МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

А. В. Мельничин

ОСНОВИ ФІНАНСОВОГО АНАЛІЗУ

Тексти лекцій

Львів – 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

А. В. Мельничин

ОСНОВИ ФІНАНСОВОГО АНАЛІЗУ

Тексти лекцій

Львів – 2013

УДК 519.866:336 (076.2)
ББК У.в611я73
М 48

Рецензент:
завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фіз.-мат. наук, проф. Г. Г. Цегелик

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету прикладної математики та інформатики Протокол №22 від 21.06.2013р.

Відповідальний за випуск:
доктор фіз.-мат. наук, проф. М. Я. Бартіш

Мельничин А. В.
М 48 Основи фінансового аналізу: тексти лекцій / А. В. Мельничин. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 80 с.

У текстах лекцій послідовно і систематизовано викладено теоретичні відомості з основ кількісного аналізу фінансово-кредитних операцій. Детально висвітлюються різні методи нарахування відсотків, описуються узагальнюючі характеристики потоків платежів та фінансових рент.

З метою кращого засвоєння теоретичного матеріалу наведено достатню кількість прикладів.

Для студентів факультету прикладної математики та інформатики.

УДК 519.866:336 (076.2)
ББК У.в611я73

ВСТУП

На сьогодні будь-яка фінансово-кредитна операція, інвестиційний проект або ж комерційна угода передбачають наявність ряду вимог до їх виконання. До таких вимог можна віднести: грошові суми, часові параметри, відсоткові ставки та деякі інші додаткові величини.

Кожна із наведених характеристик може бути представлена різними способами. Наприклад, платежі можуть бути одноразовими або в розстрочку, постійними або змінними у часі; існує більше десяти видів відсотків та методів їх нарахування; час встановлюється у вигляді фіксованих термінів виплат, інтервалів надходження платежів, моментів погашення заборгованості тощо. Усі ці показники в межах певної фінансової операції утворюють систему. Така система і є *об'єктом* кількісного фінансового аналізу, а практичні методи такого аналізу складають *предмет* фінансової математики.

До основних задач фінансової математики можна віднести:

– визначення кінцевих результатів фінансових операцій для кожної із сторін-учасників;

– розробка планів виконання фінансових операцій, в тому числі й планів погашення заборгованості;

– визначення залежностей результатів фінансових операцій від їх основних параметрів;

– розрахунок допустимих критичних значень параметрів фінансових угод;

– визначення параметрів еквівалентної (беззбиткової) заміни умов фінансових угод чи контрактів.

Методи фінансової математики, якими розв'язують її основні задачі, можна поділити на дві великі групи: традиційні (або класичні) та нетрадиційні (або стохастичні), постановка і розробка яких виникла в останні п'ятдесят років.

Кількісний фінансовий аналіз застосовується як в умовах визначеності, так і невизначеності. В першому випадку дані для аналізу відомі й фіксовані. Тоді аналіз проводиться методами традиційної фінансової математики. Аналіз значно ускладнюється, коли доводиться враховувати невизначеність – динаміку фінансових ринків (рівні процентних ставок, коливання курсів цінних паперів, валютних курсів тощо) та поведінку контрагентів. Тут доводиться застосовувати різноманітні “ймовірнісно-статистичні” теорії (стохастичні процеси й обчислення, статистику таких процесів, стохастичну оптимізацію тощо) та напрацювання сучасної фінансової інженерії, у вигляді частково емпіричних, частково аналітичних методів й моделей аналізу та прийняття рішень в складних ситуаціях.

Основою побудови фінансової системи є гроші. Гроші в економіці виступають як специфічний товар, що є загальним еквівалентом всіх інших товарів та виконує в ній функцію засобу обігу (купівлі й продажу товарів), засобу накопичення цінностей та міри вартості.

На практиці грошові суми, незалежно від їх походження та призначення, обов’язково пов’язуються з певними моментами або періодами часу (терміни, дати, періодичність виплат). Час та гроші поєднуються згідно з *принципом нерівноцінності грошей*, що належать до різних моментів часу, або по іншому – *принцип зміни цінності грошей в часі*. Зрозуміло, що одна тисяча гривень сьогодні не буде рівноцінна цій же сумі, отриманій за два, п’ять чи десять років, тобто одна грошова одиниця сьогодні має більшу вартість, аніж одна грошова одиниця завтра.

Другим важливим принципом фінансового аналізу є *принцип фінансової еквівалентності*, у якому йдеться про рівність фінансових зобов’язань сторін, які беруть участь в операціях чи угодах. Згідно цього принципу можна змінювати рівень відсоткових ставок, їх вид, терміни виконання зобов’язань, перерозподіл виплат в часі тощо в рамках однієї операції, не порушуючи взаємозобов’язань сторін. На цьому принципі ґрунтуватиметься вирішення багатьох проблем фінансової математики, з якими ми познайомимося нижче.

Обидва ці принципи не можуть бути реалізованими без певного способу нарахування відсотків або дисконтування з використанням будь-якої відсоткової ставки.

Перед тим як безпосередньо перейти до вивчення методів фінансової математики наведемо деякі основні терміни та означення, що будуть використовуватися в подальшому. Отже, *відсоткові гроші (відсотки, проценти)* – це абсолютна величина прибутку (доходу) від позичання грошей. При цьому форми позичання можуть бути різними: купівля облігацій, продаж у кредит, видача позики і т. п. Вимірюються проценти у грошових одиницях.

Відсоткова ставка (відсотки) – це відношення відсоткових грошей, отриманих за певний проміжок часу, до суми боргу. Відсоткова ставка вимірюється у коефіцієнтному вигляді або у відсотках (1% = 0.01). У фінансових розрахунках в основному відсоткові ставки подаються у коефіцієнтному вигляді.

Інтервали часу, з якими пов'язують відсоткові ставки, називають *періодами нарахування*. Періодами нарахування можуть бути: рік, півріччя, квартал, місяць, день. У цьому випадку говорять про *дискретні відсотки*.

Якщо нарахування відсотків здійснюється за дуже малі проміжки часу, то говорять про *неперервні відсотки*.

Відсоткові гроші можуть сплачуватись кредитору при їх нарахуванні в кожному періоді або приєднуватись до основної суми боргу при закінченні угоди. В останньому випадку говорять про *нарощену суму*, яка дорівнює початковій сумі боргу з відсотками, що на неї нараховані. Процес збільшення суми боргу з приєднанням до неї відсотків називається *капіталізацією* суми боргу.

Враховуючи часову вартість грошей, нарощена сума еквівалентна (при даній відсотковій ставці) початковій сумі боргу.

В залежності від того, яку суму боргу беруть за вихідну при нарахуванні відсотків (база нарахування), розрізняють *декурсивні* і *антисипативні* відсотки.

Декурсивні відсотки нараховуються на початкову суму боргу (за базу нарахування береться початковий борг). При нарахуванні антисипативних відсотків за базу нарахування береться сума боргу у майбутньому. Розрізняють також *прості* та *складні відсотки*.

Якщо сума, до якої застосовується відсоткова ставка одна і та ж (стала база нарахувань), то нарахування здійснюється за простими відсотками і відсоткова ставка називається простою. Якщо відсотки за попередній період приєднуються до суми боргу і на отриману суму знову нараховуються відсотки, то говорять про складні відсотки. Відсоткова ставка в цьому випадку називається складною.

У фінансовому аналізі ставка відсотка також використовується і як показник дохідності (прибутковості) проведеної операції. Тому за допомогою відсоткових ставок можна оцінювати ефективність фінансових операцій.

Сучасні фінансово-банківські операції часто мають довготривалий у часі характер та складаються не з разового платежу, а з деякої послідовності платежів в часі, що називається *потоком платежів.* Прикладами є погашення позики частинами, орендна плата, інвестування у виробництво, виплата пенсій тощо.

Для опису потоку платежів необхідно знати моменти виплат та величини виплат (суми) у відповідні моменти. Потоки платежів можуть бути *регулярними* або *нерегулярними*. В нерегулярному потоці членами можуть бути як додатні (надходження), так і від'ємні величини (виплати), а відповідні платежі можуть виконуватися через різні інтервали часу.

Регулярний потік платежів, всі члени якого додатні, а часові інтервали між сусідніми платежами однакові, називається *фінансовою рентою* або просто *рентою*. В англомовній літературі ренти – *ануїтет*. Ренти дуже часто зустрічаються у економічній, фінансовій та страховій практиці. Їх простими прикладами є квартплата, внески для погашення споживчого кредиту, пенсійні платежі, регулярна виплата процентів за банківським депозитом або цінними паперами тощо.

Окрім *члена* та *періоду*, рента характеризується також *терміном ренти* та *діючою процентною ставкою*. Для характеристики окремих видів рент необхідні додаткові умови та параметри. Виплата ренти може відбуватися декілька разів на рік, із кількаразовим нарахуванням процентів. Зустрічаються ренти, де платежі такі часті, що практично їх можна розглядати як неперервні.

Головними розрахунками, пов'язаними з потоками платежів та рентами, є методи обчислення *нарощених сум* (*майбутньої вартості*) та *сучасної вартості* заданого потоку платежів.

ТЕМА 1. ПРОСТІ ВІДСОТКИ

1.1. Нарощення за простими відсотковими ставками

До нарощення за простими відсотковими ставками зазвичай вдаються коли мають справу із короткотерміновими позиками (термін позики до одного року включно) або у випадках, коли проценти періодично виплачуються, не приєднуючись до основної суми боргу.

Нехай P – сума грошей (капітал), що даються в борг, за які їх власник (кредитор) отримує відсоткові гроші (проценти) I. Позначимо через i відсоткову ставку віднесену до певного періоду (рік, півріччя, квартал, місяць, день), n – термін угоди, виражений у періодах.

Якщо термін угоди виражається у роках (найчастіше зустрічається на практиці), то i визначає річну просту відсоткову ставку.

Таким чином, проценти за рік рівні Pi, за два роки – $2Pi$, за n років – nPi. Отже,

$$I = nPi. \tag{1}$$

В такому випадку нарощена сума S (сума боргу на момент закінчення угоди через n років) дорівнює:

$$S = P + I = P + nPi = P(1+ni). \tag{2}$$

Отриманий вираз називатимемо *формулою нарощення за простими відсотками*, або коротко – *формулою простих відсотків*.

У цьому виразі множник $(1+ni)$ називають *множником нарощення простих відсотків*. Він показує у скільки разів нарощена сума більша за початкову суму боргу.

Зауважимо, що збільшення відсоткової ставки (або терміну позики) у k разів однаково впливає на множник нарощення, який у такому випадку збільшиться в $(1+kni)/(1+ni)$ разів.

За базу нарахування у формулах (1) та (2) береться *початкова сума боргу* P. Відсотки, що нараховані за ставкою i в такому випадку називаються *декурсивними*.

<u>*Приклад 1*</u>.

Банк надав клієнту позику 100 000 грн. на п’ять років за ставкою 25% простих річних. Визначити проценти та нарощену на кінець терміну суму.

<u>*Розв’язання*</u>.

За формулами (1) та (2) відповідно знаходимо:

$I = nPi = 5 \times 100000 \times 0.25 = 125000$ грн.

$S = P + I = 100000 + 125000 = 225000$ грн.

1.1.1. Методи нарахування простих відсотків

Припустимо, що термін угоди n – дробове число. Тоді його визначають як $n = t/K$, де t – кількість днів позики, K – часова база нарахування відсотків (кількість днів у році).

У такому випадку для визначення нарощеної суми використовуватимемо формулу

$$S = P\left(1 + \frac{t}{K} i\right). \tag{3}$$

На практиці для розрахунку простих відсотків використовують дві часові бази:

– K = 360 днів. При цьому вважають, що кожен місяць року має 30 днів, тобто $360 = 12 \times 30$. У цьому випадку відсотки називають *звичайними*, або *комерційними*.

– K = 365 (або 366) днів і у місяцях враховується *точна кількість днів*.

Зауваження. При підрахунку тривалості позики день видачі і день її погашення рахують як один день.

Кількість днів позики t може бути підрахована точно (за календарем) або наближено, коли t визначається кількістю повних місяців по 30 днів у кожному і точною кількістю днів позики у неповних місяцях.

Із сказаного вище слідує, що на практиці можемо використовувати три методи відсоткових розрахунків в залежності від вибору часової бази K і способу підрахунку t:

Метод перший. Точні відсотки (K = 365, 366) і точна кількість днів позики. Такий метод нарахувань дає найбільш точний результат. У документах його часто позначають як 365/365 або АСТ/АСТ.

Метод другий. Звичайні відсотки ($K = 360$) і точна кількість днів позики (іноді називають банківським методом). Цей метод нарахувань дає дещо більшу суму, ніж попередній. Позначають його як 365/360 або АСТ/360.

Метод третій. Звичайні відсотки ($K = 360$) і наближена кількість днів позики. Цей метод використовують при частковому погашенні позики, коли не потрібна висока точність розрахунків. Позначають як 360/360.

Розглянемо приклад.

<u>*Приклад 2*</u>.

Позика в 100 000 грн. видана банком 20 січня під 25% річних. Термін повернення – 5 жовтня цього ж року. Вважаючи, що поточний рік не є високосним, підрахувати нарощену суму трьома описаними методами.

<u>*Розв'язання*</u>.

Попередньо ми визначили, що точна кількість днів становить 258, а наближена – 255.

Для кожного із методів маємо відповідно:

1) $K = 365$, $t = 258$. $S = 100000(1 + \frac{258}{365} \times 0.25) = 117671.23$ грн.

2) $K = 360$, $t = 258$. $S = 100000(1 + \frac{258}{360} \times 0.25) = 117916.67$ грн.

3) $K = 360$, $t = 255$. $S = 100000(1 + \frac{255}{360} \times 0.25) = 117708.33$ грн.

Отже, як бачимо, ми отримали різні фінансові результати угоди в залежності від вибору часової бази і методу розрахунку кількості днів.

Нижче наводяться співвідношення, які дають можливість заміняти відсоткові ставки у випадку використання звичайних $i_{зв.}$ та точних $i_{точ.}$ відсотків і навпаки.

$$i_{360} = \frac{360}{365} i_{365} = 0.986301 \times i_{365}, \quad i_{365} = \frac{365}{360} i_{360} = 1.013889 \times i_{360},$$

$$i_{360} = \frac{360}{366} i_{366} = 0.983606 \times i_{366}, \qquad i_{366} = \frac{366}{360} i_{360} = 1.016667 \times i_{360}.$$

Очевидно, що контракт укладений в одних відсоткових ставках можна легко перевести в інші, перейшовши до відповідних еквівалентних ставок. Так, наприклад, ставка 10% річних при нарахуванні звичайних відсотків за базою $K = 360$ дає ті ж результати, що і ставка 10.139% за базою $K = 365$ при нарахуванні точних відсотків.

Доволі часто на практиці у фінансових угодах відсоткові ставки можуть встановлюватись окремо для різних періодів. Тоді нарощену суму S знайдемо за формулою:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t), \qquad (4)$$

де i_t – ставка простих відсотків в періоді t, n_t – тривалість періоду нарахування за постійною ставкою i_t, m – кількість періодів нарахування.

Приклад 3.

Фінансовою угодою передбачено такі умови нарахування простих відсотків на депозит: перший квартал – 15% річних, кожний наступний квартал ставка зростає на 5%. Визначити множник нарощення та нарощену за один рік суму, якщо початковий вклад становив 10 000 грн.

Розв'язання.

Множник нарощення становить:

$$1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t = 1 + \tfrac{1}{4} \times 0.15 + \tfrac{1}{4} \times 0.2 + \tfrac{1}{4} \times 0.25 + \tfrac{1}{4} \times 0.3 = 1.225,$$

а накопичена на рахунку за рік сума складе:

$$S = 10000 \times 1.225 = 12250 \text{ грн.}$$

У фінансових операціях з короткотерміновими депозитами часто використовують *повторне інвестування коштів*, тобто відбувається багаторазове нарощення відсоткового доходу, яке називається *реінвестуванням*, або *капіталізацією*. У цьому випадку нарощена сума знаходиться за формулою:

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\ldots(1+n_m i_m) = P\prod_{t=1}^{m}(1+n_t i_t), \tag{5}$$

де $n_1,\ldots,n_m$ – тривалість періодів нарощення, $i_1,\ldots,i_m$ – відсоткові ставки у відповідні періоди, m – кількість періодів нарощення. Якщо періоди нарощення та відсоткові ставки будуть однакові, то попередню формулу запишемо як:

$$S = P(1+ni)^m . \tag{6}$$

Приклад 4.

На суму 1 000 грн. протягом місяця нараховуються прості відсотки за ставкою 10% річних. Операція повторюється впродовж першого кварталу. Знайти нарощену суму, якщо вважати, що рік високосний.

Розв'язання.

За формулою (5) маємо:

$$S = 1000\left(1+\frac{31}{366}\times 0.1\right)\left(1+\frac{29}{366}\times 0.1\right)\left(1+\frac{31}{366}\times 0.1\right) = 1025.07 \text{ грн.}$$

1.2. Нарахування простих відсотків на змінні в часі суми депозиту

Розглянемо випадок коли капітал, на який нараховують прості відсотки, буде змінним у часі. Прикладами цього можуть бути розмір вкладу на заощаджувальному рахунку, поточний рахунок з можливістю періодичного поповнення або зняття з нього коштів тощо.

В такому випадку отримані проценти виражаються виразом:

$$I = \sum_{j=1}^{m} R_j n_j i , \tag{7}$$

де R_j – залишок коштів на рахунку в момент часу j після чергового надходження чи списання коштів, n_j – термін зберігання коштів до нової зміни залишків на рахунку, m – кількість змін залишків на рахунку.

Розглянемо наступний спосіб визначення процентів. Виразимо інтервали між моментами змін залишків на рахунку в днях, а відсоткову ставку у вигляді відсотків (а не у десятковому дробі, як раніше). Перепишемо вираз (7) у наступному вигляді:

$$I = \sum_{j=1}^{m} R_j n_j i = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j t_j}{100} : \frac{K}{i}. \qquad (8)$$

Тут, як і раніше, K – часова база нарахування відсотків, а t_j – кількість днів між послідовними змінами залишків на рахунку.

Величину $\sum_{j=1}^{m} R_j t_j \Big/ 100$ прийнято називати *процентним числом*, а K/i – *процентним дільником*.

Розглянемо приклад розрахунку отриманих процентів із використанням даної формули.

Приклад 5.

Нехай рух коштів на рахунку характеризується наступними даними: 05.02 на рахунок надійшло 120 000 грн., 10.07 з рахунку знято 40 000 грн. і 20.10 покладено 80 000 грн. Визначити нарощені відсотки на кінець поточного року, якщо відсоткова ставка становить 15% річних.

Розв'язання:

Процентний дільник становить $K/i = 365/15 = 24.33$. Розрахунок зручно подати у вигляді наступної таблиці:

Дата	**Рух коштів**	**Залишок на рахунку**	**Термін**	**Процентне число**
05.02	120 000	120 000	155	186
10.07	-40 000	80 000	102	81.6
20.10	80 000	160 000	72	115.2
31.12	–	160 000	–	–
			Сумарно	382.8

Отже, проценти за весь період нарахувань становитимуть

$$382.8 \Big/ 24.33 = 1573.66 \text{ грн.}$$

1.3. Нарахування відсотків у користувацькому кредиті

У споживчому кредитуванні проценти, як правило, нараховуються на всю суму одразу і приєднуються до основного боргу в момент відкриття кредиту.

Погашення заборгованості разом із відсотками проводиться частинами, як правило, однаковими за величиною, впродовж усього терміну надання кредиту. Нарощена сума боргу становить:

$$S = P(1 + ni)\,. \tag{10}$$

Величина разової виплати за користування кредитом у такому випадку становитиме:

$$R = \frac{S}{nm}\,, \tag{11}$$

де n – термін кредиту у роках, m – кількість виплат у році.

Очевидним є той факт, що оскільки проценти нараховуються на початкову суму, а її величина систематично зменшується в часі, реальна вартість такого споживчого кредиту суттєво перевищує домовлену відсоткову ставку. Такі умови є досить жорсткими для боржника.

Розглянемо приклад розрахунків для простого споживчого кредиту.

Приклад 6.

Банк відкриває клієнту кредит для купівлі побутової техніки вартістю 100 000 грн. Термін кредитування становить три роки, відсоткова ставка – 15% річних, виплати за кредитом відбуваються в кінці кожного місяця. Визначити суму, яку повертає боржник та величину разової щомісячної виплати.

Розв'язання:

Величина боргу разом з нарахованими відсотками згідно виразу (10) становить:

$$S = 100000(1 + 3 \times 0.15) = 145000 \text{ грн.},$$

а щомісячна виплата за користування кредитом згідно виразу (11) складає:

$$R = \frac{145000}{3 \times 12} = 4027.78 \text{ грн.}$$

1.4. Дисконтування та облік за простими відсотковими ставками

У фінансовій практиці доволі часто виникає обернена задача до нарощення відсотків – визначення за заданою сумою S, яку потрібно сплатити за термін n, розміру отриманої позики P. Процес визначення вартості грошової суми на певний момент часу за умови, що в майбутньому вона дорівнюватиме S називатимемо *дисконтуванням*, або *зведенням* S до теперішнього часу.

Якщо P – *дисконтована вартість* (зведена, теперішня величина) суми S, то різницю $S-P$ називають *дисконтом* величини S і позначають D, тобто $D=S-P$. Ця величина завжди буде додатною, оскільки гроші втрачають вартість з часом. Окрім того, оскільки час у фінансових угодах враховується у вигляді процентів, дисконт дорівнює відсоткам нарахованим на суму P:

$$D=S-P=I\ . \tag{12}$$

На практиці зазвичай застосовують два види дисконтування – *математичне дисконтування* та *банківський* (*комерційний*) *облік*.

Розглянемо обидва методи дисконтування детальніше.

1.4.1. Математичне дисконтування

Математичне дисконтування – це визначення теперішньої суми боргу P за відомою кінцевою сумою S.

Отже, з рівності $S=P(1+ni)$ матимемо що

$$P=\frac{S}{1+ni}, \qquad D=nPi, \tag{13}$$

де, як і раніше, n – термін позики, i – проста відсоткова ставка.

Множник $1/(1+ni)$ прийнято називати *дисконтним множником простих відсотків* за умови математичного дисконтування.

Цей множник показує яку частину S складає теперішня величина P.

Приклад 7.

Банк у першому кварталі випустив депозитний сертифікат з терміном погашення вкінці цього ж кварталу. Сертифікат викуповується за 100 грн. Оголошена прибутковість – 20% простих річних. Знайти ціну продажу сертифікату і величину дисконту, якщо вважати, що часова база становить 366.

Розв'язання.

Згідно умови задачі $S = 100$ грн., $i = 0.2$. Оскільки операція відбувається у першому кварталі високосного року, то термін угоди становить $31 + 29 + 31 = 91$ день. За формулою (13) знаходимо:

$$P = \frac{S}{1 + ni} = \frac{100}{1 + \frac{91}{366} \times 0.2} = 95.26 \text{ грн.},$$

$$D = S - P = 100 - 95.26 = 4.74 \text{ грн.}$$

1.4.2. Банківський облік

Банківський облік (або ж облік векселів) – це визначення теперішньої суми боргу P за відомою величиною S у майбутньому, якщо термін позики становить n, а ставка є *обліковою* і дорівнює d.

При банківському обліку відсотки за користування позикою нараховуються на суму S, яку треба сплатити у майбутньому.

Оскільки за базу нарахування береться сума боргу у майбутньому, то такі відсотки є *антисипативними*.

Очевидно, що розмір дисконту (облікової суми) становить $D = Snd$. Таким чином,

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \tag{14}$$

Тут множник $(1 - nd)$ називають *дисконтним множником за простою обліковою ставкою* d.

Із попереднього виразу маємо, що

$$d = \frac{S - P}{nS}. \tag{15}$$

Зокрема, за умови $n = 1$ маємо виражену облікову ставку через суми боргу на початку і в кінці року $d = (S - P)/S$.

Зазвичай, банківський облік за простими ставками використовується в межах року. В цьому випадку n – дробове число і $n = t/K$, де, як і раніше, t – точна кількість днів угоди, K – часова база, яку приймають рівною 360 днів.

Приклад 8.

Кредит на суму 100 000 грн. виданий терміном на один рік під облікову ставку $d = 15\%$. Знайти суму отриманих грошей і дисконт, отриманий банком.

Розв'язання.

Скориставшись формулою (14) маємо:

$$P = S(1 - nd) = 100000(1 - 1 \times 0.15) = 85000 \text{ грн.},$$

$$D = S - P = 100000 - 85000 = 15000 \text{ грн.}$$

Приклад 9.

Вексель номінальною вартістю 2 500 грн. облікований у банку за 30 днів до його терміну погашення за обліковою ставкою 20%. Знайти суму отриману векселетримачем та величину дисконту.

Розв'язання.

Згідно умови задачі маємо: $S = 2500$ грн., $d = 0.2$, $t = 30$ днів, $K = 360$. Тоді:

$$P = 2500\left(1 - \frac{30}{360} \times 0.2\right) = 2458.3 \text{ грн.},$$

$$D = 2500 - 2458.3 = 41.7 \text{ грн.}$$

Окрім обліку за простими обліковими ставками може проводитись і нарощення. Нарощену суму в такому випадку визначають за формулою:

$$S = \frac{P}{1 - nd} = P(1 - nd)^{-1}. \tag{16}$$

Вираз $1/(1 - nd)$ називають *множником нарощення за простою обліковою ставкою* d.

ТЕМА 2.
НАРОЩЕННЯ ТА ДИСКОНТУВАННЯ ЗА СКЛАДНИМИ ВІДСОТКОВИМИ СТАВКАМИ

2.1. Нарощення за складними відсотковими ставками

На практиці в середньо- та довготермінових фінансово-кредитних операціях в основному використовують нарощення за складними відсотками, тобто коли відсотки одразу після нарахування не сплачуються, а приєднуються до суми боргу. База для нарахування таких відсотків збільшується з кожним кроком у часі. Нарощення за складними відсотками є послідовним реінвестуванням коштів, які вкладені на один період під простий відсоток. Оскільки відсотки приєднуються до суми, яка є базою для нарахування в наступному періоді, маємо справу з капіталізацією.

Запишемо формулу нарощення за складними відсотками. Для цього використаємо такі ж позначення, як і у випадку нарощення за простими відсотками. Нагадаємо, що P – початкова величина боргу (позики, кредиту, капіталу і т. п.), S – нарощена сума (з процентами) на кінець терміну, n – кількість років нарощення, i – річна ставка складних відсотків (у вигляді десяткового дробу). Неважко переконатися, що в кінці першого року отримані проценти становитимуть Pi, а нарощена сума – $S = P + P \cdot i = P(1+i)$. В кінці другого року нарощена сума становитиме $S = P(1+i) + P(1+i) \cdot i = P(1+i)^2$ і т. д. Отже, на кінець n-го року матимемо:

$$S = P(1+i)^n . \tag{17}$$

Наведена вище формула і є формулою нарощення складних відсотків. Вираз $(1+i)^n$ прийнято називати *множником нарощення за складними відсотками*.

Коли потрібно вирахувати проценти за весь період нарощення за складними відсотками, використовують наступну формулу:

$$I = S - P = P(1+i)^n - P = P\left((1+i)^n - 1\right). \tag{18}$$

Якщо використовуються змінні з часом складні відсоткові ставки, то нарощення відбувається за формулою:

$$S = P(1+i_1)^{n1} \cdot (1+i_2)^{n2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{nm}, \qquad (19)$$

де i_j, n_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) – відповідно складна відсоткова ставка у j-тому періоді нарахувань та тривалість такого періоду.

Досить часто термін нарахування складних відсотків не є цілим числом. В такому випадку можна використати один із методів розрахунку – *загальний* (простий) або *змішаний*.

Загальний метод передбачає використання для розрахунків формули (17), при цьому n виражається десятковим дробом.

У *змішаному методі* використовується ціла частина років, впродовж яких нараховуються складні відсотки, і дробова частина для нарахування простих відсотків, тобто

$$S = P(1+i)^c (1+di), \qquad (20)$$

де, c – ціла частина, d – дробова частина n ($c + d = n$).

Розглянемо ряд прикладів із практики нарахування складних відсотків.

Приклад 10.

Визначити розмір заборгованості за позикою у 100 000 грн. за три роки, якщо нарощення відбувалося за складною відсотковою ставкою 20% річних. Яку величину з цієї суми становлять проценти?

Розв'язання.

$$S = P(1+i)^n = 100000(1+0.2)^3 = 172800 \text{ грн.}$$

$$I = S - P = 172800 - 100000 = 72800 \text{ грн.},$$

або

$$I = P\left((1+i)^n - 1\right) = 100000((1+0.2)^3 - 1) = 72800 \text{ грн.}$$

Приклад 11.

Нехай складний відсоток за позикою становить 15% річних плюс маржа 3% в перші два роки і 4% в наступні роки. Знайти величину накопиченого за шість років боргу, якщо позичальник займав 50 000 грн.

Розв'язання.

$$S = P(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} = 50000(1+0.15+0.03)^2(1+0.15+0.04)^4 =$$
$$= 50000 \times 1.18^2 \times 1.19^4 = 50000 \times 1.3924 \times 2.005 = 139588.1 \text{ грн.}$$

Приклад 12.

Кредит у розмірі 300 000 грн. виданий на 2 роки і 155 днів під 25% складних річних відсотки. Якою буде сума боргу на кінець терміну угоди, якщо для розрахунків використовувався метод нарахування змішаний? Простий?

Розв'язання.

Припустимо, що $K = 365$ днів. Отже, $n = 2\frac{155}{365} = 2.4247$ р.

За таких умов матимемо:

$$S = 300000(1+0.25)^2 \cdot (1+0.4247 \times 0.25) = 518519.53 \text{ грн.},$$

$$S = 300000(1+0.25)^{2.4247} = 300000 \times 1.71782 = 515346.06 \text{ грн.}$$

2.1.1. Номінальна ставка відсотка

У фінансових угодах часто передбачається нарахування відсотків не раз на рік, а частіше, наприклад щопівроку, щоквартально, щомісяця, а інколи навіть і щодня. В цьому випадку для підрахування нарощеної суми можна скористатись загальною формулою для розрахунку складних відсотків, але при цьому вважають, що n – кількість періодів нарахування, а i – відсоткова ставка, віднесена до відповідного періоду.

На практиці звичайно вказують не піврічну, квартальну чи місячну ставки, а річну із зазначенням періодів нарахування. Наприклад, "25% річних із помісячним нарахуванням". Таку ставку прийнято називати *номінальною*. Отже, номінальна ставка відсотка j – це річна ставка, за якою відсотки нараховуються m разів на рік.

Для нарощення за номінальною ставкою j маємо формулу

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}, \tag{21}$$

де n – тривалість угоди в роках, m – кількість нарахувань у році.

Таким чином, річний *множник нарощення за номінальною ставкою* j дорівнює $(1+j/m)^m$.

Зауважимо, що при збільшенні кількості періодів нарахувань зростає темп нарощення, оскільки капіталізація відбувається частіше. При цьому найбільший приріст у нарощенні дасть перехід від щорічних нарахувань до щопіврічних, а найменший – перехід від щомісячних до щоденних нарахувань.

Приклад 13.

Якою буде величина заборгованості через 31 місяць, якщо на початку терміну вона становила 100 000 грн., відсотки нараховувались складні за ставкою 22% річних, нарахування відбувались поквартально.

Розв'язання:

Розв'яжемо дану задачу двома методами: загальним та змішаним.

Згідно умови задачі кількість періодів нарахування складає $\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}$.

У першому випадку за формулою (21) матимемо:

$$S=100000\left(1+\frac{0.22}{4}\right)^{10\frac{1}{3}}=173890{,}32 \text{ грн.}$$

За формулою (20):

$$S=100000\left(1+\frac{0.22}{4}\right)^{10}\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{0.22}{4}\right)=173946{,}04 \text{ грн.}$$

2.1.2. Ефективна відсоткова ставка

З використанням номінальної ставки тісно пов'язане поняття *дійсної*, або *ефективної відсоткової ставки*, що відповідає даній номінальній ставці. Ефективна ставка відображає реальний відносний дохід отриманий за рік, тобто –

це річна ставка складних відсотків, яка дає такий самий результат, як і m – разове нарахування за ставкою j/m.

Позначимо через i_e ефективну ставку, що відповідає номінальній ставці j. Тоді, прирівнюючи множники нарощення за обома ставками матимемо:

$$(1+i_e)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

Звідси випливає, що

$$i_e = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1, \tag{22}$$

$$j = m\left((1+i_e)^{\frac{1}{m}} - 1\right). \tag{23}$$

Заміна в угоді номінальної ставки на ефективну не змінює відносин сторін, тому що ці ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.

Приклад 14.

Нехай номінальна ставка відсотка $j = 15\%$ річних. Відсотки нараховуються щоквартально впродовж трьох років. Визначити відповідний множник нарощення.

Розв'язання.

За умовою задачі маємо $n = 3$, $m = 4$. Отже множник нарощення становить:

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\times n} = \left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4\times 3} = 1.0375^{12} = 1.55545.$$

Приклад 15.

Банк нараховує відсотки за номінальною ставкою 20% річних. Знайти відповідну ефективну річну ставку за умов щомісячної та щоденної капіталізації.

Розв'язання.

Для розрахунку використаємо формулу (22).

Якщо капіталізація відбувається щомісяця (тобто $m = 12$) маємо:

$$i_e = \left(1+\frac{0.2}{12}\right)^{12} - 1 = 0.21939 \approx 21.94\% .$$

Якщо капіталізація є щоденною ($m = 365$):

$$i_e = \left(1+\frac{0.2}{365}\right)^{365} - 1 = 0.22134 \approx 22.13\%.$$

Досить часто на практиці виникає потреба переходу від однієї номінальної ставки до іншої. Еквівалентна заміна однієї номінальної ставки на іншу має місце у випадку виконання рівності:

$$\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2} .$$

Позначення $j^{(m)}$ використано для спрощення запису. Воно визначає розмір номінальної ставки і кількість нарахувань в році.

Враховуючи те, що m може приймати тільки цілі значення, маємо:

$$j_2^{(m_2)} = m_2\left(\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right). \tag{24}$$

<u>*Приклад 16.*</u>

Визначити величину номінальної ставки $j^{(4)}$, яка беззбитково заміняє ставку $j^{(12)} = 25\%$.

<u>*Розв'язання.*</u>

За формулою (24) знаходимо:

$$j^{(4)} = 4\left(\left(1+\frac{0.25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right) = 0.25524 \approx 25.5\% .$$

Таким чином, як бачимо із результатів обчислень, зменшення кількості нарахувань вимагає збільшення відсоткової ставки з 25% до 25.5%.

2.2. Математичне дисконтування та облік за складними ставками відсотка

2.2.1. Математичне дисконтування за складною відсотковою ставкою

Як і у випадку використання простої відсоткової ставки, математичне дисконтування за складною ставкою відсотків, тобто знаходження значення P за відомим значенням S, відбувається за формулою:

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=Sv^n. \tag{25}$$

Вираз $v^n=1/(1+i)^n$ називається *дисконтним множником складних відсотків*.

<u>*Приклад 17.*</u>

Визначити сучасну вартість 10 000 грн., які будуть сплачені через 3 роки при використанні ставки 30% складних річних.

<u>*Розв'язання.*</u>

$$P=\frac{10000}{(1+0.3)^3}=4551.66 \text{ грн.}$$

У випадку, коли відсотки нараховуються m разів на рік за номінальною відсотковою ставкою j маємо:

$$P=S\Big/\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mn}, \tag{26}$$

де n – кількість років, m – кількість нарахувань у році. В такому випадку дисконтний множник становить:

$$v^{nm}=\frac{1}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mn}}. \tag{27}$$

Дисконт суми S знаходимо як

$$D=S-P=S-Sv^n=S\left(1-v^n\right) \tag{28}$$

у випадку разових річних нарахувань та

$$D = S\left(1 - v^{mn}\right), \qquad (29)$$

якщо впродовж року відбувається m нарахувань.

Приклад 18.

Визначити сучасну вартість 10 000 грн., які будуть сплачені через 3 роки при використанні ставки 30% складних річних, якщо дисконтування щоквартальне.

Розв'язання.

Використавши формулу (26), визначаємо:

$$P = \frac{10000}{\left(1 + {0.3}/{4}\right)^{4\times 3}} = \frac{10000}{2.38178} = 4198.54 \text{ грн.}$$

2.2.2. Облік за складною обліковою ставкою

Банківський облік за складною обліковою ставкою проводять за розрахунковою формулою

$$P = S(1 - d)^n, \qquad (30)$$

де P – сучасна (теперішня) сума боргу, S – майбутня сума боргу, d – *складна облікова ставка*, n – тривалість угоди в роках.

Величину $(1 - d)^n$ називають *дисконтним множником*. Не важко показати, що дисконт, який отримує банк, дорівнює:

$$D = S - P = S - S(1 - d)^n = S\left(1 - (1 - d)^n\right). \qquad (31)$$

У деяких випадках дисконтування за складною обліковою ставкою може проводитися m разів на рік. Тоді за n років маємо:

$$P = S\left(1 - {f}/{m}\right)^{mn}, \qquad (32)$$

де f – *номінальна річна облікова ставка*.

Введемо поняття ефективної облікової ставки d_e. За означенням *ефективна облікова ставка* – це така річна облікова ставка, застосування якої еквівалентне застосуванню номінальної облікової ставки f m разів в році.

Прирівняємо дисконтні множники за обома видами ставок:

$$(1-d_e)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}.$$

Якщо $n=1$, то із попередньої рівності маємо:

$$d_e = 1-\left(1-{f}/{m}\right)^m, \tag{33}$$

$$f = m\left(1-\sqrt[m]{1-d_e}\right). \tag{34}$$

Ефективна облікова ставка d_e, у випадку $m>1$, завжди менша за номінальну облікову ставку f.

На практиці досить часто може застосовуватися і нарощення за складною обліковою ставкою. Потреба в цьому виникає при заповненні векселя, коли відомою є сума P, яку отримає власник векселя. В такому випадку для розрахунків використовують формулу

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}. \tag{35}$$

Якщо облікова ставка буде номінальною, то

$$S = \frac{P}{\left(1-{f}/{m}\right)^{mn}}. \tag{36}$$

Розглянемо ряд прикладів.

<u>*Приклад 19.*</u>

Визначити вартість дисконту від продажу фінансового інструменту на суму 100 000 грн., якщо термін погашення становить 3.5 року. При продажі застосовувалась складна облікова ставка 20% річних.

Розв'язання.

За формулами (30) та (31) маємо:

$$P = 100000(1-0.2)^{3.5} = 45794.67 \text{ грн.}$$

$$D = 100000 - 45794.67 = 54205.33 \text{ грн.}$$

Приклад 20.

Визначити вартість дисконту від продажу фінансового інструменту на суму 100 000 грн., якщо термін погашення становить 3.5 року. При продажі застосовувалась складна облікова ставка 20% річних, а дисконтування проводилося щопівроку.

Розв'язання.

$$P = 100000\left(1-\frac{0.2}{2}\right)^{2\times 3.5} = 47829.69 \text{ грн.}$$

$$D = S - P = 100000 - 47829.69 = 52170.31 \text{ грн.}$$

Приклад 21.

За умов попереднього прикладу знайти ефективну облікову ставку.

Розв'язання.

Згідно з формулою (33)

$$d_e = 1-\left(1-\frac{0.2}{2}\right)^2 = 0.19 = 19\%.$$

Приклад 22.

Використовуючи складну річну облікову ставку 17%, знайти нарощену суму боргу, якщо початкова сума 50 000 грн., термін погашення 5 років.

Розв'язання.

За співвідношенням (35) маємо

$$S = \frac{50000}{(1-0.17)^5} = 126934.48 \text{ грн.}$$

ТЕМА 3.
ВИЗНАЧЕННЯ ІНШИХ ПАРАМЕТРІВ УГОД ІЗ ВІДСОТКОВИМИ СТАВКАМИ

На практиці фінансові розрахунки вимагають вміння розв’язувати не тільки прямі задачі нарощення чи дисконтування, а й обернені. Ці задачі передбачають визначення терміну позики, кількості періодів нарощення, відсоткової чи облікової ставок тощо. Розглянемо співвідношення, за якими відбуваються такі розрахунки.

3.1. Визначення деяких параметрів фінансових угод з простими ставками

Нехай нам відомими є значення величин S та P і, крім того, значення i або d. Тоді з відповідних формул нарощення за простими відсотками знаходимо тривалість періоду у роках n, або днях t:

$$n = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i}, \qquad n = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d}. \tag{37}$$

Якщо n вимірюємо у роках, а термін угоди шукається у днях, то:

$$t = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} K, \qquad t = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d} K. \tag{38}$$

Тут, як і раніше, K – часова база нарахувань (K = 360, 365, 366). *Зауваження*. Якщо у формулу входить облікова ставка, то K завжди приймає значення 360.

Аналогічно за відомими термінами можна знайти ставки відсотка:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n}, \qquad d = \frac{1 - \frac{P}{S}}{n}. \tag{39}$$

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{t} K \, ,$$

(40)

$$d = \frac{1 - \frac{P}{S}}{t} K \, .$$

Формули (39), (40) використовують при обчисленні *прибутковості фінансових операцій* у складних ставках відсотка.

Приклад 23.

Початкова сума боргу 100 000 грн. Через 150 днів передбачається погасити 120 000 грн. Визначити прибутковість операції для кредитора у простій відсотковій і обліковій ставці, якщо вважати, що поточний рік є високосним.

Розв'язання.

За формулами (40) знаходимо

$$i = \frac{120000 - 100000}{150 \times 100000} \times 366 = 0.488 = 48.8\% \, ,$$

$$d = \frac{120000 - 100000}{150 \times 120000} \times 360 = 0.4 = 40\% \, .$$

Приклад 24.

Заборгованість з 10 000 грн. зросла до 15 000 грн. Визначити тривалість позики у днях при нарахуванні 25% простих річних відсотків (рік – високосний).

Розв'язання.

$$t = \frac{\frac{15000}{10000} - 1}{0.25} \times 366 = 732 \text{ дні.}$$

Зауваження. У фінансовому аналізі *прибутковість операцій* завжди вимірюється у річній відсотковій ставці (простій або складній). Якщо прибутковість знайдена за обліковою ставкою, то результат треба перерахувати у річній відсотковій ставці.

3.2. Визначення деяких параметрів фінансових угод з складними ставками

Розглянемо основні співвідношення для складних відсотків та визначимо з них деякі параметри фінансових угод.

Для визначення n використовуватимемо вирази, отримані з формул (17), (21), (35) та (36):

$$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}, \qquad n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{m\ln\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)}. \tag{41}$$

$$n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{\ln(1-d)}, \qquad n = \frac{\ln\frac{P}{S}}{m\ln\left(1-{}^{f}\!/_{m}\right)}. \tag{42}$$

<u>Приклад 25.</u>

За який час сума на депозиті зросте з 10 000 грн. до 30 000 грн. за умови, що на вкладені кошти нараховуються відсотки за ставкою 15% складних річних, а капіталізація відбувається раз на рік? Щоквартально?

<u>Розв’язання.</u>

Згідно співвідношень (41) маємо:

1) $n = \dfrac{\ln\frac{30000}{10000}}{\ln(1+0.15)} = 7.86$ року.

2) $n = \dfrac{\ln\frac{30000}{10000}}{4\ln\left(1+\frac{0.15}{4}\right)} = 7.46$ року.

Із цих же співвідношень можна отримати формули для обчислення відсоткових ставок, тобто:

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{43}$$

$$j = \left(\left(\frac{S}{P} \right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right) m, \qquad f = \left(1 - \left(\frac{P}{S} \right)^{\frac{1}{mn}} \right) m. \qquad (44)$$

Аналогічно, як і для випадку з простими відсотками, останні формули використовуються для підрахунку прибутковості проведених фінансових операцій.

Приклад 26.

Вартість сертифікату 1 000 грн. За умови трирічного його зберігання виплачується 1 500 грн., п'ятирічного – 2 000 грн. Визначити прибутковість вкладання коштів у сертифікат для кредитора у вигляді складної річної ставки відсотків.

Розв'язання.

За однією із формул з (43) маємо:

$$1)\ i = \left(\frac{1500}{1000} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.14471 \approx 14.47\%,$$

$$2)\ i = \left(\frac{2000}{1000} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.148698 \approx 14.87\%.$$

Приклад 27.

Нехай вексель виписують на 3 роки. При його обліку власник бажає отримати 75% вартості векселя. Визначити розмір складної облікової ставки для забезпечення таких умов контракту.

Розв'язання.

Із умови маємо $\frac{P}{S} = 0.75$, $n = 3$. Отже, за одним із виразів з (43) знаходимо:

$$d = 1 - (0.75)^{\frac{1}{3}} = 0.09144 \approx 9.14\%.$$

Таким чином, для того щоб забезпечити виконання контракту із дотриманням зазначених умов, складна облікова ставка відсотка повинна становити 9.14% річних.

ТЕМА 4.
НЕПЕРЕРВНІ ВІДСОТКИ. НЕПЕРЕРВНЕ НАРОЩЕННЯ ТА ДИСКОНТУВАННЯ

Неперервне нарощення, тобто нарощення за нескінченно малі проміжки часу, має суттєве значення в аналізі складних фінансових проблем, таких як: вибір інвестиційних рішень, фінансове проектування тощо. Такий спосіб нарощення в фінансово-кредитних операціях на практиці застосовується доволі рідко. Тим не менше розглянемо цей вид нарощення більш детально.

У випадку неперервного нарощення процентів використовують особливу відсоткову ставку – *силу росту*. Цей показник характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу.

Сила росту може бути постійною або змінною у часі.

4.1. Постійна сила росту

Розглянемо ще раз визначення нарощеної суми за номінальною відсотковою ставкою. Нагадаємо, що

$$S = P\left(1 + {}^{j}\!/_{m}\right)^{mn}.$$

Перейшовши у цьому виразі до границі при $m \to \infty$, отримаємо:

$$S = P\lim_{m\to\infty}\left(1 + {}^{j}\!/_{m}\right)^{mn} = Pe^{jn},$$

де e – число Ейлера ($e \approx 2.7182818285$).

Позначають неперервну ставку нарощення через δ. Отже, вираз, за яким визначатимемо нарощену суму у випадку використання сили росту, набуває вигляду:

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{45}$$

Таким чином, у випадку неперервного нарощення відсотків, нарощена сума буде скінченною величиною.

Не важко переконатися, що складна дискретна і неперервна ставки нарощення задовольняють таким співвідношенням:

$$\delta = \ln(1+i),$$

$$i = e^{\delta} - 1. \qquad (46)$$

Отримані вирази виводяться із рівності відповідних множників нарощення.

Розглянемо приклад.

Приклад 28.

Визначити нарощену за п'ять років суму, якщо сила росту становитиме 10%, а початкова сума – 1 000 000 грн.

Розв'язання.

Підставляючи необхідні величини у формулу (45) маємо:

$$S = Pe^{\delta n} = 1000000 \times e^{0.1\times 5} = 1643167.67 \text{ грн.}$$

На основі сили росту можна проводити також і математичне дисконтування. Виразимо із формули (45) P через S:

$$P = Se^{-\delta n}. \qquad (47)$$

Вираз $e^{-\delta n}$ називатимемо *дисконтним множником на основі сили росту*.

Приклад 29.

Боргове зобов'язання на суму 200 000 грн., термін сплати якого настане через 7 років, продано з дисконтом за силою росту 5% річних. Визначити сучасну вартість отриманої за борг суми.

Розв'язання.

За формулою (46) маємо:

$$P = Se^{-\delta n} = 200000 \times e^{-0.05\times 7} = 141270.89 \text{ грн.}$$

4.2. Змінна сила росту

Розглянемо дещо складнішу задачу. Нехай сила росту буде не постійною, а змінюватиме своє значення з часом згідно із певним законом, що задається неперервною функцією $f(t)=\delta_t$. Тоді, в загальному випадку нарощена сума та сучасна вартість визначаються як:

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt},$$

$$P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}. \quad (48)$$

Функція часу може бути довільною, проте найчастіше використовують лінійну ($\delta_t = \delta + at$) та експонентну ($\delta_t = \delta a^t$) залежності. Параметри δ та a в даних функціях відповідно зображають початкове значення сили росту та її приріст за одиницю часу.

Обчислимо інтеграли у випадку розглянутих залежностей. Отже, для лінійної функції множник нарощення становитиме

$$e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}, \quad (49)$$

оскільки

$$\int_0^n (\delta + at)dt = \int_0^n \delta\, dt + a\int_0^n at\, dt = \delta n + \frac{an^2}{2},$$

для експонентної залежності маємо:

$$e^{\frac{\delta}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}, \quad (50)$$

так як

$$\int_0^n \delta a^t dt = \delta \left.\frac{a^t}{\ln a}\right|_0^n = \frac{\delta}{\ln a}\left(a^n - 1\right).$$

<u>*Приклад 30.*</u>

Нехай початкове значення сили росту становить 3%. Відсоткова ставка зростає лінійно і неперервно, з приростом 3% за рік. Нарощення відбувається впродовж 7 років. Визначити відповідний множник нарощення.

<u>*Розв'язання.*</u>

За формулою (49) знаходимо множник нарощення:

$$e^{\delta n+\frac{an^2}{2}}=e^{0.03\times 7+\frac{0.03\times 7^2}{2}}=e^{0.945}=2.556.$$

<u>*Приклад 31.*</u>

Початкове значення сили росту становить 5%. Відсоткова ставка неперервно зростає по експоненті, з приростом 10% за рік. Нарощення відбувається впродовж 5 років. Визначити відповідний множник нарощення.

<u>*Розв'язання.*</u>

За формулою (50) знаходимо множник нарощення:

$$e^{\frac{\delta}{\ln a}\left(a^n-1\right)}=e^{\frac{0.05}{\ln 0.1}\left(0.1^5-1\right)}=1.022.$$

Визначимо тепер із співвідношення для нарощення з постійною силою росту (45) значення n і δ. Маємо:

$$n=\frac{\ln\frac{S}{P}}{\delta},$$

(51)

$$\delta=\frac{\ln\frac{S}{P}}{n}.$$

Якщо брати випадок нарощення зі змінною силою росту (48) із постійним темпом зростання a, отримаємо:

$$n=\frac{\ln\left(1+\frac{\ln a\times\ln\left(S/P\right)}{\delta}\right)}{\ln a},$$

(52)

$$\delta=\frac{\ln a\times\ln\left(S/P\right)}{a^n-1}.$$

ТЕМА 5.
ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ВІДСОТКОВИХ СТАВОК ТА ЗМІНА УМОВ ФІНАНСОВИХ УГОД

5.1. Еквівалентність відсоткових ставок

Як ми уже зауважили, у фінансових розрахунках використовуються різні відсоткові ставки (прості, складні, облікові, номінальні, ефективні тощо). Якщо результати фінансових операцій у конкретних умовах угоди призводять до одного і того ж фінансового результату при використанні різних ставок, то говорять, що такі ставки є *еквівалентними*.

Для учасників операції не має значення які ставки будуть використані в угоді, головне, щоб вони були еквівалентними.

Виведемо ряд співвідношень еквівалентності простих, складних, простих і складних ставок відсотка. Для цього будемо прирівнювати відповідні множники нарощення чи дисконтування.

5.1.1. Еквівалентність простої ставки відсотків та простої облікової ставки

Нехай i – проста відсоткова ставка, d – проста облікова ставка. З рівності множників нарощення

$$1+ni=\frac{1}{1-nd}$$

маємо:

$$i=\frac{d}{1-nd}, \qquad d=\frac{i}{1+ni}. \tag{53}$$

Як видно із отриманих співвідношень еквівалентність таких ставок суттєво залежить від терміну угоди n.

Нехай тепер тривалість угоди вимірюється не в роках, як вище, а у днях. Тоді, в залежності від вибору бази нарахувань, мають місце співвідношення між еквівалентними ставками:

$$i=\frac{360d}{360-td}, \qquad d=\frac{360i}{360+ti}, \tag{54}$$

за умови $K = 360$, а також

$$i = \frac{365d}{360 - td}, \qquad d = \frac{360i}{365 + ti}, \tag{55}$$

якщо за базу нарахувань береться точна кількість днів у році $K = 365\,(366)$.

Приклад 32.

Знайти значення простої відсоткової ставки, еквівалентної простій річній обліковій ставці 22%.

Розв'язання.

Згідно умов задачі маємо, що $n = 1$, $d = 0.22$. Тоді за одним із виразів з (27) маємо:

$$i = \frac{0.22}{1 - 0.22} = 0.2821 = 28.21\%.$$

Приклад 33.

Якою буде прибутковість обліку векселя за обліковою ставкою 20% у ставці простих відсотків, якщо термін виплати за векселем – 222 дні, а часова база – 365.

Розв'язання.

За формулою з (55) маємо:

$$i = \frac{365 \times 0.2}{360 - 222 \times 0.2} = 0.2313 = 23.13\%.$$

Приклад 34.

Прибутковість операції обліку повинна становити 30% на рік. Визначити просту облікову ставку, якщо термін позики складає 90 днів невисокосного року.

Розв'язання.

За формулою з (55) маємо:

$$d = \frac{360 \times 0.3}{365 + 90 \times 0.3} = 0.2755 = 27.55\%.$$

5.1.2. Еквівалентність простої і складної відсоткових ставок

Для спрощення викладу введемо наступні позначення: i_n – проста відсоткова ставка, i_c – складна ставка відсотка. Прирівнявши множники нарощення, отримаємо:

$$1 + ni_n = (1 + i_c)^n .$$

Із даної рівності визначаємо співвідношення між простою i_n та еквівалентною їй складною i_c ставками:

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n},$$

$$i_c = (1 + n \cdot i_n)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{56}$$

<u>*Приклад 35.*</u>

Нехай позика видана під 25% складних річних. Знайти еквівалентну просту ставку, якщо термін угоди становить три роки? Шість місяців?

<u>*Розв'язання.*</u>

За формулою з (56) знаходимо:

$$i_n = \frac{(1 + 0.25)^3 - 1}{3} = 0.3177 = 31.77\% .$$

$$i_n = \frac{(1 + 0.25)^{0.5} - 1}{0.5} = 0.2361 = 23.61\% .$$

5.1.3. Еквівалентність простої та номінальної відсоткових ставок

Для даного випадку мають місце наступні співвідношення еквівалентності:

$$i_n = \frac{\left(1 + {}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{m \times n} - 1}{n}, \qquad j = m\left(\left(1 + ni_n\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right). \tag{57}$$

5.1.4. Еквівалентність простої облікової і складної ставки відсотка

Прирівнюючи між собою множники нарощення простої облікової та складної річної ставок маємо:

$$\frac{1}{1-nd}=(1+i)^{n}.$$

Звідки знаходимо:

$$i=\left(1-nd\right)^{-1/n}-1,$$

(58)

$$d=\frac{1-(1+i)^{-n}}{n}.$$

Якщо термін угоди подається у днях, то виходячи із рівності

$$\frac{1}{1-\frac{t}{360}d}=(1+i)^{\frac{t}{365}}$$

знаходимо:

$$i=\left(1-\frac{t}{360}d\right)^{-\frac{365}{t}}-1,$$

(59)

$$d=\frac{360}{t}\left(1-(1+i)^{-\frac{t}{365}}\right).$$

5.1.5. Еквівалентність складної облікової та відсоткової ставок

Знову ж таки, прирівнюючи відповідні множники, отримаємо:

$$\frac{1}{(1-d)^{n}}=(1+i)^{n}.$$

Звідки отримуємо:

$$i = \frac{d}{1-d}, \qquad d = \frac{i}{1+i}. \tag{60}$$

Зауваження. Як видно із останніх співвідношень, еквівалентність складних облікової та відсоткової ставок не залежить терміну тривалості угоди n, що мало місце у випадку простих відсотків.

5.1.6. Еквівалентність складної облікової та номінальної ставок

З рівності множників нарощення маємо:

$$\frac{1}{1-d} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m.$$

Звідки визначаємо:

$$d = 1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m, \qquad j = \left((1-d)^{\frac{1}{m}} - 1\right)m. \tag{61}$$

5.2. Фінансова еквівалентність зобов'язань та конверсія платежів. Консолідація виплат

Доволі часто на практиці виникають ситуації, коли потрібно замінити одне грошове зобов'язання іншим, наприклад, із більш віддаленим терміном виплати, об'єднати декілька платежів в один (консолідувати платежі) тощо. Зрозуміло, що такі заміни повинні підпорядковуватися певним законам. В нашому випадку таким законом буде принцип фінансової еквівалентності зобов'язань. Отже, еквівалентними будемо вважати такі виплати, які будуть однаковими за умови їх приведення до одного моменту часу. Якщо дата буде передувати певному моменту часу, то для приведення будемо використовувати дисконтування, якщо ж це стосується майбутнього моменту, то використовуватимемо нарощення.

У найпростішому випадку принцип фінансової еквівалентності випливає із формул нарощення та дисконтування. Дві грошові суми S_1 та S_2, які виплачуються у різні моменти часу, вважатимемо еквівалентними, якщо їхня сучасна вартість (чи нарощена сума), розраховані за однаковою відсотковою ставкою в один і той самий момент часу, будуть рівними. Заміна S_1 на S_2 в таких умовах формально не змінить зобов'язань сторін.

Нагадаємо, що раніше були виведені формули еквівалентних звичайних і точних відсотків, ефективної і номінальної ставок.

Заміна в умовах контракту однієї ставки іншою є зміною умов контракту. Зміною умов контракту є наприклад консолідація (об'єднання) платежів, дострокове погашення позики, пролонгація позики тощо.

В загальному випадку при зміні умов контракту складається рівняння фінансової еквівалентності, у якому сума платежів, що заміняються, зведених до одного моменту часу, прирівнюється сумі платежів за новим зобов'язанням, що зведені на той же час.

Звичайно в межах року рівняння еквівалентності складається на основі простих ставок, за межами року – на основі складних ставок.

Одним із найпоширеніших випадків зміни умов контракту є консолідація платежів. Задача полягає в наступному: замінити певні виплати S_1, S_2, …, S_m із термінами n_1, n_2, …, n_m однією виплатою S_0 терміном n_0. Можливими можуть бути два випадки: за заданим S_0 знайти n_0, або навпаки.

Розглянемо обидва випадки.

5.2.1. Визначення розміру консолідованого платежу

У загальному випадку за виконання умови $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ шукана величина консолідованого платежу визначатиметься як сума нарощених та дисконтованих виплат. Так, при використанні простих відсоткових ставок матимемо:

$$S_0 = \sum_j S_j \left(1 + t_j i\right) + \sum_k S_k \left(1 + t_k i\right)^{-1}, \qquad (62)$$

де S_j – платежі з термінами, що передують n_0, а S_k – платежі з термінами, які йдуть після n_0, $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$.

Якщо відсоткова ставка буде складною, то в загальному випадку замість попереднього виразу матимемо співвідношення:

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i)^{t_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-t_k} . \qquad (63)$$

5.2.2. Визначення терміну консолідованого платежу

Для виведення необхідного співвідношення рівняння еквівалентності зобразимо у вигляді рівності сучасних вартостей відповідних платежів.

Так, для простих відсотків рівняння еквівалентності набуває вигляду:

$$S_0 (1+n_0 i)^{-1} = \sum_k S_k (1+n_k i)^{-1} , \qquad (64)$$

звідки

$$n_0 = \left(\frac{S_0}{\sum_k S_k (1+n_k i)^{-1}} - 1 \right) \Big/ i . \qquad (65)$$

Очевидно, що дана задача матиме розв'язок за умови, що консолідуючий платіж буде більшим за суму сучасних вартостей платежів, яку він замінятиме.

У випадку використання складних відсотків рівняння еквівалентності буде наступним:

$$S_0 (1+i)^{-n_0} = \sum_k S_k (1+i)^{-n_k} , \qquad (66)$$

звідки

$$n_0 = \frac{\ln\left(S_0 \Big/ \sum_k S_k (1+i)^{-n_k} \right)}{\ln(1+i)} . \qquad (67)$$

У тих випадках, коли консолідована сума дорівнює сумі усіх платежів, тобто

$$S_0 = \sum S_k \ ,$$

застосовують наближену формулу визначення терміну консолідованого платежу:

$$n_0 = \frac{\sum S_k n_k}{\sum S_k} \ . \qquad (68)$$

Розглянемо декілька прикладів із практики консолідації платежів.

Приклад 36.

Боржник домовився з банком про консолідацію трьох платежів термінами 15.05, 15.06, 15.08. Суми платежів 10 000 грн., 20 000 грн., 22 800 грн. Термін консолідації 01.08. Ставка простих відсотків i = 36.5%, K = 365. Знайти суму консолідованого платежу.

Розв'язання.

Для розв'язання даної задачі використаємо формулу (62). Знайдемо терміни від дня консолідації до дати кожного з платежів: 15.05 = 135, 15.06 = 166, 15.08 = 227, 01.08 = 213.

Отже,

$$t_1 = 213 - 135 = 78,$$
$$t_2 = 213 - 166 = 47,$$
$$t_3 = 227 - 213 = 14.$$

Зведемо усі платежі на дату консолідації. При цьому перший і другий платежі треба наростити, а третій – дисконтувати на дату консолідації. Отримуємо таке рівняння еквівалентності:

$$S_0 = 10\left(1 + \frac{78}{365} \times 0.365\right) + 20\left(1 + \frac{47}{365} \times 0.365\right) + \frac{22.8}{1 + \frac{14}{365} \times 0.365} \ .$$

У результаті обчислень визначаємо, що сума консолідованого платежу становить:

$$S_0 = 54205 \text{ грн.}$$

Приклад 37.

Платежі $S_1 = 10\ 000$ грн., $S_2 = 50\ 000$ грн. з термінами 100 та 150 днів, відрахованих від однієї бази заміняються одним з терміном 200 днів. Складна річна ставка 30%, *К* = 365 днів. Знайти консолідуючий платіж.

Розв'язання.

Для розв'язання використаємо співвідношення (63).

Перший платіж нарощували 200 – 100 = 100 днів, другий – 200 – 150 = 50 днів. Звівши платежі на дату консолідації матимемо:

$$S_0 = 10000 \times 1.3^{\frac{100}{365}} + 50000 \times 1.3^{\frac{50}{365}} = 625748 \text{ грн.}$$

Приклад 38.

Платежі 10 000, 15 000, 20 000 грн. сплачуються через 25, 45, 70 днів від певної дати відповідно. Їх заміняють одним платежем у сумі 47 000 грн. Проста ставка відсотка i = 36.5% річних. Рік невисокосний. Знайти дату консолідації.

Розв'язання.

Розв'язок шукатимемо за формулами (64), (65). Звівши всі платежі на початок відліку, отримаємо таке рівняння еквівалентності:

$$\frac{47000}{1 + n_0 \times 0.365} = \frac{10000}{1 + \frac{25}{365} \times 0.365} + \frac{15000}{1 + \frac{45}{365} \times 0.365} + \frac{20000}{1 + \frac{70}{365} \times 0.365},$$

$$\frac{47000}{1 + n_0 \times 0.365} = 42801.8.$$

Звідки знаходимо $n_0 \times 0.365 = \frac{47000}{42801.8} - 1 = 0.2687$.

Отже, $n_0 = 0.2687$ року, або приблизно 98 днів.

Приклад 39.

Платежі 10 000, 15 000, 20 000 грн. сплачуються через 30, 40, 70 днів після певної дати. Прийнято рішення замінити їх одним платежем 45 000 грн. Знайти термін консолідованого платежу.

Розв'язання

За формулою (68) знаходимо:

$$n_0 = \frac{10000 \times 30 + 15000 \times 40 + 20000 \times 70}{10000 + 15000 + 20000} = 51.1 \approx 51 \text{ день.}$$

Приклад 40.

Задано дві грошові суми 1 000 000 грн. та 500 000грн., які потрібно виплатити першого листопада та першого січня наступного року. Сторони згодились переглянути умови контракту і замінили порядок виплат на такий: боржник першого грудня виплачує 600 000 грн., а залишок боргу погашається першого березня. Визначити розмір цього залишку за умови, що перерахунок відбувається за простою відсотковою ставкою 20% річних, база нарахувань – 365 днів.

Розв'язання

Нехай початком відліку буде момент виплати 500 000 грн. Тоді рівняння еквівалентності можемо записати як:

$$1000000\left(1 + \frac{61}{365} \times 0.2\right) + 500000 = 600000\left(1 + \frac{31}{365} \times 0.2\right) +$$

$$+ S_0 \left(1 + \frac{59}{365} \times 0.2\right)^{-1}.$$

Звідки знаходимо $S_0 = 953100$ грн.

Зауваження. Зміна або неправильний вибір базових дат приводить до некоректних, хоча й незначних, зміщень результатів. Наприклад, якщо усі виплати у даному прикладі зводити до першого березня отримаємо наступне рівняння еквівалентності:

$$1000000\left(1 + \frac{120}{365} \times 0.2\right) + 500000\left(1 + \frac{59}{365} \times 0.2\right) =$$

$$= 600000\left(1 + \frac{90}{365} \times 0.2\right) + S_0$$

Звідки знаходимо:

$$S_0 = 952300 \text{грн.}$$

ТЕМА 6.
ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ І ФІНАНСОВІ РЕНТИ

6.1. Узагальнюючі характеристики потоків платежів та фінансових рент

Фінансово-кредитні операції сьогодні доволі часто передбачають не окремі чи одноразові виплати або ж надходження, а деяку розподілену у часі їх послідовність. Прикладом такої операції може бути виплата пенсії, погашення довгострокового кредиту або інших заборгованостей, періодичні надходження від інвестицій тощо.

У фінансовому аналізі такий ряд виплат прийнято називати *потоком платежів*, а окремий елемент такого ряду – *членом потоку*. Члени потоку можуть бути як додатні (надходження), так і від’ємні (виплати).

На практиці зустрічається багато видів потоків платежів, які можна класифікувати за окремими ознаками.

Отже, потоки платежів можуть бути *регулярними* (розмір платежу постійний, або відповідає усталеному правилу, що передбачає однакові інтервали між виплатами) і нерегулярними. Члени потоку бувають додатними (надходження) і від’ємними (виплати).

Потік платежів, усі члени якого додатні величини, а проміжки часу між двома послідовними виплатами однакові, прийнято називати *фінансовою рентою* або просто *рентою.* Річну фінансову ренту ще називають *ануїтетом*.

Створення грошових фондів, оплата доходу за акціями і облігаціями, сплата споживчого кредиту, показники інвестиційного процесу тощо – приклади фінансових рент.

Таким чином, можна стверджувати, що фінансові ренти – це один із основних методів кількісного фінансового аналізу.

Окрім сказаного, ренти також можна класифікувати за кількістю виплат – річні (сплата раз на рік) та p-термінові (сплата p разів на рік однаковими платежами); за кількістю нарахувань відсотків у році – зі щорічним, неперервним нарахуванням та нарахуванням m разів на рік; за розміром своїх членів – постійні (усі члени однакові) та змінні (члени змінюють своє значення згідно деякого закону, наприклад прогресії); за кількістю членів – скінченна (кількість наперед відома) та нескінченною кількістю членів (довічні). Також розрізняють ренти термінові (сплата за нею починається з початком ренти) та відкладені (виплати починаються після так званого пільгового періоду).

Важливим моментом в аналізі фінансових рент є момент самих виплат в межах періоду ренти. Коли виплата відбувається в кінці періоду, то маємо звичайну ренту, або як її називають рента *постнумерандо*, якщо ж виплати проводяться на початку періоду – то це рента *пренумерандо*.

Введемо деякі позначення, що будуть використовуватись для аналізу потоків платежів та фінансових рент у подальшому.

Нехай R – член ренти (величина окремого платежу), i – відсоткова ставка (відсоткова ставка, що використовується при нарощенні, або дисконтуванні), n – термін ренти (час від початку ренти до кінця її останнього періоду), p – кількість платежів на рік, m – кількість нарахувань відсотків в році.

Узагальненими характеристиками усіх видів фінансових рент є *нарощена сума* (позначимо її через S) і теперішня або *сучасна вартість* – A.

Під нарощеною сумою розумітимемо суму усіх членів ренти з нарахованими на них відсотками на кінець терміну ренти. Сучасна вартість ренти – це сума усіх членів ренти, дисконтованих на її початок.

6.2. Річна рента постнумерандо

Розглянемо найбільш поширений вид фінансової ренти – *річну ренту постнумерандо*.

Нехай щороку впродовж n років на рахунок під i складних річних відсотків вноситься сума R. Відсотки нараховуються вкінці року. Тоді маємо ряд внесків, на кожен член якого нараховуються відсотки – на перший нарахування відбуваються $n-1$ рік, на другий – $n-2$, і т. д.

Таким чином, перший член зросте до $R(1+i)^{n-1}$, другий – до $R(1+i)^{n-2}$ і т.д., а останній залишиться R. Тоді, нарощена сума такої ренти становитиме:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}. \qquad (69)$$

Скориставшись формулою геометричної прогресії матимемо:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (70)$$

Вираз $s_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ називають *коефіцієнтом нарощення ренти*. Він показує у скільки разів нарощена сума більша за член ренти.

Цей коефіцієнт – це нарощена сума ренти із членом що дорівнює одиниці, тобто

$$s_{n,i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (71)$$

Остаточно нарощену суму річної ренти постнумерандо можна подати у вигляді:

$$S = Rs_{n,i}. \qquad (72)$$

Розглянемо тепер деякі види річної ренти постнумерандо.

6.2.1. Річна рента із нарахуванням відсотків m разів в році

Для такої ренти кількість її членів становитиме відповідно $n \cdot m$. Члени ренти із нарахованими на них відсотками утворюють геометричну прогресію із першим членом R і знаменником $\left(1 + {}^{j}\!/_{m}\right)^m$, де j – номінальна відсоткова ставка. Сума членів такої прогресії становить:

$$S = R\frac{\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{m}-1} = R \cdot s_{mn,\, j/m}\,. \tag{73}$$

6.2.2. P-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($m=1$)

Нехай рента виплачується p разів в році однаковими виплатами, а відсотки нараховуються вкінці року. Оскільки річна сума виплат становить R, то кожного разу виплачується R/p. Кількість членів ренти становить $n \cdot p$. Аналогічно, як і у попередньому випадку, послідовність виплат утворює геометричну прогресію із першим членом R/p і знаменником $(1+i)^{1/p}$. Отже,

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)} = R \cdot s_{n,i}^{(p)}\,. \tag{74}$$

6.2.3. P-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($p=m$)

Одним із найбільш вживаних видів ренти, який зустрічається на практиці, є p-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році за умови $p=m$.

Для визначення нарощеної суми такої ренти замінимо у виразі (70) відсоткову ставку i на j/m, а замість кількості років n візьмемо кількість періодів виплат ренти np.

Член такої ренти становитиме R/p. Оскільки $p=m$, то в результаті отримуємо:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{mn}-1}{{}^{j}\!/\!_{m}} = R\frac{\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{mn}-1}{j}\,. \tag{75}$$

6.2.4. p-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($p \neq m$)

Цей випадок є найбільш загальним. Загальна кількість членів такої ренти np, а величина члена складає R/p. Тепер, знову ж таки, скориставшись формулою геометричної прогресії, матимемо:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+{j}/{m}\right)^{m/p\cdot np}-1}{\left(1+{j}/{m}\right)^{m/p}-1}=R\frac{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+{j}/{m}\right)^{m/p}-1\right)}. \tag{76}$$

6.2.5. Рента із неперервним нарахуванням відсотків

Обговорення методів визначення нарощених сум дискретних рент буде неповним, якщо не розглянути неперервне нарахування відсотків.

Нехай знову ж таки маємо справу з рентою постнумерандо. Ряд, що утворюють виплати разом із нарахованими на них відсотками, в оберненому порядку має вигляд: R, Re^{δ}, $Re^{2\delta}$, ..., $Re^{(n-1)\delta}$. Сума членів такого ряду становить:

$$S=R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}=Rs_{n,\delta}. \tag{77}$$

Нагадаємо, що δ – сила росту. Аналогічно можна показати, що для p-термінової ренти із неперервним нарахуванням відсотків має місце наступне співвідношення:

$$S=R\frac{e^{\delta n}-1}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)}=Rs_{n,\delta}^{(p)}. \tag{78}$$

6.3. Сучасна вартість постійної ренти постнумерандо

Під сучасною вартістю потоку платежів A розумітимемо суму дисконтованих на деякий попередній момент часу членів цього потоку. Даний показник має широке застосування у різноманітних фінансових розрахунках таких як: планування погашення довготермінової заборгованості, реструктуризація заборгованості, оцінка та порівняння ефективності виробничих інвестицій тощо.

Нехай $\nu = (1+i)^{-1}$. Тоді перший член на початок ренти має вартість $R\nu$, другий – $R\nu^2$,..., останній – $R\nu^n$.

Сучасна вартість такої ренти складає:

$$A = R\nu + R\nu^2 + \ldots + R\nu^n. \tag{79}$$

За формулою суми геометричної прогресії маємо:

$$A = R\frac{1+(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n,i}\,. \tag{80}$$

Вираз

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{81}$$

прийнято називати *коефіцієнтом приведення постійної ренти* постнумерандо.

Для цього коефіцієнта мають місце такі властивості:

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i}, \\ \lim_{i\to\infty} a_{n,i} = 0, \\ \lim_{i\to 0} a_{n,i} = n. \end{gathered} \tag{82}$$

Наведемо основні співвідношення для визначення сучасної вартості постійної ренти постнумерандо.

Для *річної ренти із* m*-разовим нарахуванням відсотків в році* маємо:

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1} = Ra_{mn,\,j/m}\,. \tag{83}$$

Для p*-термінової ренти* (при $m=1$) маємо:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)} = Ra_{n,i}^{(p)}. \tag{84}$$

У випадку p*-термінової ренти* (при $p = m$) отримаємо:

$$A = \frac{R}{m}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}. \tag{85}$$

Для p*-термінової ренти (* $p \neq m$*)* маємо:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left((1+j/m)^{m/p}-1\right)} = Ra_{mn,j/m}^{(p)}. \tag{86}$$

Для *неперервного нарахування відсотків з силою росту* δ на платежі розміром R має місце таке співвідношення:

$$A = R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = Ra_{n,\delta}. \tag{87}$$

Якщо ж рента буде p*-терміновою*, то

$$A = R\frac{1-e^{-\delta n}}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)} = Ra_{n,\delta}^{(p)}. \tag{88}$$

Слід відзначити той факт, що S можна отримати з теперішньої величини A нарощенням за множником $(1+i)^n$, а дисконтуючи S за множником v отримуємо A. Таким чином справедливими будуть такі рівності:

$$A = S(1+i)^{-n}, \qquad a_{n,i} = s_{n,i}(1+i)^{-n}, \tag{89}$$

$$S = A(1+i)^{n}, \qquad s_{n,i} = a_{n,i}(1+i)^{n}. \tag{90}$$

Розглянемо ряд прикладів із практики використання фінансових рент.

Приклад 41.

Створюється фонд, внески у який надходять раз в кінці року впродовж 3-х років. Кожен внесок становить 100 000 грн. На зібрані кошти нараховується 36% річних. Знайти нарощену суму (розмір фонду на кінець утворення).

<u>*Розв’язання.*</u>

За формулою (70) при R = 100 000 грн., n = 3, i = 36% знаходимо:

$$S = 100000 \times \frac{(1+0.36)^3 - 1}{0.36} = 420960 \text{ грн.}$$

<u>*Приклад 42.*</u>

Інвестиції передбачають щорічне виділення по 100 000 грн. впродовж 4-х років. Діюча ринкова ставка довгострокових кредитів дорівнює 48% складних річних. Знайти теперішню вартість потоку платежів.

<u>*Розв’язання.*</u>

За формулою (60) знаходимо:

$$A = 100000 \times \frac{1-(1+0.36)^{-4}}{0.36} = 196580 \text{ грн.}$$

<u>*Приклад 43.*</u>

В умовах прикладу 41 на зібрані кошти відсотки нараховуються щоквартально. Знайти нарощену суму.

<u>*Розв’язання.*</u>

За умовою задачі маємо: $m = 4$, $p = 1$. За формулою (65) знаходимо:

$$S = 100000 \times \frac{\left(1+\frac{0.36}{4}\right)^{4\times3} - 1}{\left(1+\frac{0.36}{4}\right)^{4} - 1} = 100000 \times \frac{1.09^{12} - 1}{1.09^4 - 1} = 440414 \text{грн.}$$

Зауваження. Порівнюючи результат прикладу 41 з прикладом 43 бачимо, що більш часте нарахування відсотків збільшує нарощену суму.

6.4. Визначення деяких параметрів фінансових рент постнумерандо

Часто виникає задача, знаючи A або S, знайти один з параметрів ренти при відомих інших.

Якщо відомі A або S, термін ренти n та ставка i, то з виразів (72), (80) знаходимо член ренти R:

$$R = \frac{S}{S_{n,i}}, \qquad R = \frac{A}{a_{n,i}}. \tag{91}$$

Якщо S, A, R, i відомі, то термін ренти n знаходимо з формул (70), (80) як:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}, \qquad n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{Ai}{R}\right)}{\ln(1+i)}, \tag{92}$$

при чому друга формула в (92) має сенс за умови $Ai < R$.

<u>*Приклад 44.*</u>

Підприємство вирішило створити фонд у розмірі 1 500 000 грн. за 3 роки. Для забезпечення такого фінансового результату, можна розмістити 986 275 грн. під 15% складних річних на депозит у банку на три роки. Дійсно:

$S = 986275(1 + 0.15)^3 \approx 1500000$ грн.

Але одноразове вилучення такої суми із господарчого обороту недоцільне. Тому віддається перевага щорічним рентним платежам. За формулою (68) при i = 15%, n = 3 маємо:

$$R = \frac{986275}{a_{3;15}} = \frac{986275}{\frac{1-(1+0.15)^{-3}}{0.15}} = \frac{986275}{2.2832} \approx 431970 \text{ грн.}$$

Отже, щорічний внесок 431970 грн. сформує фонд розміром 1 500 000 грн. на кінець 3-го року.

<u>*Приклад 45.*</u>

Сума інвестицій становить 100 000 грн., віддача – 25 000 грн. щорічно. На борг нараховуються 20% річних. За який термін окупляться інвестиції?

<u>*Розв'язання.*</u>

Оскільки теперішня величина надходжень більша за інвестицій, то маємо їх окупність. Отже, згідно з виразом (92) знаходимо:

$$n=-\frac{\ln\left(1-\dfrac{100000\times 0.20}{25000}\right)}{\ln(1+0.20)}=\frac{-\ln 0.2}{\ln 1.2}=8.83\ \text{р.}$$

Інвестиції окупляться майже за 9 років. Якби взяли $R=20000$ грн., то інвестиції взагалі б не окупилися.

Розглянемо тепер задачу знаходження відсоткової ставки, яка доволі часто виникає при визначенні прибутковості операцій з періодичними виплатами.

Не зменшуючи загальності, як приклад, візьмемо річну ренту постнумерандо. Для того щоб знайти відсоткову ставку i необхідно розв'язати рівняння

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}, \tag{93}$$

або

$$A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{94}$$

відносно i за відомих значень S, R, n, A.

Нелінійні рівняння (93), (94) розв'язують ітераційними числовими методами.

Приклад 46.

За 7 років треба створити фонд 100 000 грн. Для цього щорічно виділяють 10 000. грн. Якою повинна бути відсоткова ставка, щоб такий фонд утворився?

Розв'язання.

Для розв'язання задачі використаємо вираз (93). Відсоткову ставку i шукатимемо з рівняння

$$100000=10000\times\frac{(1+i)^7-1}{i}.$$

Звідси знаходимо i = 11.709%.

Рівняння вигляду (93) та (94) розв'яжемо використовуючи наближені числові методи. Для знаходження наближеного розв'язку рівнянь, подамо їх у наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&(1+i)^n-\frac{S}{R}i-1=0,\\
&(1+i)^{-n}+\frac{A}{R}i-1=0.
\end{aligned} \tag{95}
$$

Кожне з рівнянь (95) є рівнянням вигляду:

$$f(i)=0\,, \tag{96}$$

де $f(i)$ – функція, що задається лівою частиною виразу з (95).

Нехай i_0 – деяке наближення до точного розв'язку (96). Тоді його уточнення i_1 за методом дотичних (Ньютона) має вигляд:

$$i_1=i_0-\frac{f(i_0)}{f'(i_0)}, \tag{97}$$

де $f'(i)$ – похідна функції $f(i)$.

Для рівнянь (95) формули (97) виглядають так:

$$i_1=i_0-\frac{(1+i_0)^n-\frac{S}{R}i_0-1}{n(1+i_0)^{n-1}-\frac{S}{R}}. \tag{98}$$

$$i_1=i_0-\frac{(1+i_0)^{-n}+\frac{A}{R}i_0-1}{-n(1+i_0)^{-n-1}+\frac{A}{R}}. \tag{99}$$

Наближення i_0 зазвичай вибирають із практичних міркувань.

<u>*Приклад 47.*</u>

За даними прикладу 46 знайдемо наближене значення i взявши за початкове наближення $i_0=12\%$. За формулою (98) маємо:

$$i_1=0{,}12-\frac{1.12^7-\frac{100000}{10000}\times0.12-1}{7\times1.12^6-\frac{100000}{10000}}=0.12-\frac{0.0106812}{3.816757}=0.1172.$$

Підставивши i_1 у праву частину виразу (98) отримаємо друге наближення – i_2 . Таким чином можна отримати розв'язок рівнянь (96) з будь-якою точністю.

6.5. Інші види постійних дискретних рент

Розглянемо тепер методику розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості рент пренумерандо, рент із виплатами всередині періодів та довічних рент.

6.5.1.Ренти пренумерандо

Під рентою пренумерандо розумітимемо ренту з виплатами на початку періодів. Зрозуміло, що кожен член такої ренти працює на один період більше, ніж в аналогічній ренті постнумерандо. Звідси слідує, що нарощену суму ренти пренумерандо, позначимо її як $\ddot{S}$, визначатимемо як:

$$\ddot{S} = S(1+i), \tag{100}$$

де S – нарощена сума ренти постнумерандо, i – відсоткова ставка. Коефіцієнт нарощення річної ренти пренумерандо становить:

$$\ddot{s}_{n,i} = s_{n,i}(1+i). \tag{101}$$

Аналогічно можна отримати формули для річної ренти із нарахуванням відсотків m разів у році:

$$\ddot{S} = S\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}. \tag{102}$$

Для p-термінових ренти, в яких $m=1$ та $m \neq p$, відповідно маємо:

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \ \ddot{S} = S\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m/p}. \tag{103}$$

Залежність між сучасними вартостями та коефіцієнтами приведення рент пост- та пренумерандо є аналогічною, тобто

$$\ddot{A} = A(1+i), \ \ddot{a}_{n,i} = a_{n,i}(1+i). \quad (104)$$

6.5.2. Ренти з виплатами всередині періодів

Доволі часто на практиці надходження від виробничих інвестицій можуть розподілятися більш-менш рівномірно. У таких випадках для опису потоку виплат використання рент пренумерандо чи постнумерандо може дати некоректний результат. Для зменшення похибки розрахунків рекомендується суми надходжень за певний період відносити до середини періоду. Нарощену суму та сучасну вартість таких рент можна знайти помноживши відповідні узагальнюючі характеристики ренти постнумерандо на множник нарощення за половину періоду. Так, наприклад, для сучасних вартостей мають місце такі співвідношення:

$$A_{1/2} = A(1+i)^{1/2} \qquad за\,умови\ p=1, m=1,$$

$$A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p} \qquad за\,умови\ p>1,\ m=1,$$

$$A_{1/2} = A\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m/2} \qquad за\,умови\ p=1,\ m>1,$$

$$A_{1/2} = A\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m/2p} \qquad за\,умови\ p>1,\ m>1.$$

Аналогічним чином можна вивести співвідношення і для нарощених сум рент з виплатами всередині періодів.

Приклад 48.

Визначити множник, необхідний для розрахунку сучасної вартості ренти з виплатами всередині періодів, якщо рента постнумерандо характеризується такими параметрами: $p=12$, $m=1$, $i=10\%$.

Розв'язання.

Шуканий множник становить $(1+i)^{1/2p} = 1.1^{1/2\times 12} = 1.00398$

6.5.3. Довічна рента

Довічна (вічна) рента – це послідовність платежів з необмеженою кількістю членів.

Прикладами довічної ренти є виплати за облігаційними позиками, виплата пенсій і страхових внесків.

Зрозуміло, що нарощена сума довічної ренти дорівнює нескінченності. Теперішня величина довічної ренти, позначають її як A_∞, становить:

$$A_\infty = \frac{R}{i}. \qquad (105)$$

Отримана формула має значення при заміні ренти або її викупі, при оцінці акцій і облігацій.

З виразу (105) визначаємо:

$$R = A_\infty i. \qquad (106)$$

Тобто член довічної ренти дорівнює відсотку за рентою від її теперішньої (зведеної) величини.

Для інших видів довічної ренти мають місце такі співвідношення:

$$A_\infty = \frac{R}{p\left((1+i)^{1/p}-1\right)}, \quad при\ p > 1,\ m = 1,$$

$$A_\infty = \frac{R}{j}, \quad при\ p = m > 1.$$

Зауваження. У випадку використання достатньо великих термінів ренти з високою відсотковою ставкою для обчислення її сучасної вартості, із незначною втратою точності, можна використовувати формулу (105). Наприклад, для звичайної ренти постнумерандо за умов $n = 100$, $R = 1$ та $i = 20\%$ точне значення $A = 4.999999$, а обчислене за формулою (105) $A_\infty = 5$.

<u>*Приклад 49.*</u>

Акція приносить сталий прибуток 0.5 грн. щорічно. Яка її теперішня вартість, якщо діюча на ринку кредитна ставка складає 20% річних складних?

<u>*Розв'язання.*</u>

За формулою (105) знаходимо: $A = 0.5/0.2 = 2.5$ грн.

ТЕМА 7.
ПЛАНУВАННЯ ПОГАШЕННЯ ЗАБОРГОВАННОСТІ

Розроблення плану погашення заборгованості, що відповідає умовам угоди, передбачає складання графіку періодичних виплат боржника. При плануванні погашення боргу визначають періодичні виплати, які називають *терміновими виплатами.*

Термінова виплата складається з суми погашення основного боргу і відсоткових платежів. Зазвичай, умови кредитування містять такі складові: термін позики, тривалість пільгового періоду, рівень відсоткової ставки, метод погашення відсотків і основної суми.

За методами погашення боргу всі позики поділяють на такі види:

– позика без обов’язкового погашення. В такому випадку боржник сплачує лише відсотки, не повертаючи позиченої суми. Прикладами такої позики є випуск акцій, облігацій. Розрахунок проводиться за формулами довічної ренти;

– позика з обов’язковим погашенням в один термін. Боржник повертає позичену суму у домовлений термін і сплачує відсотки;

– позика з обов’язковим погашенням у декілька термінів. Боржник повертає позичену суму частинами і сплачує відсотки.

Для боржника і кредитора на кожний момент виплат за боргом важливо знати залишок, який ще потрібно сплатити, і відсотки, нараховані на нього. Для цього власне і потрібно складати *план погашення заборгованості*.

Розглянемо планування погашення заборгованості у випадку погашення в декілька термінів. При цьому існує три способи погашення: рівними виплатами основного боргу, рівними терміновими виплатами, змінними терміновими виплатами.

Для планування погашення заборгованості будемо використовувати наступні позначення: D – величина заборгованості, Y – термінова виплата, I – проценти за позикою, R – витрати на погашення основної частини боргу, g – відсоткова ставка за позикою, n – тривалість позики, L –

тривалість пільгового періоду. За означенням витрати на обслуговування боргу (термінова виплата) становлять $Y = I + R$.

7.1. Створення фонду погашення заборгованості

Якщо за умовами контракту боржник зобов'язаний повернути суму боргу вкінці терміну у вигляді разової виплати, то для цього необхідно створити так званий фонд погашення заборгованості. *Фонд погашення заборгованості* – це спеціальний рахунок в банку, який формується шляхом послідовних внесків боржника, на які нараховуються відсотки. Самі внески у фонд можуть бути як постійними, так і змінними у часі.

Розглянемо обидва випадки надходжень внесків у фонд детальніше.

7.1.1. Постійні внески у фонд

Як було сказано раніше, погашення заборгованості, у тому числі й у вигляді створення фонду погашення заборгованості, полягає у визначенні термінових виплат.

Нехай фонд формується шляхом надходження регулярних щорічних внесків R, на які нараховуються складні відсотки за ставкою $i\%$ річних. Крім того, відбувається виплата відсотків за борг за ставкою $g\%$. В такому випадку термінова виплата становитиме:

$$Y = Dg + R. \qquad (107)$$

Припустимо, що фонд потрібно сформувати за N років. У такому випадку внески у фонд утворюють постійну ренту. Нехай мова йтиме про ренту постнумерандо. Тоді

$$R = \frac{D}{s_{N,i}}, \qquad (108)$$

де $s_{N,i}$ – коефіцієнт нарощення постійної ренти з терміном N. Отже, термінову виплату тепер можна записати як:

$$Y = Dg + \frac{D}{s_{N,i}}. \qquad (109)$$

Зауважимо, що якщо контрактом передбачено капіталізацію відсотків, то термінову виплату шукатимемо так:

$$Y = D\frac{(1+g)^N}{s_{N,i}}. \qquad (110)$$

Розглянемо приклад.

Приклад 50.

Клієнт взяв позику у 100 000 грн. терміном на п'ять років під 20% річних. Для погашення даної заборгованості створюється відповідний фонд, на вкладені у нього кошти нараховуються відсотки за ставкою 22% річних. Визначити величину термінової виплати, якщо фонд формується протягом п'яти років, а внески у нього надходять вкінці кожного року однаковими сумами.

Розв'язання:

Згідно умов задачі маємо:

$D = 100000$, $N = n = 5$, $g = 20\% = 0.2$, $i = 22\% = 0.22$.

Знаходимо, що $s_{5,22} = 7.739582$, а за формулою (109) маємо:

$$Y = 100000 \times 0.2 + \frac{100000}{7.7395826} = 20000 + 12920.59 = 32920.59 \text{ грн.}$$

Якщо б угодою передбачалося приєднання відсотків до основної суми боргу, то на основі (110) отримаємо:

$$Y = 100000 \times \frac{(1+0.2)^5}{7.7395826} = 32150.57 \text{ грн.}$$

Зауваження. Даний спосіб погашення заборгованості буде вигідним для боржника лише у випадку, коли $i > g$. Якщо відсоткові ставки будуть рівними між собою, то вигода від створення погашувального фонду пропадає, а фінансові результати для боржника стають такими, як і у випадку погашення боргу частинами.

Для визначення накопиченої у фонді суми за t років можна скористатись результатами для нарощення постійних рент, або використати рекурентне співвідношення

$$S_{t+1} = S_t(1+i) + R. \qquad (111)$$

Приклад 51.

Продовжимо попередній приклад, взявши до уваги, що термінові виплати включають проценти, а інші умови зберігаються. Нехай внески у фонд надходять тільки останні чотири роки.

Розв'язання:

Згідно умов задачі отримаємо:

$$R = \frac{100000}{s_{4,22}} = \frac{100000}{5.524248} = 1810201 \text{грн.}$$

Подамо план формування такого фонду у вигляді таблиці.

Рік	***Проценти***	***Внески***	***Витрати за позикою***	***Накопичення на кінець терміну***
1	20 000	–	20 000	–
2	20 000	18 102	38 102	32 871
3	20 000	18 102	38 102	26 943
4	20 000	18 102	38 102	22 084
5	20 000	18 102	38 102	18 102
				100 000

7.1.2. Змінні внески у фонд

В залежності від конкретних умов фінансових угод для позичальника може бути кращим варіант формування фонду погашення заборгованості у вигляді змінних внесків. Розглянемо випадок, коли внески у фонд утворюють арифметичну прогресію із різницею a і першим членом R. В такому випадку матимемо, що величина термінової виплати становитиме:

$$Y_t = Dg + R_t, \tag{112}$$

де $R_t = R + a(t-1)$, ($t = 1,\ldots,N$).

Перший член прогресії розраховують за формулою:

$$R = \frac{1}{s_{N,i}}\left(D - a\frac{(1+i)^N - (1+Ni)}{i^2}\right). \tag{113}$$

Приклад 52.

Нехай борг на момент його погашення становить 1 000 000 грн. Впродовж п'яти років формується фонд, внески в який надходять у вигляді ренти постнумерандо. Кожного разу внески зростають на 50 000 грн. і на них нараховують відсотки за ставкою 10% річних. Показати динаміку витрат за умови, що кредитору сплачується 9.5%.

Розв'язання:

Для початку розраховуємо коефіцієнт нарощення:

$$s_{5,10} = 6.1051.$$

Далі, на основі виразу (113), маємо:

$$R = \frac{1}{6.1051}\left(1000000 - 50000\frac{1.1^5 - (1+5\times 0.1)}{0.1^2}\right) = 73290.97 \text{ грн.}$$

Використовуючи рекурентну розрахункову формулу

$$S_{t+1} = S_t(1+i) + R_t,$$

де $R_t = 73290.97 + 50000(t-1)$, $t = 1, \ldots, 5$, можемо побудувати відповідний план погашення заборгованості.

Рік	***Проценти***	***Внески***	***Витрати за позикою***	***Накопичення на кінець року***
1	95 000	73 290.97	168 290.97	73 290.97
2	95 000	123 290.97	218 290.97	203 911.04
3	95 000	173 290.97	268 290.97	397 593.11
4	95 000	223 290.97	318 290.97	660 643.39
5	95 000	273 290.97	368 290.97	999 998.7

7.2. Амортизація заборгованості (погашення заборгованості в розстрочку)

Амортизацію заборгованості зазвичай використовують у випадку значних сум заборгованості. Її можна здійснювати такими способами:

– погашення основної частини заборгованості рівними внесками;

– погашення усієї заборгованості однаковими або змінними внесками.

7.2.1. Погашення основного боргу рівними терміновими виплатами

Нехай заборгованість у розмірі D виплачується впродовж n років. Тоді на її погашення щорічно витрачається сума

$$d = \frac{D}{n}. \tag{114}$$

За таких умов величина заборгованості постійно зменшується: D, $D-d$, $D-2d$ і т. д. Разом із тим зменшуються відсотки, які виплачує боржник, бо вони нараховуються на залишок боргу.

Припустимо, що відсотки виплачуються за ставкою g одноразово вкінці року. Таким чином, за перший рік і усі наступні вони становитимуть Dg, $(D-d)g$, $(D-2d)g$ і т. д. Легко бачити, що такий ряд виплат утворює спадну арифметичну прогресію з першим членом Dg та різницею $-dg$.

Отже, термінову виплату на кінець року t будемо шукати за співвідношенням

$$Y_t = D_{t-1}g + d,\ t = 1,\dots,n, \tag{115}$$

де D_t – залишок боргу на кінець року t, а $Y_1 = Dg + d$.

Залишок боргу можна визначати послідовно за таким рекурентним співвідношенням:

$$D_t = D_{t-1}\frac{n-1}{n}. \tag{116}$$

Припустимо тепер, що борг виплачується p разів у році постнумерандо і з такою ж періодичністю виплачуються відсотки за ставкою g/p. У такому випадку термінова виплата становитиме:

$$Y_t = \frac{D_{t-1}g}{p} + \frac{D_0}{pn},\ t = 1,\dots,pn, \tag{117}$$

а залишок заборгованості на кінець року t:

$$D_t = D_{t-1}\frac{pn-1}{pn}. \tag{118}$$

<u>*Приклад 53.*</u>

Заборгованість у 1 000 000 грн. потрібно виплатити впродовж п'яти років однаковими щорічними виплатами. Побудувати план погашення заборгованості за умови, що за позику виплачується 10% річних, а виплати постнумерандо.

<u>*Розв'язання*</u>

Величина, що йде на погашення основного боргу $d = \frac{D}{n} = \frac{1000000}{5} = 200000$грн. щорічно. Щорічні відсоткові платежі складають $Dg = 1000000 \times 0.1 = 100000$грн., $(D - d)g = (1000000 - 200000) \times 0.1 = 80000$грн., і т. д.

Таким чином план погашення заборгованості можна подати у вигляді наступної таблиці.

Рік	*Залишок боргу на початок року*	*Витрати за позикою*	*Виплати боргу*	*Проценти*
1	1 000 000	300 000	200 000	100 000
2	800 000	280 000	200 000	80 000
3	600 000	260 000	200 000	60 000
4	400 000	240 000	200 000	40 000
5	200 000	220 000	200 000	20 000

7.2.2. Погашення всього боргу однаковими терміновими виплатами

У попередньому методі погашення заборгованості позитивним моментом є простота розрахунків. Однак, як ми бачимо, термінові виплати на початку терміну є більшими, аніж вкінці, що досить часто є невигідним для боржника.

У методі, який розглядатимемо нижче, витрати на обслуговування боргу будуть постійними впродовж усього впродовж усього терміну погашення, при чому частина з них йтиме на погашення процентів, а частина – на погашення основного боргу. Таким чином маємо, що

$$Y = D_t g + R_t, \tag{119}$$

де D_t – залишок боргу на початок періоду t, R_t – виплата основного боргу в періоді t. Нехай задано термін позики n.

Тоді $D_1 = D$, а $D = Ya_{n,g}$ і за формулою для постійної ренти отримуємо:

$$Y = \frac{D}{a_{n,g}}. \qquad (120)$$

Із врахуванням формули (119) послідовно знаходимо:

$$R_1 = Y - Dg = Y - Yga_{n,g} = Y\nu^n, \quad \nu = \frac{1}{1+g};$$

$$R_2 = Y\nu^{n-1}, \quad R_3 = Y\nu^{n-2}, \dots, \ R_t = Y\nu^{n-t+1}, \ R_n = Y\nu. \qquad (121)$$

Приклад 54.

Заборгованість у 200 000 грн. потрібно виплатити за чотири роки рівними терміновими виплатами. Скласти план погашення заборгованості за умови, що за позику виплачується 10% річних, а виплати відбуваються постнумерандо.

Розв'язання.

Згідно умов задачі маємо:

D = 200 000 грн., n = 4 р., g = 10%.

За формулою (120)

$$Y = \frac{200000}{a_{4,10}} = \frac{200000}{\frac{1-(1+0.1)^{-4}}{0.1}} = \frac{200000}{3.1698654} = 63094.16 \text{ грн.}$$

На основі (121) отримуємо:

$$R_1 = \frac{63094.16}{1.1^4} = 43094.16 \text{ грн.,}$$

$$R_2 = \frac{63094.16}{1.1^3} = 47403.58 \text{ грн.,}$$

$$R_3 = \frac{63094.16}{1.1^2} = 52143.93 \text{ грн.,}$$

$$R_4 = \frac{63094.16}{1.1} = 57358.33 \text{ грн.}$$

План погашення заборгованості подано нижче у таблиці.

Рік	*Залишок боргу на початок року*	*Термінові виплати*	*Проценти*	*Погашення основного боргу*
1	200 000	63 094.16	20 000.00	43 094.15
2	156 905.84	63 094.16	15 690.58	47 403.58
3	109 502.26	63 094.16	10 950.23	52 143.93
4	57 358.33	63 094.16	5 735.83	57 358.33
5	0	0	0	200 000

7.3. Пільгові позики та кредити

У деяких випадках довготермінові позики та кредити можуть виплачуватися на пільгових для боржника умовах. Найбільш поширеними такими пільгами є низька (у порівнянні з ринковою) відсоткова ставка та (або) пільговий період.

Для аналізу пільгових позик та кредитів використовують так званий *грант-елемент,* який визначає умовну втрату кредитора у зв’язку із використанням нижчої за ринкову відсоткової ставки.

Розраховують *абсолютний грант-елемент* W (різниця між номінальною вартістю позики та сучасною вартістю погашувальних платежів, розрахованою за ринковою відсотковою ставкою) так:

$$W = D - G, \tag{122}$$

де D – розмір позики, G – сучасна вартість погашувальних платежів.

Поряд із абсолютним грант-елементом використовують також *відносний грант-елемент* w, який визначає відношення абсолютного грант-елементу до величини заборгованості, тобто

$$w = \frac{W}{D} = 1 - \frac{G}{D} \tag{123}$$

Припустимо, що заборгованість та відсотки за нею виплачуються як постійні термінові виплати. Нехай позика видається на n років із пільговою відсотковою ставкою g. У той же час ринкова ставка відсотка становить i. Якщо для погашення позики не вводиться пільговий період, то маємо, що термінова виплата становитиме

$$Y = \frac{D}{a_{n,g}}. \tag{124}$$

Оскільки сучасна вартість усіх виплат боржника за ринковою відсотковою ставкою становить $Ya_{n,i}$, то в кінцевому результаті отримаємо:

$$W = D - Ya_{n,i} = D - \frac{D}{a_{n,g}} a_{n,i} = D\left(1 - \frac{a_{n,i}}{a_{n,g}}\right), \tag{125}$$

$$w = 1 - \frac{a_{n,i}}{a_{n,g}}, \tag{126}$$

де $a_{n,i}, a_{n,g}$ – коефіцієнти приведення постійних річних рент постнумерандо для відповідних відсоткових ставок $i < g$.

Приклад 55.

Нехай кредит у сумі 1 000 000грн. видано під 3.8% річних на 10 років. В цей же час ринкова відсоткова ставка становить 8% річних. Визначити умовну втрату для кредитора.

Розв'язання.

$$w = 1 - \frac{a_{10,8}}{a_{10,3.8}} = 1 - 6.71008 \times \frac{0.038}{1 - 1.038^{-10}} = 0.1809.$$

$$W = wD = 0.1809 \times 1000000 = 1\,809000 \text{ грн.}$$

Розглянемо тепер випадок пільгової позики із пільговим періодом. Якщо впродовж пільгового періоду позичальник виплачує проценти, то сучасна вартість витрат за боргом складатиметься з двох частин – сучасної вартості виплат процентів у пільговому періоді та термінових виплат впродовж після пільгового періоду.

Нехай тривалість пільгового періоду становить L. Тоді маємо:

$$G = Dg \times a_{L,i} + Ya_{n-L,i} \times \nu^{L}, \tag{127}$$

де $n-L$ – тривалість періоду погашення заборгованості, v^L – дисконтний множник за ставкою i.

Зробивши нескладні перетворення отримаємо:

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L,i}}{a_{n-L,g}} v^L + g a_{L,i} \right). \tag{128}$$

Розглянемо ще один випадок пільгової позики, який буде ще більш вигіднішим для позичальника. Нехай у пільговому періоді відсотки нараховуються, але не виплачуються, а приєднуються до основного боргу, що сплачується впродовж $n-L$ років. У такому випадку термінові виплати та їх сучасна вартість становлять відповідно:

$$Y = \frac{D(1+g)^L}{a_{n-L,g}} \text{ та } G = Y a_{n-L,i}. \tag{129}$$

Таким чином

$$w = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \frac{a_{n-L,i}}{a_{n-L,g}} \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^L. \tag{130}$$

Окремо розглянемо випадок *іпотеки*. Іпотекою прийнято називати такий вид позики при якому власник нерухомості отримує кредит під заставу свого майна. У випадку неповернення позики в обумовлений термін майно стає власністю кредитора. Розмір позики не перевищує 70-75% вартості майна,що заставляється.

Традиційна іпотека виплачується рівними щомісячними терміновими виплатами.

Для розрахунку величини щомісячної виплати використаємо формулу (124), перетворивши її до наступного вигляду:

$$Y = \frac{D \frac{g}{m} \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{mn}}{\left(1 + \frac{g}{m}\right)^{mn} - 1}, \tag{131}$$

де D – сума боргу, Y – термінова сплата, $p = m$ – кількість періодів нарахування відсотків у році і кількість виплат у році, n – кількість років кредиту.

Розрахунок суми основного боргу, що залишився у t-ому періоді проведемо за формулою:

$$S_t = D\frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn} - \left(1+\frac{g}{m}\right)^{t-1}}{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{mn} - 1}. \qquad (132)$$

Приклад 56.

За даними прикладу 54 погашення і виплата відсотків відбувається щомісячно. Знайти термінову виплату і величину несплаченого основного боргу на початок 3-го року погашення.

Розв'язання.

У формулах (131), (132) приймаємо:

$m = 12$, $g = 0.1$, $n = 4$, $D = 200000$.

Тоді:

$$Y = \frac{200000\times\frac{0.1}{12}\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12\times 4}}{\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12\times 4} - 1} = 5072.54 \text{ грн.},$$

$$t-1 = 12\times 2 - 1 = 23, \quad m\times n = 48.$$

$$S_{24} = \frac{200000\left(\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{48} - \left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{23}\right)}{\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{48} - 1} = 114047.82 \text{ грн.}$$

Окрім традиційної іпотеки застосовують позики зі змінною відсотковою ставкою, а також позики зі сталим збільшенням витрат на обслуговування боргу.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Визначити суму накопиченого за 3 роки боргу, якщо позика становила 70 000 грн., проценти прості і нараховуються за ставкою 20% річних.
2. Банк видав позику розміром 100 000 грн. з 30.01 до 30.11 включно під 5% річних. Рік високосний. Знайти розмір погашувального платежу, обчислюючи точну кількість днів позики.
3. Позика в розмірі 100 000 грн. видана 20.01.2011р. до 05.10.2011р. під 18% річних. Яку суму (з точністю до гривні) повинен повернути боржник в кінці терміну, якщо відсотки прості і нараховуються за формулою 365/365?
4. Надана позика 25 000 грн. В перше півріччя простий відсоток складає 30%. В другому півріччі – 35%. Термін позики – рік. Знайти розмір боргу на кінець угоди.
5. Комерційна установа 1 березня видала клієнту позику у розмірі 10 000 грн. під 15% річних. Обчислити суму (з точністю до гривні), яку має повернути боржник в останній день цього ж року, враховуючи що відсотки звичайні з точною кількістю днів позики.
6. Позика надана на 100 днів під 45% річних простих. Вкінці терміну боржник сплатить 15 000 грн. Рік високосний. Який кредит отримав боржник?
7. Визначити початковий розмір позики, виданої терміном на 4 роки під 20% простих річних, якщо боржник вкінці терміну заплатив кредитору 12 600 грн.
8. У фінансовій угоді передбачено такий порядок нарахування процентів: перший рік – 15%, у кожному наступному півріччі ставка підвищується на 1%. Визначити (з точністю до 0.01) множник нарощення за три роки.
9. Контрактом передбачено такий порядок нарахування процентів: перший рік – 17%, у кожному наступному півріччі ставка підвищується на 1%. Визначити множник нарощення за два з половиною роки.
10. Умови угоди передбачають, що множник нарощення за три роки становитиме 1.555. Визначити відсоткові ставки за два проміжні півріччя, якщо вони є рівними між собою, а за перший та останній роки дії угоди ставки відповідно становлять: 18% та 19% річних.

11. Для придбання побутової техніки на суму 10 000 грн. покупець оформив споживчий кредит терміном на три роки, відсоткова ставка – 15% річних. Якими будуть щомісячні виплати?
12. Власником побутової техніки, придбаної у кредит, було виплачено 13 000 грн. Визначити на яку суму був оформлений кредит, якщо відсоткова ставка становила 15% річних, а виплати відбувалися щоквартально упродовж двох років.
13. Кредит 25 000 грн. видано на рік під просту облікову ставку 19% річних. Знайти суму отриманих грошей.
14. Вексель номіналом 100 000 грн. облікований у банку за 100 днів до терміну погашення за обліковою ставкою 20%. Знайти суму, отриману векселетримачем та дисконт, отриманий банком.
15. Вексель, виданий на 15 000 грн. з сплатою 17.11. Власник векселя облікував його у банку 23.09. по обліковій ставці 15%. Знайти отриману суму.
16. 10 000 грн. видається на 96 днів під просту облікову ставку 20%. Знайти суму, що треба сплатити боржнику.
17. Борг 10 000 грн. зріс до 12 000 грн. На суму боргу нараховувались прості відсотки – 40%. Рік не високосний. Знайти тривалість позики у днях.
18. Початкова сума боргу 10 000 грн. За 90 днів передбачається погашення у розмірі 11 000 грн. Визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді простої відсоткової та облікової ставок.
19. Відсоткова складна ставка рівна 35%. Термін позики 4 роки. Початкова сума 1 000 грн. Знайти нарощену суму.
20. Яке значення матиме борг у 100 000 грн. через 5 років за складним ростом і ставці 20% річних?
21. Визначити початкову величину заборгованості, якщо за два роки вона зросла до 242000грн., відсотки нараховувалися складні за ставкою 10% річних?
22. Визначити кількість років збільшення капіталу у 5 разів для складної ставки i =25%.
23. Термін позики становить 4 років. Домовлена складна відсоткова ставка становить 12% річних за перші два роки та 13% за два останні. Визначити множник нарощення.

24. Кредит розміром 1 000 000 грн. видано на два роки під 16.5% складних річних. Визначити суму боргу вкінці року за загальним методом.
25. Яким буде борг через 15 місяців, якщо на початку періоду він становив 100 000 грн. відсотки складні, ставка 20% річних, нарахування щоквартальні. Формула нарахування відсотків – звичайна.
26. Яким буде борг через 16 місяців, якщо на початку періоду він становив 100 000 грн. відсотки складні, ставка 20% річних, нарахування щоквартальні. Формула нарахування відсотків – змішана.
27. Кредит розміром 3 000 000 грн. видано на два роки під 12% складних річних. Вказати суму боргу вкінці терміну, якщо відсотки нараховувалися щоквартально.
28. Визначити розмір боргу через два роки, якщо на початок періоду він становив 1 000 000 грн. Відсотки нараховувались два рази на рік за складною ставкою 16% річних.
29. Номінальна ставка j становить 36% річних. Відбулося щомісячне нарахування відсотків впродовж 2-х років. Знайти множник нарощення.
30. Якою повинна бути ефективна ставка, якщо номінальна ставка становить 25% річних, нарахування відсотків відбувається щомісячно?
31. Якою повинна бути номінальна ставка, якщо ефективна ставка становить 21%, а кількість періодів нарахувань – 2?
32. Визначити номінальну ставку $j^{(4)}$, що беззбитково може замінити ставку $j^{(12)}$=25%.
33. Визначити теперішню величину 1 500 грн., які будуть сплачені через 3 роки при ставці дисконтування 25% складних річних.
34. Боргове зобов'язання розміром 5 000 000 грн., термін виплати якого настає через 5 років, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15% річних. Визначити величину дисконту.
35. Ощадний сертифікат куплений за 100 000 грн. Сума його викупу становить 169 000 грн., термін – 2роки. Який рівень прибутковості інвестицій у вигляді річної ставки складних відсотків?

36. Сума, за якою нараховуються неперервні відсотки становить 1 000 000 грн., сила росту – 10%. Визначити нарощену за 20 років суму боргу.
37. Сума, за якою нараховуються неперервні відсотки становить 2000000грн., сила росту – 10%, термін нарахування становить 10 років. Визначити нарощену суму.
38. Боргове зобов’язання розміром 1 000 000 грн., термін виплати якого настає через 5 років продано з дисконтом із силою росту 20%. Знайти дисконт.
39. Маємо зобов’язання сплатити S_1=4 000 грн. через 9 місяців і S_2=3 500 грн. через 5 місяців. Знайти теперішні значення цих сум P_1, P_2 за ставкою 25% простих річних.
40. Знайти суму дисконту від продажу фінансового інструменту на суму 2 000 грн. з терміном погашення 2 роки. Складна облікова ставка 22% річних.
41. В умовах попереднього прикладу дисконтування відбувається щоквартально. Знайти дисконт та ефективну облікову ставку.
42. Початкова сума боргу 10 000 грн., термін погашення 3 роки. Кредитор застосував складну облікову ставку 19%. Знайти нарощену суму.
43. За який термін у роках сума 1 000 грн. зросте до 1 200 грн., якщо на неї нараховуються складні річні відсотки 30% раз на рік? Щоквартально?
44. Визначити прибутковість купівлі фінансового інструменту вартістю 20 000 грн., якщо після 2-х років по ньому отримується 22 000 грн.
45. При обліку векселя, виписаного на 3 роки, власник бажає отримати 90% його суми. Яка складна облікова ставка його задовольнить?
46. Знайти просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій d =20% при терміні сплати по векселю 100 днів. База року K =365 днів.
47. Операція обліку приносить 25% простих відсотків доходу на рік. Термін позики 96 днів, база року 365 днів. Знайти просту облікову ставку.
48. Позика, видана під 30% складних річних. Знайти еквівалентну просту ставку при терміні 3 роки.

49. Векселі з термінами 05.03. – S_1 =1 200 грн., 12.05. – S_2 =25 000 грн. замінено одним з продовженням до 01.08. Облікова ставка банку 19%. Визначити суму консолідованого векселю.

50. Платежі S_1 = 25 000 грн., S_2 =45 000 грн. з термінами 08.03. і 01.09. об'єднані в один з терміном сплати 01.06 за ставкою i =35% простих річних. Знайти суму консолідованого платежу. База року K =365 днів.

51. Створюється фонд, внески вносяться протягом 10 років раз наприкінці року по 100 000 грн. На зібрані гроші нараховуються відсотки за ставкою 10% річних. Знайти розмір фонду наприкінці терміну.

52. В банк щороку вносяться 1 500 грн. Річна ставка 4%. Визначити суму вкладів через 20 років. Нарахування відсотків раз на рік.

53. Яка сума забезпечить періодичні виплати у розмірі 15000 грн. протягом 8-ми років, якщо на ці вклади будуть нараховуватись відсотки за ставкою 12% і виплати проводитимуться наприкінці року?

54. Робітник перераховує у банк 100 грн. щомісячно. На цю суму щомісячно нараховується 12% річних. Яка сума нагромадиться на рахунку робітника за 4 роки?

55. Продається фінансове зобов'язання сплачувати щорічно в кінці року на протязі 5-ти років по 2 500 грн. Яка теперішня вартість цього зобов'язання, якщо діюча ринкова ставка за довгостроковими кредитами –30% річних?

56. За який термін окупляться інвестиції 10 000 грн., якщо планується щорічна віддача по 3 500 грн., а діюча ринкова кредитна ставка – 30% річних?

57. Інвестор пропонує підприємцю інвестиції 100 000 грн. під 35% річних з окупністю 5 років. Яким повинен бути сталий щорічний дохід, щоб виконати вимоги інвестора?

58. Дається позика 120 000 грн. на 5 років під 20% річних. Погашення рівними терміновими виплатами вкінці року. Скласти план погашення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башарин Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – М.: Инфра-М, 1997 – 160с.
2. Количественные методы финансового анализа / Под ред. С. Дж. Брауна и М. П. Крицмена: Пер. С англ. – М.: Инфра-М, 1966. – 336с.
3. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е. Кочович. М.: Финансы и статистика, 1994. – 272с.
4. Лапішко М. Л. Основи фінансово-статистичного аналізу економічних процесів / М. Л. Лапішко. – Львів: Світ, 1995. – 328с.
5. Мелкумов Я. С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям / Я. С. Мелкумов. – М.: Инфра-М, 1996. – 336с.
6. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учеб. / Е. М. Четыркин. – М.: Дело, 2000. – 400с.
7. Четыркин Е. М., Васильева Н. Е. Финансово-экономические расчеты. Справочное пособие / Е. М. Четыркин., Н. Е. Васильева. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 302с.

ЗМІСТ

ВСТУП 3
ТЕМА 1. ПРОСТІ ВІДСОТКИ 7
1.1. Нарощення за простими відсотковими ставками 7
1.1.1. Методи нарахування простих відсотків 8
1.2. Нарахування простих відсотків на змінні в часі суми депозиту 11
1.3. Нарахування відсотків у користувацькому кредиті . 13
1.4. Дисконтування та облік за простими відсотковими ставками 14
1.4.1. Математичне дисконтування 14
1.4.2. Банківський облік 15
ТЕМА 2. НАРОЩЕННЯ ТА ДИСКОНТУВАННЯ ЗА СКЛАДНИМИ ВІДСОТКОВИМИ СТАВКАМИ 17
2.1. Нарощення за складними відсотковими ставками ... 17
2.1.1. Номінальна ставка відсотка 19
2.1.2. Ефективна відсоткова ставка 20
2.2. Математичне дисконтування та облік за складними ставками відсотка 23
2.2.1. Математичне дисконтування за складною відсотковою ставкою 23
2.2.2. Облік за складною обліковою ставкою 24
ТЕМА 3. ВИЗНАЧЕННЯ ІНШИХ ПАРАМЕТРІВ УГОД ІЗ ВІДСОТКОВИМИ СТАВКАМИ 27
3.1. Визначення деяких параметрів фінансових угод з простими ставками 27
3.2. Визначення деяких параметрів фінансових угод з складними ставками 29

ТЕМА 4. НЕПЕРЕРВНІ ВІДСОТКИ. НЕПЕРЕРВНЕ НАРОЩЕННЯ ТА ДИСКОНТУВАННЯ 31
4.1. Постійна сила росту.. 31
4.2. Змінна сила росту 32
ТЕМА 5. ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ВІДСОТКОВИХ СТАВОК ТА ЗМІНА УМОВ ФІНАНСОВИХ УГОД.......... 35
5.1. Еквівалентність відсоткових ставок 35
5.1.1. Еквівалентність простої ставки відсотків та простої облікової ставки................................ 35
5.1.2. Еквівалентність простої і складної відсоткових ставок.. 37
5.1.3. Еквівалентність простої та номінальної відсоткових ставок... 37
5.1.4. Еквівалентність простої облікової і складної ставки відсотка 38
5.1.5. Еквівалентність складної облікової та відсоткової ставок 38
5.1.6. Еквівалентність складної облікової та номінальної ставок 39
5.2. Фінансова еквівалентність зобов'язань та конверсія платежів. Консолідація виплат................................ 39
5.2.1. Визначення розміру консолідованого платежу 40
*5.2.2. Визначення терміну консолідованого платежу*41
ТЕМА 6. ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ І ФІНАНСОВІ РЕНТИ .. 45
6.1. Узагальнюючі характеристики потоків платежів та фінансових рент 45
6.2. Річна рента постнумерандо 46
6.2.1. Річна рента із нарахуванням відсотків m разів в році.. 47

6.2.2. P-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($m = 1$) 48
6.2.3. P-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($p = m$) 48
6.2.4. P-термінова рента із нарахуванням відсотків m разів в році ($p \neq m$) 49
6.2.5. Рента із неперервним нарахуванням відсотків 49
6.3. Сучасна вартість постійної ренти постнумерандо ... 49
6.4. Визначення деяких параметрів фінансових рент постнумерандо 52
6.5. Інші види постійних дискретних рент 56
6.5.1.Ренти пренумерандо 56
6.5.2. Ренти з виплатами всередині періодів 57
6.5.3. Довічна рента 58
ТЕМА 7. ПЛАНУВАННЯ ПОГАШЕННЯ ЗАБОРГОВАННОСТІ 59
7.1. Створення фонду погашення заборгованості 60
7.1.1. Постійні внески у фонд 60
7.1.2. Змінні внески у фонд 62
7.2. Амортизація заборгованості (погашення заборгованості в розстрочку) 63
7.2.1. Погашення основного боргу рівними терміновими виплатами 64
7.2.2. Погашення всього боргу однаковими терміновими виплатами 65
7.3. Пільгові позики та кредити 67
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.................... 71
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 76

Навчальне видання

МЕЛЬНИЧИН Андрій Володимирович

ОСНОВИ ФІНАНСОВОГО АНАЛІЗУ

Тексти лекцій

Формат 60x84/16. Умовн.друк.арк. 4.7. Тираж 50 прим. Зам. 247

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції : Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.