

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АКУСТИКИ ГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМ У ТЕРМІНАХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Стаття присвячена обґрунтуванню математичної моделі акустики гідропружних систем в термінах переміщень для середовищ з дисипацією. Наведено короткий огляд стану досліджень в галузі числового моделювання акустичних процесів гідропружних систем. Доведено коректність такої математичної моделі існування та єдиність узагальненого розв'язку, а також збіжність класичних апроксимацій методу скінченних елементів до розв'язку варіаційної задачі. На прикладі числового дослідження поширення акустичної хвилі в гідропружній системі проаналізовано вплив врахування в'язкості середовищ на характер перебігу перехідних процесів.

1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ АКУСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМАХ: ОСНОВНІ ПІДХОДИ ТА ВІДКРИТІ ПРОБЛЕМИ

Одним з перших звертань до задач гідропружності можна вважати роботу М.Жуковського [4], присвячену врахуванню деформації водогінної труби під дією гідродинамічного тиску. Дослідження задач взаємодії пружних тіл з рідинами набули особливої актуальності в другій половині ХХ століття у зв'язку з бурхливим розвитком ракетно-космічної техніки, літакобудування, вирішенням проблем віброта сейсмозахисту ядерних реакторів, нафтогазосховищ, плотин та гідроелектростанцій тощо. Ряд задач аналізу конструкцій на підставі ехо-сигналу, зокрема, підводних, ультразвукова діагностика в інженерії та медицині, проблеми зниження рівня шумів машин та механізмів вимагають адекватного математичного моделювання та розвитку ефективних методів аналізу власне акустичних процесів у гідропружних системах. Велика кількість дослідників аналізувала взаємодію пружних тіл з рідиною як незв'язану - з використанням різних підходів врахування впливу одного середовища при розв'язуванні задачі для іншого. Однак такі підходи дають задовільні результати тільки у випадках, якщо пружне тіло та рідина мають суттєво відмінні динамічні характеристики. У багатьох же реальних задачах динаміки гідропружних систем ступінь впливу, наприклад, рідини на пружне тіло в залежності від його жорсткості може бути співмірною з дією на всю систему зовнішніх навантажень. Значний вклад у дослідження задач взаємодії пружних оболонкових конструкцій з ідеальною рідиною внесли українські вчені О.Блажієвська, В.Галазюк, А.Гузь, В.Костенко, В.Кубенко, І.Луковський, Я.Підстригач, О.Піддубняк та інші. Однак використання переважно аналітичних підходів накладало обмеження на клас досліджуваних задач - здебільшого розглядалися канонічні форми конструкцій. Найбільшого розвитку набуло числове моделювання акустичних процесів у складних інженерних конструкціях з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). Значний внесок в дослідження вказаних питань зроблено К.-Ю.Бате (K.J.Bathe), Т.Белічко (Т.Бelytschko), О.Зенкевічем (O.Zienkiewicz), Р.Огайоном (R.Ohayan), К.Феліппою (С.Felippa) та рядом інших вчених. До питань коректності формулювань задач гідропружності одним з перших звернувся В.Костенко [5], який показав єдиність та стійкість класичного розв'язку задачі гідропружності для оболонкових конструкцій. Коректність варіаційної задачі гідропружності для оболонкових конструкцій показана у роботі [1]. Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі гідропружності в термінах пружних переміщень та потенціалу переміщень рідини показані Р.Теммом (R.Temmam) на основі ряду робіт Ж.Бужо (J.Boujot) [11]. У тому ж році, одночасно з указаною публікацією, В.Горлач та Г.Шинкаренко [2] довели існування, єдиність та неперервну залежність від вихідних даних узагальненого розв'язку задачі взаємодії пружного тіла з ідеальною рідиною в термінах пружних переміщень тіла та потенціалу швидкостей рідини. Однак, незважаючи на значний прогрес у цій області, залишається ряд "відкритих проблем" [25]. Однією з таких проблем є відсутність ефективних числових схем для дослідження високочастотних коливань (за умовою Куранта узгодження довжини хвилі з діаметром скінченного елемента вимагає побудови надгустих сіток та, відповідно, значних обчислювальних затрат). Не менш болючою при всебічному аналізі акустичних процесів інженерних конструкцій є відсутність єдиної математичної моделі для опису взаємодії пружного тіла з рідиною, яка була б позбавлена суттєвих недоліків [3,17,19]. Для моделювання динамічної поведінки пружних тіл традиційно використовуються "природні" невідомі - пружні переміщення. Однак для моделювання акустичних хвиль в рідині в якості невідомих можуть уживатись швидкості, тиск або ж потенціали швидкостей чи переміщень. У таких випадках виникають "проблеми" з врахуванням умов спряження (рівності тисків та нормальних швидкостей) на межі розділу двох середовищ, що призводять до ускладнення алгоритмів реалізації числових схем. У випадку застосування МСЕ до розв'язування задач гідропружності з використанням різних за фізичним змістом невідомих у пружному тілі та рідині найчастіше доводиться мати справу з несиметричними матрицями для результуючих систем лінійних

алгебраїчних систем [13]. Застосування ж невідомих переміщень для моделювання акустичних рухів ідеальної рідини володіючи певною однорідністю опису двох середовищ призводить до проблем забезпечення виконання умов потенціальності руху рідини ($\text{rot } u=0$) та незалежності тангенціальних напружень на межі контакту пружного тіла з рідиною. Тому А.Бермудес (A.Bermudez), Р.Родрігес (R.Rodriguez) [10] та ін. шукали узагальнений розв'язок у просторі $H(\text{div}, \Omega)$, для апроксимації ж розв'язку за просторовими змінними в рідині застосовували скінченно-елементні простори апроксимацій Рав'яра-Тома (Raviart-Thomas) [22]. Проте, використання різних типів апроксимацій для рідини та пружного тіла суттєво ускладнює реалізацію схеми методу та позбавляє єдиного підходу до опису різних середовищ. Застосування ж однотипних апроксимацій (для дискретизації за просторовими змінними у рідині – апроксимації Рав'яра-Тома, а у пружному тілі – Круазье-Рав'яра (Crouzeix-Raviart)) суттєво ускладнює числову модель [16].

Використання класичних апроксимацій МСЕ для такої моделі може призводити до появи нефізичних вихруватостей (spurious-modes) числового розв'язку [23]. Спроби подолання цих проблем за рахунок використання схем МСЕ з вибірковим інтегруванням [12,18] не можна визнати достатньо вдалим. На шляху обурювання проблем нефізичних вихруватостей широко застосовуються змішані формулювання [8,14], однак такі моделі є суттєво складнішими в застосуваннях та при розгляді питань їх коректності.

У даній роботі запропоновано розглянути числову модель нестационарної акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною у випадку середовищ з дисипацією. Числова модель записана в термінах невідомих переміщень як у пружному тілі так і в рідині.

Врахування в'язкості середовищ (а це природно з фізичних міркувань) дозволяє шукати вектор переміщень рідини у просторі $(H_1 \Omega)^n$, а також математично обґрунтувати застосування класичної схеми МСЕ для задач взаємодії пружного тіла з рідиною. Окрім того, введення до розгляду в'язкості середовищ значно розширює межі застосування запропонованої математичної моделі, оскільки в багатьох випадках (зокрема - для високочастотних коливань) важливим є дослідження акустичних процесів з урахуванням дисипації енергії.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМАХ

2.1. Рівняння еластодинаміки

Нехай пружне тіло займає обмежену область Ω^S точок $x=(x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору \mathbf{R}^3 з неперервною за Ліпшицем межею Γ^S . Рух пружного тіла на проміжку часу $(0, T]$ описують рівняння:

$$\begin{cases} \rho^S (u_i^S)'' - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^S = \rho^S f_i^S, \\ \sigma_{ij}^S(u^S) = a_{ijk}^S e_{km}(u^S) + c_{ijk}^S e_{km}((u^S)'), \\ e_{ij}(u^S) = (u_{i,j}^S + u_{j,i}^S)/2, \quad \text{в } \Omega^S \times (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

де $u^S(x, t) = \{u_i^S(x, t)\}_{i=1}^3$ - вектор переміщень пружного тіла з густиною $\rho^S = \rho^S(x)$, коефіцієнтами пружності $\{a_{ijk}^S(x)\}$ та в'язкості $\{c_{ijk}^S(x)\}$ із звичайними властивостями симетрії та еліптичності. Вектор $f^S(x, t) = \{f_i^S(x, t)\}_{i=1}^3$ виражає дію розподілених джерел звуку.

Тут та надалі вжито підсумовування від 1 до 3 за індексами, що повторюються, а також $(\circ)' = \frac{\partial}{\partial t}(\circ)$, $(\circ)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\circ)$.

2.2. Рівняння акустики рідини

Нехай рідина займає обмежену область $\Omega^F \subset \mathbf{R}^3$ з межею Γ^F . Рух рідини описують вектор швидкостей $v^F(x, t) = \{v_i^F(x, t)\}_{i=1}^3$ та тиск $p = p(x, t)$, що задовольняють рівняння нерозривності та рівняння Нав'є-Стокса в акустичному наближенні [6]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^F c^2} p' + v_{k,k}^F = 0, \\ \rho^F (v_i^F)' - \sigma_{ij}^F = 0, \quad (2) \\ \sigma_{ij}^F = [-p + (\xi^F - 2\eta^F/3)v_{k,k}^F] \delta_{ij} + 2\eta^F e_{ij}(v^F). \end{cases}$$

Тут $\rho^F = \rho^F(x)$ - густина, $c = c(x)$ - швидкість звуку, $\eta^F = \eta^F(x)$ та $\xi^F = \xi^F(x)$ - відповідно коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості рідини, $\sigma_{i,j}$ - символ Кронеккера.

Скориставшись рівнянням нерозривності, виразимо тиск через переміщення, густину та швидкість звуку в рідині:

$$p = -\rho^F c^2 u_{k,k}^F.$$

Підставивши цей вираз у рівняння Нав'є-Стокса, отримаємо рівняння руху рідини, де в якості нових невідомих виступають переміщення $u^F(x,t) = \{u_i^F(x,t)\}_{i=1}^3$:

$$\begin{cases} \rho^F (u_i^F)'' - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^F = 0, \\ \sigma_{ij}^F (u^F) = [\rho^F c^2 \operatorname{div} u^F + (\xi - 2\eta/3) \operatorname{div} (u^F)'] \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} ((u^F)') \quad \text{в } \Omega^F \times (0, T]. \end{cases} \quad (2)$$

2.3. Початково-крайова задача акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною

Припустимо, що описані вище середовища взаємодіють через поверхню контакту $\Gamma^C = \Gamma^S \cap \Gamma^F \neq \emptyset$:

$$u_i^S = u_i^F, \quad (\sigma_{ij}^S - \sigma_{ij}^F) v_j^S = 0 \quad \text{на } \Gamma^C \times [0, T], \quad (3)$$

де $v^S = \{v_i^S\}_{i=1}^3$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ^S .

Нехай $\Omega = \Omega^S \cup \Omega^F$. Введемо вектор переміщень середовища, яке заповнює область Ω так, що

$$u = \begin{cases} u^S(x), & x \in \Omega^S \\ u^F(x), & x \in \Omega^F \end{cases} \quad (4)$$

Аналогічно введемо густину середовища $\rho = \rho(x)$, інтенсивність розподілених джерел звуку $f(x,t) = \{f_i(x,t)\}_{i=1}^3$, модулі пружності та в'язкості $\{a_{ijkl}(x)\}, \{c_{ijkl}(x)\}$, які для ізотропних середовищ матимуть, відповідно, вигляд

$$a_{ijkl}^S = \begin{cases} 2\mu, & \text{при } i = k, j = m, i \neq j; \\ \lambda + 2\mu, & \text{при } i = j, k = i, m = j; \\ \lambda, & \text{при } i = j, k = m, i \neq k; \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (5)$$

$$c_{ijkl}^S = \begin{cases} 2\eta^S, & \text{при } i = k, j = m, i \neq j; \\ \xi^S + 2\eta^S, & \text{при } i = j, k = i, m = j; \\ \xi^S, & \text{при } i = j, k = m, i \neq k; \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (6)$$

$$a_{ijkl}^F = \begin{cases} \rho^F c^2, & \text{при } i = j = k = m; \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (7)$$

$$c_{ijkl}^F = \begin{cases} 2\eta^F, & \text{при } i = j = k = m; \\ \xi^F + 4\eta^F/3, & \text{при } i = j, k = i, m = j; \\ \xi^F - 2\eta^F/3, & \text{при } i = j, k = m, i \neq k; \\ 0, & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (8)$$

де $\eta^S = \eta^S(x)$ та $\xi^S = \xi^S(x)$ - відповідно коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості пружного тіла, $\lambda = \lambda(x)$, $\mu = \mu(x)$ - коефіцієнти Ламе, які пов'язані з модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона σ наступними співвідношеннями:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Введені вище позначення дозволяють сформулювати початково-крайову задачу акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною з врахуванням в'язкості обох середовищ.

Нехай пружне тіло та рідина займають область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ . Рух середовища описує вектор переміщень $u(x, t) = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^3$, що задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \rho u_i'' - \sigma_{ij,j} &= f_i, \\ \sigma_{ij}(u) &= a_{ijkm} e_{km}(u) + c_{ijkm} e_{km}(u'), \\ e_{ij}(u) &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \text{в } \Omega \times (0, T] \end{aligned} \quad (9)$$

крайові та початкові умови

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{на } \Gamma_U \times [0, T], \quad \Gamma_U \subset \Gamma, \quad \text{mes}(\Gamma_U) > 0, \\ \sigma_{ij} v_j = \hat{\sigma}_i & \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \quad \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_U. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} u_{t=0} = u^0, \\ u'_{t=0} = u^1 \end{cases} \quad \text{в } \Omega. \quad (11)$$

де $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i(x, t)$, $u^0 = u^0(x)$ та $u^1 = u^1(x)$ - задані функції.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Введемо до розгляду простори

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^3 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_U\}, \quad H = L^2(\Omega)^3$$

та сформулюємо варіаційну задачу:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), \quad u^0 \in V, \quad u^1 \in H. \\ \text{Знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ такий, що} \\ m(u''(t), v) + c(u'(t), v) + a(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall v \in V \\ (u(0) - u^0, v)_{H^1(\Omega)} = 0, \\ m(u'(0) - u^1, v) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Тут ми ввели такі білінійні форми та лінійний функціонал:

$$\begin{cases} m(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i \, dx \\ a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkm} e_{ij}(u) e_{ij}(v) \, dx \\ c(u, v) = \int_{\Omega} c_{ijkm} e_{ij}(u) e_{ij}(v) \, dx \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i \, d\gamma \end{cases} \quad (13)$$

Для задач теорії пружності відоме варіаційне формулювання виду (12) [7], але з початковою умовою $a(u(0) - u^0, v) = 0, \forall v \in V$. З огляду на простір допустимих векторів V та специфіку білінійної форми $a^F(.,.) : H(\text{div}, \Omega^F) \times H(\text{div}, \Omega^F) \rightarrow \mathbf{R}$ запропоновано записати початкову умову у вигляді $(u(0) - u^0, v)_{H^1(\Omega)} = 0, \forall v \in V$.

4. ТЕОРЕМА ПРО КОРЕКТНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ АКУСТИКИ ГІДРОПРУЖНИХ СИСТЕМ В ПЕРЕМІЩЕННЯХ

Теорема 1. Існує один і лише один розв'язок u задачі (12), такий що

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; V), \\ u' \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ u'' \in L^2(0, T; V'). \end{cases} \quad (14)$$

Окрім цього, розв'язок u неперервно залежить від даних задачі, тобто знайдеться $C = \text{const} > 0$ така, що

$$\begin{aligned} & \|u'(t)\|_H^2 + a(u(t), u(t)) + \int_0^t \|u'(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \\ & \leq C \left\{ \|u^1\|_H^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau \right\} \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (15)$$

4.1. Енергетична нерівність або баланс енергії гідропружної системи

Доведення теореми проведемо у два етапи. Спочатку покажемо неперервну залежність розв'язку варіаційної задачі від вихідних даних.

Оскільки симетрична білінійна форма $c: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ є неперервною та V - еліптичною ($\exists \alpha = \text{const} > 0$ така, що $c(u, u) \geq \alpha \|u\|_{V, \Omega}^2 \quad \forall u \in V$), а симетрична білінійна форма $m: H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ є H - еліптичною ($\exists \beta = \text{const} > 0$ така, що $m(u, u) \geq \beta \|u\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall u \in H$), то можна ввести норми, квадрати яких пов'язані з білінійними формами задачі наступним чином:

$$\|u\|_V^2 = c(u, u) \quad \forall u \in V,$$

$$\|u\|_H^2 = m(u, u) \quad \forall u \in H.$$

Припустимо, що сформульована варіаційна задача (12) має розв'язок $u(t)$. Покладемо у варіаційному рівнянні задачі (12) $v = u'(t)$ та проінтегруємо на проміжку $(0, t]$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \|u'(t)\|_H^2 + a(u(t), u(t)) \right\} + \int_0^t \|u'(\tau)\|_V^2 d\tau = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \|u'(0)\|_H^2 + a(u(0), u(0)) \right\} + \int_0^t \langle l(\tau), u'(\tau) \rangle \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (16)$$

Приймаючи до уваги те, що $a(u, u) \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, $C_1 = \text{const} > 0$ приходимо до енергетичної нерівності

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \|u'(t)\|_H^2 + a(u(t), u(t)) \right\} + \int_0^t \|u'(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ \|u'(0)\|_H^2 + C_1 \|u(0)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} + \int_0^t \langle l(\tau), u'(\tau) \rangle \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (17)$$

Оскільки $l \in L^2(0, T; V')$, то

$$|\langle l(t), u'(t) \rangle| \leq \frac{1}{2} \|u'(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} K \|l(t)\|_*^2 \quad (18)$$

де $K = \text{const} > 0$. Врахувавши нерівність (32) та початкові умови варіаційної задачі (12), отримаємо

$$\begin{aligned} & \|u'(t)\|_H^2 + a(u(t), u(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \\ & \leq \|u^1\|_H^2 + C_1 \|u^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} K \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (19)$$

Або ж інакше

$$\begin{aligned} & \|u'(t)\|_H^2 + a(u(t), u(t)) + \int_0^t \|u'(\tau)\|_V^2 d\tau \leq \\ & \leq C \left\{ \|u^1\|_H^2 + C_1 \|u^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 \right\} \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad (20)$$

де $C = \max\{1, C_1, K\}$.

Аналізуючи енергетичну нерівність (20), переконуємось у тому, що при зроблених щодо вихідних даних задачі припущеннях та за умови, що розв'язок існує, він неперервно залежить від даних задачі.

Отже, для доведення теореми залишилось показати існування та єдиність розв'язку.

4.2. Існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі

Доведення існування розв'язку варіаційної задачі проведемо конструктивним шляхом з застосуванням процедури напівдискретизації Гальоркіна.

Нехай $\{V_h\}$ - послідовність скінченновимірних просторів, така що $V_h \subset V$, $\dim V_h = N = N(h) \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Крім того $\bigcup_{h>0} V_h$ щільна в V . Визначимо напівдискретні апроксимації Гальоркіна, як

розв'язки напівдискретизованих (за просторовими змінними) задач:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), u^0 \in V, u^1 \in H \text{ та } h = \text{const} > 0. \\ \text{Знайти } u_h \in L^2(0, T; V_h) \text{ такий, що} \\ m(u_h''(t), v) + c(u_h'(t), v) + a(u_h(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in (0, T], \forall v \in V_h, \\ (u_h(0) - u^0, v)_{H^1(\Omega)} = 0, \\ m(u_h'(0) - u^1, v) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Включення $u_h \in L^2(0, T; V_h)$ дозволяє однозначно представити апроксимацію Гальоркіна у вигляді розкладу за базисом $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ простору V_h

$$u_h(x, t) = \sum_{k=1}^N U_k(t) \varphi_k(x).$$

Для відшукування невідомих коефіцієнтів $U(t) = \{U_i(t)\}_{i=1}^N$ в результаті застосування процедури Гальоркіна отримуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, яка у матричному записі має вигляд:

$$\begin{cases} MU''(t) + CU'(t) + AU(t) = L(t) \quad t \in (0, T], \\ GU(0) = U^0, \\ MU'(0) = U^1. \end{cases} \quad (22)$$

Оскільки матриці $M = \{m(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$, $C = \{c(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$, $G = \{(\varphi_i, \varphi_j)_{H^1(\Omega)}\}_{i,j=1}^N$ симетричні та додатно визначені, то задача Коші (22) однозначно розв'язується відносно вектора $U(t)$. Побудована таким чином апроксимація Гальоркіна $u_h(t) \in V_h$ є єдиним розв'язком задачі (21).

Розглянемо послідовність розв'язків напівдискретних задач u_h при $h \rightarrow \infty$. З огляду на апіорні оцінки (20), знайдеться підпослідовність u_γ послідовності u_h така, що

$$u'_\gamma \rightarrow u' \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \text{ в } L^\infty(0, T; H) \text{ * слабко,}$$

$$u'_\gamma \rightarrow u' \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ слабко.}$$

Покажемо тепер, що $u_\gamma \rightarrow u$ при $\gamma \rightarrow 0$ в $L^\infty(0, T; V)$ * слабко. Представимо u у вигляді

$$u(t) = \int_0^t u'(\tau) d\tau + u(0) \text{ та розглянемо } \|u(t) - u(0)\|_{L^\infty(0, T; V)}^2. \text{ Використавши нерівність Коші-}$$

Буняковського, одержимо

$$\|u(t) - u(0)\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 = \sup_{t \in (0, T]} \text{ess} \|u(t)\|_V^2 \leq T^2 \|u'(t)\|_{L^2(0, T; V)}^2$$

Оскільки $u'_\gamma \rightarrow u'$ в $L^2(0, T; V)$ слабко, то $u_\gamma \rightarrow u$ в $L^\infty(0, T; V)$ * слабко.

Зауважимо, що має місце рівняння

$$\int_0^T \left\{ -m(u'_\gamma, v') + c(u'_\gamma, v) + a(u_\gamma, v) - \langle l, v \rangle \right\} dt = -m(u'_\gamma(0), v) = -m(u_0, v);$$

$$\forall v \in F_h = \{v \in C^1(0, T; V_h) \mid v(T) = 0\}.$$

Здійснимо тепер перехід до границі при $\gamma \rightarrow 0$

$$\int_0^T \left\{ m(u'', v) + c(u', v) + a(u, v) - \langle l, v \rangle \right\} dt = m(u'(0) - u^1), \forall v \in F_h \quad \forall h > 0$$

Легко переконатись, що побудований як границя напівдискретних апроксимацій Гальоркіна елемент u простору V є розв'язком варіаційної задачі (12).

Нарешті, єдиність розв'язку задачі слідує з нерівності (20) та міркувань від супротивного.

Таким чином, доведено існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі (12) і, отже, завершено доведення теореми.

5. ПОШИРЕННЯ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ В ГІДРОПРУЖНІЙ СИСТЕМІ

З метою верифікації запропонованої математичної моделі та числової схеми її дослідження розглянуто тривимірну модельну задачу про імпульсне навантаження пружного тіла товщини 0.053 м, що взаємодіє з рідиною у абсолютно жорсткій камері довжини 0.347 м з прямокутним січенням 0.1 × 0.01 м (рис. 1).

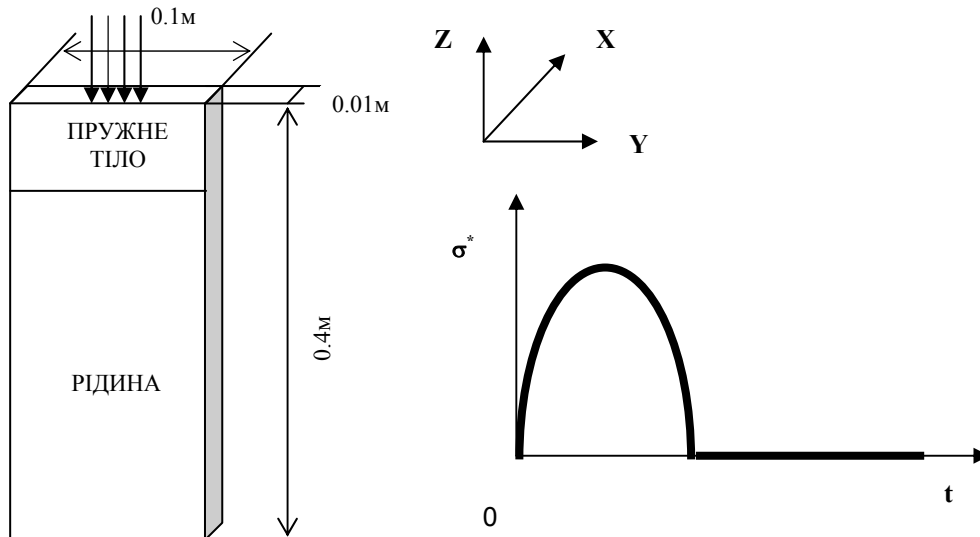


Рис. 1. Гідропружна система під дією імпульсного навантаження

Характеристики середовищ такі: рідина – густина $\rho = 1000$ кг/м³, швидкість звуку $c = 1000$ м/с; пружне тіло – густина $\rho = 3892$ кг/м³, модуль Юнга $E = 9.7 \cdot 10^{10}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$; для обох середовищ коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості $\eta = \xi = 100$ Па·с. Бічні поверхні пружного тіла жорстко закріплені. На пружне тіло діє нормальне навантаження $\sigma^* = \sigma^*(t)$ прикладене до центру пружного тіла.

Дана задача розв'язувалась з використанням поліквадратичних ізопараметричних апроксимацій МСЕ. Структура розрахункової сітки скінченних елементів (за осями $X \times Y \times Z$) – $2 \times 12 \times 20$ та $2 \times 12 \times 60$ у пружному тілі та рідині відповідно. Крок за часом $\Delta t = 3 \cdot 10^{-7}$ с. На кожному кроці за часом потрібно розв'язувати систему 33903 лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною матрицею стрічкового типу (півширина стрічки – 453).

На рис. 2 зображено поведінку кінетичної, потенційної та енергії дисипації гідропружної системи в часі. Графіки ілюструють баланс енергій в гідропружній системі.

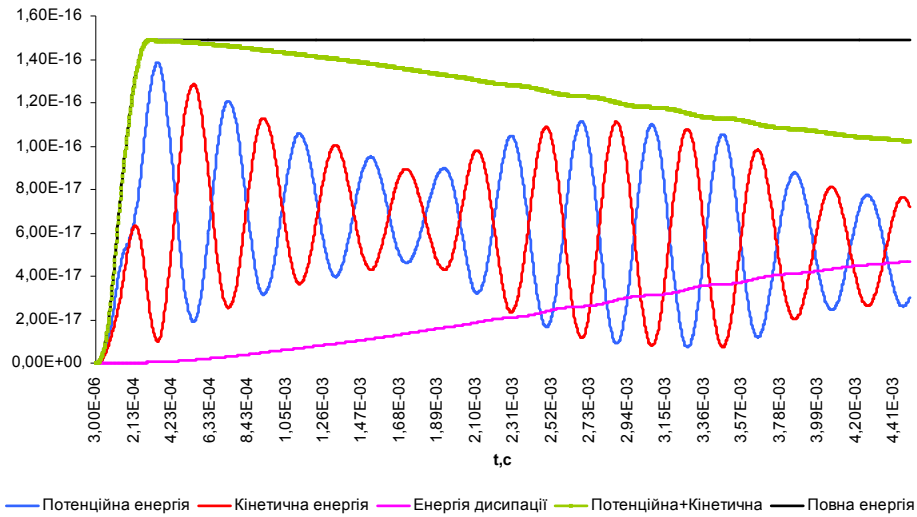


Рис. 2. Баланс енергій гідропружної системи

На рис. 3 зображено ізосмути переміщень у рідині у моменти часу: а) – $t=0.9 \cdot 10^{-6}$ с, б) – $t=4.8 \cdot 10^{-6}$ с, в) – $t=6.0 \cdot 10^{-6}$ с, г) – $t=7.8 \cdot 10^{-6}$ с, д) – $t=9.6 \cdot 10^{-6}$ с.

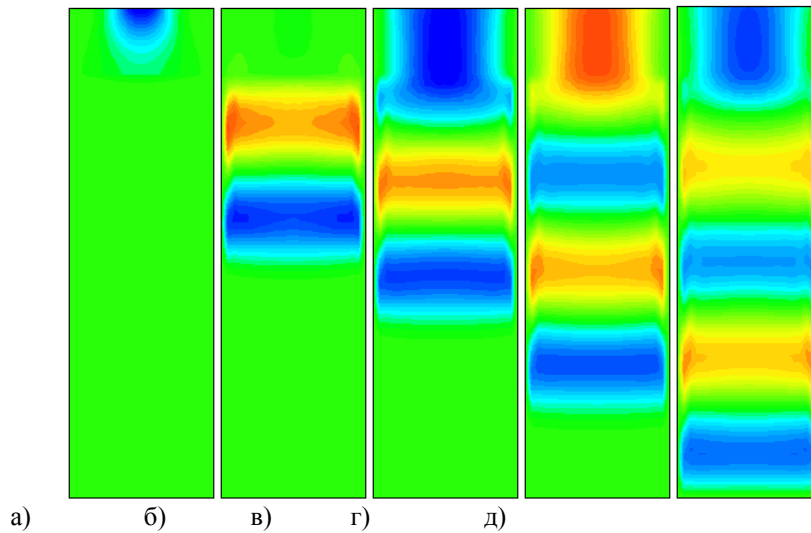


Рис. 3. Поширення акустичної хвилі у рідині

На рис. 4 зображено поширення хвилі у в'язкій ($\eta = \xi = 100$ Па·с) та слабков'язкій рідині ($\eta = \xi = 1.0 \cdot 10^{-10}$ Па·с).

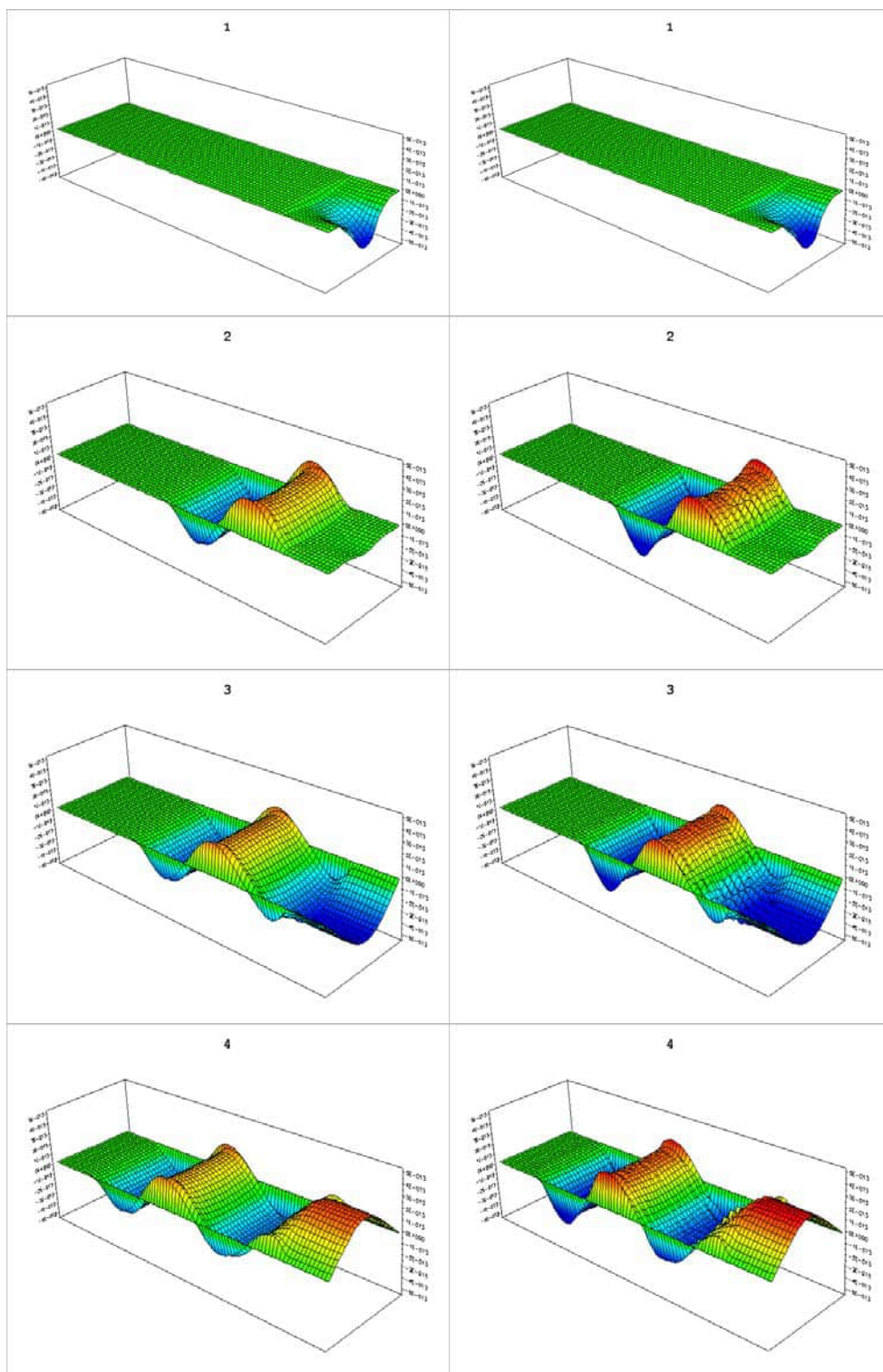


Рис. 4. Акустична хвиля у в'язкій (зліва) та слабков'язкій (справа) рідині

Представлені на рис. 4 поверхні переміщень відповідають моментам часу 1 – $t=0.9 \cdot 10^{-6}$ с, 2 – $t=4.8 \cdot 10^{-6}$ с, 3 – $t=6.0 \cdot 10^{-6}$ с, 4 – $t=7.8 \cdot 10^{-6}$ с. Аналіз впливу в'язкості середовищ підтверджує важливість врахування дисипації енергії. Нехтування в'язкістю середовищ приводить до осциляції числових розв'язків в областях, де параметр дискретизації є занадто великим для врахування стрімкої зміни розв'язків та їх градієнтів. Врахування в'язкості дозволяє уникнути паразитичних осциляцій числових розв'язків та отримати більш реальну фізичну картину досліджуваних процесів.

Обчислені порядки збіжності енергетичної норми розв'язку за просторовою та часовою дискретизацією

$$\|u(t)\|^2 = \|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_R^2, \quad \text{де} \quad \|u\|_V^2 = a(u, u), \quad \|u\|_R^2 = m(u, u).$$

близькі до другого, що цілковито узгоджується з теоретично очікуваними.

ВИСНОВКИ

Отже, в роботі вдалось дати математичне обґрунтування застосування математичної моделі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною в термінах переміщень. Доведено існування розв'язку варіаційної задачі в переміщеннях як границі послідовності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна. Показано, що апроксимації Гальоркіна володіють скінченною енергією, звідки слідує єдиність та неперервна залежність розв'язку від даних задачі.

Введення в'язкості у математичну модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною дозволяє аналізувати реальні втрати енергії, зокрема, для високочастотних коливань.

Робота підтримана держбюджетними темами Львівського національного університету імені Івана Франка № ДР 0100U001426 та № ДР 0103U001926.

1. *Бернакевич І.С., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А.* Математична модель акустичної взаємодії оболонки з рідиною: I. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач // Математичні методи та фіз.-мех. поля. - 2002. - 45.№2. - С. 75-80.
2. *Горлач В.М., Шинкаренко Г.А.* Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамические процессы - Львов, - 1987. - 33 С. - Деп. в УкрНИИТИ 22.12.87, № 3256-Ук87.
3. *Горлач В.М.* Акустическое взаимодействие упругого тела с жидкостью в замкнутой области: выбор модели - Львов, - 1988. - 24 С. - Деп. в УкрНИИТИ 22.06.88, № 1583-Ук88.
4. *Жуковский Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах // Собр. соч. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. Т.3. С. 5-95.
5. *Костенко В.Г.* Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1979. Вып.8. - С. 110-113.
6. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. - М.: Наука, 1984. - 400 с.
7. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. - Київ: УМК ВО, 1991, - 90с.
8. *Bathe K.J., Nitikitpaiboon C., Wang X.* A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction // Computers and Structures - 1995. - Vol. 56. - P. 225-237.
9. *Bathe K.J.* The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods // Computers and Structures - 2001. - Vol. 79. - P. 243-252.
10. *Bermudez A., Rodrigues R.* Finite element computation of vibration modes of a fluid-solid system // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 1994. - Vol. 119. - P. 355-370.
11. *Boujot J.* Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems // M²AN: Modelisation Mathematique et Analyse Numerique. - 1987. - Vol. 21, No. 2. - P. 239-260.
12. *Chen H.C., Taylor R.L.* Vibration analysis for fluid-solid systems using a finite element displacement formulation // International Journal for Numerical Methods in Engineering - 1990. - Vol. 29. - P. 683-698.
13. *Everstine G.C.* A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction // Journal of Sound and Vibration - 1981. - Vol. 79, No. 1. - P. 157-160.
14. *Felippa C.A., Ohayon R.* Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction // Journal of Sound and Vibration - 1990. - Vol. 4. - P. 35-57.
15. *Hamdi M.A., Ousset Y., Verchery G.* A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems // International Journal for Numerical Methods in Engineering - 1978. - Vol. 13. P. 139-150.
16. *Hermansson J.* Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas elements for acoustic fluid-structure interaction // Preprint 2003.04. Chalmers Finite Element Center. Chalmers University of Technology. Goteborg. Sweden. 2003. - P. - 1-14.
17. *Kennedy J.M., Belytschko T.B.* A survey of computational methods for fluid-structure analysis of reactor safety // Nuclear Engineering and Design - 1982. - Vol. 69, No. 3. - P. 379-398.
18. *Kiefling L., Feng G.C.* Fluid-structure finite element vibration analysis // AIAA Journal - 1976. - Vol. 14, No. 2. - P. 199-203.
19. *Morand H.P., Ohayon R.* Fluid Structure Interaction. Chichester: Wiley, 1995.
20. *Olson L.G., Bathe K.J.* A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems // Nuclear Engineering and Design - 1983. - Vol. 76. - P. 137-151.
21. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical approximation of partial differential equations. Berlin: Springer Verlag, 1994. - 544 P.
22. *Shynkarenko A., Horlatch V.* Raviart-Thomas approximations for variational hydroacoustics problems // Mathematical

- and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003. Proceedings of The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyvaskyla, Finland – Springer Verlag, 2003.- P. 541-546.
23. *Stucky P., Lord W.* Spurious modes in finite element models for ultrasonic waves in fluid-solid systems // Review of progress in quantitative non-destructive evaluation, - 1998. - Vol. 17. - P. 963-969.
24. *Zienkiewicz O.C., Bettles P.* Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment // International Journal for Numerical Methods in Engineering - 1978. Vol. 13, No. 1. P. 1-16.
25. *Zienkiewicz O.C.* Achievements and some unsolved problems of the finite element method // International Journal of Numerical Methods in Engineering - 2000. - Vol. 47. - P.9-28.

В.М.Войтович, В.М.Горлач, Я.В.Кондратюк *, Г.А.Шинкаренко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИКИ ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Статья посвящена обоснованию математической модели акустики гидроупругих систем с использованием в качестве неизвестных смещений. Приведен краткий обзор состояния исследований в области численного моделирования акустических процессов в гидроупругих системах. Доказана корректность такой модели для сред с диссипацией - существование и единственность обобщенного решения, а также сходимость классических аппроксимаций метода конечных элементов к решению вариационной задачи. На примере численного исследования распространения акустической волны в гидроупругой системе проанализировано влияние учета вязкости сред на характер переходных процессов.

V.M.Voytovych, V.M.Horlatch., Y.V.Kondratyuk *, G.A.Shynkarenko

DISPLACEMENT-BASED MODELLING OF ACOUSTIC FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEM

The paper is dedicated to substantiation of application of displacement-based acoustic mathematical model of hydro-elastic systems for dissipative media. A short survey of current research status in area of numerical modelling of acoustic processes in hydro-elastic systems is presented. Well-posedness of such a mathematical model has been proved - existence and uniqueness of a generalized solution, as well as convergence of finite element method classic approximations to the solution of the variational problem.

Львівський національний університет імені Івана Франка

e-mail: kis@franko.lviv.ua

* - Utrecht University, The Netherlands

e-mail: Kondratyuk@math.uu.nl

Одержано

20.10.04