Додаток

Лінійна множина функцій

Позначимо символом Ω N-вимірну область, тобто відкриту зв'язну множину евклідового простору $\mathbf{R}^N$. Координати точки $x \in \mathbf{R}^N$ позначатимемо $x_1, x_2, ..., x_N$. Розглядатимемо тут тільки обмежені області з границями Ліпшиця. До цього класу областей належать, наприклад, двовимірні області з кусково-гладкими границями, які не мають точок звороту; тривимірні області з кусково-гладкими границями, які не мають ребер звороту. Зазначимо, що такі види областей є характерними для багатьох задач математичної фізики, які трапляються в іженерній практиці та науці.

Позначимо символом Γ границю області Ω. Множину $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ називатимемо замкненою областю.

Нехай M – множина функцій, заданних на області Ω.

Означення 1. *Множину функцій називають лінійною (лінеалом), якщо разом з функціями u_1, u_2, із M вона містъ їхню лінійну комбінацію*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2,$$

де a_i – довільні дійсні сталі.

Позначимо через $C^{(k)}(\Omega)$ множину функцій $u(x)$, частинні похідні яких до k-го порядку включно неперервні в області Ω. Похідною порядку нуль вважаємо саму функцію $u(x)$. Неважко перевірити, що множина $C^{(k)}(\Omega)$ є лінійною.

Гільбертів простір

Розглянемо деякий лінеал M. Для двох довільних функцій $u, v \in M$ визначимо число (u, v) – скалярний добуток, який задовольняє умови

$$(u, v) = \overline{(v, u)};$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v);$$

$$(u, u) \geq 0;$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0, x \in \Omega.$$

Тут число $\overline{(v, u)}$ є комплексним спряженим числом.

Означення 2. *Лінійну множину M разом з уведеним на ній скалярним добутком називають гільбертовим простором. Позначатимемо його H.*

Поряд із введеним комплексним гільбертовим простором розглядають також дійсний гільбертів простір, у якому перша умова, яку задовольняє скалярний добуток, має вигляд

$$(u, v) = (v, u).$$

На основі скалярного добутку можна ввести дуже важливе поняття, а саме: норму функції

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Норма у гільбертовому просторі має такі властивості:

1^0 тотожно нульова і тільки тотожно нульова функція має норму, яка дорівнює нулю;

2^0 якщо λ – дійсне число, а u елемент простору H, то

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|;$$

3^0 для довільної пари функцій $u, v \in H$ виконується нерівність Коші–Буняковського (нерівність Шварца)

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\|;$$

4^0 для довільної пари функцій $u, v \in H$ виконується нерівність трикутника

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Відомо, що множина функцій, визначених майже всюди в області Ω та інтегровних в Ω з квадратом, є лінеалом. Визначимо на цій множині скалярний добуток, прийнявши

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} uv d\Omega.$$

Утворений таким способом гільбертів простір позначають $L_2(\Omega)$. Норма у цьому просторі визначена співвідношенням

$$\|u\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega}.$$

Означення 3. *Функції $u, v \in H$ називають ортогональними, якщо*

$$(u, v) = 0.$$

Означення 4. *Функцію $u \in H$ називають нормованою, якщо*

$$\|u\| = 1.$$

Означення 5. *Функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ називають лінійно залежними, якщо можна відшукати сталі $a_1, a_2, ..., a_n$, серед яких не всі дорівнюють нулю, такі, щоб виконувалось співвідношення*

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n = 0.$$

Ці функції називають лінійно незалежними, якщо остання рівність виконується тільки за умови

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Виконується така теорема:

Теорема 6. *Для того, щоб функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in H$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб дорівнював нулю визначник (визначник Грама)*

$$\det \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Збіжність у гільбертовому просторі

Нехай у гільбертовому просторі H задана послідовність функцій $\{\varphi_n\}$. Називатимемо цю послідовність збіжною до функції φ, якщо

$$1^0)\ \varphi \in H;$$

$$2^0)\ \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0.$$

Функцію φ називатимемо границею послідовності $\{\varphi_n\}$. Якщо послідовність збіжна, то виконується співвідношення

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0.$$

Проте із виконання цього співвідношення збіжність послідовності $\{\varphi_n\}$ випливає тільки тоді, коли простір H-повний. Тут розглядатимемо тільки повні гільбертові простори. Для них наведене співвідношення є необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності. Саму ж послідовність, яка задовольняє цю умову, називають фундаментальною.

Гільбертів простір $L_2(\Omega)$ є повним.

Означення 7. *Множину $M \subset H$ називатимемо щільною в гільбертовому просторі H, якщо довільну функцію $\varphi \in H$ можна отримати як границю деякої послідовності $\varphi_n \in M$.*

Позначимо через $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ множину функцій, які є нескінченну кількість разів диференційовними в області Ω і такими, що дорівнюють нулю у деякому околі границі Γ області Ω. Відомо, що множина $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ є щільною у просторі $L_2(\Omega)$.

Наведемо одну лему, яку використовують у викладі теорії варіаційних методів.

Лема 8. *Функція, ортогональна до всіх функцій щільної множини, дорівнює нулю.*

Простори Соболєва

Нехай неперервна в Ω функція $f(x)$ має неперервну в Ω похідну f_{x_1}. Тоді для довільної функції $g(x) \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$ виконується формула

$$\int\limits_\Omega f g_{x_1} d\Omega = -\int\limits_\Omega f_{x_1} g\, d\Omega,$$

яка випливає з формули Остроградського. Цією рівністю визначають узагальнену похідну.

Означення 9. *Якщо у попередній рівності відмовитися від неперервності функції f та функції f_{x_1}, а замість цього домагатися інтегровності лівої та правої частин цієї рівності в сенсі Лебега, то f_{x_1} називають узагальненою похідною функції f.*

Позначимо через $W_2^{(1)}$ гільбертів простір функцій, які мають інтегровні з квадратом усі узагальнені перші похідні. Скалярний добуток у цьому просторі визначений формулою

$$(u,v)_{W_2^{(1)}} = \int\limits_{\Omega} \left\{ uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} d\Omega.$$

Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|u\|_{W_2^{(1)}} = \left(\int\limits_{\Omega} \left\{ u^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

За аналогією з наведеним означенням узагальненої похідної першого порядку можна дати означення узагальнених похідних вищих порядків і розглянути простори Соболєва $W_2^{(k)}$.

Загалом відомо, що простір $W_2^{(k)}$ утворений функціями із лінеалу $C^{(\infty)}\left(\overline{\Omega}\right)$ та його поповненням за нормою, яка визначена на цьому просторі, тобто такими функціями, про похідні яких можна говорити в узагальненому сенсі.

На границі Γ значення функцій $u\left(x\right) \in C^{(\infty)}\left(\overline{\Omega}\right)$ однозначно визначені та інтегровні з квадратом. Значення на границі інших функцій із $W_2^{(k)}$ потрібно розуміти в певному узагальненому сенсі, який називатимемо слідом функції. Важливе значення в цьому плані має така теорема.

Теорема 10. *Нехай Ω – область з границею Ліпшиця. Тоді існує єдиний обмежений, лінійний оператор T, який відображає простір $W_2^{(1)}\left(\Omega\right)$ в простір $L_2\left(\Gamma\right)$. Якщо $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega})$, то $Tu(x) = u(\Gamma)$, тобто слідом функції $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega})$ є її значення на границі.*

З наведеної теореми випливає, що для довільної функції $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ існує деяка функція $u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$, яка є її слідом.

Якщо деяка функція $u(x) \in W_2^{(k)}(\Omega), (k > 1)$, то вона належить також простору $W_2^{(1)}(\Omega)$. Отже, згідно з наведеною теоремою така функція має слід $u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$.

Якщо деяка функція $u(x) \in W_2^{(k)}(\Omega), (k > 1)$, то $D^i u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ для всіх $i = (i_1, ..., i_N)$ таких, що $|i| \le k - 1$. Тоді згідно з наведеною теоремою для похідних $D^i u(x)$ існують сліди $D^i u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$.