

Зміст

Вступ	7
Розділ 1. Варіаційні методи	9
1.1. Додатні та додатно визначені оператори	9
1.2. Варіаційна задача про мінімум квадратичного функціонала	15
1.3. Існування розв'язку задачі про мінімум функціонала енергії	18
1.4. Головні та природні граничні умови	22
1.5. Задачі з неоднорідними граничними умовами	24
1.6. Метод Рітца	27
1.7. Метод скінченних елементів	30
1.8. Слабкий розв'язок крайової задачі	36
1.9. Абстрактна варіаційна задача	38
1.10. Метод Бубнова–Гальоркіна	43
1.11. Вправи для самостійного виконання	45
Розділ 2. Апроксимація на скінченних елементах	49
2.1. Похибки апроксимації кусково-лінійними функціями	50
2.2. Одновимірні скінченні елементи лагранжевого типу	53
2.3. Ермітові одновимірні апроксимації на скінченних елементах	55

2.4. Одновимірні апроксимації функціями—бульбашками	56
2.5. Апроксимації на трикутних скінченних елементах	58
2.6. Лагранжові апроксимації на прямокутних скінченних елементах	63
2.7. Ермітові апроксимації на прямокутних скінченних елементах	64
2.8. Двовимірні ізопараметричні апроксимації	66
2.9. Апроксимації на тетраедрах	70
2.10. Тривимірні ізопараметричні апроксимації	73
2.11. Вправи для самостійного виконання	75
Розділ 3. Крайові задачі	77
3.1. Крайова задача для рівняння парного порядку	77
3.2. Априорна оцінка точності МСЕ	79
3.3. Априорна оцінка точності за Нітше	81
3.4. Схема МСЕ для рівняння четвертого порядку	82
3.5. Крайова задача для системи диференціальних рівнянь	85
3.6. Задача про циліндричний згин пластини	89
3.7. Крайові задачі для рівняння Пуассона	96
3.8. Схема МСЕ для рівняння Пуассона	101
3.9. Схема МСЕ, побудована на ізопараметричних апроксимаціях	105
3.10. Рівняння стаціонарної адвекції—дифузії	107
3.11. Бігармонічне рівняння	112
3.12. Крайові задачі для рівняння еліптичного типу	117
3.13. Вправи для самостійного виконання	120
Розділ 4. Задачі на власні значення	123
4.1. Математичні моделі, які приводять до задач на власні значення	123
4.1.1. Коливання струни	123
4.1.2. Згинні коливання стрижня	125
4.1.3. Коливання мембрани	125
4.1.4. Коливання пластини	126

4.2. Властивості спектра оператора	127
4.3. Енергетичні теореми в проблемі власних чисел	130
4.4. Дискретний спектр оператора Штурма–Ліувілля	137
4.5. Мінімаксимальний принцип Куранта	140
4.6. Теорема про порівняння власних чисел	142
4.7. Метод Рітца в задачах на власні значення	144
4.8. Слабке формулювання задачі на власні значення і метод Гальоркіна	150
4.9. Числовий аналіз спектральної задачі для опе- ратора Штурма–Ліувілля	151
4.10. Спектр оператора задачі про згин пластини	155
4.11. Похибки власних чисел і власних функцій	157
4.12. Вправи для самостійного виконання	166
Розділ 5. Початково–крайові задачі	169
5.1. Параболічна задача	169
5.2. Варіаційне формулювання параболічної задачі	171
5.3. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна	174
5.4. Енергетичне рівняння	175
5.5. Стійкість напівдискретних апроксимацій	176
5.5.1. Перша оцінка норми напівдискретного роз’язку	177
5.5.2. Друга оцінка норми напівдискретного роз’язку	178
5.6. Існування розв’язку варіаційної задачі	180
5.7. Збіжність напівдискретних апроксимацій	182
5.8. Дискретизація варіаційної задачі за часом	187
5.8.1. Кусково-лінійна апроксимація за часом	187
5.8.2. Однокрокова рекурентна схема	188
5.9. Стійкість рекурентних схем	190
5.10. Збіжність рекурентних схем	193
5.11. Вправи для самостійного виконання	197
Розділ 6. Проблема “ великих” задач лінійної алгебри	199
6.1. Редукція параметрів внутрішніх вузлових точок	199

6.2. Класичний альтернувальний метод Шварца	202
6.3. Альтернувальний метод Шварца і блочний метод Гауса–Зейделя	204
6.4. Мультиплікативний метод Шварца	207
6.5. Адитивний метод Шварца	210
6.6. Випадок багатьох підобластей	213
6.7. Вправи для самостійного виконання	213
Додаток	215
Список рекомендованої літератури	221