

Розділ 1

Варіаційні методи

Розділ 2

Апроксимація на скінченних елементах

Розділ 3

Крайові задачі

Розділ 4

Задачі на власні значення

Розділ 5

Початково - крайові задачі

Розділ 6

Проблема “великих” задач лінійної алгебри

Обчислювальні схеми варіаційних методів, розглянуті у попередніх розділах, зумовлюють потребу розв’язування великих систем лінійних алгебричних рівнянь. Для цього в обчислювальній математиці розвинений арсенал методів та алгоритмів. Водночас є методи, які на рівні формування систем лінійних алгебричних рівнянь дають змогу зменшити їхні розміри і привести початкову задачу лінійної алгебри великого розміру до розв’язування послідовності задач менших розмірів. Найпоширеніші з цих методів описані нижче.

6.1. Редукція параметрів внутрішніх вузлових точок

У випадку використання лагранжевих поліномів на прямокутниках (див. 2.5) для апроксимації розв’язку виникає ситуація, коли низка вузлових точок та відповідних їм вузлових параметрів є внутрішніми (належать тільки одному скінченному елементові). Це означає, що алгебричні рівняння методів Рітца–Гальоркіна, які відповідають цим параметрам, формуються на основі інформації тільки з одного скінченного елемента. Отже, на цьому елементі невідомі вузлові параметри можуть бути вилученими. Загальну кількість невідомих у цьому разі можна зменшити (редувати) і, отже, процес розв’язування великих систем алгебричних рівнянь методу скінченних елементів можна звести до розв’язування де-

кількох менших за розміром систем. Така ж ситуація виникає в разі об'єднання групи скінченних елементів в один, так званий суперелемент. Внутрішні для цього суперелемента вузлові параметри можна вилучити і задачу лінійної алгебри для матриць великих розмірів можна звести до послідовності матричних операцій над системами менших розмірів. Такий підхід відомий під назвою метод суперелементів.

Опишемо головну ідею цього підходу. Припустимо, що для апроксимації розв'язку певної задачі, зокрема це може бути задача Діріхле для рівняння Пуассона, використовують лагранжові апроксимації на прямокутних елементах Ω_e . Наведемо шуканий розв'язок на елементі Ω_e у вигляді матричного співвідношення

$$u_h = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

де \mathbf{N}_1 – матриця рядок, складена з базисних функцій, що відповідають вузлам, розміщеним на границі скінченного елемента; \mathbf{N}_2 – матриця рядок, складена з базисних функцій, що відповідають внутрішнім вузлам скінченного елемента; \mathbf{q}_1 – матриця–стовпець граничних вузлових параметрів; \mathbf{q}_2 – матриця–стовпець внутрішніх вузлових параметрів. Нехай для знаходження наближеного розв'язку будемо числову схему на основі методу Рітца. Запишемо значення функціонала енергії від наближеного розв'язку (6.1) у вигляді

$$F(u_h) = \sum_e \Phi_e, \quad (6.2)$$

де Φ_e – значення функціонала на одному скінченному елементі. Його можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_e = & \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} - \\ & - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– матриці, з яких формується система рівнянь методу скінченних елементів, поділені на частини відповідно до поділу вулових параметрів на граничні та внутрішні.

Для внутрішніх вузлових параметрів виконується співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_2} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{q}_2} = 0. \quad (6.3)$$

У формулі (6.3) знака суми нема тому, що \mathbf{q}_2 – внутрішні параметри, які відповідають скінченному елементу Ω_e .

Обчислимо похідну від Φ_e за внутрішніми вузловими параметрами \mathbf{q}_2 і прирівняємо її до нуля:

$$\mathbf{K}_{12}^T \mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}_2.$$

Звідси

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2 - \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{q}_1. \quad (6.4)$$

Запишемо також вираз для похідної від Φ_e за граничними вузловими параметрами \mathbf{q}_1

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{q}_1} = \mathbf{K}_{11} \mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{12} \mathbf{q}_2 - \mathbf{Q}_1. \quad (6.5)$$

Вилучимо з (6.5) внутрішні вузлові параметри, врахувавши співвідношення (6.4):

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{q}_1} = (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2).$$

Отже, якщо вилучити внутрішні вузлові параметри, ключова система лінійних алгебричних рівнянь методу Рітца відносно невідомих параметрів, що відповідають граничним вузловим точкам скінченних елементів, формується з матриць

$$\mathbf{K}_{11}^* = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T;$$

$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2.$$

Після розв'язування системи алгебричних рівнянь значення внутрішніх вузлових параметрів можна знайти за формулою (6.4).

Як зазначено, процес вилучення внутрішніх вузлових параметрів для групи скінченних елементів називають методом суперелементів. Очевидно, що метод суперелементів можна організувати як багаторівневий

процес вилучення внутрішніх вузлових параметрів. На першому рівні в групи-суперелементи об’єднують елементи; на другому рівні в групи-суперелементи другого рівня об’єднують суперелементи першого рівня і т.д.

6.2. Класичний альтернувальний метод Шварца

Розглянемо двовимірну область Ω , зображену на рис.6.1. Нехай $\partial\Omega$ – границя області Ω . Уведемо штучні границі Γ_i так, що утворюються дві підобласті Ω_i з границями $\partial\Omega_i$ і $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Штучна границя Γ_i є частиною границі підобласті Ω_i , яка лежить всередині Ω . Решта частина границі підобласті Ω_i дорівнює $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i$.

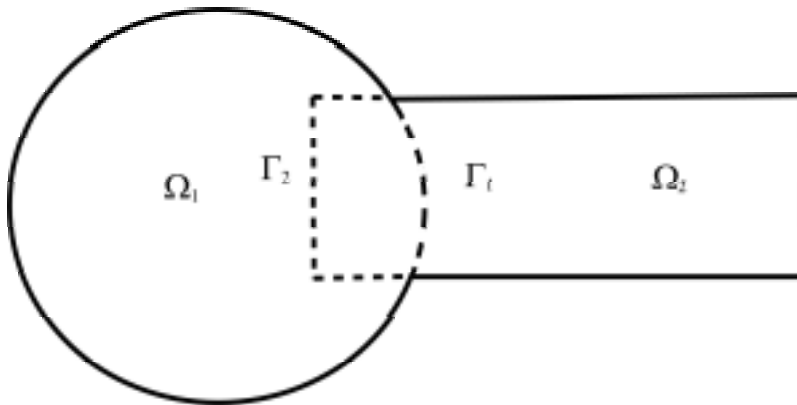


Рис. 6.1. Двовимірну область, поділена на підобласті

В області Ω розглянемо задачу

$$\begin{aligned} Du &= f, & x_1, x_2 &\in \Omega; \\ u &= g, & x_1, x_2 &\in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (6.6)$$

де D – заданий лінійний диференціальний оператор; $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ – задані функції.

Для побудови наближеного розв'язку задачі (6.6) використаємо алгоритм альтернувального методу Шварца, який складається з двох півкроків. Виберемо деяке початкове наближення розв'язку $u_2^{(0)}$ в підобласті Ω_2 . Тоді для $n = 1, 2, 3, \dots$ розв'яжемо задачі.

Перший півкрок:

$$\begin{aligned} Du_1^{(n)} &= f, & x_1, x_2 \in \Omega_1; \\ u_1^{(n)} &= g, & x_1, x_2 \in \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1; \\ u_1^{(n)} &= u_2^{(n-1)}, & x_1, x_2 \in \Gamma_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Другий півкрок:

$$\begin{aligned} Du_2^{(n)} &= f, & x_1, x_2 \in \Omega_2; \\ u_2^{(n)} &= g, & x_1, x_2 \in \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2; \\ u_2^{(n)} &= u_1^{(n)}, & x_1, x_2 \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Під час побудови числового розв'язку задачі (6.6), (6.7), наприклад, методом скінченних елементів, використовують процес дискретизації підобластей Ω_i скінченними елементами. У цьому разі можуть виникати такі ситуації. Перша, коли вузли сіток у підобластях $\Omega_1 \cap \Omega_2$ збігаються один з одним, та друга, коли вузли сіток в підобластях $\Omega_1 \cap \Omega_2$ не збігаються один з одним.

Розглянемо першу ситуацію. Позначимо через \mathbf{u}_i вектор–стовпець вузлових значень шуканої функції в підобласті $\bar{\Omega}_i$ і наведемо його у вигляді

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_i} \\ \mathbf{u}_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_i} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

де \mathbf{u}_{Ω_i} – вектор–стовпець внутрішніх вузлових значень шуканої функції в області Ω_i , $\mathbf{u}_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i}$; \mathbf{u}_{Γ_i} – вектори–стовпці вузлових значень шуканої функції на відповідних частинах границі.

Позначимо також через \mathbf{f}_i вектори–стовпці значень, що відповідають у дискретних варіаційних задачах (6.7), (6.8) правим частинам диференціальних рівнянь, а також через \mathbf{g}_i – вектори вузлових значень заданої функції на відповідних частинах границі.

Наведемо дискретизовані задачі (наприклад, шляхом використання методу скінченних елементів) (6.7), (6.8) у вигляді систем рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1^{(n)} &= \mathbf{f}_1, & \text{в } \Omega_1; \\ \mathbf{u}_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1}^{(n)} &= \mathbf{g}_1, & \text{в } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1; \\ \mathbf{u}_{\Gamma_1}^{(n)} &= \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)}, & \text{в } \Gamma_1; \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2^{(n)} &= \mathbf{f}_2, & \text{в } \Omega_2; \\ \mathbf{u}_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2}^{(n)} &= \mathbf{g}_2, & \text{в } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2; \\ \mathbf{u}_{\Gamma_2}^{(n)} &= \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)}, & \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Тут \mathbf{A}_i є прямокутними матрицями. Їх можна записати у вигляді

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_i} & \mathbf{A}_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i} & \mathbf{A}_{\Gamma_i} \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

де \mathbf{A}_{Ω_i} – квадратні матриці, розміри яких відповідають кількості внутрішніх вузлових точок; $\mathbf{A}_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i}$, \mathbf{A}_{Γ_i} – прямокутні матриці, кількість рядків яких дорівнює кількості внутрішніх вузлових точок, кількість стовпців кожної з цих матриць дорівнюють кількості вузлових точок на відповідній частині границі. Через

$$\dot{I}_{\Omega_i \rightarrow \Gamma_i} : \Omega_i \rightarrow \Gamma_i \quad (i = 1, j = 2 \quad i = 2, j = 1)$$

позначено оператор, який виконує інтерполювання вузлових значень з вузлів всередині області Ω_j на вузли, що розміщені на границі Γ_i .

На підставі цих рівнянь можемо записати алгоритм альтернувального методу Шварца, який зображений у вигляді блок-схеми на рис. 6.2.

Тут знак “+” означає вихід, що відповідає виконанню умови умовного оператора, а знак “–” – невиконанню цієї умови.

6.3. Альтернувальний метод Шварца і блочний метод Гаусса–Зейделя

Наведений алгоритм альтернувального методу Шварца збігається з алгоритмом блочного методу Гаусса–Зейделя для лінійної системи рівнянь, що відповідає дискретизації двох підобластей і об’єднання розв’язків уздовж штучних границь. Щоб довести це, перепишемо алгоритм

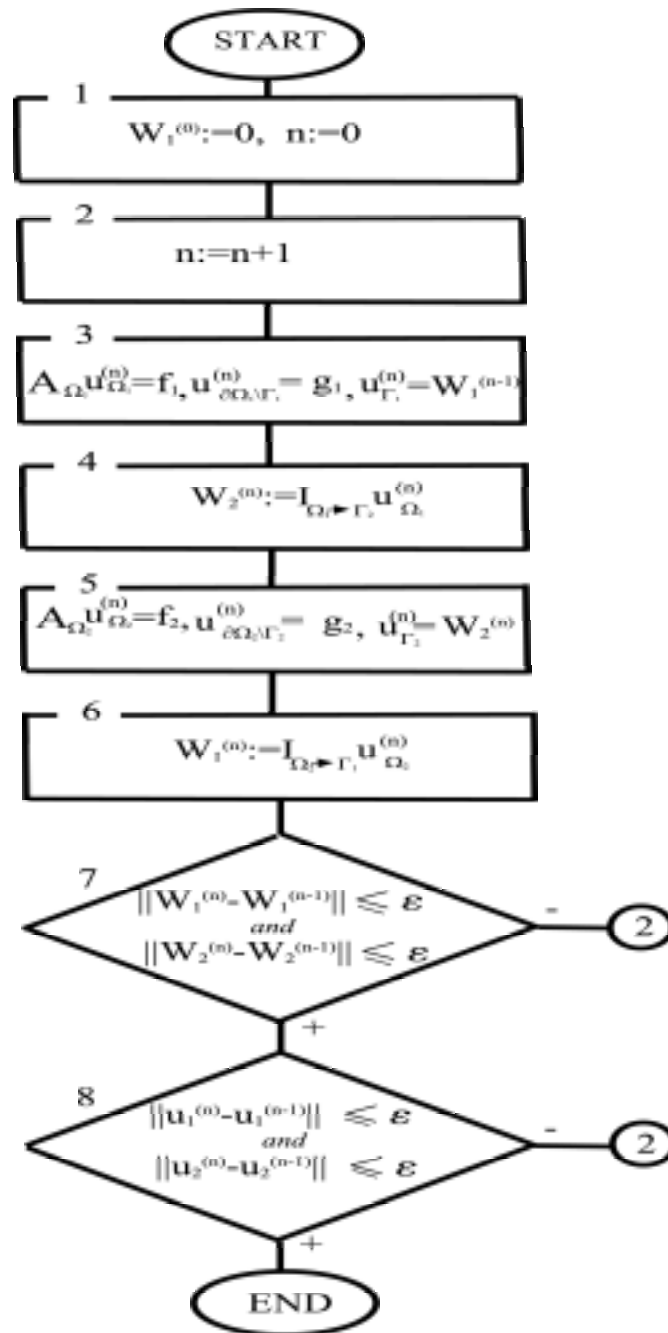


Рис. 6.2. Алгоритм альтернуального методу Шварца

у матричному формулюванні. Для цього, використавши записи (6.9) та (6.12), наведемо два півкроки (6.10), (6.11) алгоритму у вигляді

$$\left(\mathbf{A}_{\Omega_1} \quad \mathbf{A}_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1} \quad \mathbf{A}_{\Gamma_1} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_1}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1; \quad (6.13)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1}^{(n)} = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{u}_{\Gamma_1}^{(n)} = \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)}; \quad (6.14)$$

$$\left(\mathbf{A}_{\Omega_2} \quad \mathbf{A}_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2} \quad \mathbf{A}_{\Gamma_2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2}^{(n)} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_2}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2; \quad (6.15)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2}^{(n)} = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{u}_{\Gamma_2}^{(n)} = \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)}. \quad (6.16)$$

Перенесемо у цих співвідношеннях відомі величини у праву частину. Отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\Omega_1} u_{\Omega_1}^{(n)} &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{A}_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1} \mathbf{g}_1 - \mathbf{A}_{\Gamma_1} \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)}; \\ \mathbf{A}_{\Omega_2} u_{\Omega_2}^{(n)} &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2} \mathbf{g}_2 - \mathbf{A}_{\Gamma_2} \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Уведемо позначення

$$\tilde{\mathbf{f}}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{A}_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i} \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2,$$

тоді співвідношення (6.17) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\Omega_1} u_{\Omega_1}^{(n)} &= \tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A}_{\Gamma_1} \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)}; \\ \mathbf{A}_{\Omega_2} u_{\Omega_2}^{(n)} &= \tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{A}_{\Gamma_2} \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ці вирази є формулами блочного методу Гаусса–Зейделя для такої системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Gamma_1} \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_2} \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} & \mathbf{A}_{\Omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_1} \\ \mathbf{u}_{\Omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1 \\ \tilde{\mathbf{f}}_2 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Зазначимо, що навіть тоді, коли матриці \mathbf{A}_{Ω_1} та \mathbf{A}_{Ω_2} є симетричними, матриця системи лінійних алгебричних рівнянь (6.19) загалом не є симетричною. Справді, на загал не виконується співвідношення

$$\mathbf{A}_{\Gamma_1} \dot{I}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} = \left(\mathbf{A}_{\Gamma_2} \dot{I}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \right)^T.$$

Домножимо зліва кожне рівняння системи (6.18) на $\mathbf{A}_{\Omega_i}^{-1}$ та додамо і віднімемо у правих частинах $\mathbf{u}_{\Omega_i}^{(n-1)}$. Отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)} &= \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A}_{\Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Gamma_1} \dot{J}_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} \right), \\ \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n)} &= \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{A}_{\Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Gamma_2} \dot{J}_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} \right).\end{aligned}\quad (6.20)$$

Для розв'язування системи рівнянь (6.20) можна використовувати звичайні ітераційні методи (не блочного типу). У цьому разі виникає потреба у виборі початкового наближення. Зокрема, його можна отримати в результаті виконання однієї ітерації альтернуального методу Шварца з нульовим початковим наближенням ($\mathbf{u}_{\Omega_2}^{(0)} = 0$). Такий варіант методу Шварца називають передумовлювачем.

6.4. Мультиплікативний метод Шварца

Розглянемо тут випадок, коли сітки в областях Ω_1 та Ω_2 є такими, що мають спільні вузлові точки в $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Для нього алгоритм альтернуального методу Шварца можна покращити з погляду зменшення кількості арифметичних операцій і вимог до пам'яті обчислювальної машини.

Припустимо, що крайова задача шляхом застосування методу скінченних елементів зведена до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (6.21)$$

де \mathbf{u} – вектор стовпець невідомих вузлових значень; \mathbf{A} – матриця системи рівнянь; \mathbf{f} – вектор стовпець правої частини. Згрупуємо невідомі вузлові значення у векторі \mathbf{u} так:

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2}^T \quad \mathbf{u}_{\Gamma_2}^T \quad \mathbf{u}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}^T \quad \mathbf{u}_{\Gamma_1}^T \quad \mathbf{u}_{\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1}^T \right)^T.$$

Відповідно до цього наведемо матрицю системи рівнянь (6.21) у схематичній формі, зображеній на рис. 6.3.

Уведемо позначення для таких груп внутрішніх вузлових параметрів:

$$\mathbf{u}_{\Omega_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_2} \\ \mathbf{u}_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \end{pmatrix};$$

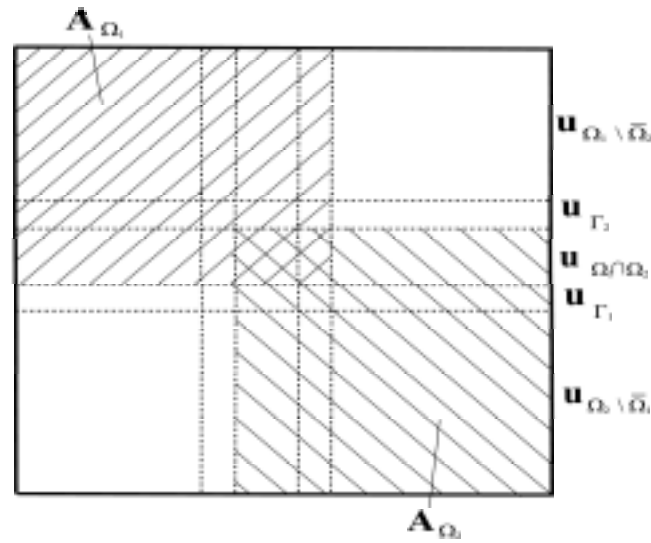


Рис. 6.3. Схематичне зображення матриці системи

$$\mathbf{u}_{\Omega_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \\ \mathbf{u}_{\Gamma_1} \\ \mathbf{u}_{\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1} \end{pmatrix}.$$

Відповідні їм квадратні матриці у складі матриці \mathbf{A} виділені на рис. 6.3 штрихуванням лініями різного напрямку. Частина, у якій штрихові лінії перетинаються, відповідає внутрішнім вузловим точкам області $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Наприклад, для сіткової області, показаної на рис.6.4, ця частина відповідає одній вузловій точці.

З огляду на зазначене, матрицю \mathbf{A} можемо розглядати як таку, що формується з матриць

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Gamma_1} & \mathbf{A}_{\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (6.22)$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_2} & \mathbf{A}_{\Omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_2} & \mathbf{A}_{\Omega_2} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Повернемось тепер до ітераційних формул (6.20), записаних на випадок,

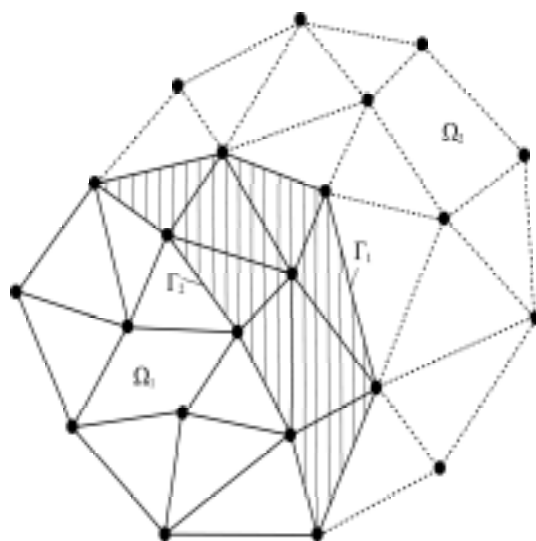


Рис. 6.4. Приклад сіткової області

коли вузлові точки в $\Omega_1 \cap \Omega_2$ є спільними для сіткових областей Ω_1 та Ω_2 :

$$\mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)} = \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A}_{\Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Gamma_1} \mathbf{u}_{\Gamma_1}^{(n-1)} \right); \quad (6.24)$$

$$\mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n)} = \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{A}_{\Gamma_2} \mathbf{u}_{\Gamma_2}^{(n)} - \mathbf{A}_{\Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} \right).$$

Припустимо, що

$$\mathbf{A}_{\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1} = 0 \text{ і } \mathbf{A}_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_2} = 0, \quad (6.25)$$

тоді (див. формули (6.22), (6.23) та рис.6.3)

$$\mathbf{A}_{\Gamma_1} \mathbf{u}_{\Gamma_1}^{(n-1)} \equiv \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_1}^{(n-1)}; \quad (6.26)$$

$$\mathbf{A}_{\Gamma_2} \mathbf{u}_{\Gamma_2}^{(n-1)} \equiv \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_2}^{(n-1)}.$$

Використавши (6.26), перепишемо формули (6.24) у вигляді

$$\mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)} = \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A}_{\Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_1}^{(n-1)} \right); \quad (6.27)$$

$$\mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n)} = \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_2}^{(n)} - \mathbf{A}_{\Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)} \right).$$

Отже, ми усунули явну залежність в алгоритмі методу Шварца від вузлових значень на штучній границі. Звичайно, це виконується в разі ви-

конання умов (6.25) і, звичайно ж, важливим питанням є те, коли такі умови виконуються.

У другій з ітераційних формул (6.27) не використано всі отримані на першому кроці значення розв’язку. Справді, перепишемо ітераційні формули (6.27) у вигляді

$$\mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)} = \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} + \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A}_{\Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_1}^{(n-1)} \right); \quad (6.28)$$

$$\mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n)} = \tilde{\mathbf{u}}_{\Omega_2}^{(n-1)} + \mathbf{A}_2^{-1} \left(\tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_2}^{(n)} - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \tilde{\mathbf{u}}_{\Omega_2}^{(n-1)} \right).$$

У другій з наведених вище формул враховано всі нові значення, отримані з першої формули. Вони записані скоригованим значенням $\tilde{\mathbf{u}}_{\Omega_2}^{(n-1)}$. Вирази

$$\mathbf{f}_1 - \mathbf{A}_{\Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n-1)} - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_1}^{(n-1)}; \quad (6.29)$$

$$\mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_2}^{(n)} - \mathbf{A}_{\Omega_2} \mathbf{u}_{\Omega_2}^{(n-1)}$$

згідно з формулами (6.22), (6.23) є відхилами у вузлах, що відповідають внутрішнім вузловим точкам областей Ω_1 та Ω_2 .

Зазначимо, що для їхнього обчислення потрібно мати тільки значення у вузлових точках в Ω_i та на Γ_i (оскільки $\mathbf{A}_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} = 0$, $\mathbf{A}_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} = 0$).

Описаний алгоритм називають мультиплікативним методом Шварца. Пояснимо цю назву. З цією метою перепишемо ітераційні формули (6.27), врахувавши (6.29), у вигляді

$$\mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{u}^{(n)} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}_{\Omega_1}^{(n)}); \quad (6.30)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix} (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})}).$$

На кожному півкроці відхил потрібно підставити в (6.30) і домножити на відповідну матрицю. Звідси термін мультиплікативний.

6.5. Адитивний метод Шварца

Перетворимо формули (6.30), підставивши першу формулу у другу:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)}) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix} \left(\mathbf{f} - \mathbf{A} \left(\mathbf{u}^{(n)} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n)}) \right) \right).$$

Зазначимо, що виконується рівність

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Отже, остаточно можемо записати

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix} \right) (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n)}). \quad (6.31)$$

Формула (6.31) описує найпростіший алгоритм адитивного методу Шварца.

Уведемо тут такі позначення. Нехай \mathbf{R}_i – прямокутна матриця, множення якої на вектор невідомих в Ω вузлових значень дає вектор вузлових значень в Ω_i , тобто

$$\mathbf{u}_{\Omega_1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega_1} \\ \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_1} \end{pmatrix}; \quad (6.32)$$

$$\mathbf{u}_{\Omega_2} = \mathbf{R}_2 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\Omega \setminus \Omega_2} \\ \mathbf{u}_{\Omega_2} \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Зазначимо, що

$$\mathbf{A}_{\Omega_i} = \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T. \quad (6.34)$$

Справді, якщо $i = 1$, то згідно з формулою (6.22) матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Omega \setminus \Omega_1} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1} \\ \dots \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Аналогічно це можна довести і для $i = 2$.

З урахуванням формул (6.32)–(6.34) перепишемо співвідношення альтернуального методу Шварца у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})} &= \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{R}_1^T (\mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^T)^{-1} \mathbf{R}_1 (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n)}); \\ \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})} + \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{A} \mathbf{R}_2^T)^{-1} \mathbf{R}_2 (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n+\frac{1}{2})}). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Насправді, в разі числової реалізації методу декомпозиції матриці \mathbf{R}_i ніколи не формуються. Вони введені тільки для того, щоб записати різні алгоритми методу декомпозиції однакою способом. Позначимо

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R}_i^T (\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T)^{-1} \mathbf{R}_i. \quad (6.36)$$

Отже, алгоритм, який складається з двох напівкроків, можна переписати однією формулою

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1) (\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)}). \quad (6.37)$$

З формули (6.37) випливає, що передумовлювач визначений матрицею

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1.$$

Отже, якщо навіть матриця \mathbf{A} симетрична, то мультиплікативний передумовлювач Шварца не є симетричним. Проте його можна симетризувати шляхом застосування трикрокового алгоритму такого вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{3})} &= \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{B}_1 (\tilde{\mathbf{f}}_1 - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)}); \\ \mathbf{u}^{(n+\frac{2}{3})} &= \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{3})} + \mathbf{B}_2 (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{3})}); \\ \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n+\frac{2}{3})} + \mathbf{B}_1 (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n+\frac{2}{3})}). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Трикроковий алгоритм, описуваний формулами (6.38), можна навести аналогічно до попереднього у вигляді однокрокового методу

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{A} \mathbf{B}_2 + \\ &+ \mathbf{B}_1 \mathbf{A} \mathbf{B}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1) (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)}), \end{aligned} \quad (6.39)$$

який визначає симетричний передумовлювач у вигляді

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1 \mathbf{A}) \mathbf{B}_2 (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}_1). \quad (6.40)$$

З урахуванням позначення (6.36), запишемо формулу (6.39) у вигляді

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) (\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)}).$$

Отримане співвідношення описує адитивний метод Шварца.

6.6. Випадок багатьох підобластей

Розглянемо область, яка є об'єднанням з перекриттям p підобластей Ω_i , $i = 1, \dots, p$. Уважатимемо для простоти викладу таке: розрахункові сітки для застосування числових методів є такими, що на перетині $\Omega_i \cap \Omega_j$ вузлові точки збігаються (в термінах сіткової області, що сіткові області $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$).

Запишемо за аналогією з 6.3 співвідношення мультиплікативного методу Шварца. Він складається з таких кроків:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{p})} &= \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{B}_1 (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n)}); \\ \mathbf{u}^{(n+\frac{2}{p})} &= \mathbf{u}^{(n+\frac{1}{p})} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n+\frac{1}{p})}); \\ &\dots \\ \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n+\frac{p-1}{p})} + \mathbf{B}_p (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n+(p-1)/p)}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Нагадаємо, що

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R}_i^T (\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T)^{-1} \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T.$$

Матриця \mathbf{A}_i є підматрицею матриці \mathbf{A} , що відповідає сітковій області Ω_i .

За аналогією з попереднім можна навести p -крокову формулу одним записом. Підставивши формули (6.41) одна в одну з кінця, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_p (-\mathbf{B}_p \mathbf{A} \mathbf{B}_{p-1} - \\ &\quad - \mathbf{B}_{p-1} \mathbf{A} \mathbf{B}_{p-2} - \dots - \mathbf{B}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1 (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(n)})). \end{aligned} \quad (6.42)$$

6.7. Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Розглянути задачу Діріхле для рівняння Пуассона. Для знаходження числового розв'язку цієї задачі використати схему МСЕ з лінійними апроксимаціями на трикутних скінченних елементах (див. 3.8). Зобразити у вигляді блок-схеми алгоритм числового розв'язування цієї задачі з використанням однорівневого суперелементного вилучення внутрішніх вузлових точок.

Вправа 2. Розглянути задачу Діріхле для рівняння Пуассона. Для знаходження числового розв’язку цієї задачі використати схему МСЕ з лінійними апроксимаціями на трикутних скінченних елементах (див. 3.8). Зобразити у вигляді блок-схеми алгоритм числового розв’язування цієї задачі з використанням багаторівневого суперелементного вилучення внутрішніх вузлових точок.

Вправа 3. Для T -подібної області, задавши її поділ на трикутні скінченні елементи, записати співвідношення альтернуального методу Шварца.

Вправа 4. Довести, що матриця \mathbf{B} у формулі (6.40) симетрична.