Типові завдання з чисельних методів лінійної алгебри
для вступників до магістратури

1. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$ та записати у відповіді суму розв'язків системи, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати за допомогою LU-розкладу систему лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$, вважаючи, що матриця L (або U) містить одиничні діагональні елементи, та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці U (або L) та розв'язків системи, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -3 \\ 9 & 7 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Виконати LU-розклад матриці A, вважаючи, що матриця U містить одиничні діагональні елементи, та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці L, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Виконати $U^T U$-розклад матриці A та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці U, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати за допомогою $U^T U$-розкладу систему лінійних алгебричних рівнянь та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці U та розв'язків системи, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 13 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

6. Заданий LU-розклад матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Розв'язати за допомогою LU-розкладу систему лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$ та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці A та розв'язків системи, якщо $b = \begin{pmatrix} 7 & 17 & 33 \end{pmatrix}^T$.

7. Заданий $U^T U$-розклад матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Розв'язати за допомогою $U^T U$-розкладу систему лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$ та записати у відповіді суму діагональних елементів матриці A та розв'язків системи, якщо $b = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \end{pmatrix}^T$.

8. Записати покомпонентно метод Якобі (або Зейделя) для системи $Ax = b$ та виконати один крок методу Якобі (або Зейделя) для, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. У відповіді запишіть суму компонент першого наближення.

9. Дослідити збіжність методу Якобі (або Зейделя) для системи лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

У відповіді записати число, що відповідає проміжку, до якого належить максимальний за модулем корінь характеристичного рівняння: 1 – [0,1; 0,3]; 2 – [0,4; 0.7]; 3 – [0,8; 1); 4 – [1; 5); 5 – [5; 20]. .

10. Класичним способом знайти власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. У відповіді записати суму власних чисел матриці як число, що відповідає проміжку, до якого належить ця сума: 1 – [0,1; 0,3]; 2 – [0,4; 0.7]; 3 – [0,8; 1); 4 – [1; 5); 5 – [5; 20].

11. Виконати 2 кроки методу степенів для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, взявши за початковий вектор $x_0 = (1, 0)^T$. У відповіді записати число, що відповідає інтервалу, якому належить друге наближення до максимального власного числа: : 1 – [0,1; 0,3]; 2 – [0,4; 0.7]; 3 – [0,8; 1); 4 – [1; 5); 5 – [5; 20].

12. Виконати один кроки LU-розкладу для знаходження власних чисел матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, якщо матриця L (або U) містить одиничну діагональ. У відповіді запишіть перше наближення старшого власного числа.