівнянь відносно усереднених за товщиною величин T_0 і T_1. У цьому випадку значно спрощується пошук розв'язку задачі теплопровідності. Зазначимо таке: якщо задача теплопровідності симетрична відносно серединної поверхні $z = 0$ пластини, тобто температура зовнішнього середовища на лицьових поверхнях $z = \pm H$ однакова ($\theta_c^+ = \theta_c^- = \theta_c$) і коефіцієнти теплопровідності однакові ($\alpha_z^+ = \alpha_z^- = \alpha_z$), то замість наближеної системи двох зв'язаних рівнянь для визначення T_0 і T_1, отримаємо незв'язану систему диференціальних рівнянь теплопровідності для визначення нестаціонарного плоского температурного поля в анізотропній пластині.

Розглянемо випадок, коли температурне поле залежить тільки від координати x і часу τ, тобто $\theta = \theta(x, \tau)$. Додатково до умов (6.45), (6.47) припускаємо, що температура середовища на лицьових поверхнях $z = \pm H$ однакова й дорівнює нулю ($\theta_c^+ = \theta_c^- = 0$), нижня лицьова поверхня пластини $z = -H$ теплоізольована ($\alpha_z^- = 0$). Тоді для визначення усереднених характеристик температури, користуючись наведеними у [167] співвідношеннями, отримаємо незв'язані диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу. Записані відносно безрозмірних величин ці рівняння мають такий вигляд:

$$\Lambda_{xz} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{2\omega^+(6+\omega^+)}{\delta} T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{6.49}$$

$$\Lambda_{xz} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{15(5-\delta)}{\delta} T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{Fo}}. \tag{6.50}$$

Тут $\Lambda_{xz} = \left(\frac{\lambda_{xx}}{\lambda_{zz}}\right)\left(\frac{H}{l}\right)^2$ – параметр, який характеризує вплив анізотропії матеріалу на розподіл температури; λ_{xx}, λ_{zz} – коефіцієнти теплопровідності

матеріалу пластини у напрямі осей x і z, відповідно; l – характерний лінійний розмір пластини; $\delta = -3\left(4 + \omega^{+}\right)$; $\omega^{+} = \dfrac{H\alpha_z^{+}}{\lambda_{zz}}$ – безрозмірний параметр (критерій Біо); $\mathrm{Fo} = \left(\dfrac{H^2}{a_z \tau}\right)^{-1}$ – безрозмірний час (критерій Фур'є).

У випадку, коли у початковий момент часу $\tau = 0$ (відповідно, $\mathrm{Fo} = 0$) температура дорівнює нулю ($\theta_0 = 0$), початкова умова (6.47) з урахуванням (6.48) набуває вигляду

$$T_0(x, \mathrm{Fo}) = 0, \; T_1(x, \mathrm{Fo}) = 0 \text{ при } \mathrm{Fo} = 0. \tag{6.51}$$

Тут розглянемо такі змішані граничні умови на бічній поверхні пластини: одна частина поверхні теплоізольована (густина теплового потоку дорівнює нулю), а на іншій її частині задано температуру. Отже, нестаціонарна задача теплопровідності для трансверсально ізотропної пластини полягає у розв'язанні двох незалежних диференціальних рівнянь (6.49) і (6.50) параболічного типу за відповідних початкових (6.51) і граничних умов (6.52), (6.53) на функції T_0 і T_1:

$$\frac{\partial}{\partial x} T_0(x, \mathrm{F}_0) = 0, \; \frac{\partial}{\partial x} T_1(x, \mathrm{F}_0) = 0 \text{ при } x = 0, \tag{6.52}$$

$$T_0(x, \mathrm{F}_0) = T^*, \; T_1(x, \mathrm{F}_0) = 0 \text{ при } x = 1. \tag{6.53}$$

Умова (6.52) означає, що край $x = 0$ теплоізольований. Після того, як T_0 і T_1 будуть визначені, температуру θ у довільній точці пластини наближено обчислюємо за формулою (6.48). Не зменшуючи загальності, обмежимося випадком, коли $T_0 \neq 0$, $T_1 = 0$. У конкретному випадку за умов сформульованої задачі теплопровідності випливає, що $T_1 = 0$. З огляду на це, щоб дослідити розподіл температури $\theta(x, \tau)$ у пластині, треба визначити функцію $T_0(x, \tau)$. Для пошуку розв'язку цієї задачі реалізуємо мультисітковий метод на рекурентній нейронній мережі відповідно до схеми, детально описаної у праці [206]. Далі

закцентуємо увагу на головних фрагментах запропонованої обчислювальної схеми для розв'язування початково-крайової задачі (6.49), (6.51)–(6.53).

6.5.3 Варіаційне формулювання задачі

Для формалізації початково-крайової задачі (6.49), (6.51)–(6.53) та спрощення запису її математичної моделі уведемо нові позначення:

$$u \equiv T_0,\ u^* \equiv T^*,\ t \equiv \mathrm{Fo},\ \beta \equiv \frac{2\omega^+(6+\omega^+)}{\delta},\ \alpha \equiv \Lambda_{xz}. \tag{6.54}$$

Тоді з урахуванням (6.54) сформулюємо досліджувану задачу теплопровідності пластини у такий спосіб:

$$\begin{cases} \textit{знайти розподіл температури } u = u(x,t) \textit{ такий, що} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u = 0,\ \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T], \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,\ u(1,t) = u^* \quad \forall t \in [0,T], \\ u(x,0) = 0 \qquad\qquad \forall x \in [0,1]. \end{cases} \tag{6.55}$$

Виконаємо варіаційне формулювання задачі (6.55). Для цього введемо простір допустимих функцій

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(1) = 0\},$$

а також білінійні форми

$$m(u,v) := \int_0^1 uv\,dx \quad \forall u,v \in H := L^2(0,1),$$

$$c(u,v) := \int_0^1 \left(-\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \beta uv \right) dx \quad \forall u,v \in V.$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (6.55) набуде вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано } u_0 \in V; \\ \textit{знайти } u \in L^2\left(0,T;V\right) \ \textit{таку, що} \\ m\left(u'(t),v\right) - c\left(u(t),v\right) = 0 \qquad \forall t \in (0,T], \\ m\left(u\left(0\right) - u_0, v\right) = 0 \qquad\qquad \forall v \in V. \end{cases} \tag{6.56}$$

Для розв'язування варіаційної задачі (6.56) застосуємо обчислювальну схему, яка детально описана у [212]. На першому кроці виконаємо просторово-часову дискретизацію задачі (6.56) з застосуванням проекційно-сіткової схеми [206], а на другому кроці для розв'язування повністю дискретизованої задачі використовуємо побудовану ШНМ.

6.5.4 Дискретизація задачі за часовою змінною

Поділимо відрізок часу $[0,T]$ на N_T частин $[t_j, t_{j+1}]$ сталої довжини $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, $j = 0,\ldots,N_T$ та застосуємо кусково-лінійні апроксимації, які визначені у роботі [206], для наближення розподілу температур

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x,t) := u^j(x)[1-\omega(t)] + u^{j+1}(x)\omega(t) \\ \qquad\qquad \equiv u^j(x) + \dot{u}^{j+1}(x)\Delta t\omega(t), \quad \dot{u}^{j+1}(x) := \dfrac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\Delta t}, \\ \qquad\qquad \omega(t) := \dfrac{t - t_j}{\Delta t} \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0,\ldots,N_T - 1. \end{cases} \tag{6.57}$$

Тоді дискретизовану за часом варіаційну задачу (6.56) зведемо до однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом:

$$\begin{cases} \textit{задано початковий розподіл } u^0 = u_0, \textit{ значення} \\ \textit{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \textit{ та параметра схеми } \rho \in [0,1]; \\ \textit{знайти пару } \left\{\dot{u}^{j+1}, u^{j+1}\right\} \in V \times V \textit{ таку, що} \\ m(\dot{u}^{j+1}, v) + \rho\Delta t c(\dot{u}^{j+1}, v) = -c(u^j, v) \qquad \forall v \in V, \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t\,\dot{u}^{j+1}, \qquad j = 0,\ldots,N_T - 1. \end{cases} \tag{6.58}$$

Отримана однокрокова рекурентна схема (6.58) дає змогу обчислити апроксимації для розподілу температур $u^{j+1} \in V$ у будь-якій точці часового проміжку $[0,T]$, розв'язавши варіаційну задачу щодо швидкості зміни температури $\dot{u}^{j+1} \in V$.

6.5.5 Дискретизація задачі за просторовою змінною

Для дискретизації задачі за просторовою змінною x застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ) [225]. Поділимо проміжок [0,1] на N однакових частин (скінченних елементів) (x_i, x_{i+1}), $h = x_{i+1} - x_i = 1/N$, $i = 0, \ldots, N$. За базисні функції виберемо систему кусково-лінійних функцій Куранта $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N}$. Якщо у напівдискретизоване варіаційне рівняння (6.58) підставити розвинення апроксимації температури та її швидкості зміни за функціями Куранта у вигляді

$$\begin{cases} \dot{u}^{j+1}(x) \cong \dot{u}_h^{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{N-1} q_n^{j+1} \varphi_n(x), \\ u^j(x) \cong u_h^j = \sum_{n=1}^{N} w_n^j \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0,1],\ j = 0,\ldots,N_T, \end{cases} \tag{6.59}$$

та по черзі прийняти $v = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, N-1$, то отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left\{ m(\varphi_n, \varphi_k) + \Delta t \rho c(\varphi_n, \varphi_k) \right\} q_n^{j+1} = -\sum_{n=1}^{N-1} c(\varphi_n, \varphi_k) w_n^j, \quad k = 1,\ldots,N-1. \tag{6.60}$$

Запишемо систему (6.60) у матричному вигляді

$$[M + \Delta t \theta C] q^{j+1} = -C w^j,\ j = 0,\ldots,N_T - 1, \tag{6.61}$$

де

$$M := \{m(\varphi_n, \varphi_k)\}_{n,k=1}^{N-1}, \quad C := \{c(\varphi_n, \varphi_k)\}_{n,k=1}^{N-1}.$$

Отже, маємо повністю дискретизовану задачу теплопровідності вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано вектор вузлових значень початкового розподілу} \\ \textit{температури } w^0 = (w_1^0, ..., w_{n-1}^0) \in R^{N-1}, \textit{величина} \\ \textit{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \textit{ та параметра схеми } \rho \in [0,1]; \\ \textit{знайти пари векторів } \left\{ q^{j+1}, w^{j+1} \right\} \in R^{N-1} \times R^{N-1} \textit{ такі, що} \\ \qquad [M + \Delta t\, \rho C] q^{j+1} = -C w^j, \\ \qquad\qquad w^{j+1} = w^j + \Delta t\, q^{j+1}, \quad j = 0, ..., N_T - 1. \end{cases} \tag{6.62}$$

Запишемо систему лінійних алгебричних рівнянь (6.62) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \left[\frac{h}{6} + \Delta t \rho \left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_0^{j+1} + 2 \left[\frac{h}{3} + \Delta t \rho \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) \right] q_0^{j+1} + \left[\frac{h}{6} + \Delta t \rho \left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_0^{j+1} = 0, \\ \left[\frac{h}{6} + \Delta t\, \rho \left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_{n-1}^{j+1} + 2 \left[\frac{h}{3} + \Delta t\, \rho \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) \right] q_n^{j+1} + \left[\frac{h}{6} + \Delta t \rho \left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) \right] q_{n+1}^{j+1} \\ \quad = -\left[\left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) q_{n-1}^j + 2 \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{3} \right) q_n^j + \left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta h}{6} \right) q_{n+1}^j \right], \quad n = 1, ..., N-1, \\ \qquad\qquad q_N^{j+1} = q^*. \end{cases} \tag{6.63}$$

Для розв’язування повністю дискретизованої задачі (6.63) застосуємо побудовану ШНМ, яка реалізує мультисітковий метод [180].

6.5.6 Побудова нейронної мережі

Побудуємо двошарову нейронну мережу, яка допускає зворотні зв’язки, тобто обчислення в нейроні поточного шару відбуваються з урахуванням попереднього стану цього ж шару. Мережі такого типу називають рекурентними [180]. Перший шар нейронів G^0 будемо ототожнювати з вузлами дискретизації задачі за просторовою змінною з кроком h. Другий шар нейронів отримуємо з попереднього шляхом збільшення параметра дискретизації вдвічі. Схематично структуру нейронної мережі зображено на рисунку 6.26.

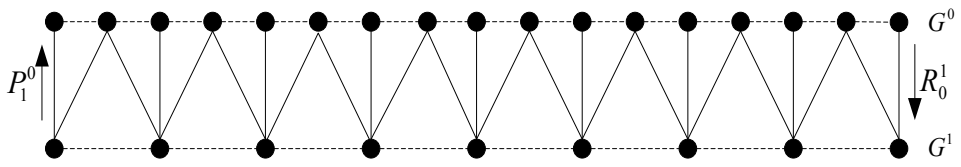


Рисунок 6.26 – Структура нейронної мережі.

Міжнейронні зв'язки відбуваються за допомогою лінійних операторів рестрикції та пролонгації. Перехід від точнішої сітки до грубшої визначає оператор рестрикції $R_0^1 : G^0 \to G^1$:

$$\begin{cases} q_0^1 = (R_0^1 Q^0)_0 = \dfrac{1}{2}\left(q_0^0 + \dfrac{q_1^0}{2} \right), \\ q_j^1 = (R_0^1 Q^0)_j = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_{2j-1}^0}{2} + q_{2j}^0 + \dfrac{q_{2j+1}^0}{2} \right), \; j = 1,...,n-1, \\ q_n^1 = (R_0^1 Q^0)_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_{2n-1}^0}{2} + q_{2n}^0 \right). \end{cases} \tag{6.64}$$

Перехід у зворотному напрямі визначає оператор вузлової пролонгації $P_1^0 : G^1 \to G^0$:

$$\begin{cases} q_{2j}^0 = \left(P_1^0 Q^1 \right)_{2j} = q_j^1, \; j = 0,...,n, \\ q_{2j+1}^9 = \left(P_1^0 Q^1 \right)_{2j+1} = \dfrac{1}{2}\left(q_j^1 + q_{j+1}^1 \right), \; j = 0,...,n-1. \end{cases} \tag{6.65}$$

Кількість нейронів у першому шарі $2n+1$, а в другому – $n+1$.

Побудована ШНМ розв'язує систему лінійних алгебричних рівнянь на кожному часовому кроці, реалізуючи мультисітковий метод, алгоритм якого детально описано у [206]. Нейрони першого шару мережі виконують дві функції: згладжування та уточнення розв'язку. Другий шар мережі забезпечує згладжування похибки розв'язку (див. [206]). Побудована нейронна мережа дає змогу економити кількість арифметичних операцій завдяки згладжуванню похибки розв'язку на грубшій сітці та уточнення розв'язку на точнішій. Лінійні

оператори рестрикції (6.64) та пролонгації (6.65) визначають граф міжнейронних з'єднань і вагові коефіцієнти нейронної мережі [180]. Навчати ШНМ можна шляхом зміни вагових коефіцієнтів. Цільовою функцією навчання нейронної мережі є мінімізація норми відхилу повністю дискретизованої варіаційної задачі (6.62). За допомогою цієї функції оцінюємо, наскільки робота ШНМ відповідає бажаному результату.

6.5.7 Числові результати

Наведемо деякі результати, отримані з використанням алгоритму на основі ШНМ, та аналіз знайденого розподілу температурного поля в трансверсально ізотропній пластині залежно від часу за мішаних умов теплообміну на її поверхнях. У таблиці 6.6 наведено наближений розв'язок задачі (6.49), (6.51)–(6.53) для таких характеристик пластини:

$$a_z = 0{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^2/\text{с};\ \lambda_{xx}/\lambda_{zz} = 1; H = 0{,}01\ \text{м};\ H/l = 0{,}05;\ T^* = 1;\ \omega^+ = 1.$$

З урахуванням позначень (6.55) маємо: $\alpha = 0{,}0025$; $\beta = -14/15$; $u^* = 1$.

Опишемо результати дослідження впливу кількості нейронів у ШНМ на точність розв'язку. У таблиці 6.6 є фрагмент результатів наближеного розв'язку u_h у момент часу $T = 20$ та обчислений поточковий порядок збіжності за просторовою змінною P_h зі згущенням сітки нейронів удвічі (N – кількість нейронів першого шару).

На підставі аналізу отриманих результатів (див. таблицю 6.6) можна зробити висновок, що зі збільшенням кількості нейронів розв'язок збігається з порядком збіжності $P_h \approx 2$ (щодо просторової змінної).

Таблиця 6.6 – Порядок збіжності результатів.

x	u_h, $N=51$	u_h, $N=101$	u_h, $N=201$	P_h
0,60	0,0004189972	0,0004347203	0,0004386787	1,99
0,62	0,0006181596	0,0006401761	0,0006457126	1,99
0,64	0,0009119900	0,0009427336	0,0009504559	1,99
0,66	0,0013454870	0,0013882846	0,0013990223	1,99
0,68	0,0019850387	0,0020444101	0,0020592890	2,00
0,70	0,0029285889	0,0030106309	0,0030311678	2,00
0,72	0,0043206378	0,0044335031	0,0044617235	2,00
0,74	0,0063743704	0,0065288474	0,0065674281	2,00
0,76	0,0094043057	0,0096144849	0,0096669171	2,00
0,78	0,0138744628	0,0141584437	0,0142292058	2,00
0,80	0,0204694238	0,0208499500	0,0209446607	2,01
0,82	0,0301991734	0,0307039688	0,0308294656	2,01
0,84	0,0445537737	0,0452151541	0,0453793911	2,01
0,86	0,0657315590	0,0665845568	0,0667961346	2,01
0,88	0,0969758000	0,0980534799	0,0983204818	2,01
0,90	0,1430713942	0,1443951179	0,1447227029	2,01
0,92	0,2110776486	0,2126385528	0,2130243909	2,02
0,94	0,3114093770	0,3131349230	0,3135609699	2,02
0,96	0,4594318759	0,4611274800	0,4615456542	2,02
0,98	0,6778140423	0,6790636789	0,6793715141	2,02

Про зміну температури пластини в часі (від параметра Fo) дають уявлення графіки на рисунку 6.27. Результати наведено для фіксованої кількості нейронів $N=51$. На цьому рисунку на осі ординат указані значення величини u (θ/T^* при $z=0$) від безрозмірної координати x у моменти часу $T=10$, $T=20$,

$T = 30$. Як бачимо, графіки розв'язків при $T = 10$ і $T = 20$ практично не відрізняються.

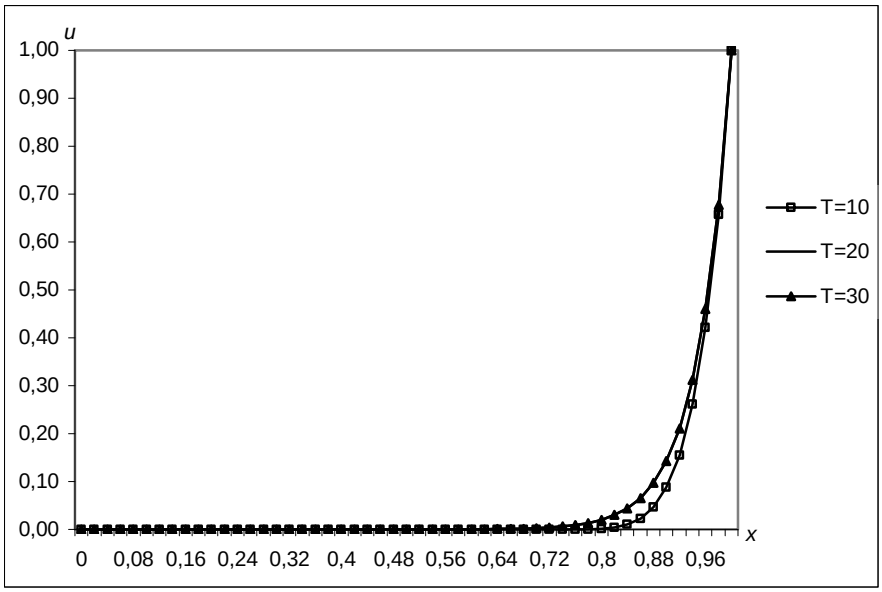


Рисунок 6.27 – Залежність зміни температури від часу.

Наведемо аналіз розв'язку задачі (6.55) залежно від зміни параметра α. На рисунку 6.28 відображено отриманий розподіл температури в момент часу

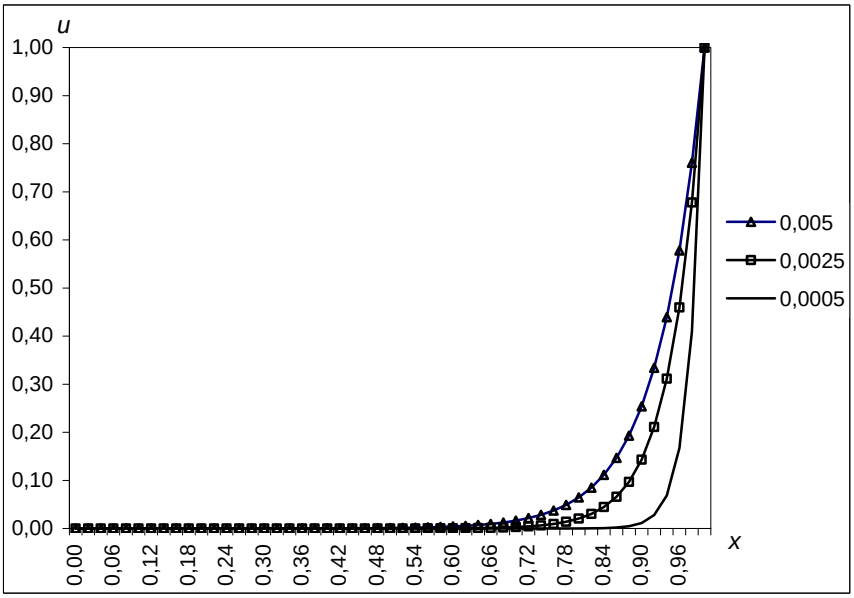


Рисунок 6.28 – Вплив параметра Λ_{xz} на розподіл температури у пластині.

$T = 20$ для таких значень коефіцієнта α: 0,005; 0,0025; 0,0005 ($\lambda_{xx} / \lambda_{zz} = 2; 1; 0{,}5$, відповідно). Обчислення виконано у випадку $\omega^{+} = 1$, що відповідає значенню $\beta = -14/15$. Як бачимо, степінь анізотропії матеріалу, що характеризує параметр Λ_{xz}, помітно впливає на температуру в пластині. У досліджуваному випадку більших значень температура досягає ближче до краю $x = 1$ і різко згасає у напрямі до теплоізольованого краю $x = 0$.

У таблиці 6.7 наведено числові результати, які характеризують розподіл температури у пластині залежно від параметра α у випадку $\omega^{+} = 1$, що відповідає значенню $\beta = -14/15$.

На підставі аналізу отриманих результатів можна зробити висновок, що зі зменшенням коефіцієнта α розв'язок не втрачає стійкості, тобто побудована обчислювальна схема здатна врахувати дуже вузькі ділянки, де розв'язки та їхні градієнти різко змінюються, й не потребує поліпшення внаслідок стабілізації, на противагу іншим методам. У праці [207] виконано порівняння результатів, отриманих за допомогою запропонованої обчислювальної схеми і МСЕ до розв'язування стаціонарних задач адвекції - дифузії з великими числами Пекле.

Таблиця 6.7 – Числові результати в залежності від параметра α

x	u_h, $\alpha = 0{,}005$	u_h, $\alpha = 0{,}0025$	u_h, $\alpha = 0{,}0005$
0,60	0,00416022238	0,00041899722	0,00000001735
0,62	0,00547218421	0,00061815959	0,00000004241
0,64	0,00719788456	0,00091198999	0,00000010364
0,66	0,00946779940	0,00134548705	0,00000025328
0,68	0,01245355147	0,00198503866	0,00000061892
0,70	0,01638088620	0,00292858892	0,00000151240
0,72	0,02154673978	0,00432063776	0,00000369568
0,74	0,02834168980	0,00637437044	0,00000903063
0,76	0,03727948586	0,00940430571	0,00002206688

Продовження таблиці 6.7

0,78	0,04903589293	0,01387446284	0,00005392163
0,80	0,06449978425	0,02046942377	0,00013176038
0,82	0,08484034693	0,03019917341	0,00032196337
0,84	0,11159548130	0,04455377368	0,00078673419
0,86	0,14678807780	0,06573155899	0,00192242560
0,88	0,19307896280	0,09697580002	0,00469754603
0,90	0,25396807730	0,14307139420	0,01147869563
0,92	0,33405909860	0,21107764860	0,02804878371
0,94	0,43940751340	0,31140937700	0,06853864679
0,96	0,57797845860	0,45943187590	0,16747771130
0,98	0,76024894510	0,67781404230	0,40924040770
1	1	1	1

На рисунку 6.29 зображено вплив критерію Біо на розподіл температури у пластині при $\alpha = 0.005$ ($\lambda_{xx} / \lambda_{zz} = 2$). Тут наведено результати для $\omega^{+} = 1$ – верхня крива і $\omega^{+} = 2$ – нижня крива ($\beta = -14/15$ і $\beta = -16/9$, відповідно).

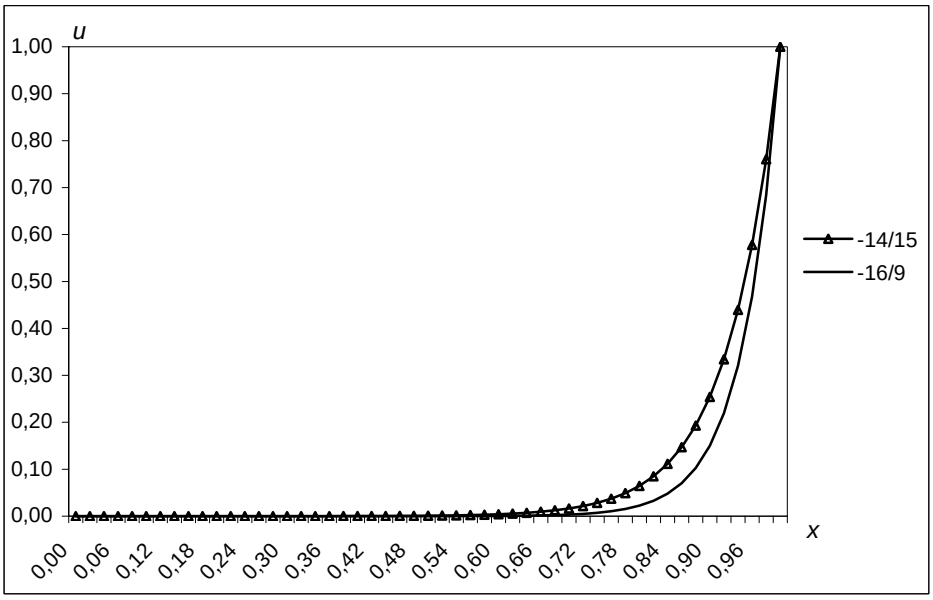


Рисунок 6.29 – Вплив критерію Біо на розподіл температури у пластині.

У таблиці 6.8 для порівняння наведено фрагмент числових результатів, які характеризують температуру у пластині з параметром анізотропії матеріалу $\Lambda_{xz} = 0.005$ для заданих вище значень параметра β.

Таблиця 6.8 – Залежність розв'язку від параметра β

x	u_h, $\beta = -14/15$	u_h, $\beta = -16/9$
0,60	0,00416022238	0,00050654602
0,62	0,00547218421	0,00074026628
0,64	0,00719788456	0,00108182502
0,66	0,00946779940	0,00158097890
0,68	0,01245355147	0,00231044231
0,70	0,01638088620	0,00337648001
0,72	0,02154673978	0,00493438734
0,74	0,02834168980	0,00721111285
0,76	0,03727948586	0,01053831914
0,78	0,04903589293	0,01540069786
0,80	0,06449978425	0,02250657734
0,82	0,08484034693	0,03289110845
0,84	0,11159548130	0,04806706052
0,86	0,14678807780	0,07024519439
0,88	0,19307896280	0,10265631560
0,90	0,25396807730	0,15002192290
0,92	0,33405909860	0,21924201360
0,94	0,43940751340	0,32040024280
0,96	0,57797845860	0,46823286260
0,98	0,76024894510	0,68427542890
1	1	1

6.5.8 Висновки

Описано випробовування побудованої ШНМ [206], яка реалізує проекційно-сіткову схему мультисітковим методом, на задачі визначення нестаціонарного температурного поля в трансверсально ізотропній пластині за змішаних умов теплообміну її поверхонь з зовнішнім середовищем. Акцентовано на головних аспектах обчислювальної схеми та особливостях числової реалізації.

Побудовано варіаційне формулювання досліджуваної задачі теплопровідності, для дискретизації якої застосовано проекційно-сіткову схему [225]. Унаслідок дискретизації задачі в часі кусково-лінійними наближеннями отримано однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом. Для дискретизації задачі за просторовою змінною вибирали кусково-лінійні апроксимації у вигляді функцій Куранта. Повністю дискретизовану задачу у вигляді системи лінійних алгебричних рівнянь розв’язували на двошаровій рекурентній нейронній мережі [206]. Навчати ШНМ можна шляхом модифікації вагових коефіцієнтів операторів рестрикції та пролонгації, цільовою функцією навчання є мінімізація відхилу варіаційного рівняння [225]. Отже, на кожному часовому проміжку ШНМ розв’язувала систему лінійних алгебричних рівнянь. Для переходу на наступний часовий проміжок застосовували однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом (6.59).

Отримані числові результати свідчать про можливість ефективного застосування нейромережевої технології до дослідження нестаціонарного температурного поля в пластинах за змішаних граничних умов теплообміну з зовнішнім середовищем. Як доводить обчислювальний експеримент, поліпшувати числові результати можна завдяки збільшенню кількості нейронів мережі.

Аналіз отриманих на основі ШНМ результатів дав змогу зробити кількісні та якісні оцінки щодо впливу теплофізичних характеристик, анізотропії

матеріалу на розподіл температури з часом у пластині з урахуванням умов теплообміну з зовнішнім середовищем.

ВИСНОВКИ

Для сингулярно збурених крайових задач механіки та фізики розвинуто високоточні схеми методу скінченних елементів, здатні якісно відтворювати структури примежових та внутрішніх шарів шуканих розв’язків як за допомогою стабілізації апроксимацій МСЕ, так і адаптуванням неструктурованих тріангуляцій.

Стабілізовані схеми МСЕ побудовано з використанням як експоненціальних апроксимацій, так і експоненціальних вагових функцій процедури Петрова-Гальоркіна. Проаналізовано стійкість та збіжність схем такого ґатунку.

Побудова *h*-адаптивних схем МСЕ ґрунтується на обчисленні розподілу апостеріорних оцінювачів похибок на скінченних елементах та системі керування структурою розрахункових тріангуляцій, здатної відшукати апроксимації з наперед гарантованою точністю в природних нормах розглядуваної задачі.

В роботі, за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь побудовано чисельні розв’язки для еволюційних задач осесиметричного слошингу; обернених граничних задач теплопровідності в частково-необмежених областях; проведено дослідження ітераційно-різницевих методів розв’язування відповідних нелінійних рівнянь. Для деяких з вище перелічених задач побудовано та досліджено відповідні наближені схеми розв’язування інтегральних рівнянь із різним характером особливостей в ядрах. Запроваджено чисельно-аналітичний метод до розв’язування суттєво просторових задач електронної оптики та теорії тріщин на основі методу інтегральних рівнянь, розв’язування відповідних одновимірних та двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу із різними особливостями в ядрах на визначених класах контурів і поверхонь.

Досліджено методи розв’язування просторових задач електростатики; проаналізовано методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь та декомпозиція складних областей; досліджено наближені схеми розв’язування відповідних інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.

В роботі запропонований новий підхід для дослідження різницевого методу з порядком $1+\sqrt{2}$ для розв’язування нелінійних рівнянь в банахових просторах. Визначені поділені різниці для типових нелінійних операторів і побудувано деякі спеціальні алгоритми для рівнянь з цими операторами. Доведені теореми про локальну і напівлокальну збіжність методів до локально єдиного розв’язку при умовах Гьольдера для поділених різниць першого порядку нелінійного оператора.

Порівняльний аналіз результатів обчислювальних експериментів з відомими теоретичними та експериментальними даними засвідчив дієвість пропонованих підходів. За результатами науково-дослідної роботи також опубліковано статті [13, 16, 18, 19, 20, 15, 24, 74, 2, 11, 12, 23, 36, 104, 75, 76, 17, 21, 22, 28, 50, 126, 136, 162, 172, 175, 196, 198, 197, 202, 208, 214, 221, 223, 222, 226, 128, 176, 213] та подані до друку [168].

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями, фільтрація та русловий стік), прогнозування забруднення ґрунтів та атмосфери (задачі адвекції-дифузії-реакції), медична томографія та стоматологія (тривимірні задачі механіки анізотропних пружних тіл), корозія металів (обернені граничні задачі нестаціонарної теплопровідності), пєзоелектричні актуатори і сенсори, електронно-оптичні системи генерування і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмологія (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями), прогнозування забруднення грунтів та атмосфери (еволюційні задачі адвекції-дифузії),

медична томографія та корозія металів (обернені граничні задачі нестаціонарної теплопровідності), розрахунок електронно-оптичних систем для генерації і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмології (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Поставлені у науково-дослідній роботі завдання виконано повністю, що відображено в 39 публікаціях у вітчизняних та міжнародних наукових журналах з прикладної математики та чисельного аналізу, а також представлено в 64 доповідях на наукових конференціях. Протягом звітного періоду за тематикою науково-дослідної роботи захищено захищено дві дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, 10 дипломних, 31 магістерських та 48 курсових робіт.

П Е Р Е Л І К П О С И Л А Н Ь

1. 3D scanners and CAD/CAM software [Electronic resource] : – Available from : http://www.3shape.com
2. Abramov Y. h–adaptive finite element method for one–dimensional boundary value problems / Y. Abramov, H. Shynkarenko // 18th International conference on computer methods in mechanics CMM 2009 : Short papers. – Zielona Gora, Poland : The University of Zielona Gora Press. – 2009. – P. 107–109.
3. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J. T. Oden. – New York : John Wiley & Sons. – 2000.
4. Argyros I. K. On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations / I. K. Argyros // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – V. 10. – P. 83–92.
5. Ausiello P. 3D-finite element analyses of cusp movements in a human upper premolar, restored with adhesive resin-based composites / Ausiello P., Apicella A., Davidson C. L., Rengo S. // J. of Biomechanics. – 2001. – Vol. 34. – N 10. – P. 1269–1277.
6. Bangerth W. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations / W. Bangerth, R. Rannacher. – Basel : Birkhauser, 2003.
7. Bo Huo. An Homogeneous and Anisotropic Constitutive Model of Human Dentin / Bo Huo et al // J. Biomech. – 2005. – Vol. 38. – P. 587–594.
8. Boruszewski W. Stress Distributions in Mandibles Around Osseo-integrated Implants, According to the Occlusion Pattern, Using MSC/NASTRAN Three-Dimensional Modeling [Electronic resource] / Boruszewski W. [et al.] – Available from : www.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc96.
9. Bourauel C. C. Computer-aided analysis of the biomechanics of tooth movements / Bourauel C. C. [et al.] // Int. J. Comput. Dent. – 2007. – Vol. 10. – P. 25–40.

10. Cattaneo P. M. The Finite Element Method : a Tool to Study Orthodontic Tooth Movement / Cattaneo P.M., Dalstra M., Melsen B. // J Dent Res. – 2005. – Vol. 84(5). – P. 428–433.
11. Chaban F. Construction of h–adaptive finite element method for piezoelectricity problems / Chaban F., Shynkarenko H. // J. Numer. Appl. Mathem. – Vol. 97. – 2009. – P. 1–9.
12. Chaban F. Construction of the h–adaptive FEM schema for the forced vibration problems / Chaban F., Kvasnytsya H., Shynkarenko H. // 18th International conference on computer methods in mechanics CMM 2009 : Short papers. – Zielona Gora, Poland : The University of Zielona Gora Press. – 2009. – P. 271–272.
13. Chaban F. The Construction and Analysis of a Posteriory Error Estimators for Piezoelectricity Staionary Problems / Chaban F., Shynkarenko H. // Operator Theory : Advances and Applications. – Vol. 191. – 2009. – P. 291–304.
14. Chaban F. Finite element method approximations for the boundary valued problems of piezoelectricity / F. Chaban, H. Shynkarenko // Modern Analysis and Application : Book of abstracts. – Odessa. – 2007. – P. 32–33.
15. Chapko R. An alternanting boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in semi–infinite regions / Chapko R., Johansson B. T. // Inverce Problems and Imaging. – Vol. 2. – 2008. – P. 317–333.
16. Chapko R. An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant / R. Chapko, B. T Johansson // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2009. – 17. – P. 871–883.
17. Chapko R. An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies / R. Chapko, B. T Johansson // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – 97. – P. 10–25.

18. Chapko R. An alternating potential based approach for a Cauchy problem for the Laplace equation in a planar domain with a cut / R. Chapko, B. T Johansson. // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2008. – 8. – P. 315–335.
19. Chapko R. On a hybrid method for shape reconstruction of buried object in an elastostatic half plane / R.Chapko // Inverce Problems and Imaging. – 2009. – 3. – P.199–210.
20. Chapko R. On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi–infinite domains / R. Chapko, B. T Johansson // Electronic Journal of Boundary Elements. – 2009. – 7. – P.1–12.
21. Chapko R. On the convergence analysis of the hybrid method for an inverse boundary value potential problem / R. Chapko, N. Vintonyak // Математичні студії. – 2009. – 23. – С. 56–63.
22. Chapko R. On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double–connected planar domain / R. Chapko, V. Vavrychuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – 97.– P. 26–38.
23. Chapko R. On the numerical solution of mixed boundary value problems in an elastostatic half–plane with a bounded inclusion / R. Chapko, B. T Johansson, O. Sobeyko // In Proceeding of Seventh UK Conference on Boundary Integral Methods, University of Nottingham. – 2009.– P.57–65.
24. Chapko R. The numerical solution of the axially symmetric linear sloshing problem by the boundary integral equation method / Chapko R., Datsiv G. // Jour. of Integral Equations and Applications. – Vol. 20. – 2008. – P. 1–24.
25. Dorow C. Finite Element Simulation of in Vivo Tooth Mobility in Comparison with Experimental Results / Dorow C., Schneider J., Sander F. G. // J. Mech. Med. Biol. – 2003. – Vol. 3(1). – P. 79–94.
26. Driel W. D. Time-dependent Mechanical Behaviour of the Periodontal Ligament / Driel W. D., Leeuwen E. J. at al. // Proc. IME H. J. Eng. Med. – 2000. – Vol. 214. – N 5. – P. 497–504.

27. Farah J. W. Finite element analysis of a mandibular model / Farah J. W., Craig R. G., Meroueh K. A. // J. of Oral Rehabilitation. – 1988. – Vol. 15(6). – P. 615–624.
28. Garasym Y. S. A posteriori error estimate for some two–dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potentional theory / Y. S. Garasym, B. A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – № 97. – P. 57–69.
29. Garasym Ya. S. On numerical approach to solve some three–dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method / Ya. S. Garasym, B. A. Ostudin // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2003. – № 1 (88). – С. 17−28.
30. Gei M. An Interface Model for the Periodontal Ligament / Gei M., Genna F., Bigoni D. // J. Biomech Eng. – 2002. – Vol. 124(5). – P. 538–546.
31. Giulio Menicucci. Tooth-implant connection : some biomechanical aspects based on finite element analyses / Giulio Menicucci et al. // Clinical Oral Implants Research. – 2002. – Vol. 13 (3). – P. 334–341.
32. Gross M. D. Three-dimensional finite element analysis of the facial skeleton on simulated occlusal loading / Gross M. D., Arbel G., Hershkovitz I. // J. Oral Rehabil. – 2001. – Vol. 28(7). – P. 684–694.
33. Hans Van Oosterwyck. Peri-implant bone tissue strains in cases of dehiscence : a finite element study / Hans Van Oosterwyck et al. // Clinical Oral Implants Research. – 2002. – Vol. 13(3). – P. 327–333.
34. Hernandez M. A. The Secant method and divided differences Hölder continuous / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – V. 124. – P. 139–149.
35. Hoffmeister B. K. Anisotropy of Young's Modulus of Human Tibial Cortical Bone / Hoffmeister B. K., Smith S. R., Handley S. M., Rho J. Y. // Med. Biol. Eng. Comput. – 2000. – Vol. 38. – N 3. – P. 333–338.

36. Jachymek M. Komputerowe modelowanie w zagadnieniach zaniczyszczenia srodowiska / Jachymek M., Rosińska S., Shynkarenko H. // Modelowanie i inżynieria produkcji w ekorozwoju; red.naukowy S. Szymura. – Politechnika Opolska : Opole, 2008. – Rozdział 13. – s. 85–95.
37. Jones M. L. A Validated Finite Element Method Study of orthodontic tooth movement in the human subject / Jones M. L. et al. // J. Orthod. – 2001. – Vol. 28(1). – P. 29–38.
38. Jost-Brinkmann P. G. A FEM Study for the Biomechanical Comparison of Labial and Palatal Force Application on the Upper Incisors. Finite Element Method / Jost-Brinkmann P. G., Tanne K., Sakuda M., Miethke R. R. // Fortschr Kieferorthop. – 1993. – Vol. 54(2). – P. 76–82.
39. Katz J. L. The Elastic Anisotropy of Bone and Dentitional Tissues / Katz J. L., Meunier A. // J. Mater Sci Mater Med. – 2005. – Vol. 16. – N 9. – P. 803–806.
40. Kawarizadeh A. Experimental and Numerical Determination of Initial Tooth Mobility and Material Properties of the Periodontal Ligament in Rat Molar Specimens / Kawarizadeh A., Bourauel C. and Jäger A. // Eur. J. Orthod. – 2003. – Vol. 25. – P. 569–578.
41. Laasonen P. Ein überquadratisch konvergenter iterativer Algorithmus / P. Laasonen // Ann. Acad. Sci. Fenn. – Ser. A. – 1. – 1969. – 450 p.
42. Leuven K. U. Course Material for Prosthetic Dentistry and Implant Dentistry [Electronic resource] / Leuven K. U. – 2003. – Available from : http://www.feppd.org/ICB-Dent/index.html.
43. Lin Chun-Li. Nonlinear Finite Element Analisys of a Splinted Implant with Various Connectors and Occlusal Forces / Lin Chun-Li // Int. J. Oral Maxillofac. Implants. – 2003. – Vol. 18. – N 3. – P. 331–367.
44. Lin C-L. Biomechanical interactions in tooth–implant-supported fixed partial dentures with variations in the number of splinted teeth and connector type : a finite element analysis / Lin C-L, Wang J-C, Chang W-J.// Clin. Oral Impl. Res. – 2008. – Vol. 19. – P. 107–117.

45. Lions J.–L. Problémes aux Limites non Homogénes et Applications / J.–L. Lions, E. Magenes. – Vol. 1. – Paris : Dunod, 1968.
46. Lu H. P. Three Dimensional Finite Element Analysis of Stress Induced by Orthodontic Forces in the Periodontal Tissue / Lu H. P., Fu M. K., Huang J. F. // Zhonghua Kou Qiang Yi Xue Za Zhi. – 1994. – Vol. 6 (29). – P. 332–335, 384.
47. Manoj Khanala. Finite Element Analysis Of Mechanical Behaviour Of Dental Materials / Manoj Khanala, Zengtao Chen, Ying Zheng // The Internet J of Dental Science. – 2006. – Vol. 1. – N 2.
48. Maugin G. Continuum mechanichs of electromagnetic solids / G. Maugin. – M : Мир, 1988. – 560 с.
49. McLean Alex. Predictably Restoring Endodontically Treated Teeth / McLean Alex // J. Can. Dent. Assoc. – 1998. – Vol. 64. – P. 782–787.
50. Mochurad L. I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, B. A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8. – № 2. – P. 149–156.
51. Monzavi A. The Effects of Post Diameter on Stress Distribution in Maxillary Central Incisor, A Three Dimensional Finite Element Study / Monzavi A., Nokar S., Javadi H R. // J of Dentistry. Tehran University of Medical Sciences. – 2004. – Vol. 1. – N 2. – P. 17–23.
52. Morrison J.A. Charge singularity at the corner of a fllat plate / J.A. Morrison, J.A. Lewis // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – Vol. 31. – № 2. – P. 233–249.
53. Morton K. W. Numerical solution of convection–diffusion problems / K. W.Morton. – London : Chapman&Hall, 1996. – 372 pp.
54. Motoyoshi M. An Experimental Study on Mandibular Expansion : Increases in arch Width and Perimeter / Motoyoshi M., Hirabayashi M., Shimazaki T., Namura S. // European Journal of Orthodontics. – 2002. – Vol. 24. – N 2. – P. 125–130.

55. Motta A. B. Finite Element Analysis in 2D and 3D Models for Sound and Restored Teeth / Motta A. B., Pereira L. C., Andreia R. C. C. da Cunha. // ABAQUS Users' Conference. – 2006. – P. 329–343.
56. Natali A. N. Transversally Isotropic Elasto–damage Constitutive Model for the Periodontal Ligament / Natali A. N., Pavan P. G., Carniel E. L., Dorow C. // Comput Methods Biomech Biomed Engin. – 2003. – Vol. 6 (5,6). – P. 329–336.
57. Natali A. N. Viscoelastic Response of the Periodontal Ligament : an Experimental–numerical Analysis / Natali A. N., Pavan P. G., Carniel E. L., Dorow C. // Connect Tissue Res. – 2004. – Vol. 45 (4, 5). – P. 222–230.
58. Neves A. A. Stress Distribution in Bidimensional Finite–element Models Regarding Enamel Anisotropic Properties / Neves A. A., Pereira L. C., Duda F. P. // 83rd General Session Exhibition of the IADR. – 2005. – Vol. 1. – P. 1–2.
59. O'Brien W. J. Biomaterials Properties Database [Electronic resource] / O'Brien W. J. // Website of University of Michigan–NIDR Materials Science Research Center. – 1997. – Available from : http://www.lib.umich.edu/dentlib/Dental_tables/toc.html
60. Pan S. The Influence of Different Root Length on Stress Distribution in the Bone Around Abutment Root of Telescopic Overdenture / Pan S., Feng H., Yin Y. // Zhonghua Kou Qiang Yi Xue Za Zhi. – 2000. – Vol. 35(1). – P. 67–68.
61. Papageorgiou Ioannis S. The Center of Resistance of Teeth in Orthodontics / Papageorgiou Ioannis S. // Hellenic orthodontic review. – 2005. – Vol. 8. – P. 41–55.
62. Poppe M. Determination of the Elasticity Parameters of the Human Periodontal Ligament and the Location of the Center of Resistance of Single–rooted Teeth / Poppe M, Bourauel C, Jäger A. // J. of Orofacial Orthopedics. – 2002. – Vol. 63. – N 5. – P. 358–370.

63. Potra F. A. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / Potra F. A. // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1984–85. – V. 7(1). – P. 75–106.
64. Provatidis C. G. A Comparative FEM-study of Tooth Mobility Using Isotropic and Anisotropic Models of the Periodontal Ligament / Provatidis C. G. et al. // Med Eng Phys. – 2000. – Vol. 22(5). – P. 359–370.
65. Puente M. I. Initial Stress Differences Between Tipping and Torque Movements. A Three-dimensional Finite Element Analysis / Puente M. I., Galban L., Cobo J. M. // Eur. J. Orthod. – 1996. – Vol. 18(4). – P. 329–339.
66. Qian H. Finite Element Analisys of the Influence of PDL Fibers on Orthodontic Tooth Movement / Qian H., Chen J., Katona T. R. // International Society of Biomechanics Meeting. – Canada. – Calgary, Alberta. – 5–7 August 1999.
67. Romeed S. A. A comparison of 2D and 3D finite element analysis of a restored tooth / Romeed S. A., Fok S. L., Wilson N. H. F. // J. of Oral Rehabilitation. – 2006. – Vol. 33. – N 3. – P. 209–215.
68. Roos H.–G. Numerical methods for singular singularly perturbed differential equations / H.–G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. – Berlin : Springer, 1995. – 348 pp.
69. Rudolph D. J. A Finite Element Model of Apical Force Distribution From Orthodontic Tooth Movement / Rudolph D. J., Willes M. G., Sameshima G. T. // The Angle Orthodontist. – 2000. – Vol. 71. – N 2. – P. 127–131.
70. Sacco R. Finite element methods for convection–diffusion problems using exponential splines on triangles / R. Sacco, M. Stynes // Comput. Math. Appl. – 1998. – 35 (3). – P. 5–45.
71. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banach Räumen I, II / J. W. Schmidt // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1963. – V. 43. – 1–8. – P. 97–110.

72. Shakhno S. M. On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations / S. M. Shakhno // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – V. 4. – P. 650–651.
73. Shakhno S. M. On a Secant Type Method for Nonlinear Least Squares Problems. / S. M. Shakhno, O. P. Gnatyshyn, R. P. Iakymchuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – 97. – P. 112–121.
74. Shakhno S. M. On an Iterative Algorithm with Superquadratic Convergence for Solving Nonlinear Operator Equations / S. M. Shakhno // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – 231. – P. 222–235.
75. Shakhno S. M. On the Secant method under the generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator / S. M. Shakhno // PAMM. – 2007. – 7. – P. 2060083–2060084.
76. Shakhno S. M. On the Steffensen method under the generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator / S. M. Shakhno // PAMM. – 2008. – 8. – P. 10855–10856.
77. Shibata T. Mechanical Behavior of Bovine Periodontal Ligament under Tension–Compression Cyclic Displacements / Shibata T. et al. // Eur J Oral Sci. – 2006. – Vol. 114(1). – P. 74–82.
78. Shinishiro Tada. Influence of Implant Design and Bone Quality on Stress/Strain Distribution in Bone Around Implants : A 3–dimentional Finite Element Analysis / Shinishiro Tada, Osamu Miyakawa // The international J of Oral & Maxillofacial Implants. – 2003. – Vol. 13. – P. 357–367.
79. Sia Sheau Soon. Determining the Center of Resistance of Maxillary Anterior Teeth Subjected to Retraction Forces in Sliding Mechanics / Sia Sheau Soon, Koga Yoshiyuki, Yoshida Noriaki // Angle Orthod. – 2006. – Vol. 77. – N 6. – P. 999–1003.
80. Sorrentino R. A Study into the Laboratory Techniques for Investigating the Resistance to Fracture and the Clinical Performances of Endodontically–treated Teeth Restored with Fiber Posts and Different Restorative Materials

Configurations. Mechanical Tests and Finite Element Analyses / Sorrentino R. // PhD Programme in Biotechnologies Section of Dental Biomaterials. University of Siena. – 2006.

81. Spiller Martin S. Dental Technical Information [Electronic resource] / Spiller Martin S. – Available from : http://www.doctorspiller.com
82. Stynes M. Steady–state convection–diffusion problems / M. Stynes // Acta Numerica. – 2005. – P. 445–508.
83. Sybil Yu. M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. M. Sybil // Матем. студії. – 1997. – Т. 8. – № 2. – С. 79–96.
84. Tanne K. An Evaluation of the Biomechanical Response of the Tooth and Periodontium to Orthodontic Forces in Adolescent and Adult Subjects / Tanne K., Yoshida S. et al. // Br. J. Orthod. – 1998. – Vol. 25. – P. 109–115.
85. Tanne K. Biomechanical Responses of Tooth Associated with Different Root Lengths and Alveolar Bone Heights : Changes of Stress distributions in the PDL / Tanne K., Burstone C. J., Sakuda M. // J. Osaka Univ. Dent. Sch. – 1989. – N 29. – P. 17–24.
86. The Science of Orthodontics [Electronic resource] // Website of University of North Carolina at Chapel Hill. – 1999. – Available from : http://www.unc.edu/depts/appl_sci/ortho/
87. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations / J. F. Traub. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Yersey. – 1964. – 310 pp.
88. Vandana K. L. Finite Element Method – Perio-Endo Concept / Vandana K. L., Kartik M. // Endodontology. – 2004. – Vol. 16(2). – P. 38–41.
89. Vasconcellos W. A. Effect of the post geometry and material on the stress distribution of restored upper central incisors using 3D finite element models. Stress distribution on incisors with posts / Vasconcellos W. A., Jr. Cimini C. A., Albuquerque R. C. // J. Indian Prosthodont. Soc. – 2006. – Vol. 6. – P. 139–144.

90. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh–refinement technique / R. Verfurth. – Stuttgart : Wiley–Teubner. – 1996, 128 pp.
91. Verfurth R. A posteriori error estimator for convection–diffusion problem / R. Verfurth // Numer. Math. – 1998. – 80. – P. 641–663.
92. Vollmer D. Determination of the Centre of Resistant in an Upper Human Canine and Idealized Tooth Model / Vollmer D. et al. // Eur. J. Orthod. – 1999. – Vol. 21(6). – P. 633–648.
93. Wang S. A Novel Exponentially Fitted Triangular Finite Element Method for an Advection–Diffusion Problem with Boundary Layers / S. Wang // J. Comp. Phys. – 1997. – 134. – P. 253–260.
94. Wang S. An a posteriori error estimate for finite element approximations of a singularly perturbed advection–diffusion problem / S. Wang // J. Comput. Appl. Math. – 1997. – 87(2). – P. 227–242.
95. Werner W. Some supplementary results on the $1+\sqrt{2}$ order method for the solution of nonlinear equations / W. Werner // Numer. Math. – 1982. – V. 38. – P. 383–392.
96. Werner W. Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung / W. Werner // Numer. Math. – 1979. – V. 32. – P. 333–342.
97. Why choose Snowpost® composite posts? [Electronic resource] – Available from : http://www.snowpost.com/fiber-reinforced-dental-posts.html
98. Williams K. R. Orthodontic tooth movement analysed by the Finite Element Method / Williams K. R., Edmundson J. T. // Biomaterials. – 1984. – Vol. 5(6). – P. 347–351.
99. Winkler M. M. Finite Element Stress Analysis of Three Filling Techniques for Class V Light–cured Composite Restorations / Winkler M. M., Katonal T. R., Paydarl N. H. // J. Dent. Res. – 1996. – Vol. 75(7). – P. 1477–1483.

100. Yijin Ren. Optimum Force Magnitude for Orthodontic Tooth Movement : A Systematic Literature Review / Yijin Ren, Jaap C. Maltha et al. // Angle Orthod. – 2002. – Vol. 73. – N 1, - P. 86–92.
101. Yoshida N. In Vivo Determination of the Centres of Resistance of Maxillary Anterior Teeth Subjected to Reaction Forces / Yoshida N, Koga Y, Mimaki N, Kobayashi K. // Eur. J. Orthod. – 2001. – N 23. – P. 529–534.
102. Yukio Kojimaa. A Numerical Simulation of Tooth Movement by Wire Bending / Yukio Kojimaa, Hisao Fukui. // Am J Orthod Dentofacial Orthoped. – 2006. – Vol. 130. – N 4. – P. 452–459.
103. Ziegler A. Numerical Simulation of the Biomechanical Behaviour of Multi-rooted Teeth / Ziegler A., Keilig L., Kawarizadeh A., Jäger A., Bourauel C. // Eur J Orthod. – 2005. – Vol. 27(4). – P. 333–339.
104. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis, fifth ed. / O. C.Zienkiewicz, R.L.Taylor. – Butterworth–Heinemann. – Oxford, 2000. – 707 p.
105. Абрамов Є. Кусково лінійні апроксимації h–адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львів ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3–18.
106. Бартіш М. Я. Про один ітераційно–різницевий метод / М. Я. Бартіш // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 6. – 1968. – V. 500. – P. 505.
107. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв’язування функціональних рівнянь / М. Я. Бартіш // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 5. – 1968. – С. 387–391.
108. Бартіш М. Я. Про один різницевий метод розв’язування нелінійних операторних рівнянь / М. Я. Бартіш, Ю. М. Щербина // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 7. – 1972. – С. 579–582.
109. Беляев Н. М. Методы теплопроводности : Учебное пособие для вузов. В 2-х ч. Ч. 1./ Н. М. Беляев, А. А. Рядко. – М. : Высш. шк., 1982. – 327 с.

110. Беляев Н. М. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / Н. М. Беляев, М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ. – К. : Наук. думка, 1997. – 365 с.

111. Блажиєвська О. В. Математичне моделювання технологічних та геофізичних процесів. Ч.1. / О. В. Блажиєвська. – Львів : ЛДУ ім. І.Франка, 1999. – 55 с.

112. Блажиєвська О. В. Про ефективність методу експоненційної підгонки при розв'язуванні задач тепломасоперенесення у пористих середовищах / О. В. Блажиєвська, Т. І. Мандзак // Вісник Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 1999. – Вип 1. – С. 26–31.

113. Бурак Я. Й. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я. Й.Бурак, Є. Я. Чапля // Доп. АН України. – 1993. – №10. – С. 59–63.

114. Бураков Д. А. Математическое моделирование стока : теоретические основы, современное состояние, перспективы / Д. А. Бураков, Е. Д. Карепова, В. В. Шайдуров // Вестн. Крас ГУ. – 2006. – 19 с.

115. Венгерський П. С. Використання гідродинамічного підходу для моделювання задач руху рідини в грунті / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. – Львів. – 2005. – С. 125.

116. Венгерський П. С. Математатичне моделювання руху грунтової води в насиченій зоні / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович // Дев'ята Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". – Львів. – 2002. – С. 1.

117. Венгерський П. С. Математичне моделювання руслового стоку вологи / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Dynamical System Modeling and Stability Investigation : -"DSMSI-2007" : Intertational Conferece : Theses of conference reports. May 22–25. – Kyiv, 2007. – P. 174.

118. Венгерський П. С. Чисельне дослідження математичної моделі руху поверхневої і грунтової вологи / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович, В. М. Трушевський // Міжнародна конференція ”Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ. – 2002. – С. 25.
119. Венгерський П. С. Чисельне моделювання руслового стоку вологи / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики : XIV Всеукр. наук. конф. : Тези доп. – Львів, 2007. – С. 54 – 55.
120. Венгерський П. С. Чисельне розв’язування задачі руху грунтової води в насиченій зоні / П. С. Венгерський, О. Р. Демкович // Восьма Всеукраїнська наукова конференція 25–27 вересня 2001р. “Сучасні проблеми прикладної математики”. – Львів. – 2001. – С. 19.
121. Виноградов Ю. Б. Математическое моделирование процессов формирования стока / Ю. Б. Виноградов. – Л. : Гидрометеоиздат. – 1988, 312 с.
122. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1988. – 512 с.
123. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с.
124. Галькевич П. Й. Моделювання та розрахунок систем типу імплатат-кіскова тканина щелепи людини / П. Й. Галькевич, Ю. В. Вовк, А. М. Коркуна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 92–97.
125. Гарасим Я С. Про особливості чисельного розв’язання двовимірних інтегральних рівнянь першого роду в задачах теорії потенціалу / Я. С. Гарасим, Б. А. Остудін // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. мех.–мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 54–59.
126. Гарасим Я. Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного

використання / Я. Гарасим, Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Льв. ун–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14 – С. 64–74.

127. Гарасим Я. С. Виявлення ефективної методики наближеного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу на основі обчислювальних експериментів / Я. С. Гарасим, Б. А. Остудін // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2004. – Вип. 9. – С 47–53.Os#9

128. Гарасим Я. С. Розпаралелення методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач теорії потенціалу за наявності симетричних елементів межі / Я. С. Гарасим, Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Матеріали третьої міжнарод. наук.–техн. конф. «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 25–27 вересня 2008 р. – Львів : Вид–во ПП «Вежа і Ко», 2008. – С. 342–346.

129. Германчук С. М. Математичне обґрунтування технологічного з'єднання сплаву металі та керамічного покриття / С. М. Германчук // Укр. стоматол. альманах. – 2001. – № 3. – С. 39–40.

130. Гистология тканей зуба [Electronic resource]. Режим доступу : http://www.ctomakc.ru/gistologiya-tkanei-zuba

131. Годований В. О. Особливості розподілу напружень у корені зуба, реставрованого штифтовими конструкціями, отримані методом тривимірного комп'ютерного моделювання / В. О. Годований // Новини стоматології. – 2002. – № 1. – С. 41–43.

132. Гончаренко В. М. Основы теории уравнений с частными производными / В. М. Гончаренко. – К. : Вища школа, 1985. – 311 с.

133. Гризодуб В. И. Основные биомеханические характеристики тканей пародонта / В. И. Гризодуб, А. Н. Чуйко, Н. Ю. Бахуринский // Вісник стоматології. – 2001. – № 1. – С. 59–65.

134. Гришанин К. В. Динамика русловых потоков / К. В. Гришанин. – Л. : Гидрометеоиздат, 1979. – 311 с.

135. Данько О. І. Чисельне дослідження одновимірних задач п’єзоелектрики / О. І. Данько, Г. А. Шинкаренко // Вісник Львівського університету . Серія механіко-математична. – 1997. – Вип. 46. – С. 17–25.
136. Дацiв Г. П. Застосування перетворення Келлі і методу інтегральних рівнянь для чисельного розв’язування лінійної осесиметричної задачі слошингу / Дацiв Г. П., Хапко Р. С. // Доп. НАН України. – 2008. – Вип. 2. – С. 4–10.
137. Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных середах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наукова думка, 1991. – 432 с.
138. Жарий О. Ю. Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко. – К. : Вища шк., 1989. – 184с.
139. Жаров М. Непрямі композитні реставрації при значному руйнуванні коронок бічних зубів / М. Жаров, Є. Крупінський // Новини стоматології. – 2005. – Вип. 4(45). – С. 77–83.
140. Жук П. А. Исходные уравнения математической модели тепловлагопереноса с испарением для аэрируемых слоев почвы / П. А. Жук, Я. С. Подстригач, Е. Я. Чапля // Космическая наука и техника. – 1990. – Вып. 5. – С. 3–9.
141. Заблоцький Я. В. Математичне моделювання заміщення дефектів зубних рядів незнімними протезами з опорою на остеоінтегровані імплантати / Я. В.Заблоцький, Н. М. Дидик, М. М. Гжегоцький // Новини стоматології. – 2005. – Вип. 4 (45). – С. 56–62.
142. Захаров Е. В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1992. – Т. 32. – № 1. – С. 40–58.
143. Захаров Е. В. Метод численного решения интегральных уравнений в краевых задачах с абелевой группой симметрий конечного порядка

/ Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1990. – Т. 30. – № 11. – С. 1661–1674.

144. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович., Г. П. Акилов – М. : Наука, 1984. – 752 с.

145. Карл М. Аналіз кінцевого елемента для визначення навантаження на кістку, спричиненого багатоланковими супраструктурами з опорою на імплантати / Карл М., Вінтер В. та ін. // Новини соматології. – 2005. – Вип. 4 (45). – С. 36–41.

146. Картвелишвили Н. А. Идеализация сложных динамических систем с примерами из електроенергетики / Н. А. Картвелишвили, Ю. И. Галактионов. – М. : Наука, 1976. – 272 с.

147. Картвелишвили Н. А. Неустановившиеся открытые потоки / Н. А. Картвелишвили. – Л. : Гидрометеоиздат. – 1968. – 126 с.

148. Квасниця Г Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.

149. Квасниця Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г.Квасниця, Г. А. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 162–174.

150. Кичура С. М. Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле / С. М. Кичура, Б. А. Остудин, Ю. Н. Сибиль // Теоретическая электротехника. – 1990. – Вып. 49. – С. 132–139.

151. Клочан С. Н. Особенности напряженно-деформированного состояния зуба и околозубных тканей верхней челюсти во фронтальном участке при внешних динамических нагрузках и возможности их защиты при занятиях контактными видами спорта / С. Н. Клочан // Совр. стоматология. – 2006. – Февраль.

152. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Высш. шк., 1975. – 217 с.

153. Козаревська Ю. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок : h–адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. / Ю. Козаревська, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун–ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 153–164.

154. Коковська Я. В. Врахування нерівномірності розподілу швидкостей при моделюванні руслового стоку вологи / Я. В. Коковська // XI Всеукр. (VI Міжнар.) студ. наук. конф. з прикл. математики та інформатики : Тези доп. – Львів, 2008. – С. 130 – 131.

155. Коковська Я. В. Чисельне моделювання процесів руслового стоку вологи / Я. В. Коковська // X Всеукр. (V Міжнар.) студ. наук. конф. з прикл. математики та інформатики : Тези доп. – Львів, 2007. – С. 90 – 91.

156. Кондратьева А. Н. О физической сущности формулы Шези [Electronic resource] / Кондратьева А. Н. – 1997. – 10 с. – Режим доступу : http://bedload.boom.ru/MyPapers/27.html.

157. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость / М.Р.Короткина. –М : Изд–во МГУ. – 1988. – 304 с.

158. Корявов П. П. Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного басейна / П. П. Корявов // Вод.ресурсы. – 1981. – № 3. – С. 54-64.

159. Кучмент Л. С. Модели процессов формирования речного стока / Л. С. Кучмент. – Л. : Гидрометеоиздат, 1980. – 142 с.

160. Лазарев С. А. Изучение влияния различных видов протезов на протезное ложе и опорные зубы на математической модели / С. А. Лазарев // Стоматология для всех. – 2003. – № 4. – С. 8–10.

161. Лещук С. Тестування нової технології зубного протезування методами комп'ютерного моделювання / С. Лещук, В. Д. Вовк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 166–177.

162. Лещук С. Є. Особливості розподілу силових навантажень у багатокореневому зубі під дією імітованих оклюзійних сил, визначених методом комп'ютерного моделювання / Лещук С. Є., Лещук Є. С., Мандзюк Т. С // Новини стоматології. – 2009. – Вип. 2(59). – С. 54–58.
163. Лионс Ж.–Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М. : Мир, 1971. – 371 с.
164. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 600 с.
165. Ляшко И. И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецький, В. В. Скопецький. – Киев : Наукова думка, 1977. – 283 с.
166. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – Киев : Наукова думка, 1991. – 257с.
167. Максимук О. В. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій / О. В. Максимук, Р. М. Махніцький, Н. М. Щербина. – Львів : НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
168. Малець Р. Моделювання процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі / Малець Р. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2009.
169. Мандзак Т. І. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції–дифузії у середовищі з включенням / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 150–158.
170. Мандзак Т. І. Пониження вимірності математичної моделі адвекції–дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій

/ Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула // Волин. Мате мат. вісник. Сер. прикл. матем. – 2004. – Вип. 2 (11). – С. 52–57.

171. Мандзюк Т. Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології / Т. Мандзюк, В. Вовк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика.

172. Мандзюк Т. С. Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології / Мандзюк Т. С., Вовк В. Д. // Вісник львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 105–122.

173. Матвеева А. И. Использование математического моделирования при планировании ортопедического лечения больных с дефектами зубного ряда верхней челюсти с применением имплантатов / А. И. Матвеева, С. С. Гаврюшин [и др.] // Панорама ортопед. стоматологии. – 2002. – № 3. – С. 20–25.

174. Матвійчук О. Я. Некаріозні пришийкові ураження як наслідок функціональних зубо-щелепових патологій : Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. мед. наук / Матвійчук О. Я. – Львів, 1997.

175. Мочурад Л. Чисельний аналіз граничних задач теорії потенціалу в R^2 з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Льв. ун–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 32–47.

176. Мочурад Л. І. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму «Проблеми оптимізації обчислень», 24–29.09.09. смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В.М.Глушкова НАНУ. – Київ. – 2009. – С. 117–122.

177. Наумович С. А. Визуализация полей напряжений в периодонте при действии произвольной силы / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский, П. П. Кожич // Науково-дослідна робота БДМУ. – 1999–2003.

178. Немировский Ю. В. Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутта / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47. – № 1. – С. 43– 62.
179. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
180. Новотарський М. А. Штучні нейронні мережі : обчислення : праці Інституту математики НАН України / М. А. Новотарський, Б. Б. Нестеренко. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – Т. 51. – 384 с.
181. Обэн Ж.–П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.–П. Обэн. – М. : Мир, 1977. – 383 с.
182. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М : Наука, 1988. – 472 с.
183. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар.– М. : Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
184. Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. – К. : Наук. думка, 1980. – 216 с.
185. Подстригач Я. С. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, В. И. Громовик, В. Л. Лобзень. – К. : Наук. думка, 1977. – 160 с.
186. Подстригач Я. С., Обобщенная термомеханика / Я. С Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1976. – 311 с.
187. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664с.
188. Путалова И. Н. Опитная проверка математической модели нижнечелюстного моляра / И. Н. Путалова, В. М. Семенюк [и др.] // Бюлл. Со РАМН. – 2003. – № 3 (109).

189. Рогожников Г. И. Реставрация твердих тканей зубов вкладками / Г. И. Рогожников, В. А. Логинов и др. – М. : Мед. книга; – Н.Новгород : Изд. НГМА, 2002. – С. 82–118.

190. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко. – Львів : Львів. ун-т. – 1999. – 80 с.

191. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 221 с.

192. Самарский А. А. Численные методы решения задач конвекции–диффузии / А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.

193. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека // АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова. – Киев : Наукова думка. – 1991. – 431с.

194. Серр Ж.–П. Линейные представления конечных групп / Ж.–П. Серр. – М. : РХД, 2003. – 132 с.

195. Сибиль Ю. Н. Существование решения двумерных интегральных и интегро–дифференциальных уравнений первого рода теории потенциала заданных на гладком многообразии с краем / Ю. Н. Сибиль. – Львов. – 1990. – 17 с.

196. Сінчук Ю. О. Адаптивна схема методу скінченних елементів для сингулярно збурених задач конвекції–дифузії / Сінчук Ю. О. // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 95–102.

197. Сінчук Ю. О. Адаптивні схеми методу скінченних елементів для сингулярно збурених варіаційних задач конвекції–дифузії : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.–мат. наук : спец. 01.05.02. "математичне моделювання та обчислювальні методи”. / Сінчук Юрій Олександрович. – Львів, 2008 – 20с.

198. Сінчук Ю. О. Апостеріорний оцінювач похибки апроксимацій МСЕ для задач конвекції–дифузії / Сінчук Ю. О., Шинкаренко Г. А. // Вісник Тернопільського держ. техн. ун–ту. – 2008. – Т. 13. – № 2. – С. 169–174.
199. Сінчук Ю. О. Апроксимації методу скінченних елементів з експоненціальними ваговими функціями / Ю. О. Сінчук, Г. А. Шинкаренко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2007. – Вип. 5. – С. 61–70.
200. Степанов А. Е. Косметическое восстановление коронок зубов / А. Е.Степанов. – М. :АОЗТ “Паритет”, 1999. – 180 с.
201. Теплов В. И. Расчет водопропускной способности призматического прямоугольного русла с отрицательным уклоном дна. Государственный гидрологический институт СП. [Electronic resource] / Теплов В. И. – Режим доступу : http://bedload.boom.ru/index.html.
202. Тихан М. О. Моделювання термомеханічних процесів в конструктивних елементах вимірювачів тиску / Тихан М. О., Малець Р. Б., Шинкаренко Г. А. // Машинознавство. – 2008.– № 6. – С. 26–31.
203. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
204. Токар Ю. Численное исследование вынужденных акустических колебаний пьезопреобразователей : дис. ...канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 ”механика деформированого твердого тела”. / Ю. Токар. – Львов, 1988. – 120 с.
205. Тривимірне конструювання з CEREC // Новини стоматології. – 2005. – Вип. 4 (45). – С. 14–17.
206. Трушевський В. Застосування нейронних мереж до розв’язування задач теплопровідності / В. Трушевський, Г. Шинкаренко, Н. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 135–147.
207. Трушевський В. М. Наближене розв’язування лінійних крайових задач мультисітковим ітераційним нейронним методом / В. М. Трушевський,

Н. М Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. – С. 82–98.

208. Трушевський В. Визначення нестаціонарного температурного поля в пластині за змішаних умов теплообміну на основі нейронних мереж / Трушевський В., Шинкаренко Г., Щербина Н. // Вісник львівського університету, Серія прикладна математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 155–169.

209. Ульм С Алгоритмы обобщенного метода Стеффенсена / С. Ульм // Известия АН ЭстССР. – 1965. – Т. 14. – С. 435–443.

210. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях. I, II / С. Ульм // Известия АН ЭстССР. – 1967. – Т. 16. – С. 146–156.

211. Уханов М. М. Пути и решения проблемы укрепления реставрации коронковой части зуба [Електронний ресурс] : 100матология on-line. 2001. / Уханов М. М. – Режим доступу : http://www.100mat.ru/profession/ts1.htm.

212. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. – 353 с.

213. Хапко Р. Про метод інтегральних рівнянь для розв'язування параболічної задачі Коші / Р. Хапко, В. Вавричук // Праці міжнародного симпозіуму «Проблеми оптимізації обчислень», 24–29.09.09. смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В.М.Глушкова НАНУ. – Київ. – 2009. – С. 377–381.

214. Чабан Ф. Постпроцесорне уточнення полілінійних апроксимацій МСЕ для задач міграції домішок / Чабан Ф., Шинкаренко Г. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – Випуск 13. – С. 164–176.

215. Чапля Є. Я. Фізико–математичне моделювання гетеродифузного масо переносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 125 с.

216. Чуйко А. М. Біомеханіка періодонта : порівняльний аналіз монографій “Заболевание периодонта” (под ред. Н. Ф. Данилевского) і “Особенности биомеханики в стоматологи” (А. Чуйко, В. Вовк) / А. Н. Чуйко, В. Е. Вовк,

В. І. Гризодуб, М .Г. Романов // Новини стоматології. 2006. – Вип. 4 (49). – С. 10–20.

217. Чуйко А. Н. О роли и возможностях биомеханического анализа в имплантологии / А. Н. Чуйко, В. Е. Вовк // Стоматолог. – 2004. – № 6. – С. 32-37;

218. Чуйко А. Н. О роли и возможностях биомеханического анализа в имплантологии / А. Н. Чуйко, В. Е. Вовк // Стоматолог. – 2004. – № 7. – С. 32–34.

219. Шаманский В. Е. Численные решения задач фильтрации грунтових вод на ЭЦВМ / В. Е. Шаманский. – Киев : Наукова думка, 1969. – 369 с.

220. Шахно С. М. Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд для розв’язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно // Математичні студії. – 2004. – 22. – С. 79–86 (in Ukrainian).

221. Шахно С. М. Метод Стефенсена за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку. / С. М. Шахно // Математичні студії. – 2008. – 31. – С. 90–95.

222. Шахно С. М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для розділених різниць першого порядку // Матем. вісн. НТШ. – Т. 4.– 2007.– С. 296–305.

223. Шахно С. М. Про двокроковий ітераційний процес в узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / С. М. Шахно // Математ. методи і фіз.–мех. поля. – 2009. – 52. – С. 59–66.

224. Шварц А. Д. Биомеханика і окклюзия зубов / А. Д. Шварц. – М. : Медицина, 1994. – 208 с.

225. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв’язування початково-крайових задач : навч. посібник / Г. А. Шинкаренко. – Київ : НМК ВО, 1991. – 88 с.

226. Шинкаренко Г. Адаптивний метод скінченних елементів та його застосування / Шинкаренко Г. // Обчислювальна математика і математичні

проблеми механіки : наук. зб. ; за ред. В. Л. Макарова, І. О. Луковського, Р. М. Кушніра. – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. – С. 72–74.

227. Шинкаренко Г. А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г. А. Шинкаренко // Дифференциальные уравнения. – Т.29. – 1993. – №.7. – С. 1252–1260.
228. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А.Шинкаренко. – Київ : НМК ВО, 1991. – 88 с.
229. Шинкаренко Г. А. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок : h – адаптивні МСЕ. Частина 1 / Г. А. Шинкаренко, Ю. С. Козаревська // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2001. – Вип. 5. – С. 153–164.
230. Щербина Ю. Н. Исследование некоторых итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений : дис. ...канд. физ.-мат. наук : 01.01.07 "обчислювальна математика". / Ю. Н. Щербина. – Львов, 1975.