Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька

Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Львів
Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка
2009

УДК 517.957(075.8)
ББК В 162.73я73
Ш81

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб. *О.М. Хіміч*

(Інститут кібернетики НАН України);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г.Г. Цегелик*

(Львівський національний університет ім. Івана Франка);

канд. фіз.-мат. наук, доц. *В.О. Оніщук*
(Луцький національний технічний університет)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист № 14/18-Г-2157 від 22 жовтня 2008)

Шахно С.М., Дудикевич А.Т., Левицька С.М.
Ш81 Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри: Навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 137 с.

Розглянуто головні прямі та ітераційні методи розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь і задач на власні значення та аспекти їхнього практичного використання. Наведено результати тестових розрахунків та набори завдань для самостійної роботи.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають методи наближених обчислень.

УДК 517.957(075.8)
ББК В 162.73я73

© Шахно С.М., Дудикевич А.Т., Левицька С.М., 2009
© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2009

ISBN

Вступ

Чисельні методи розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь та задач на власні значення застосовуються у різних галузях наукових досліджень: математиці, фізиці, техніці, економіці, медицині, інформатиці тощо.

Сьогодні затрати людської праці під час розв’язування на комп’ютерах систем лінійних алгебричних рівнянь або задач на власні значення складаються із затрат на вибір потрібних методів і програм, а також на підготовку даних.

Теоретичні основи найуживаніших методів сформульованих задач детально викладені в працях Г. Цегелика “Чисельні методи” та С. Шахна “Чисельні методи лінійної алгебри”.

У навчальному посібнику розглянуто прямі, ітераційні методи розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь та ітераційні методи обертання матриць і розв’язування задач на власні значення. Головну увагу звернуто на питання, пов’язані з практичною реалізацією цих методів, наведено тестові приклади та набір задач для практичного виконання на комп’ютерах.

Автори щиро вдячні рецензентам, викладачам і студентам кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка за корисні зауваження та допомогу.

1. Прямі методи розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь

1.1. Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь за допомогою LU -розкладу

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) вигляду

$$Ax = b\,. \tag{1.1}$$

Нехай

$$A = LU\,, \tag{1.2}$$

де L – нижня трикутна матриця; U – верхня трикутна матриця, тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Перемножимо матриці і прирівняємо поелементно ліву і праву частини рівності, отримаємо формули для визначення l_{ij} (при $i > j$) і u_{ij} (при $i \le j$):

$$u_{1j} = a_{1j} \quad (\,j = 1,\dots,n\,);$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (\,i = 2,\dots,n\,);$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (\,i \le j\,); \tag{1.4}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (i > j).$$

Підставимо розклад (1.2) в систему (1.1), тобто

$$LUx = b\,, \tag{1.5}$$

одержимо дві такі системи:

$$Ly = b; \tag{1.6}$$

$$Ux = y. \tag{1.7}$$

Спочатку розв'яжемо систему (1.6):

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.8}$$

Далі з системи (1.7) знайдемо шуканий розв'язок

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k) \quad (i = n, n-1, ..., 1). \tag{1.9}$$

Обчислення визначника LU-факторизованої матриці A зводиться до перемноження n чисел

$$\det A = \det L \cdot \det U = u_{11} \cdot u_{22} \cdot ... \cdot u_{nn}\,. \tag{1.10}$$

Для обертання LU-факторизованої матриці позначимо шукані елементи матриці A^{-1} через x_{ij}, які визначимо за формулами

$$x_{jj} = \frac{1}{u_{jj}} (1 - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_{kj})\,; \tag{1.11}$$

$$x_{ij} = -\frac{1}{u_{ii}} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_{kj} \quad (i < j); \tag{1.12}$$

$$x_{ij} = -\sum_{k=j+1}^{n} x_{ik} l_{kj} \quad (i > j). \tag{1.13}$$

Приклад 1.1.

А. Визначити LU-розклад матриці та розв'язати за його допомогою систему рівнянь $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 5, 12)^T.$$

Розв'язування.

1. Виконуємо LU-розклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поступово знаходимо елементи l_{ij} та u_{ij}:

$$u_{11} = -1; \quad u_{12} = 1; \quad u_{13} = 0;$$

$$l_{21} = \frac{0}{-1} = 0; \quad l_{31} = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = 2 - 0 \cdot 1 = 2;$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 1 - 0 \cdot 0 = 1;$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) = \frac{1}{2}(5 - 1 \cdot 1) = 2;$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = 3 - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Одержано такі L-та U-матриці:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Переходимо до розв’язування систем (1.6) та (1.7):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Звідси $y_1 = 1;\ y_2 = 5;\ y_3 = 12 - 1 - 2 \cdot 5 = 1;$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_3 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2}(5 - 1) = 2;\ x_1 = \frac{1}{-1}(1 - 1 \cdot 2) = 1.$

Отже, шуканий розв’язок заданої системи

$$x = (1, 2, 1)^T.$$

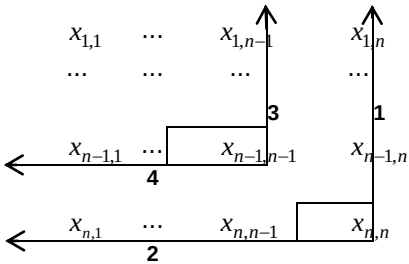
Б. Знайти визначник даної матриці A.

Розв'язування. За формулою (1.10) маємо

$$\det A = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -2 .$$

В. Обчислити обернену матрицю A^{-1}.

Розв'язування. За формулами (1.11) – (1.13) послідовність обчислень виконуємо за схемою



$$x_{3,3} = 1 ;$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{u_{2,2}} \cdot u_{2,3} \cdot x_{3,3} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -0,5 ;$$

$$x_{1,3} = -\frac{1}{u_{1,1}} (u_{1,2} \cdot x_{2,3} + u_{1,3} \cdot x_{3,3}) = -\frac{1}{(-1)} (1 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 1) = -0,5 ;$$

$$x_{3,2} = -x_{3,3} \cdot l_{3,2} = -1 \cdot 2 = -2 ;$$

$$x_{3,1} = -(x_{3,2} \cdot l_{2,1} + x_{3,3} \cdot l_{3,1}) = -((-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1) = -1 ;$$

$$x_{2,2} = \frac{1}{u_{2,2}} (1 - u_{2,3} \cdot x_{3,2}) = \frac{1}{2} (1 - 1 \cdot (-2)) = 1,5 ;$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{u_{1,1}} (u_{1,2} \cdot x_{2,2} + u_{1,3} \cdot x_{3,2}) = -\frac{1}{(-1)} (1 \cdot 1,5 + 0 \cdot (-2)) = 1,5 ;$$

$$x_{2,1} = -(x_{2,2} \cdot l_{2,1} + x_{2,3} \cdot l_{3,1}) = -(1,5 \cdot 0 + (-0,5) \cdot 1) = 0,5 ;$$

$$x_{1,1} = \frac{1}{u_{1,1}} (1 - u_{1,2} \cdot x_{2,1} - u_{1,3} \cdot x_{3,1}) = \frac{1}{(-1)} (1 - 1 \cdot 0,5 - 0 \cdot (-1)) = -0,5 ;$$

Отже, обернена матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A \cdot A^{-1} = I\ ,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь

Метод Гаусса, або метод послідовного вилучення невідомих. розв'язування системи (1.1) складається з двох ходів: прямого і зворотного. Внаслідок прямого ходу систему (1.1) зводимо до системи з трикутною матрицею за допомогою таких перетворень:

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{ii}^{(k-1)}}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{ik} b_k^{(k-1)}, \quad i = k+1, \ldots, n; \tag{1.14}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, \ldots, n; \tag{1.15}$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

На зворотному ході знаходимо розв'язки

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}; \tag{1.16}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}, \quad k = n-1, \ldots, 2, 1. \tag{1.17}$$

Визначник матриці A

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)}. \tag{1.18}$$

Для отримання матриці A^{-1}, оберненої до $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, враховуємо те, що вона є розв'язком матричного рівняння

$$AX = E, \tag{1.19}$$

де E – одинична матриця; $X=(x_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ – шукана матриця.

Якщо зобразимо $X = A^{-1}$ як набір векторів-стовпців

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \dots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ \dots \\ x_{n,2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \dots \\ x_{n,n} \end{pmatrix};$$

а одиничну матрицю E як набір одиничних векторів

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix};$$

то матричне рівняння (1.19) запишемо як n систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} Ax_1 = e_1 \; ; \\ Ax_2 = e_2 \; ; \\ \dots\dots\dots\dots \\ Ax_n = e_n \; . \end{cases} \tag{1.20}$$

Специфікою (1.20) є те, що всі СЛАР мають одну й ту ж матрицю коефіцієнтів, що дає змогу прямий хід методу Гаусса виконати лише один раз.

Приклад 1.2.

А. Методом Гаусса розв'язати систему

$$\begin{pmatrix} [2] & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Спочатку виконаємо прямий хід методу Гаусса за чотири кроки згідно з формулами (1.14), (1.15).

Крок 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & [-1] & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Крок 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & [-2] & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 \end{array}\right).$$

Крок 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & [0,5] & -0,5 \end{array}\right) \sim$$

Крок 4:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Ми отримали систему з верхньою трикутною матрицею, яка містить одиниці на головній діагоналі. На зворотному ході методу

Гаусса за формулами (1.16), (1.17) знаходимо розв'язки заданої системи:

$$x_4 = -1;$$
$$x_3 = -1;$$
$$x_2 = 2 + x_3 = 1;$$
$$x_1 = 2 - x_2 + 0,5x_3 - 0,5x_4 = 1.$$

Отже, розв'язок системи

$$x = (1, 1, -1, -1)^T.$$

Б, За формулою (1.18) визначник матриці A

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot a_{44}^{(3)} = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 0,5 = 2.$$

В. Для знаходження оберненої матриці A^{-1} за формулами (1.20) прямий хід методу Гаусса виконуємо тільки один раз.

Крок 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} [2] & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-1] & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Крок 2:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & [-2] & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -0,5 & 0,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)\sim$$

Крок 3:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1,5 & -0,5 & 0 \\
0 & 0 & -0,5 & 0,5 & -1,5 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1,5 & -0,5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & [0,5] & -2 & 0,75 & -0,25 & 1
\end{array}\right)\sim$$

Крок 4:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
1 & 1 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1,5 & -0,5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1,5 & -0,5 & 2
\end{array}\right).$$

Згідно зі зворотним ходом методу Гаусса за формулами (1.16), (1.17) знаходимо розв’язки чотирьох систем:

$$x_{4,1}=-4;\ \ x_{4,2}=1,5;\ \ x_{4,3}=-0,5;\ \ x_{4,4}=2\,;$$

$$x_{3,1}=-1;\ \ x_{3,2}=1,5;\ \ x_{3,3}=-0,5;\ \ x_{3,4}=0\,;$$

$$x_{2,1}=1;\ \ x_{2,2}=0,5;\ \ x_{2,3}=-0,5;\ \ x_{2,4}=0\,;$$

$$x_{1,1}=1;\ \ x_{1,2}=-0,5;\ \ x_{1,3}=0,5;\ \ x_{1,4}=-1.$$

Отже, обернена матриця

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & -0,5 & 0,5 & -1 \\
1 & 0,5 & -0,5 & 0 \\
-1 & 1,5 & -0,5 & 0 \\
-4 & 1,5 & -0,5 & 2
\end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку $A \cdot A^{-1} = E$, тобто

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 & -1 \\ 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ -1 & 1,5 & -0,5 & 0 \\ -4 & 1,5 & -0,5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Метод квадратних коренів

Нехай задано систему лінійних алгебричних рівнянь (1.1), де $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – задана симетрична матриця, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Тоді матрицю A можна записати у вигляді добутку двох транспонованих між собою трикутних матриць:

$$A = U^T \cdot U. \tag{1.21}$$

Матрицю U визначаємо за формулами

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^{\ 2}} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots n; \tag{1.22}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}} \quad \text{для} \quad j = 2, \ldots, n, (\ j > i\ ); \tag{1.23}$$

$$u_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad (\ j < i\ ). \tag{1.24}$$

Розв’язок симетричної системи (1.1) зводиться до послідовного розв’язування двох трикутних систем

$$U^T y = b; \tag{1.25}$$

$$Ux = y, \tag{1.26}$$

причому допоміжні невідомі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отримуємо за формулою

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k}{u_{ii}}, \ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (1.27)$$

Із системи (1.26) шукані значення x_i знаходимо у зворотному порядку, тобто для $i = n, n-1, ..., 1$ за формулою

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}}. \qquad (1.28)$$

Розв'язування симетричних СЛАР за формулами (1.27) , (1.28) називають методом квадратних коренів, або схемою Холецького.

Приклад 1.3. Методом квадратних коренів розв'язати СЛАР із симетричною матрицею

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4{,}875x_4 = 8{,}875. \end{cases}$$

Розв'язування. Знаходимо елементи матриці U за формулами (1.22) – (1.24):

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2;$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = 1;$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{u_{11}} = 0{,}5;$$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{5 - 1^2} = 2;$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} \cdot u_{13}}{a_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot 1}{5} = 0;$$

$$u_{24}=\frac{a_{24}-u_{12}\cdot u_{14}}{a_{22}}=\frac{2-1\cdot 0,5}{2}=0,75\,;$$

$$u_{33}=\sqrt{a_{33}-u_{13}^2-u_{23}^2}=\sqrt{5-1-0}=2\,;$$

$$u_{34}=\frac{a_{34}-u_{13}\cdot u_{14}-u_{23}\cdot u_{24}}{u_{33}}=\frac{1-1\cdot 0,5-0\cdot 0,75}{2}=0,25\,;$$

$$u_{44}=\sqrt{a_{44}-\sum_{k=1}^{3}u_{k4}^2}=\sqrt{4,875-0,5^2-0,75^2-0,25^2}=2\,.$$

Виконуємо перевірку $U^T\cdot U=A$, тобто

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0,5 & 0,75 & 0,25 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 2 & 0 & 0,75 \\ 0 & 0 & 2 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4,875 \end{pmatrix}$$

За формулами (1.27), відповідно, знаходимо розв’язки системи (1.25)

$$y_1=\frac{b_1}{u_{11}}=\frac{9}{2}=4,5\,;$$

$$y_2=\frac{b_2-u_{12}y_1}{u_{22}}=\frac{10-1\cdot 4,5}{2}=\frac{5,5}{2}=2,75\,;$$

$$y_3=\frac{b_3-u_{13}y_1-u_{23}y_2}{u_{33}}=\frac{9-1\cdot 4,5-0\cdot 2,75}{2}=\frac{4,5}{2}=2,25\,;$$

$$y_4=\frac{b_4-u_{14}y_1-u_{24}y_2-u_{34}y_3}{u_{44}}=\frac{8,875-0,5\cdot 4,5-0,75\cdot 2,75-0,25\cdot 2,25}{2}=$$

$$=\frac{8,875-4,875}{2}=2\,,$$

а за формулами (1.28) – шукані розв’язки заданої системи:

$$x_4=\frac{y_4}{u_{44}}=\frac{2}{2}=1\,;$$

$$x_3=\frac{y_3-u_{34}x_4}{u_{33}}=\frac{2,25-0,25\cdot 1}{2}=1\,;$$

$$x_2 = \frac{y_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4}{u_{22}} = \frac{2,75 - 0\cdot 1 - 0,75\cdot 1}{2} = 1;$$

$$x_1 = \frac{y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4}{u_{11}} = \frac{4,5 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 0,5\cdot 1}{2} = 1.$$

1.4. Метод ортогоналізації

Розв'язок системи (1.1) шукаємо у вигляді лінійної комбінації векторів $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^{(k)}, \tag{1.29}$$

де невідомі коефіцієнти α_k визначені формулою

$$\alpha_k = \frac{(b, x^{(k)})}{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{1.30}$$

а на вектори $x^{(k)}$ накладаємо умови

$$(Ax^{(k)}, x^{(l)}) = 0; \quad l \neq k \quad (l, k = 1, ..., n). \tag{1.31}$$

Для відшуканих векторів $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ вибираємо систему лінійно незалежних векторів

$$\begin{cases} y^{(1)} = (1,\ 0,\ ...,\ 0); \\ ..... \\ y^{(n)} = (0,\ ...,\ 0,\ 1). \end{cases} \tag{1.32}$$

Приймаємо $x^{(1)} = y^{(1)}$,

$$x^{(2)} = y^{(2)} + \lambda_1^{(2)} x^{(1)}, \tag{1.33}$$

де

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(Ay^{(2)}, x^{(1)})}{(Ax^{(1)}, x^{(1)})}. \tag{1.34}$$

Вектор $x^{(3)}$ побудуємо у вигляді

$$x^{(3)} = y^{(3)} + \lambda_1^{(3)} x^{(1)} + \lambda_2^{(3)} x^{(2)}, \tag{1.35}$$

причому

$$\lambda_i^{(3)} = -\frac{(Ay^{(3)}, x^{(i)})}{(Ax^{(i)}, x^{(i)})} \quad (\, i = 1, 2\,)\,. \tag{1.36}$$

Аналогічно будуємо вектори $x^{(4)}, ..., x^{(n)}$.

Приклад 1.4. Методом ортогоналізації розв'язати систему

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 0,5x_3 = 7; \\ x_1 + 20x_2 + 2x_3 = 24,5; \\ 0,5x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 32,25. \end{cases}$$

Розв'язування. Результати обчислень записуємо в табл.1.1. Вибираємо систему лінійно незалежних векторів

$$\begin{cases} y^{(1)} = (\,1, 0, 0\,); \\ y^{(2)} = (\,0, 1, 0\,); \\ y^{(3)} = (\,0, 0, 1\,). \end{cases}$$

За формулами (1.33), (1.34) маємо

$$x^{(1)} = (\,1, 0, 0\,)^T;$$

$$x^{(2)} = y^{(2)} + \lambda_1^{(2)} x^{(1)},$$

де

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = -0,1.$$

Таблиця 1.1

Обчислення за методом ортогоналізації

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
	10	1	0,5	7
	1	20	2	24,5
	0,5	2	15	32,25

$x^{(1)}$	1	$\lambda_1^{(2)} = -0{,}1;$	$\lambda_1^{(3)} = -0{,}05;$	λ_1
$x^{(2)}$	$-0{,}1$	1	$\lambda_2^{(3)} = -0{,}1;$	λ_2
$x^{(3)}$	$-0{,}04$	$-0{,}1$	1	
$Ax^{(1)}$	10	1	0,5	
$Ax^{(2)}$	0	19,9	1,95	
$Ax^{(3)}$	0	$-0{,}04$	14,78	$(b, x^{(k)})$
$(Ax^{(1)}, x^{(1)})$	10			7
$(Ax^{(2)}, x^{(2)})$		19,9		23,8
$(Ax^{(3)}, x^{(3)})$			14,784	29,52
α_k	0,7	1,2	2,0	

Отже,

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x^{(3)}$ знаходимо за формулою (1.35), де за (1.36)

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\ Ay^{(3)},\ x^{(1)}\ )}{(\ Ax^{(1)},\ x^{(1)}\ )} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{10} = -0{,}05\ ;$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(\ Ay^{(3)},\ x^{(2)}\ )}{(\ Ax^{(2)},\ x^{(2)}\ )} = -\frac{\left(\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 19{,}9 \\ 1{,}95 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \frac{-1{,}95}{19{,}9} \approx -0{,}1\ ;$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}05 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}04 \\ -0{,}1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо

$$(\ b,\ \ x^{(1)}\ ) = 7\ ;\ (\ b,\ \ x^{(2)}\ ) = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 24,5 \\ 32,25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 23,8\,;$$

$$(\ b,\ \ x^{(3)}\ ) = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 24,5 \\ 32,25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,04 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 29,52.$$

За формулами (1.30) обчислюємо α_i ($i = \overline{1,3}$) :

$$\alpha_1 = \frac{(b, x^{(1)})}{(Ax^{(1)}, x^{(1)})} = \frac{7}{10} = 0,7\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{(b, x^{(2)})}{(Ax^{(2)}, x^{(2)})} = \frac{23,8}{19,9} \approx 1,2\,;$$

$$\alpha_3 = \frac{(b, x^{(3)})}{(Ax^{(3)}, x^{(3)})} = \frac{29,52}{14,784} \approx 2\,.$$

Остаточно

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1,2 \begin{pmatrix} -0,1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -0,04 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Метод прогонки розв'язування СЛАР з тридіагональною матрицею

Розглянемо різницеву крайову задачу вигляду

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -f_i, \quad (i = 1, 2, ..., N-1)\,; \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= H_1 y_1 + \mu_1\,; \\ y_N &= H_2 y_{N-1} + \mu_2\,, \end{aligned} \tag{1.38}$$

де $A_i \neq 0$; $B_i \neq 0$; $i = 1, 2, ..., N-1$, і яку можна записати у вигляді СЛАР

$$Dy = f \tag{1.39}$$

з тридіагональною матрицею розмірності $(N+1)\cdot(N+1)$.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -H_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -H_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y=(y_{0,}\, y_{1,}, ..., y_N)^T, \qquad f=(\mu_1, -f_1, ..., -f_{N-1}, \mu_2)^T.$$

Згідно з прямим ходом прогонки обчислюємо прогонні коефіцієнти

$$\alpha_{i+1}=\frac{B_i}{C_i-A_i\alpha_i}, \quad i=1, 2, ..., N-1; \tag{1.40}$$

$$\beta_{i+1}=\frac{f_i+A_i\beta_i}{C_i-A_i\alpha_i}, \quad i=1, 2, ..., N-1, \tag{1.41}$$

причому

$$\alpha_1=H_1, \quad \beta_1=\mu_1. \tag{1.42}$$

За зворотним ходом прогонки спочатку знаходимо

$$y_N=\frac{\mu_2+H_2\beta_N}{1-H_2\alpha_N}, \tag{1.43}$$

а далі при $i=N-1, ..., 0$ обчислюємо шуканий розв’язок системи (1.39)

$$y_i=\alpha_{i+1}\cdot y_{i+1}+\beta_{i+1}. \tag{1.44}$$

Це є права прогонка розв’язування СЛАР.

Приклад 1.5. Методом правої прогонки розв’язати СЛАР такого вигляду:

$$A_i=B_i=1; \;\; C_i=2; \;\; f_i=0, \; (i=1,2,3,4);$$

$$H_1=0; \;\; \mu_1=1; \;\; H_2=0; \;\; \mu_2=2;$$

Розв’язування. Матриця системи

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

а вектори y та f такі: $y=(y_0, y_1, ..., y_5)^T$, $f=(1, 0, 0, 0, 0, 2)^T$.

Обчислюємо прогонні коефіцієнти:

$$\alpha_1 = H_1 = 0; \quad \beta_1 = \mu_1 = 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2-0\cdot 1} = 0,5; \quad \beta_2 = \frac{0+1\cdot 1}{2-0\cdot 1} = 0,5;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2-1\cdot 0,5} = \frac{2}{3}; \quad \beta_3 = \frac{0+1\cdot 0,5}{1,5} = \frac{1}{3};$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2-1\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}; \quad \beta_4 = \frac{0+1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4};$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2-1\cdot\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}; \quad \beta_5 = \frac{0+1\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}.$$

За допомогою зворотного ходу методу знаходимо розв’язки:

$$y_5 = \frac{2+0\cdot\frac{1}{5}}{1-0\cdot\frac{4}{5}} = 2;$$

$$y_4 = \frac{4}{5}\cdot 2 + \frac{1}{5} = 1,8;$$

$$y_3 = \frac{3}{4}\cdot 1,8 + \frac{1}{4} = 1,6;$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\cdot 1,6 + \frac{1}{3} = 1,4;$$

$$y_1 = 0,5 \cdot 1,4 + 0,5 = 1,2;$$
$$y_0 = 0 \cdot 1,2 + 1 = 1.$$

Отже, одержано розв'язок $y = (1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2)^T$.

1.6. Метод поворотів розв'язування СЛАР

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь (1.1). Новий метод – метод поворотів – полягає у зведенні цієї системи до трикутного вигляду за допомогою послідовного занулення піддіагональних елементів спочатку першого стовпця, потім другого і т.д. Цей метод дуже стійкий до похибок заокруглення.

Нехай c_1 і s_1 – деякі відмінні від нуля числа. Перше рівняння системи (1.1) помножимо на c_1, друге – на s_1 і додамо їх. Отриманим рівнянням замінимо перше рівняння системи (1.1). Далі перше рівняння системи (1.1) множимо на $-s_1$, друге – на c_1, і результатом їхнього додавання замінимо друге рівняння.

Система (1.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 & + a_{12}^{(1)} x_2 & + \ldots & + a_{1n}^{(1)} x_n & = b_1^{(1)}, \\ & a_{22}^{(1)} x_2 & + \ldots & + a_{2n}^{(1)} x_n & = b_2^{(1)}, \\ a_{31} x_1 & + a_{32} x_2 & + \ldots & + a_{3n} x_n & = b_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} x_1 & + a_{n2} x_2 & + \ldots & + a_{nn} x_n & = b_n, \end{cases} \qquad (1.45)$$

де

$$a_{1j}^{(1)} = c_1 a_{1j} + s_1 a_{2j} \quad (j = \overline{1, n}), \quad b_1^{(1)} = c_1 b_1 + s_1 b_2; \qquad (1.46)$$

$$a_{2j}^{(1)} = -s_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} \quad (j = \overline{2, n}), \quad b_2^{(1)} = -s_1 b_1 + c_1 b_2. \qquad (1.47)$$

Числа $$c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \qquad s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \qquad (1.48)$$

знаходяться з наступних умов: $-s_1 a_{11} + c_1 a_{21} = 0,$ – умова занулення та $c_1^2 + s_1^2 = 1$ – умова нормування. (1.49)

Далі перше рівняння системи (1.45) замінюємо новим, що отримане додаванням результатів множення першого і третього рівнянь (1.45), відповідно, на

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}^{(1)2} + a_{31}^2}}, \qquad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^{(1)2} + a_{31}^2}}, \tag{1.50}$$

а третє – рівнянням, яке отримано додаванням результатів множення тих же рівнянь, відповідно, на $-s_2$ і c_2. Отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 & +a_{12}^{(2)}x_2 & +\ldots & +a_{1n}^{(2)}x_n & = b_1^{(2)}; \\ & a_{22}^{(1)}x_2 & +\ldots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)}; \\ & a_{32}^{(1)}x_2 & +\ldots & +a_{3n}^{(1)}x_n & = b_3^{(1)}; \\ a_{41}x_1 & +a_{42}x_2 & +\ldots & +a_{4n}x_n & = b_4; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = b_n, \end{cases} \tag{1.51}$$

де

$$a_{1j}^{(2)} = c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad b_1^{(2)} = c_2 b_1^{(1)} + s_2 b_3; \tag{1.52}$$

$$a_{3j}^{(1)} = -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} \quad (j = 2, 3, \ldots, n), \quad b_3^{(1)} = -s_2 b_1^{(1)} + c_2 b_3. \tag{1.53}$$

Аналогічні перетворення виконуємо з четвертим і рештою рівнянь.

У підсумку одержимо підсистему

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 & +\ldots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 & +\ldots & +a_{nn}^{(1)}x_n & = b_n^{(1)}. \end{cases} \tag{1.54}$$

За $n-1$ таких етапів прямого ходу вихідна система (1.1) буде перетворена до трикутного вигляду

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 & +a_{12}^{(n-1)}x_2 & +\ldots & +a_{1n}^{(n-1)}x_n & = b_1^{(n-1)}; \\ & a_{22}^{(n-1)}x_2 & +\ldots & +a_{2n}^{(n-1)}x_n & = b_2^{(n-1)}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.55}$$

Знаходження розв’язків $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ із (1.55) збігається зі зворотним ходом методу Гаусса.

Приклад 1.6. Методом поворотів розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10x_1 & +x_2 & +0,5x_3 & =11,5; \\ x_1 & +20x_2 & +2x_3 & =23; \\ 0,5x_1 & +2x_2 & +15x_3 & =17,5. \end{cases}$$

Розв'язування. Виконаємо такі перетворення за формулами (1.46), (1.47).

Крок 1:

$$c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \qquad s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}};$$

$$a_{1j}^{(1)} = c_1 a_{1j} + s_1 a_{2j} \quad (j = \overline{1,3}); \quad b_1^{(1)} = c_1 b_1 + s_1 b_2;$$

$$a_{2j}^{(1)} = -s_1 a_{1j} + c_1 a_{2j} \quad (j = \overline{2,3}); \quad b_2^{(1)} = -s_1 b_1 + c_1 b_2;$$

$$c_1 = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{101}}, \qquad s_1 = \frac{1}{\sqrt{101}};$$

$$a_{11}^{(1)} = \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 10 + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 1 = \sqrt{101};$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 20 = \frac{30}{\sqrt{101}};$$

$$a_{13}^{(1)} = \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 0,5 + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 2 = \frac{7}{\sqrt{101}};$$

$$b_1^{(1)} = \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 11,5 + \frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 23 = \frac{138}{\sqrt{101}};$$

$$a_{22}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 1 + \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 20 = \frac{199}{\sqrt{101}};$$

$$a_{23}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 0,5 + \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 2 = \frac{19,5}{\sqrt{101}};$$

$$b_2^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{101}} \cdot 11,5 + \frac{10}{\sqrt{101}} \cdot 23 = \frac{218,5}{\sqrt{101}}.$$

$$101x_1 + 30x_2 + 7x_3 = 138;$$

$$199x_2 + 19,5x_3 = 218,5.$$

Крок 2:

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}^{(1)2} + a_{31}^2}}; \quad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^{(1)2} + a_{31}^2}};$$

$$a_{1j}^{(2)} = c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} \quad (j = \overline{1,3}); \quad b_1^{(2)} = c_2 b_1^{(1)} + s_2 b_3;$$

$$a_{3j}^{(1)} = -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} \quad (j = \overline{2,3}); \quad b_3^{(1)} = -s_2 b_1^{(1)} + c_2 b_3;$$

$$c_2 = \frac{101}{\sqrt{101^2 + 0,5^2}} = \frac{101}{\sqrt{10201,25}}; \quad s_2 = \frac{0,5}{\sqrt{10201,25}};$$

$$a_{11}^{(2)} = \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 101 + \frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 0,5 = \sqrt{10201,25};$$

$$a_{12}^{(2)} = \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 30 + \frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 2 = \frac{3031}{\sqrt{10201,25}};$$

$$a_{13}^{(2)} = \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 7 + \frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 15 = \frac{714,5}{\sqrt{10201,25}};$$

$$b_1^{(2)} = \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 138 + \frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 17,5 = \frac{13946,75}{\sqrt{10201,25}};$$

$$a_{32}^{(1)} = -\frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 30 + \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 2 = \frac{187}{\sqrt{10201,25}};$$

$$a_{33}^{(1)} = -\frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 7 + \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 15 = \frac{1511,5}{\sqrt{10201,25}};$$

$$b_3^{(1)} = -\frac{0,5}{\sqrt{10201,25}} \cdot 138 + \frac{101}{\sqrt{10201,25}} \cdot 17,5 = \sqrt{10201,25}.$$

Отримано систему

$$\begin{cases} 10201,25x_1 & +3031x_2 & +714,5x_3 & = 13946,75; \\ & 199x_2 & +19,5x_3 & = 218,5; \\ & 187x_2 & +1511,5x_3 & = 1698,5. \end{cases}$$

Крок 3:

$$c_1^{(1)} = \frac{199}{\sqrt{199^2 + 187^2}} = \frac{199}{\sqrt{74570}}; \quad s_1^{(1)} = \frac{187}{\sqrt{199^2 + 187^2}};$$

$$a_{2j}^{(2)} = c_1^{(1)} a_{2j}^{(1)} + s_1^{(1)} a_{3j}^{(1)} \quad (\ j = 2,\ 3\ )\ ;\ b_2^{(2)} = c_1^{(1)} b_2^{(1)} + s_1^{(1)} b_3^{(1)}\ ;$$

$$a_{3j}^{(2)} = -s_1^{(1)} a_{2j}^{(1)} + c_1^{(1)} a_{3j}^{(1)} \quad (\ j = 3\ )\ ;\ b_3^{(2)} = -s_1^{(1)} b_2^{(1)} + c_1^{(1)} b_3^{(1)}\ ;$$

$$a_{22}^{(2)} = \frac{199}{\sqrt{74570}} \cdot 199 + \frac{187}{\sqrt{74570}} \cdot 187 = \frac{74570}{\sqrt{74570}}\ ;$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{199}{\sqrt{74570}} \cdot 19,5 + \frac{187}{\sqrt{74570}} \cdot 1511,5 = \frac{286531,0}{\sqrt{74570}}\ ;$$

$$b_2^{(2)} = \frac{199}{\sqrt{74570}} \cdot 218,5 + \frac{187}{\sqrt{74570}} \cdot 1698,5 = \frac{361101,0}{\sqrt{74570}}\ ;$$

$$a_{33}^{(2)} = -\frac{187}{\sqrt{74570}} \cdot 19,5 + \frac{199}{\sqrt{74570}} \cdot 1511,5 = \frac{297142,0}{\sqrt{74570}}\ ;$$

$$b_3^{(2)} = -\frac{187}{\sqrt{74570}} \cdot 218,5 + \frac{199}{\sqrt{74570}} \cdot 1698,5 = \frac{297142,0}{\sqrt{74570}}\ .$$

Остаточно отримано систему

$$\begin{cases} 10201,25x_1 & +3031x_2 & +714,5x_3 & = 13946,75; \\ & 74570x_2 & +286531x_3 & = 361101; \\ & & 297142x_3 & = 297142. \end{cases}$$

Зворотним ходом знаходимо розв’язки:

$$x_3 = 1;$$

$$x_2 = \frac{361101 - 286531x_3}{74570} = 1;$$

$$x_1 = \frac{13946,75 - 3031x_2 - 714,5x_3}{10201,25} = 1\ .$$

2. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Опишемо ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Ці методи дають розв'язок у вигляді границі послідовності деяких векторів. Такі вектори будують шляхом виконання одноманітного процесу, який називають процесом ітерацій.

У сучасній літературі описано багато ітераційних методів, що ґрунтуються на різних принципах. Зазвичай обчислювальні схеми таких методів прості й зручні у використанні. Проте кожний ітераційний процес має обмежену галузь застосування, бо, по-перше, процес ітерацій може виявитись розбіжним для системи, і, по-друге, збіжність процесу може бути настільки повільною, що практично важко досягти задовільної точності.

Важливою особливістю ітераційних методів є їхні самовиправлення і простота реалізації на комп'ютерах. Ітераційний метод для початку обчислень потребує задання одного або декількох початкових наближень. Як уже зазначено, умови і швидкість збіжності кожного ітераційного процесу суттєво залежать від властивостей матриці системи і вибору початкових наближень.

Розглянемо лінійні стаціонарні методи першого порядку: метод простих ітерацій та метод Зейделя, релаксаційні та градієнтні методи, методи варіаційного типу.

2.1. Принципи побудови ітераційних процесів

Головні ітераційні процеси можна описати за допомогою такої загальної схеми.

Нехай задано систему лінійних алгебричних рівнянь

$$Ax = b \tag{2.1}$$

з неособливою матрицею A. Побудуємо послідовність векторів $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ за рекурентною формулою

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(b - Ax^{(k-1)}), \tag{2.2}$$

де $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ – деяка послідовність матриць; $x^{(0)}$ – початкове наближення. Різний вибір матриць $H^{(k)}$ приводить до різних ітераційних процесів.

Ітераційні процеси (2.2) мають ту властивість, що для кожного з них точний розв'язок x^* є нерухомою точкою. Це означає таке: якщо за початкове наближення $x^{(0)}$ взяти x^*, то всі наступні наближення теж дорівнюватимуть x^*. Навпаки, якщо довільний ітераційний процес, для якого x^* є нерухомою точкою, виконується за формулою

$$x^{(k)} = C^{(k)} x^{(k-1)} + d^{(k)};\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (2.3)$$

де $C^{(k)}$ – послідовність матриць; $d^{(k)}$ – послідовність векторів, то його можна записати у вигляді (2.2).

Неважко записати необхідну і достатню умову того, щоб ітераційний процес (2.2) збігався до розв'язку за довільного початкового вектора. Справді,

$$x^* - x^{(k)} = x^* - x^{(k-1)} - H^{(k)}(Ax^* - Ax^{(k-1)}) = (E - H^{(k)}A)(x^* - x^{(k-1)}).$$

Звідси

$$x^* - x^{(k)} = (E - H^{(k)}A)(E - H^{(k-1)}A)\ldots(E - H^{(1)}A)(x^* - x^{(0)}).$$

Для того, щоб $x^* - x^{(k)} \to 0$ для довільного початкового вектора $x^{(0)}$, необхідно і достатньо, щоб матриця

$$T^{(k)} = (E - H^{(k)}A)(E - H^{(k-1)}A)\ldots(E - H^{(1)}A)$$

прямувала до нуль-матриці, для чого, відповідно, достатньо, щоб довільна норма матриці $T^{(k)}$ прямувала до нуля. Ця умова дає лише загальний погляд для побудови збіжних конкретних ітераційних методів.

Найпростіші ітераційні методи – стаціонарні ітераційні процеси, у яких матриці $H^{(k)}$ не залежать від номера кроку k. При $H^{(k)} = E$ отримуємо класичний процес послідовних наближень. Вибір матриці H для стаціонарного процесу і $H^{(k)}$ для нестаціонарного можна виконати багатьма різними способами.

Важливим способом побудови ітераційних процесів є спосіб релаксації. Під ним розуміють такий вибір матриць $H^{(k)}$, з деякого наперед заданого класу матриць, щоб на кожному кроці

ітераційного процесу зменшувалось певне значення, що характеризує точність розв'язку системи.

Серед релаксаційних методів найбільше поширені *координатні*, у яких матриці $H^{(k)}$ підібрані так, що на кожному кроці змінюється одна або декілька компонент послідовних наближень, і *градієнтні*.

2.2. Метод простих ітерацій

Систему рівнянь (2.1) перетворимо до вигляду

$$x = Cx + d. \tag{2.4}$$

Це можна виконати, записавши $A = B + D$, і тоді $C = -B^{-1}D; \quad d = B^{-1}b.$

Розв'язок (2.4) знаходимо як межу послідовності

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1 (*критерій збіжності). Для збіжності методу простих ітерацій з довільним початковим вектором* $x^{(0)}$ *необхідно і достатньо, щоб усі власні числа матриці* C *були за модулем менші від 1, тобто всі корені характеристичного рівняння*

$$\det(C - \lambda E) = 0 \tag{2.6}$$

були за модулем менші від одиниці.

Оскільки знаходження коренів рівняння (2.6) є непростою проблемою, то на практиці часто використовують достатню умову збіжності методу простих ітерацій.

Теорема 2.2 (*ознака збіжності). Якщо* $\|C\| < 1$, *то система (2.4) має єдиний розв'язок і ітераційний процес (2.5) збігається до розв'язку зі швидкістю геометричної прогресії*.

Найчастіше спиняються на перевірці однієї з двох умов

1) $$\|C\|_I < 1, \text{ де } \|C\|_I = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|; \tag{2.7}$$

2) $$\|C\|_{II} < 1, \text{ де } \|C\|_{II} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|. \tag{2.8}$$

Точність характеризує величина $\frac{\| C \|}{1-\| C \|}$. Щоб оцінити кількість ітерацій для досягнення необхідної точності ε розв'язку, можна скористатися нерівністю

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \frac{\| C \|^{k+1}}{1-\| C \|} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| .$$

Якщо за початкове наближення вибирають стовпець вільних членів, то

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \frac{\| C \|^{k+2}}{1-\| C \|} \| d \| .$$

Нехай $\| C \|_I = q$. Тоді $\frac{q^{k+1}}{1-q} \| d \|_I \le \varepsilon$; звідси можна знайти апостеріорну оцінку кількості ітерацій

$$k > \frac{1}{\lg q} \left[\lg \| d \|_I - \lg(\varepsilon(1-q)) \right] - 1 .$$

З умови збіжності методу простих ітерацій бачимо, що вираз $A = B + D$ не може бути зовсім довільним. Якщо матриця A має діагональне переважання, то за матрицю B можна вибрати нижню трикутну матрицю з A:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ii} \ne 0.$$

Якщо в матриці A немає діагонального переважання, то його можна домогтися яким-небудь способом, наприклад, перетворивши систему (2.1) за допомогою лінійної комбінації її рівнянь. Справді, помножимо задане рівняння $Ax = b$ на матрицю $D = A^{-1} - A_\varepsilon$, де A_ε – матриця з малими за модулем елементами, отримаємо

$$(A^{-1} - A_\varepsilon) Ax = Db;$$

$$x = Cx + d,$$

де $C = A_\varepsilon A; \; d = Db.$

Множення на матрицю D еквівалентне сукупності елементарних перетворень над рівняннями системи $Ax = b$. Наприклад, щоб систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -3; \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

звести до вигляду, придатного до застосування методу простих ітерацій, треба виконати такі перетворення: перше рівняння залишити без змін, від першого рівняння відняти третє, і це буде другим рівнянням нової системи. Друге рівняння вважати третім у новій системі. Одержимо систему з діагональним переважанням

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -x_1 + 4x_2 \qquad = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$$

Ще один спосіб зведення рівняння (2.1) до вигляду, зручного для застосування методу простих ітерацій у випадку додатно визначеної матриці A такий. Позначимо першу норму матриці A через μ: $\| A \|_I = \mu$, отримаємо, що всі власні значення матриці A є в інтервалі (0, μ). Тоді систему $Ax = b$ зводимо до вигляду

$$x = (E - \frac{2}{\mu} A)x + \frac{2b}{\mu},$$

тобто $C = E - \frac{2}{\mu} A; \quad d = \frac{2}{\mu} b.$

Власні значення матриці C будуть у відкритому інтервалі (-1,1), тому метод простих ітерацій збігатиметься.

Наприклад, застосуємо описану методику для системи

$$\begin{cases} x_1 + 0,42x_2 + 0,54x_3 + 0,66x_4 = 0,3; \\ 0,42x_1 + x_2 + 0,32x_3 + 0,44x_4 = 0,5; \\ 0,54x_1 + 0,32x_2 + x_3 + 0,22x_4 = 0,7; \\ 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 + x_4 = 0,9. \end{cases}$$

Обчислимо першу норму матриці системи

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\| A \|_I = \max \sum_{j=1}^{4} | a_{ij} | = \max_{i=\overline{1,4}} \{2,62; \quad 2,18; \quad 2,08; \quad 2,32\} = 2,62.$$

Отже, $\mu = 2,62$. Тоді

$$C = E - \frac{2}{2,26} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0,7634 \begin{pmatrix} 1 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2366 & -0,3206 & -0,4122 & 0,5038 \\ -0,3206 & 0,2366 & -0,2443 & -0,3359 \\ -0,4122 & -0,2443 & 0,2366 & -0,1679 \\ -0,5038 & -0,3359 & -0,1679 & 0,2366 \end{pmatrix};$$

$$d = 0,7634 \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2290 \\ 0,3817 \\ 0,5344 \\ 0,6870 \end{pmatrix}.$$

Якщо для системи (2.1) виконується умова $a_{ii} \neq 0 \quad (i = \overline{1,n})$, то з кожного i-го рядка визначаємо x_i. Отримаємо рівняння

$$x_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (i = \overline{1,n}).$$

Цю систему називають системою, зведеною до *нормального* вигляду. Для неї ітераційний процес матиме вигляд

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (2.9)$$

або матричний: $x = Cx + d$; де $C = -D^{-1}(L+R)$; $d = D^{-1}b$; D – діагональна матриця; L, R – ліва і права строго трикутні матриці.

Побудований ітераційний процес називають **методом Якобі**. Він збігається, якщо виконується одна з умов:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad \text{для всіх } i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad \text{для всіх } j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 < 1$$

або

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{для всіх } i = \overline{1,n};$$

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{для всіх } j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}^2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

Отже, достатньою умовою збіжності ітераційного процесу є переважання діагональних елементів у матриці A.

Наведемо обчислювальну схему методу простих ітерацій.

1. Обчислюємо елементи матриці C і вектора d.
2. Знаходимо норму матриці C, наприклад, $q = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$.

   Якщо $q < 1$, то ітераційний процес збігається.
3. За початкове наближення $x^{(0)}$ вибираємо вектор d. Позначимо $\delta^{(k)} = x^{(k)} - d$. Розв'яжемо систему рівнянь $\delta^{(k)} = Cx^{(k)}$. Тоді $x^{(k+1)} = \delta^{(k)} + x^{(0)}$.
4. Обчислимо K – кількість ітерацій, потрібну для досягнення заданої точності ε.

5. Виконуємо згідно з обчисленим значенням K необхідну кількість ітерацій.

Приклад 2.1. З точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ методом Якобі розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь четвертого порядку

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 9; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 18; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4 = 41. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Розв'язування. Зведемо цю систему до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}125_1 - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4; \\ x_2 = 0{,}8 - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4; \\ x_3 = 3{,}6 - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4; \\ x_4 = 4{,}1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_3. \end{cases}$$

У матричному вигляді

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 1{,}125 \\ 0{,}8 \\ 3{,}6 \\ 4{,}1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо достатню умову збіжності:

$$\sum_{j=1}^{4} |c_{1j}| = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0{,}375 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{4} |c_{2j}| = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6 < 1; \quad \sum_{j=1}^{4} |c_{3j}| = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{4} |c_{4j}| = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4 < 1.$$

Отже, за норму матриці С можна вибрати найбільшу зі знайдених сум, тобто $\|C\| = 0,6$. Точність *k*-го наближення: $\frac{\|C\|}{1-\|C\|} = \frac{0,6}{1-0,6} = 1,5$. Ітераційний процес закінчується, коли оцінки свідчать про досягнення заданої точності

$$|x_i^* - x_i^{(k)}| \le \frac{\|C\|}{1-\|C\|} \max_{j=\overline{1,4}} |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|, \qquad i = 1,2,...,n.$$

Знайдемо потрібну кількість ітерацій:

$$\frac{\|C\|^{k+1}}{1-\|C\|}\|d\| < \varepsilon: \qquad \frac{0,6^{k+1}}{0,4} \cdot 4,1 < 0,001; \qquad 0,6^{k+1} < 0,0000975;$$

$$(k+1)\lg 0,6 < \lg 0,0000975; \qquad \text{тому} \qquad k+1 > \frac{\lg(975 \cdot 10^{-7})}{\lg 0,6};$$

$k+1 > \frac{-7+3}{-0,2147}$; $k > 18,677-1$; $k > 17,677$. Отже, $k = 18$. Хоч за апостеріорною оцінкою отримано 18 ітерацій, на практиці ця кількість може бути іншою, оскільки ця оцінка, зазвичай, є завищеною.

Побудуємо послідовні наближення, узявши за початкове наближення вектор вільних членів *d*:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,125 \\ 0,8 \\ 3,6 \\ 4,1 \end{pmatrix}.$$

Перше наближення:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,125 \\ 0,8 \\ 3,6 \\ 4,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 & 0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 & 02 \\ -0,2 & 0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1,125 \\ 0,8 \\ 3,6 \\ 4,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0875 \\ 2,1150 \\ 2,7150 \\ 4,1550 \end{pmatrix}.$$

Друге наближення:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}125 \\ 0{,}8 \\ 3{,}6 \\ 4{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 02 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}0875 \\ 2{,}1150 \\ 2{,}7150 \\ 4{,}1550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0406 \\ 1{,}9565 \\ 2{,}9745 \\ 3{,}9425 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо такі наближення до розв’язку:

$$\bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}0014 \\ 1{,}9753 \\ 2{,}9947 \\ 3{,}9937 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1{,}0030 \\ 1{,}9974 \\ 2{,}9960 \\ 4{,}0017 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1{,}0010 \\ 1{,}9989 \\ 2{,}9986 \\ 3{,}9993 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1{,}0002 \\ 1{,}9994 \\ 2{,}9997 \\ 3{,}9998 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4$ з точністю до 10^{-3} за шість ітерацій.

2.3. Метод Зейделя

Метод Зейделя відрізняється від методу простих ітерацій лише тим, що під час обчислення $(k+1)$-го наближення *i*-ї компоненти x_i враховують уже визначене раніше $(k+1)$-не наближення компонент $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, тобто обчислення виконують за формулами

$$x_i^{(k+1)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)}, \qquad (i = \overline{1,n}), \tag{2.11}$$

або в матричному вигляді

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Rx^{(k)} + d, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

де

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad R=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & c_{3,n-1} & c_{3,n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для збіжності методу Зейделя необхідно і достатньо, щоб усі власні значення матриці $[R+(L-E)\lambda]$ були за модулем менші від одиниці. Оскільки області збіжності методів простих ітерацій і Зейделя різні (лише перетинаються), то може виявитися, що для деяких систем метод Зейделя збігається, а метод простих ітерацій розбігається, і навпаки. Оскільки знаходження власних значень – процес трудомісткий, то простіше скористатися достатньою умовою збіжності методу Зейделя, яка збігається з такою ж умовою методу простих ітерацій (2.7) та (2.8).

Якщо матриця A симетрична і додатно визначена, то метод Зейделя збіжний.

Приклад 2.2. Методом Зейделя з точністю до $\varepsilon=10^{-3}$ розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь (2.10).

Розв'язування. Запишемо цю систему у вигляді (2.11):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1{,}125-0{,}125x_2^{(k)}-0{,}125x_3^{(k)}+0{,}125x_4^{(k)}; \\ x_2^{(k+1)}=0{,}8-0{,}2x_1^{(k+1)}+0{,}2x_3^{(k)}+0{,}2x_4^{(k)}; \\ x_3^{(k+1)}=3{,}6-0{,}2x_1^{(k+1)}+0{,}2x_2^{(k+1)}-0{,}2x_4^{(k)}; \\ x_4^{(k+1)}=4{,}1-0{,}2x_1^{(k+1)}-0{,}1x_2^{(k+1)}+0{,}1x_3^{(k+1)}. \end{cases}$$

Виберемо за початкове наближення вектор вільних членів, отримаємо наближені значення розв'язку, наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1.

Послідовність наближених розв'язків за методом Зейделя

Ітерації	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1,125	1,0875	0,9824	1,0002	0,9997	1,0000
$x_2^{(k)}$	0,8	2,1225	1,9947	2,0027	1,9999	2,0000

$x_3^{(k)}$	3,6	2,9870	3,0001	2,9995	3,0001	3,0000
$x_4^{(k)}$	4,1	3,9689	4,0049	3,9996	4,0001	4,0000

Отже, на п’ятій ітерації потрібна точність досягнута.

Часто для поліпшення збіжності зручніше змінити порядок рівнянь у заданій системі або навіть нумерацію невідомих. Можна піти й далі, а саме – на кожній ітерації вибирати свій порядок. Ця ідея стала основою методу, який є видозміною методу Зейделя.

Як і в попередніх методах, вибираємо початкове наближення $x^{(0)}$ і обчислюємо відхили:

$$\delta_i = a_{i1}x_1^{(0)} + a_{i2}x_2^{(0)} + ... + a_{in}x_n^{(0)} - b_i,\ i = \overline{1,4}\ . \qquad (2.13)$$

Відшукуємо максимальний за модулем відхил $\max\limits_{i=\overline{1,4}} |\delta_i|$ і з рівняння з цим відхилом знаходимо перше наближення першої невідомої, тобто $x_1^{(1)}$. Потім знову перераховуємо всі відхили

$$\delta_j = a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(1)} + ... + a_{jn}x_n^{(1)} - b_j, \quad j \neq i$$

і підбираємо $x_2^{(1)}$, що задовольняє рівняння

$$a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(1)} + a_{j3}x_3^{(0)} + ... + a_{jn}x_n^{(0)} = b_j,$$

де j – номер рівняння з найбільшим за модулем відхилом. Так робимо доти, поки не знайдемо перше наближення всіх змінних, тобто вектор $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$. На наступному циклі замість вектора $x^{(0)}$ беремо $x^{(1)}$ і т.д. Повторення циклів триває до досягнення потрібної точності. Іноді в разі вибору рівняння, з якого обчислюють поліпшене значення невідомої, керуються не принципом максимального за модулем відхилу, а яким-небудь іншим.

Приклад 2.3. Видозміненим методом Зейделя розв’язати систему з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7; \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язування. Для зручності кожне рівняння поділимо на діагональний коефіцієнт і вільний член перенесемо вліво. У всіх коефіцієнтах поміняємо знаки:

$$\begin{cases} -x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,6 = 0; \\ 0,1x_1 - x_2 + 0,2x_3 + 0,7 = 0; \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 - x_3 + 0,8 = 0. \end{cases}$$

За початкове наближення вибираємо нуль-вектор $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0)$.

Знаходимо відповідні відхили $\delta_1^{(0)} = 0,6;\quad \delta_2^{(0)} = 0,7$; $\delta_3^{(0)} = 0,8.$ Далі $\max\limits_{i=\overline{1,3}} |\delta_i| = 0,8$ є у третьому рівнянні і

$$x_3^{(1)} = 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,8; \qquad x_3^{(1)} = 0,8.$$

Підставляємо $x_3^{(1)}$ у перше і друге рівняння й знову визначаємо відхили:

$$\begin{cases} \delta_1^{(1)} = 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,6 = 0,76; \\ \delta_2^{(1)} = 0 - 0 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,7 = 0,86; \\ \delta_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Знаходимо $\max\limits_{i=\overline{1,3}} |\delta_i^{(1)}| = 0,86$ у другому рівнянні. Тому

$$x_2^{(1)} = 0,1x_1^{(0)} + 0,2x_3^{(1)} + 0,7 = 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,7 = 0,86.$$

З першого рівняння знаходимо

$$x_1^{(1)} = 0,2 \cdot 0,86 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,6 = 0,932.$$

Отже, перше наближення $x^{(1)} = (0,932;\ 0,86;\ 0,8)$.

Переходимо на наступний цикл для знаходження компонент вектора другого наближення:

$$\begin{cases} \delta_1^{(2)} = -0,932 + 0,2 \cdot 0,86 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,6 = 0; \\ \delta_2^{(2)} = 0,1 \cdot 0,932 - 0,86 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,7 = 0,0932; \\ \delta_3^{(2)} = 0,1 \cdot 0,932 + 0,1 \cdot 0,86 - 0,8 + 0,8 = 0,1792. \end{cases}$$

Тоді $\max\limits_{i=\overline{1,3}} |\delta_i^{(2)}| = 0{,}1792$ є у третьому рівнянні. Тому знаходимо $x_3^{(2)}$ за формулою $x_3^{(2)} = 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}8 = 0{,}9792.$

Підставляємо його в перші два рівняння і знаходимо відповідні відхили

$$\delta_1^{(2)} = -x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}6 = -0{,}932 + 0{,}2 \cdot 0{,}86 + 0{,}2 \cdot 0{,}9792 + \\ + 0{,}6 = 0{,}03584;$$

$$\delta_2^{(2)} = 0{,}1x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}7 = 0{,}1 \cdot 0{,}932 - 0{,}86 + 0{,}2 \cdot 0{,}9792 + \\ + 0{,}7 = 0{,}12904.$$

Тоді $\max\limits_{i=\overline{1,2}} |\delta_i^{(2)}| = 0{,}12904$ у другому рівнянні

$$x_2^{(2)} = 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}7 = 0{,}1 \cdot 0{,}86 + 0{,}2 \cdot 0{,}9792 + 0{,}7 = 0{,}98184.$$

Знаходимо відхил у першому рівнянні

$$\delta_1^{(2)} = -x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(2)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}6 = -0{,}932 + 0{,}2 \cdot 0{,}9792 + 0{,}6 = 0{,}06021.$$

Отже, $x_1^{(2)} = 0{,}99221.$

Знаходимо друге наближення до розв’язку

$$x^{(2)} = (0{,}99221;\ 0{,}98184;\ 0{,}97920);$$

$$\max\limits_{i=\overline{1,3}} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0{,}1792.$$

Точності не досягнуто, тому виконуємо ще одну ітерацію. Шукаємо відхили

$$\begin{cases} \delta_1^{(3)} = -x_1^{(2)} + 0{,}2x_2^{(2)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}6 = -0{,}99211 + 0{,}2 \cdot 0{,}98184 + \\ \qquad +0{,}2 \cdot 0{,}9792 + 0{,}6 = -0{,}000002; \\ \delta_2^{(3)} = 0{,}1x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0{,}2x_3^{(2)} + 0{,}7 = 0{,}1 \cdot 0{,}99221 - 0{,}98184 + 0{,}2 \cdot 0{,}9792 + \\ \qquad +0{,}7 = 0{,}013221; \\ \delta_3^{(3)} = 0{,}1x_1^{(2)} + 0{,}1x_2^{(2)} - x_3^{(2)} + 0{,}8 = 0{,}1 \cdot 0{,}99221 + 0{,}1 \cdot 0{,}98184 - 0{,}9792 + \\ \qquad +0{,}8 = 0{,}018205. \end{cases}$$

Оскільки $\max\limits_{i=\overline{1,3}} |\delta_i^{(3)}| = 0{,}018205$ у третьому рівнянні, то уточнюємо спочатку x_3

$$x_3^{(3)} = 0,1x_1^{(2)} + 0,1x_2^{(2)} + 0,8 = 0,1 \cdot 0,99221 + 0,1 \cdot 0,98184 +$$
$$+0,8 = 0,997405 \approx 0,99741.$$

Знаходимо відхили у першому і другому рівнянні

$$\delta_1^{(3)} = -x_1^{(2)} + 0,2x_2^{(2)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,6 = -0,99211 + 0,2 \cdot 0,98184 +$$
$$+0,2 \cdot 0,99741 + 0,6 = 0,00364;$$
$$\delta_2^{(3)} = 0,1x_1^{(2)} - x_2^{(2)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,7 = 0,1 \cdot 0,99221 - 0,98184 + 0,2 \cdot 0,99741 +$$
$$+0,7 = 0,01686.$$

Більший відхил у другому рівнянні, тому уточнюємо x_2

$$x_2^{(3)} = 0,1x_1^{(2)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,7 = 0,1 \cdot 0,99221 + 0,2 \cdot 0,99741 +$$
$$+0,7 = 0,998703.$$

Знаходимо відхил першого рівняння

$$\delta_1^{(3)} = -x_1^{(2)} + 0,2x_2^{(3)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,6 = -0,99211 + 0,2 \cdot 0,99870 +$$
$$+0,2 \cdot 0,99741 + 0,6 = 0,0070126.$$

Отже,

$x_1^{(3)} = 0,9992226 \approx 0,99922$ і $x^{(3)} = (0,99922;\ 0,99870;\ 0,99741).$

Перевіряємо, чи досягнута потрібна точність:

$$\max_{i=\overline{1,3}} | x_i^{(3)} - x_i^{(2)} | = 0,01821 > \varepsilon.$$

Ні, тому робимо ще один крок. Виконуємо обчислення відхилів

$$\begin{cases} \delta_1^{(4)} = -x_1^{(3)} + 0,2x_2^{(3)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,6 = -0,99922 + 0,2 \cdot 0,99870 + \\ \qquad +0,2 \cdot 0,99741 + 0,6 = 0,000002; \\ \delta_2^{(4)} = 0,1x_1^{(3)} - x_2^{(3)} + 0,2x_3^{(3)} + 0,7 = 0,1 \cdot 0,99922 - 0,9987 + 0,2 \cdot 0,99741 + \\ \qquad +0,7 = 0,000704; \\ \delta_3^{(4)} = 0,1x_1^{(3)} + 0,1x_2^{(3)} - x_3^{(3)} + 0,8 = 0,1 \cdot 0,99922 + 0,1 \cdot 0,9987 - 0,99741 + \\ \qquad +0,8 = 0,002382. \end{cases}$$

Найбільший відхил у третьому рівнянні, тому уточнюємо x_3

$$x_3^{(4)} = 0,1x_1^{(3)} + 0,1x_2^{(3)} + 0,8 = 0,1 \cdot 0,99922 + 0,1 \cdot 0,9987 +$$
$$+ 0,8 = 0,99979.$$

Знаходимо відхили першого і другого рівнянь

$$\delta_1^{(4)} = -x_1^{(3)} + 0{,}2x_2^{(3)} + 0{,}2x_3^{(4)} + 0{,}6 = -0{,}99922 + 0{,}2 \cdot 0{,}9987 +$$
$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}99979 + 0{,}6 = 0{,}000478;$$
$$\delta_2^{(4)} = 0{,}1x_1^{(3)} - x_2^{(3)} + 0{,}2x_3^{(4)} + 0{,}7 = 0{,}1 \cdot 0{,}99922 - 0{,}9987 +$$
$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}99979 + 0{,}7 = 0{,}00118.$$

Знову найбільший відхил у другому рівнянні, тому

$$x_2^{(4)} = x_2^{(3)} + \delta_2^{(4)} = 0{,}9987 + 0{,}00118 = 0{,}99988.$$

Визначаємо першу компоненту вектора $x^{(4)}$

$$x_1^{(4)} = 0{,}2x_2^{(4)} + 0{,}2x_3^{(4)} + 0{,}6 = 0{,}2 \cdot 0{,}99988 + 0{,}2 \cdot 0{,}99979 +$$
$$+ 0{,}6 = 0{,}999934.$$

Четверте наближення до розв’язку

$$x^{(4)} = (0{,}99993;\ 0{,}99988;\ 0{,}99979).$$

Перевіряємо точність:

$$\max_{i=\overline{1,3}} |\, x_i^{(4)} - x_i^{(3)} \,| = \max\{0{,}0007;\quad 0{,}001;\quad 0{,}002\} = 0{,}002 < \varepsilon.$$

Отже, з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$ розв’язок системи

$$x^* = (1{,}00;\ 1{,}00;\ 1{,}00).$$

2.4. Метод релаксації

Часто для пришвидшення збіжності ітераційних методів використовують параметри. Для зменшення відхилів у методі Зейделя теж застосовують числовий параметр. Метод, що використовує параметр, називають методом релаксації

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big)\,. \qquad (2.14)$$

Тут початкова матриця адитивно зображена у вигляді $A = L + D + R.$ Метод релаксації у векторно-матричній формі

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = (1-\omega)Dx^{(k)} - \omega Rx^{(k)} + \omega b\,.$$

Для значень $\omega \in (1,\, 2)$ метод (2.14) називають методом послідовної верхньої релаксації (ПВР або SOR-методом). Для $\omega \in (0,\, 1)$ цей метод називають методом нижньої релаксації (він не є ефективним).

Ітераційний процес (2.14) доцільно завершити в разі виконання умови

$$\frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k)} \|} \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\| A^{-1} \| \cdot \| L + \frac{1}{\omega} D \|} .$$

Для нормальних систем (A – додатно визначена симетрична матриця) метод релаксації збігається для довільного початкового наближення $x^{(0)}$ і довільного $\omega \in (0, 2)$.

Приклад 2.4. Методом ПВР з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ розв'язати систему (2.10).

Розв'язування. Запишемо систему рівнянь у вигляді (2.14)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)}) = \\ \qquad = (1-\omega)x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{8}(9 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + x_4^{(k)}); \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)}) = \\ \qquad = (1-\omega)x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{5}(4 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + x_4^{(k)}); \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)}) = \\ \qquad = (1-\omega)x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{5}(18 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} - x_4^{(k)}); \\ x_4^{(k+1)} = (1-\omega)x_4^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{44}}(b_4 - a_{41}x_1^{(k+1)} - a_{42}x_2^{(k+1)} - a_{43}x_3^{(k+1)}) = \\ \qquad = (1-\omega)x_4^{(k)} + \dfrac{\omega}{10}(41 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)}). \end{cases}$$

Виберемо за початкове наближення нуль-вектор $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0;\ 0)$. Результати обчислень для різних значень параметра релаксації наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Залежність між параметрами релаксації і кількістю ітерацій

$\varepsilon = 10^{-3}$	ω	Кількість ітерацій
- “ -	0,3	25
- “ -	0,5	15
- “ -	0,8	8
- “ -	0,9	6
- “ -	1,1	8
- “ -	1,5	59
- “ -	1,6	Розбіжний
- “ -	0,85	7
- “ -	0,89	7
- “ -	0,91	6
- “ -	0,95	6
$\varepsilon = 10^{-2}$	0,9	5
- “ -	0,8	6
- “ -	1,1	6
- “ -	1,3	12
$\varepsilon = 10^{-4}$	0,8	10
- “ -	0,9	8
- “ -	1	7
- “ -	1,1	10

Для нашого прикладу оптимальним за кількістю ітерацій є значення параметра $\omega = 0,9$. Для $\varepsilon = 10^{-3}$ і $\omega = 0,9$ отримано наближення до розв’язку, наведені в табл.2.3.

Таблиця 2.3.

Послідовність наближень розв’язків методу ПВР.

Ітерації	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
1	1,0125	0,53775	3,15454	3,74326
2	1,11948	1,81387	3,00666	3,97017
3	1,02878	1,97204	2,99582	3,99398
4	1,00582	1,99432	2,99860	3,99874
5	1,00124	1,99873	2,99964	3,99973
6	1,00028	1,99971	2,99991	3,99994

Точний розв'язок $x^* = (1{,}000;\ 2{,}000;\ 3{,}000;\ 4{,}000)$.

2.5. Ітераційні методи варіаційного типу

До розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь $Ax = b$ застосуємо ітераційні методи вигляду

$$B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} - Ax^{(k)} = b, \qquad (2.15)$$

у яких параметр τ_{k+1} вибирають з умови мінімуму похибки $\| x^{(k+1)} - x^* \|_D$. Тут D – задана симетрична додатно визначена матриця, для якої $\| v \|_D = \sqrt{(Dv, v)}$. Залежно від вибору матриць D і B отримують різні ітераційні процеси.

2.5.1. Метод мінімальних відхилів

Нехай матриця A – симетрична додатно визначена. Приймемо за

$$r_k = Ax^{(k)} - b \qquad (2.16)$$

– відхил, який отримують унаслідок підстановки k-го наближення до розв'язку у початкову систему. Очевидно, що похибка і відхил пов'язані рівністю

$$A \cdot Z_k = r_k,$$

де $Z_k = x^{(k)} - x^*$.

Розглянемо явний ітераційний процес $(B = E)$

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Ax^{(k)} = b \tag{2.17}$$

і перетворимо його до вигляду

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1} r_k. \tag{2.18}$$

У методі мінімальних відхилів (2.17) параметр τ_{k+1} вибирають з умови мінімуму $\| \tau_{k+1} \|$ за заданої норми $\| r_k \|$, тобто

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{\| Ar_k \|^2}. \tag{2.19}$$

Отже, у цьому методі за значенням $x^{(k)}$ обчислюють вектор відхилів $r_k = Ax^{(k)} - b$, потім за формулою (2.19) знаходять параметр τ_{k+1} і остаточно за формулою (2.18) шукають наступне наближення до розв'язку.

Приклад 2.5. Методом мінімальних відхилів розв'язати з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$ систему

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 13; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 - x_2 + 5x_5 = 14. \end{cases}$$

Розв'язування. Вибираємо за початкове наближення вектор вільних членів $x^{(0)} = (13; 8; 14)$. Тоді за формулою (2.16) знаходимо початковий відхил

$$r_0 = Ax^{(0)} - b = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 \\ 31 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\tau_1 = \dfrac{(Ar_0, r_0)}{\| Ar_0 \|^2}$;

$$Ar_0 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 113 \\ 31 \\ 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 996 \\ 207 \\ 387 \end{pmatrix}; \qquad \| Ar_0 \| = (Ar_0, Ar_0) = 996;$$

$$(Ar_0, r_0) = \left(\begin{pmatrix} 996 \\ 207 \\ 387 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 113 \\ 31 \\ 61 \end{pmatrix} \right) = 1,4257 \cdot 10^5; \qquad \tau_1 = 0,1437.$$

Тоді $x^{(1)} = x^{(0)} - \tau_1 r_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} - 0,1437 \begin{pmatrix} 113 \\ 31 \\ 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2403 \\ 3,5447 \\ 5,2331 \end{pmatrix}.$

Наступний відхил

$$r_1 = Ax^{(1)} - b = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3,24 \\ 3,54 \\ 5,23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30,1446 \\ 1,2501 \\ 5,3806 \end{pmatrix};$$

$$Ar_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -30,1446 \\ 1,2501 \\ 5,3806 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -234,53 \\ -29,27 \\ -4,49 \end{pmatrix};$$

$$\| Ar_1 \| = (Ar_1, Ar_1) = 234,53; \quad (Ar_1, r_1) = 7 \cdot 10^3; \ \tau_2 = 0,1274.$$

Друге наближення до розв’язку

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \tau_2 r_1 = \begin{pmatrix} -3,2403 \\ 3,5447 \\ 5,2331 \end{pmatrix} - 0,1274 \begin{pmatrix} -30,1446 \\ 1,2501 \\ 5,3806 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6010 \\ 3,3854 \\ 4,5475 \end{pmatrix}.$$

Знову знаходимо відхил

$$r_2 = Ax^{(2)} - b = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,601 \\ 3,385 \\ 4,548 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2591 \\ 4,9805 \\ 5,9530 \end{pmatrix}.$$

Для обчислення τ_3 знайдемо

$$Ar_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,2591 \\ 4,9805 \\ 5,9530 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,8608 \\ 18,6906 \\ 24,5252 \end{pmatrix};$$

$$\| Ar_2 \| = 24,5252; \qquad (Ar_2, r_2) = 2,368 \cdot 10^2;$$

тоді $\tau_3 = 0,3937.$

Нарешті за формулою (2.18) маємо

$$x^{(3)} = (0{,}7030; 1{,}42478; 2{,}2039).$$

Аналогічно $r_4 = (-3{,}7474; -2{,}3776; -3{,}7021)$; $\tau_4 = 0{,}1823$; $x^{(4)} = (1{,}3863; 1{,}8582; 2{,}8790)$.

Обчислені значення та наступні наближення наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Значення наближеного розв'язку на різних ітераціях

Ітерації	x_1	x_2	x_3	τ_{k+1}
0	13	8	14	0,1437
1	-3,2403	3,5447	5,2331	0,1274
2	0,6010	3,3854	4,5475	0,3937
3	0,7030	1,4247	2,2039	0,1823
4	1,3863	1,8582	2,8790	0,1254
5	1,0318	1,8835	2,8886	0,4514
6	1,0199	2,0819	3,0731	0,2069
7	0,9545	2,0082	3,0103	0,1251
8	0,9977	2,0100	3,0105	0,4474
9	0,9967	1,9934	2,9925	0,1752
10	1,0038	1,9984	2,9985	

Виберемо за $x^{(0)} = (1; 1; 1)$ і точність $\varepsilon = 10^{-3}$, тоді розв'язок x^* одержимо на шостій ітерації.

2.5.2. Метод мінімальних поправок

Ітераційний процес за формулами (2.15) перепишемо у вигляді

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1} B^{-1} r_k, \qquad (2.21)$$

де r_k – відхил.

Вектор $\omega_k = B^{-1} r_k$ називають *поправкою* $(k+1)$-ї ітерації. Поправки ω_k задовольняють таке ж рівняння, що і похибка $\varepsilon_k = x^{(k)} - x^*$, тобто рівняння (2.15):

$$B\frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{\tau_{k+1}}+A\omega_k=0. \qquad (2.22)$$

Для B – симетричної додатно визначеної матриці– методом мінімальних поправок називають неявний ітераційний метод (2.15), у якому параметр τ_{k+1} вибирають з умови мінімуму норми $\|\omega_{k+1|}\|_B^2=(B\omega_{k+1},\omega_{k+1})$ для заданого вектора ω_k. Коли $B=E$, то метод мінімальних поправок збігається з методом мінімальних відхилів.

Норма $\|\omega_{k+1|}\|_B^2$ буде мінімальною при

$$\tau_{k+1}=\frac{(A\omega_k,\omega_k)}{(B^{-1}A\omega_k,A\omega_k)}. \qquad (2.23)$$

Ітераційний процес методу мінімальних поправок на кожній ітерації складається з таких етапів:

1) зі СЛАР $B\omega_k=r_k$ знаходять поправки ω_k;
2) зі СЛАР $Bv_k=A\omega_k$ визначають вектор $v_k=B^{-1}A\omega_k$;
3) за формулою (2.23) знаходять параметр τ_{k+1};
4) за формулою (2.21) обчислюють наступне наближення $x^{(k+1)}$.

Приклад 2.6. Методом мінімальних поправок з точністю до 10^{-2} розв'язати систему (2.20).

Розв'язування. Вибираємо матрицю B у вигляді

$B=\begin{pmatrix}3{,}1 & 1 & 2{,}1\\ 1 & 3{,}6 & 2{,}1\\ 2{,}1 & 2{,}1 & 4{,}1\end{pmatrix}$. Як і в попередньому прикладі, за початкове наближення до розв'язку беремо вектор $x^{(0)}=(13,8,14)$. Знаходимо відхил $r_0=Ax^{(0)}-b=(113,31,61)$. Розв'язуємо систему $B\omega_k=r_k$:

$$\begin{pmatrix}3{,}1 & 1 & 2{,}1\\ 1 & 3{,}6 & 2{,}1\\ 2{,}1 & 2{,}1 & 4{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}113\\ 31\\ 61\end{pmatrix};\quad \omega_0=(47{,}252;\ 7{,}506;\ 4{,}547);$$

$$A\omega_0 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47,252 \\ 7,506 \\ 4,547 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390,072 \\ 80,234 \\ 62,482 \end{pmatrix}.$$

Згідно з етапом 2 розв'язуємо систему $Bv_0 = A\omega_0$:

$$\begin{pmatrix} 3,1 & 1 & 2,1 \\ 1 & 3,6 & 2,1 \\ 2,1 & 2,1 & 4,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390,072 \\ 80,234 \\ 62,482 \end{pmatrix}; \quad v_0 = (188,282;\ 35,599;\ -50,192).$$

За формулами (2.23) знаходимо $\tau_1 = \dfrac{(A\omega_0, \omega_0)}{(v_0, A\omega_k)} = 0,264.$ Тоді перше наближення шуканого розв'язку

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \tau_1 B^{-1} r_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} - 0,264 \begin{pmatrix} 47,252 \\ 7,506 \\ 4,547 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,524 \\ 6,018 \\ 12,800 \end{pmatrix}.$$

Проробимо ще одну ітерацію.

$r_1 = Ax^{(1)} - b = (10,007;\ 9,815;\ 44,503)$. Із рівняння $B\omega_1 = r_1$ знайдемо

$A\omega_1 = (-3,787;\ -29,730;\ 88,429).$

Тоді зі СЛАР $Bv_1 = A\omega_1$ знаходимо

$v_1 = (-18,270;\ -24,707;\ 46,401)$. Далі $\tau_2 = \dfrac{(A\omega_1, \omega_1)}{(v_1, A\omega_1)} = 0,334.$

Наступне наближення

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \tau_2 B^{-1} r_1 = \begin{pmatrix} 0,524 \\ 6,018 \\ 12,800 \end{pmatrix} - 0,334 \begin{pmatrix} -2,462 \\ -1,894 \\ 17,799 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,346 \\ 6,651 \\ 6,852 \end{pmatrix}.$$

Продовжимо цей процес, на тринадцятій ітерації отримаємо розв'язок $x^{(13)} = (0,993;\ 2,020;\ 3,025)$.

Отже, з точністю до 10^{-2} розв'язок системи $x^* = (0,99;\ 2,02;\ 3,03)$. У разі 10^{-4} кількість ітерацій — 23. Швидкість збіжності методу залежить від вибору допоміжної матриці B.

2.5.3. *Метод спряжених градієнтів (МСГ)*

Як і в попередніх методах, уважатимемо, що матриця A є симетричною і додатно визначеною. Виберемо початкове наближення $x^{(0)}$, побудуємо послідовності векторів

$$x^{(n)} = x^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k (Ax^{(0)} - b). \qquad (2.24)$$

Завдяки вибору параметрів α_k мінімізуємо величини

$F(x^{(n)}) = (Ax^{(n)}, x^{(n)}) - 2(b, x^{(n)})$.

Алгоритм МСГ такий.

1. Вибираємо початкове наближення $x^{(0)}$. Обчислюємо відхил $r_0 = b - Ax^{(0)}$.
2. Будуємо наступні наближення розв'язків за схемою ($p_0 = r_0,\ k = 0$):

   2.1) $\alpha_k = \dfrac{(r_k, p_k)}{(p_k, Ap_k)}$;

   2.2) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k$;

   2.3) $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$;

   2.4) перевірка збіжності: $\| r_{k+1} \| \le \varepsilon$ – ітерації припинити, інакше продовжити обчислення.
3. Підготовка до наступної ітерації:

   3.1) $\beta_k = \dfrac{(r_{k+1}, p_k)}{(p_k, Ap_k)}$;

   3.2) $p_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k p_k$;

   3.3) $k := k + 1$– перехід на наступну ітерацію з пункту 2.1.

Центральною частиною алгоритму є визначення напрямів p_k. Вони повинні задовольняти умови

$$(p_i, Ap_j) = 0, \quad i \ne j; \quad i, j = \overline{1, n-1}.$$

Такі напрями називають спряженими щодо матриці A. Хоч МСГ належить до прямих методів (згідно з (2.24)), однак на практиці розв'язок отримують значно швидше, ніж за n ітерацій.

Приклад 2.7. Методом СГ з точністю до 10^{-5} розв'язати СЛАР:

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 20 & 4 & -4 & 1 \\ 1\,1 & 4 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 20 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 41 \\ 44 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Виберемо початкове наближення $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)$. Згідно з алгоритму, при $k = 0$

$$r_0 = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 41 \\ 44 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 20 & 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 20 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 28 \\ 67 \\ 81 \end{pmatrix}.$$

Приймемо $p_0 = r_0$. Для обчислення α_k знайдемо

$$Ap_0 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 20 & 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 20 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 28 \\ 67 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -145 \\ 325 \\ 437 \\ 1474 \\ 1652 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_0 = \frac{(r_0, p_0)}{(p_0, Ap_0)} = \frac{\big((-4, 20, 28, 67, 81), (-4, 20, 28, 67, 81)\big)}{\big((-4, 20, 28, 67, 81), (-145, 325, 437, 1474, 1652)\big)} =$$

$$= \frac{12250}{251886} \approx 0{,}0486.$$

Тоді $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,0486 \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 28 \\ 67 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8055 \\ 1,9727 \\ 2,3617 \\ 4,2584 \\ 4,9393 \end{pmatrix}$.

Подальші обчислення помістимо в табл. 2.5.

Таблиця 2.5.

Наближені розв’язки за методом спряжених градієнтів

k	$x^{(k)}$	$\alpha_k = \frac{(r_k, p_k)}{(p_k, Ap_k)}$
0	$(1, 1, 1, 1, 1)$	$0,0486$
1	$(0,805468; 1,972662; 2,361727; 4,25818; 4,939282)$	$0,055722$
2	$(0,975519; 2,206373; 2,737701; 3,997350; 4,975953)$	$0,069157$
3	$(1,016125; 1,994419; 2,865367; 4,022000; 5,005043)$	$0,059706$
4	$(1,007035; 2,038190; 2,945820; 3,992869; 5,008256)$	$0,068579$
5	$(1,005708; 1,998150; 2,971451; 4,003171; 5,001587)$	$0,060173$
6	$(1,001835; 2,007916; 2,988636; 3,998366; 5,002346)$	$0,068492$
7	$(1,001308; 1,999577; 2,993964; 4,000574; 5,000291)$	$0,060293$
8	$(1,000394; 2,001664; 2,997609; 3,999664; 5,000532)$	$0,068563$
9	$(1,000281; 1,999909; 2,998729; 4,000112; 5,000052)$	$0,060350$
10	$(1,000082; 2,000350; 2,999498; 3,999931; 5,000115)$	$0,068627$

11	$(1{,}000060;\ 1{,}999981;\ 2{,}999733;\ 4{,}000023;\ 5{,}000010)$	0,060381
12	$(1{,}000017;\ 2{,}000073;\ 2{,}999895;\ 3{,}999986;\ 5{,}000025)$	0,068669
13	$(1{,}000013;\ 1{,}999996;\ 2{,}999944;\ 4{,}000005;\ 5{,}000002)$	0,060399
14	$(1{,}000004;\ 2{,}000015;\ 3{,}999978;\ 3{,}999997;\ 5{,}000005)$	

Отже, на 14-й ітерації знайдено розв’язок $x = (1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5)$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Задачі до розділів 1,2

I.

А. Методом Гаусса знайти розв'язки вказаних систем лінійних алгебричних рівнянь.

Б. Розв'язати системи ітераційними методами з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$, попередньо перетворивши їх до вигляду, зручного для ітерацій. Дати порівняльну характеристику даних методів за кількістю ітерацій.

1.1. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 19; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13. \end{cases} \qquad x^* = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$$

1.2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \qquad x^* = (1,\ 2,\ 1)$$

1.3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases} \qquad x^* = (2, 1, 1, 1)$$

1.4. $$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 16; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \qquad x^* = (2, 1, 2)$$

1.5. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = 8; \\ 3x_2 - 5x_3 = -2. \end{cases} \qquad x^* = (1, 1, 1, 1)$$

1.6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases} \qquad x^* = (2, 2, 1)$$

1.7. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 22; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 26; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 22; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 26. \end{cases} \quad x^* = (2, 1, 2, 1)$$

1.8. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases} \quad x^* = (2, 1, 2)$$

1.9. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases} \quad x^* = (2, 1, 1, 2)$$

1.10. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad x^* = (1, 3, 2)$$

1.11. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 1, 1)$$

1.12. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13. \end{cases} \quad x^* = (1, 2, 3)$$

1.13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases} \quad x^* = (2, 1, 1, 1)$$

1.14. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 17. \end{cases} \quad x^* = (2, 2, 1)$$

1.15. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -7; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 21. \end{cases} \qquad x^* = (2, 2, 1, 3)$$

1.16. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases} \qquad x^* = (2, 1, 3)$$

1.17. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = 4\ ; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1\ ; \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12\ ; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -2\ . \end{cases} \qquad x^* = (1, 2, 1, 2)$$

1.18. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18; \\ 3x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases} \qquad x^* = (1, 2, 3)$$

1.19. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases} \qquad x^* = (3, 2, 1, 0)$$

1.20. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -7; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \qquad x^* = (2, 1, 2)$$

1.21. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases} \qquad x^* = (1, 1, 2, 2)$$

1.22. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases} \qquad x^* = (1, 2, 1)$$

1.23. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 11; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 10. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 1, 2)$$

1.24. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 13. \end{cases} \quad x^* = (2, 1, 1)$$

1.25. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases} \quad x^* = (1, 0, 1, 2)$$

1.26. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = 7; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -7. \end{cases} \quad x^* = (1, 2, 1, 0)$$

1.27. $$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 13; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 11; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases} \quad x^* = (1, 0, 1, 1)$$

1.28. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -2; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases} \quad x^* = (1, 2, 0, 1)$$

1.29. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = -2; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases} \quad x^* = (1, 0, 1, 1)$$

1.30. $$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =2; \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =8; \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & =8; \\ 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & =10. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

2. Методом Гаусса обчислити визначник матриці і знайти обернену матрицю:

2.1. $$A = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,47 & -0,11 & 0,55 \\ 0,42 & 1,00 & 0,35 & 0,17 \\ -0,25 & 0,67 & 1,00 & 0,36 \\ 0,54 & -0,32 & -0,74 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

2.2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. $$A = \begin{pmatrix} 2,11 & 3,01 & 4,02 & 0,22 \\ 0,18 & 3,41 & 0,15 & 1,43 \\ 2,14 & 0,17 & 0,26 & 0,18 \\ 1,28 & 0,42 & 0,54 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

2.4. $$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 2,7 & -1,3 & 5,2 \\ 2,7 & -3,4 & 1,8 & 2,2 \\ -1,3 & 0,16 & 0,82 & 1,05 \\ 5,2 & 2,2 & 1,05 & 3,4 \end{pmatrix}.$$

2.5. $$A = \begin{pmatrix} 1,17 & 2,13 & 0,32 & 0,56 \\ 2,13 & 0,82 & -0,72 & 1,10 \\ 0,32 & 0,25 & -0,42 & 0,16 \\ 0,56 & 1,10 & -0,25 & -0,44 \end{pmatrix}.$$

2.6. $$A=\begin{pmatrix} 1{,}13 & 2{,}15 & 0{,}83 & 0{,}77 \\ 0{,}64 & -0{,}43 & 0{,}62 & -0{,}32 \\ 2{,}32 & 1{,}15 & 1{,}84 & 0{,}68 \\ -0{,}72 & 0{,}53 & 0{,}64 & -0{,}57 \end{pmatrix}.$$

2.7. $$A=\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}18 & 0{,}63 & -0{,}32 \\ 0{,}92 & 0{,}38 & -0{,}14 & 0{,}56 \\ 0{,}63 & -0{,}42 & 0{,}18 & 0{,}37 \\ -0{,}65 & 0{,}52 & 0{,}47 & 0{,}27 \end{pmatrix}.$$

2.8. $$A=\begin{pmatrix} 0{,}72 & 3{,}54 & 7{,}28 & 0{,}33 \\ -0{,}28 & -0{,}72 & 3{,}04 & 0{,}22 \\ 1{,}00 & 0{,}35 & -0{,}78 & 1{,}00 \\ 7{,}03 & -5{,}04 & -3{,}75 & 3{,}41 \end{pmatrix}.$$

2.9. $$A=\begin{pmatrix} -0{,}33 & 0{,}42 & 0{,}51 & -0{,}11 \\ 2{,}71 & -0{,}92 & -2{,}17 & 0{,}81 \\ 0{,}75 & 0{,}68 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0{,}28 & -3{,}71 & 2{,}17 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

2.10. $$A=\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

2.11. $$A=\begin{pmatrix} 2{,}00 & 0{,}17 & 3{,}02 & 0{,}11 \\ 0{,}28 & 0{,}13 & 0{,}54 & 3{,}12 \\ 0{,}54 & 0{,}18 & 2{,}11 & 3{,}08 \\ 2{,}33 & 0{,}11 & 0{,}22 & 2{,}22 \end{pmatrix}.$$

2.12. $$A=\begin{pmatrix} 4{,}20 & 0{,}32 & 0{,}11 & 0{,}13 \\ 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}72 & 0{,}61 \\ 0{,}54 & 0{,}13 & 0{,}81 & 0{,}17 \end{pmatrix}.$$

2.13. $$A=\begin{pmatrix} 1,0 & 2,14 & 0,42 & -1,13 \\ 0,23 & 0,42 & -1,5 & 0,16 \\ 0,34 & -0,12 & 0,18 & 0,57 \\ 0,83 & -0,17 & 0,62 & -0,83 \end{pmatrix}.$$

2.14. $$A=\begin{pmatrix} 1,00 & 0,13 & 0,25 & 0,82 \\ -0,15 & 0,27 & 0,35 & -0,44 \\ 0,83 & 0,11 & 0,72 & -0,32 \\ 0,94 & 0,08 & 0,32 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

2.15. $$A=\begin{pmatrix} 1,00 & 0,27 & 0,64 & 0,83 \\ 0,27 & 0,35 & -0,81 & 0,16 \\ 0,64 & -0,81 & -0,14 & 0,15 \\ 0,83 & -0,14 & 0,25 & 0,37 \end{pmatrix}.$$

2.16. $$A=\begin{pmatrix} 0,2 & -7,7 & 3,1 & -1,6 \\ 0,7 & 1,4 & -8,5 & 4,8 \\ 8,2 & -2,3 & 0,3 & -7,9 \\ 0,55 & 1,00 & 0,32 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

2.17. $$A=\begin{pmatrix} -2,41 & 7,55 & 0,82 & 0,33 \\ 0,28 & -3,44 & 0,75 & 0,23 \\ 0,17 & 0,28 & 0,05 & 3,48 \\ -1,00 & 0,23 & 2,00 & 7,00 \end{pmatrix}.$$

2.18. $$A=\begin{pmatrix} 4,5 & 4,8 & -3,7 & 2,1 \\ 4,5 & -3,7 & 5,6 & 3,3 \\ 4,8 & 7,5 & 8,3 & 9,2 \\ -1,5 & 2,3 & 4,8 & 3,1 \end{pmatrix}.$$

2.19. $$A=\begin{pmatrix} 1,5 & 0,84 & 0,63 & -0,18 \\ 0,15 & 0,36 & -0,16 & 0,88 \\ -0,27 & 0,45 & 0,64 & -0,38 \\ 0,41 & -0,83 & 0,62 & 0,27 \end{pmatrix}.$$

2.20. $$A=\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & -0,12 & 0,25 \\ -1,2 & 0,18 & 0,72 & 0,13 \\ 1,6 & 0,2 & 0,12 & -0,11 \\ 1,4 & 0,15 & -0,83 & 0,41 \end{pmatrix}.$$

2.21. $$A=\begin{pmatrix} 2,5 & 0,35 & 0,4 & -0,8 \\ 0,2 & -1,5 & 0,61 & 2,3 \\ 0,16 & -0,42 & 0,57 & 0,63 \\ 0,23 & 0,15 & -0,08 & 3,1 \end{pmatrix}.$$

2.22. $$A=\begin{pmatrix} 5,5 & 3,7 & -8,3 & 9,1 \\ -4,5 & 6,8 & 7,2 & 3,4 \\ 7,5 & -4,9 & 3,5 & 7,1 \\ 5,6 & -4,8 & 7,3 & 5,3 \end{pmatrix}.$$

2.23. $$A=\begin{pmatrix} 1,8 & 1,02 & 1,03 & 1,05 \\ 7,03 & 8,04 & 9,05 & 6,08 \\ 1,11 & -2,02 & 2,03 & -3,04 \\ -3,41 & 4,52 & 7,28 & 5,51 \end{pmatrix}.$$

2.24. $$A=\begin{pmatrix} 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \end{pmatrix}.$$

2.25. $$A=\begin{pmatrix} 1,6 & 5,4 & -7,7 & -3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{pmatrix}.$$

2.26. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.27. $$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.28. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.29. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.30. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.31. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. А. Методом квадратних коренів і методом ортогоналізації розв’язати системи лінійних рівнянь.

Б. Методами варіаційного типу розв’язати задані системи. Виконати порівняльну характеристику за кількістю ітерацій і різною точністю.

3.1. $$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18; \\ x_1 + 11x_2 + 3x_3 + x_4 = 19; \\ 2x_1 + 3x_2 + 15x_3 + x_4 = 36; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 14x_4 = 20. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 2, 1)$$

3.2. $$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 8; \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 13; \\ -x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 6. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 1, 1)$$

3.3. $$\begin{cases} 13x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 21; \\ 5x_1 + 13x_2 - x_3 + 2x_4 = 17; \\ 3x_1 - x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 15; \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 1, 0)$$

3.4. $$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 32; \\ 3x_1 + 15x_2 + 7x_3 + x_4 = 11; \\ 5x_1 + 5x_2 + 17x_3 + 2x_4 = 24; \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 + 15x_4 = 24. \end{cases} \quad x^* = (1, 0, 1, 1)$$

3.5. $$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ -2x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 11; \\ 3x_1 + x_2 + 15x_3 - x_4 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 17x_4 = 23. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 0, 1)$$

3.6. $$\begin{cases} 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20; \\ 2x_1 + 13x_2 - x_3 + 2x_4 = 16; \\ 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 3x_4 = 12; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 20x_4 = 23. \end{cases} \quad x^* = (1, 1, 1, 1)$$

3.7. $$\begin{cases} 15x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =18; \\ 2x_1 & +11x_2 & +2x_3 & -x_4 & =14; \\ -x_1 & +2x_2 & +13x_3 & +3x_4 & =17; \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +17x_4 & =21. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.8. $$\begin{cases} 10x_1 & +2x_2 & +x_3 & -2x_4 & =9; \\ 2x_1 & +13x_2 & -2x_3 & -3x_4 & =-3; \\ x_1 & -2x_2 & +15x_3 & +4x_4 & =20; \\ -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +10x_4 & =12. \end{cases} \quad x^* = (1,0,1,1)$$

3.9. $$\begin{cases} 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =10; \\ 2x_1 & +11x_2 & -2x_3 & -3x_4 & =10; \\ 3x_1 & -2x_2 & +15x_3 & +x_4 & =2; \\ -2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +15x_4 & =10. \end{cases} \quad x^* = (1,1,0,1)$$

3.10. $$\begin{cases} 12x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & =14; \\ 3x_1 & +13x_2 & -4x_3 & +3x_4 & =15; \\ x_1 & -4x_2 & +14x_3 & +x_4 & =12; \\ -2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +12x_4 & =14. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.11. $$\begin{cases} 16x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & =20; \\ -x_1 & +14x_2 & +2x_3 & -5x_4 & =10; \\ 3x_1 & +2x_2 & +20x_3 & +3x_4 & =28; \\ 2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & +15x_4 & =15. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.12. $$\begin{cases} 13x_1 & +x_2 & -5x_3 & +x_4 & =10; \\ x_1 & +16x_2 & +x_3 & +2x_4 & =20; \\ -5x_1 & +x_2 & +15x_3 & -x_4 & =10; \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +13x_4 & =15. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.13. $$\begin{cases} 17x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & =16; \\ x_1 & +15x_2 & -4x_3 & +2x_4 & =14; \\ -x_1 & -4x_2 & +15x_3 & +2x_4 & =12; \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +23x_4 & =26. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.14. $$\begin{cases} 19x_1 + x_2 - x_4 = 19; \\ x_1 + 17x_2 + x_3 + 4x_4 = 23; \\ x_2 + 11x_3 - 3x_4 = 9; \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 13x_4 = 13. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.15. $$\begin{cases} 15x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 13; \\ -6x_1 + 21x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 + x_4 = 17; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 12x_4 = 10. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.16. $$\begin{cases} 13x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 20x_2 + x_3 - 4x_4 = 18; \\ -3x_1 + x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 13; \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 20x_4 = 17. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.17. $$\begin{cases} 17x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 16; \\ -x_1 + 19x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 17; \\ x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 3x_4 = 16; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.18. $$\begin{cases} 12x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 10; \\ x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 19; \\ -x_1 + 2x_2 + 14x_3 - x_4 = 14; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 15x_4 = 15. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.19. $$\begin{cases} 15x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15; \\ x_1 + 16x_2 - x_3 + 3x_4 = 19; \\ -3x_1 - x_2 + 17x_3 - 4x_4 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 18x_4 = 19. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1,1)$$

3.20. $$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 8; \\ 3x_1 + 12x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ -4x_1 - x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 18. \end{cases} \quad x^* = (1,0,1,1)$$

3.21. $$\begin{cases} 14x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 14; \\ -x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 17; \\ -x_1 - 2x_2 + 16x_3 - x_4 = -4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 17x_4 = 21. \end{cases} \quad x^* = (1,1,0,1)$$

3.22. $$\begin{cases} 16x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 19; \\ 2x_1 + 17x_2 - x_3 + 2x_4 = 21; \\ -3x_1 - x_2 + 18x_3 + 3x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 19x_4 = 22. \end{cases} \quad x^* = (1,1,0,1)$$

3.23. $$\begin{cases} 11,65x_1 - 1,76x_2 + 0,77x_3 = 10,66; \\ -1,76x_1 + 11,04x_2 - 2,61x_3 = 6,67; \\ 0,77x_1 - 2,61x_2 + 13,18x_3 = 11,34. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.24. $$\begin{cases} 2,56x_1 + 0,67x_2 - 1,78x_3 = 1,45; \\ 0,67x_1 + 2,67x_2 - 1,35x_3 = 1,99; \\ -1,78x_1 - 1,35x_2 + 11,55x_3 = 8,42. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.25. $$\begin{cases} 12,16x_1 + 1,45x_2 - 0,89x_3 = 12,72; \\ 1,45x_1 + 10,44x_2 + 1,18x_3 = 13,07; \\ -0,89x_1 + 1,18x_2 + 12,07x_3 = 12,36. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.26. $$\begin{cases} 9,87x_1 + 1,35x_2 - 0,44x_3 = 10,78; \\ 1,35x_1 + 11,22x_2 - 2,32x_3 = 10,25; \\ -0,44x_1 - 2,32x_2 + 13,73x_3 = 10,97. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.27. $$\begin{cases} 9,36x_1 + 0,92x_2 - 1,87x_3 = 8,41; \\ 0,92x_1 + 8,24x_2 - 0,77x_3 = 8,39; \\ -1,87x_1 - 0,77x_2 + 9,16x_3 = 6,52. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.28. $$\begin{cases} 8,17x_1 - 0,65x_2 + 1,54x_3 = 9,06; \\ -0,65x_1 + 11,16x_2 - 1,73x_3 = 8,78; \\ 1,54x_1 - 1,73x_2 + 9,15x_3 = 8,96. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.29. $$\begin{cases} 12,32x_1 & +1,17x_2 & -0,28x_3 & =13,21; \\ 1,17x_1 & +9,43x_2 & -0,88x_3 & =9,72; \\ -0,28x_1 & -0,88x_2 & +14,55x_3 & =13,39. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

3.30. $$\begin{cases} 9,48x_1 & +0,75x_2 & -1,23x_3 & =9; \\ 0,75x_1 & +9,61x_2 & +1,64x_3 & =12; \\ -1,23x_1 & +1,64x_2 & +5,51x_3 & =5,92. \end{cases} \quad x^* = (1,1,1)$$

4. Методом прогонки розв’язати системи рівнянь:

4.1. $$a_i x_{i-1} - c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n;$$
$$a_1 = 0, \quad b_n = 0,$$

де

$$a_i = -(1+i), \quad i = 2, 3, ..., n;$$
$$c_i = 12 + i, \quad i = 1, 2, ..., n;$$
$$b_i = i, \quad i = 1, 2, ..., n-1;$$
$$f_i = -(i^2 + 14i - 1), \quad i = 1, ..., n-1;$$
$$n = 7, \quad f_7 = -202; \quad n = 15, \quad f_{15} = -600.$$

4.2. $$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$y(0) = y_0 = 1; \quad y(1) = y_n = 0,5;$$

де

$$a_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1+ih}{2h}, \quad b_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1+ih}{2h},$$
$$c_i = 1 + \frac{2}{h^2}, \quad f_i = \frac{2}{(1+ih)^3}, \quad h = 0,1;\ 0,01;$$
$$h = \frac{1}{n}; \quad y^*(x) = \frac{1}{x+1}; \quad x = x_i = ih.$$

4.3. $$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$y(0) = y_0 = -0,5; \quad y(1) = y_n = -1;$$

де

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h(ih-2)}, \quad b_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h(ih-2)},$$

$$c_i = \frac{2}{h^2} + 2 - ih\,; \quad f_i = 1\,; \quad h = \frac{1}{n}\,; \quad h = 0{,}1;\, 0{,}01\,;$$

$$y^*(\ x\ ) = \frac{1}{x-2}\,; \quad x = x_i = ih\,.$$

4.4. $$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i\,, \quad i = \overline{1, n-1}\,;$$
$$y(0) = 0\,; \quad y(1) = 2{,}71828\,,$$

де

$$a_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\,, \quad b_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\,,$$

$$c_i = \frac{2}{h^2} - 1\,, \quad f_i = -2ih \cdot \mathrm{e}^{ih}\,, \quad h = \frac{1}{n}\,, \quad h = 0{,}1;\, 0{,}01\,;$$

$$y^*(\ x\ ) = x \cdot \mathrm{e}^x\,; \quad x = x_i = ih\,.$$

4.5. $$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i\,, \quad i = \overline{1, n-1}\,;$$
$$y(0) = 0\,; \quad y(1) = 1{,}38294\,;$$

де

$$a_i = \frac{1}{h^2} + \frac{ih+1}{2h}\,, \quad b_i = \frac{1}{h^2} - \frac{ih+1}{2h}\,,$$

$$c_i = \frac{2}{h^2} + 1\,; \quad f_i = \frac{x_i^2 + 2x_i + 2}{x_i + 1}\,;$$

$$x_i = ih\,, \quad y^*(\ x_i\ ) = (\ x_i + 1\ )\ \ln\ (\ x_i + 1\ )\,; \quad h = 0{,}1;\, 0{,}01\,.$$

5. Розв’язати такі задачі.

5.1. Знайти області збіжності методів Якобі та Зейделя для систем з матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

5.2. Довести, що для СЛАР другого порядку $(n = 2)$ методи Якобі і Зейделя збігаються та розбігаються одночасно.

5.3. Нехай задана невироджена матриця A з діагональною перевагою, тобто для всіх i маємо

$$\sum_{i,j} |\, a_{ij}\, | \le q\, |\, a_{ii}\, |\,, \quad q < 1.$$

Довести, що для похибки в методі Зейделя справджується нерівність

$$\| x - x^{(k)} \|_\infty \le q^k \| x - x^{(0)} \|_\infty .$$

5.4. Довести збіжність методу Зейделя для матриць з такими елементами:

а) $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$;

б) $a_{ij} = \begin{cases} 3, & i = j; \\ 0, & |i-j| = 1; \\ 1, & |i-j| > 1. \end{cases}$

5.5. Знайти α, β, за яких метод Зейделя збігається для СЛАР з матрицями

а) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

5.6. Дослідити збіжність методу Якобі для СЛАР з матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & -3 & 1 & -1,4 \\ 0,4 & 0,8 & 4 & 2,4 \\ -0,5 & 1,2 & -2,5 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Задача визначення власних значень і векторів матриць є важливою для вирішення широкого кола питань обчислювальної математики, її застосовують у диференціальних рівняннях (зокрема, у проблемі стійкості), механіці, радіофізиці й інших галузях. Цю задачу формулюють так: нехай задано дійсну $(n \times n)$-матрицю A. Знайти такі пари чисел λ і ненульових векторів x, що

$$Ax = \lambda x. \tag{3.1}$$

Задачу (3.1) називають задачею на власні значення. Розрізняють повну (*алгебричну,* або *матричну*) проблему власних значень, яка передбачає знаходження всіх власних пар $\{\lambda, x\}$ матриці A, та часткові проблеми власних значень, які полягають, як звичайно, у відшуканні одного чи декількох власних чисел λ і, можливо, відповідних їм власних векторів x. В останньому випадку найчастіше йдеться про знаходження найбільшого і найменшого за модулем власних чисел. Знання таких характеристик матриці дає змогу, наприклад, робити висновки про збіжність тих чи інших ітераційних методів, оптимізувати параметри ітераційних методів, ураховувати вплив на результати розв'язування алгебричних задач похибок вхідних даних і обчислювальних похибок. Є й інші формулювання часткових проблем.

Теоретично задачу (3.1) легко розв'язати: необхідно знайти корені так званого характеристичного, чи, інакше кажучи, вікового рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{3.2}$$

а потім, підставляючи їх почергово в (3.1), отримати з відповідних систем власні вектори. Практична реалізація цього за суттю простого підходу пов'язана з низкою труднощів, що зростають зі збільшенням розмірності розв'язуваної задачі. Ці труднощі зумовлені розгортанням характеристичного визначника $\det(A - \lambda E)$ і обчисленням коренів отримуваного в цьому разі полінома n-го степеня, а також пошуком лінійно незалежних розв'язків вироджених СЛАР. З огляду на це такий безпосередній

підхід до розв'язування алгебричної проблеми власних значень застосовують лише за малих розмірностей матриці $A\ (n=2,3)$, вже при $n \geq 4$ на перший план виходять спеціальні чисельні методи розв'язування таких задач.

Зазначимо, що недавно чисельні методи розв'язування задач на власні значення ґрунтувались, як звичайно, на класичному підході, тобто на розгортанні характеристичних визначників. Методи розв'язування проблеми власних значень, які ґрунтуються на розгортанні характеристичного визначника, детально описані в [8].

Сучасні методи розв'язування повної проблеми орієнтовані на алгоритмічну побудову з матриці A такої матриці, певні елементи якої були б наближеними значеннями власних чисел A, причому формувались би і її власні вектори.

Нижче розглянуто деякі з цих методів так, щоб можна було зрозуміти ідеї, які є в їхній основі, й одночасно практично розв'язано сформульовані задачі до кінця для конкретних матриць.

3.1. Класичний спосіб

Приклад 3.1. Визначити власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язування***.** Щоб визначити власні числа матриці A, нам потрібно обчислити визначник $|A-\lambda E|$. Розкриємо його і отримаємо

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda-2\,.$$

Власні числа є коренями рівняння

$$-\lambda^3+3\lambda-2=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+2)=0\,,$$

тобто $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Для знаходження власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -2$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь з визначником, що дорівнює нулю,

$$\begin{cases} 5v_1 + v_2 = 0; \\ -4v_1 + v_2 = 0; \\ 4v_1 + 8v_2 = 0. \end{cases}$$

Легко переконатися, що ранг матриці цієї системи $r = 2$. Надамо вільній змінній v_3 значення 1. Розв'яжемо систему перших двох рівнянь, отримаємо: $\nu_2 = 0$, $\nu_1 = 0$. Отже, власному числу $\lambda_1 = -2$ відповідає власний вектор $x_1 = (0,0,1)^T$. Для знаходження власного вектора, відповідного кратному власному числу $\lambda = 1$, отримаємо систему

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0; \\ -4v_1 - 2v_2 = 0; \\ 4v_1 + 8v_2 - 3v_3 = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, її ранг дорівнює двом. Надамо вільній невідомій $v_1 = 1$, знайдемо наступні значення $\nu_3 = -4$, $\nu_2 = -2$.

Отже, власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ відповідає такий власний вектор: $x_2 = (1,-2,-4)^T$.

Приклад 3.2 [9]. Знайти всі власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Складемо визначник $|A - \lambda E|$ і розкриємо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -6 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32.$$

Власні числа є коренями рівняння

$$-\lambda^3+10\lambda^2-32\lambda+32=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0,$$

тобто $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=4.$

Для знаходження власного вектора, відповідного власному числу $\lambda_1=2$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь з визначником, що дорівнює нулю,

$$\begin{cases}3v_1-2v_2+v_3=0;\\3v_1-4v_2+3v_3=0;\\3v_1-6v_2+5v_3=0.\end{cases}$$

Для розв'язування цієї системи визначимо ранг її матриці. Легко переконатися, що ранг матриці цієї системи $r=2$. Надамо вільній змінній v_1 значення 1, розв'яжемо систему перших двох рівнянь

$$\begin{cases}-2v_2+v_3=-3;\\-4v_2+3v_3=-3\end{cases}$$

і отримаємо $v_2=3$, $v_3=3$. Отже, власному числу $\lambda_1=2$ відповідає власний вектор $x_1=(1,2,3)^T$. Для знаходження власного вектора, відповідного кратному власному числу $\lambda_2=4$, отримаємо систему

$$\begin{cases}v_1-2v_2+v_3=0;\\3v_1-6v_2+3v_3=0;\\3v_1-6v_2+3v_3=0.\end{cases}$$

Ранг її дорівнює одиниці, тому розв'язок наведемо у вигляді $v_1=2v_2-v_3$. Вільним невідомим v_2 і v_3 необхідно надати такі значення, за яких отримують два лінійно незалежні вектори. Для цього візьмемо такі значення:

$$v_2=1,\quad v_3=0,\quad v_2=0,\quad v_3=1.$$

Отже, власному числу $\lambda_2=\lambda_3=4$ відповідають два власні вектори

$$x_2=(2,1,0)^T;$$

$$x_3 = (-1, 0, 1)^T .$$

3.2. Степеневий метод знаходження максимального за модулем власного значення і відповідного йому власного вектора

Для знаходження максимального за модулем власного значення і відповідного йому власного вектора квадратної матриці довільної структури можна використовувати степеневий метод.

Спочатку розглянемо реалізацію цього методу для дійсної матриці A простої структури, яка має власні значення, розташовані з урахуванням їхньої кратності в такому порядку:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n| .$$

Задаванням довільного початкового наближення $y^{(0)}$ до власного вектора v_1 і значення $\varepsilon > 0$, за яким закінчуватиметься ітераційний процес, степеневий метод реалізують за формулами

$$\tilde{y}^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{\tilde{y}^{(k)}}{\max\limits_i \left|\tilde{y}_i^{(k)}\right|}, \quad \mu_k = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} \frac{\tilde{y}_s^{(k)}}{y_s^{(k-1)}}, \qquad (3.3)$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

перевіряючи на кожній ітерації умову закінчення процесу

$$|\mu_k - \mu_{k-1}| \leq \varepsilon |\mu_k|. \qquad (3.4)$$

Зазначимо, що μ_k можна обчислити також за формулою

$$\mu_k = \max_i \left\{ \tilde{y}_i^{(k)} \right\}.$$

Тут і далі ми використовуємо позначення $\max\{x\}$ для максимального за модулем елемента вектора x.

У (3.3) і (3.4) k – номер ітерації; s – номер компоненти; m – кількість ненульових компонент вектора $y^{(1)}$; μ_k – наближення до власного числа λ_1.

Доведемо збіжність степеневого методу, коли значення λ_1 дійсне і не кратне. Оскільки матриця A є матрицею простої структури, то систему власних векторів $\{x_j\}, j = 1, 2, \ldots, n$ можна

взяти за базис у n-вимірному просторі. Відповідно, довільний вектор $y^{(0)}$ можна розкласти за власними векторами

$$y^{(0)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n .$$

З урахуванням того факту, що власний вектор визначений з точністю до сталого множника, під час дослідження збіжності не будемо брати до уваги умови нормування в (3.3).

З послідовних ітерацій отримуємо вектори

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 + \cdots + c_n\lambda_n x_n ,$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = c_1\lambda_1^2 x_1 + c_2\lambda_2^2 x_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 x_n ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k x_n =$$

$$= \lambda_1^k \left[c_1 x_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n \right] = \lambda_1^k \left[c_1 x_1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \right],$$

тобто вектор $y^{(k)}$ буде наближатися до власного вектора x_1 за напрямом.

Приклад 3.3. За допомогою степеневого методу знайти максимальне власне число матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, починаючи з початкового вектора $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. За наведеними вище формулами степеневого методу, прийнявши $\varepsilon = 0,001$, виконуємо наше завдання:

$$\tilde{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 \\ 1 \\ 0,66 \end{pmatrix}; \quad \mu_1 = 7;$$

$$\tilde{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 23/3 \\ 14/3 \end{pmatrix};$$

$$y^{(2)} = 3/23 \begin{pmatrix} 14/3 \\ 23/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/23 \\ 1 \\ 14/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6087 \\ 1 \\ 0,6087 \end{pmatrix};$$

$\mu_2 = 7,22$.

Умова $|\mu_2 - \mu_1| \le \varepsilon |\mu_2|$ не виконується, тому продовжуємо ітераційний процес

$$\tilde{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14/23 \\ 1 \\ 14/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102/23 \\ 171/23 \\ 102/23 \end{pmatrix};$$

$$y^{(3)} = 23/171 \begin{pmatrix} 102/23 \\ 171/23 \\ 102/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102/171 \\ 1 \\ 102/171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,596 \\ 1 \\ 0,596 \end{pmatrix};$$

$\mu_3 = 7,3354$.

Умова $|\mu_3 - \mu_2| \le \varepsilon |\mu_3|$ не виконується, знову продовжуємо ітераційний процес

$$\tilde{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 102/171 \\ 1 \\ 102/171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750/171 \\ 1263/171 \\ 750/171 \end{pmatrix};$$

$$y^{(4)} = 171/1263 \begin{pmatrix} 750/171 \\ 1263/171 \\ 750/171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5938 \\ 1 \\ 0,5938 \end{pmatrix};$$

$$\mu_4 = 7,3639.$$

Умова $|\mu_4 - \mu_3| \le \varepsilon |\mu_4|$ не виконується, продовжуємо обчислення далі

$$\tilde{y}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250/421 \\ 1 \\ 250/421 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1842/421 \\ 3105/421 \\ 1842/421 \end{pmatrix};$$

$$y^{(5)} = 421/3105 \begin{pmatrix} 1842/421 \\ 3105/421 \\ 1842/421 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1842/3105 \\ 1 \\ 1842/3105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5932 \\ 1 \\ 0,5932 \end{pmatrix};$$

$$\mu_5 = 7,3704.$$

Умова $|\mu_5 - \mu_4| \le \varepsilon |\mu_5|$ виконується, отже, ми знайшли наближене власне значення і власний вектор. Дані занесемо в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Наближення до власних значень і векторів за степеневим методом

μ, y_l	k					
	0	1	2	3	4	5
μ	–	7	7,2222	7,3354	7,3639	7,3704

y_1	1	0,6667	0,6087	0,5965	0,5938	0,5932
y_2	1	1	1	1	1	1
y_3	1	0,6667	0,6087	0,5965	0,5938	0,5932

Для матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ отримано власне значення $7{,}3704$ і власний вектор $\begin{pmatrix}0{,}5932\\ 1\\ 0{,}5932\end{pmatrix}$.

На комп'ютері степеневий метод можна реалізувати також у вигляді такого PM -алгоритму.

1. Увести $(n\times n)$-матрицю A, задати n-вимірний вектор $y^{(0)}$, обчислити $\left\|y^{(0)}\right\|$ і вектор $x^{(0)}=\dfrac{y^{(0)}}{\left\|y^{(0)}\right\|}$; прийняти $k=1$.
2. Обчислити вектор $y^{(k)}=Ax^{(k-1)}$.
3. Обчислити $\left\|y^{(k)}\right\|$ і $x^{(k)}=\dfrac{y^{(k)}}{\left\|y^{(k)}\right\|}$.
4. Обчислити співвідношення $\lambda_i^{(k)}=\dfrac{y_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}$ (координат векторів $y^{(k)}$ і $x^{(k-1)}$) при $i=1,2,...,n$ таких, що $\left|x_i^{(k-1)}\right|>\delta$, де $\delta>0$ – деяке задане мале число (допуск).
5. Випробувати число $\lambda_i^{(k)}$ тестом на збіжність. Якщо виявиться збіг необхідної кількості знаків $\lambda_i^{(k)}$ і $\lambda_i^{(k-1)}$ ($\lambda_i^{(0)}$ можна задавати довільно), то роботу алгоритму припинити і за старше власне число λ_1 прийняти усереднене (за i)

значення $\lambda_i^{(k)}$, а за нормований старший власний вектор x_1 – вектор $x^{(k)}$. Інакше повернутися до кроку 2.

3.3. Метод скалярних добутків

Метод скалярних добутків доцільно використовувати під час знаходження максимального за модулем власного числа матриці і відповідного до нього власного вектора *симетричної матриці*. Він має швидшу збіжність, ніж степеневий метод.

Обчислювальна схема методу скалярних добутків має вигляд [9]

$$y^{(k)} = A\tilde{y}^{(k-1)}\ ,\ \tilde{y}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{(y^{(k)}, y^{(k)})}} y^{(k)}\ ,\ \mu_k = \frac{(y^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, \tilde{y}^{(k-1)})}.$$

Умовою завершення процесу може слугувати умова

$$\left|\mu_k - \mu_{k-1}\right| \le \varepsilon \left|\mu_{k-1}\right|,$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність.

Приклад 3.4. Методом скалярних добутків знайти максимальне за модулем власне число матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ вибравши за початкове наближення } y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Зробимо декілька кроків цим методом.

Крок 1:

$$\tilde{y}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(y^{(0)}, y^{(0)})}} y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,57735 \\ 0,57735 \\ 0,57735 \end{pmatrix};$$

$$y^{(1)} = A\tilde{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,57735 \\ 0,57735 \\ 0,57735 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0,57735 + 2\cdot 0,57735 + 3\cdot 0,57735 \\ (2+5+2)\cdot 0,57735 \\ (3+2+1)\cdot 0,57735 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,46410 \\ 5,19615 \\ 3,46410 \end{pmatrix};$$

$$\mu_1 = \frac{(y^{(1)}, y^{(1)})}{(y^{(1)}, \tilde{y}^{(0)})} =$$

$$= \frac{\left(3,46410\cdot 3,46410 + 5,19615\cdot 5,19615 + 3,46410\cdot 3,46410\right)}{\left(3,46410\cdot 0,57735 + 5,19615\cdot 0,57735 + 3,46410\cdot 0,57735\right)} =$$

$$= \frac{50,99995}{6,99999} = 7,28571.$$

Крок 2:

$$\tilde{y}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(y^{(1)}, y^{(1)})}} y^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(3,46410 \cdot 3,46410 + 5,19615 \cdot 5,19615 + 3,46410 \cdot 3,46410)}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 3,46410 \\ 5,19615 \\ 3,46410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,46410/7.14143 \\ 5,19615/7.14143 \\ 3,46410/7.14143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,48507 \\ 0,72761 \\ 0,48507 \end{pmatrix};$$

$$y^{(2)} = A\tilde{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,48507 \\ 0,72761 \\ 0,48507 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0,48507 + 2 \cdot 0,72761 + 3 \cdot 0,48507 \\ 2 \cdot 0,48507 + 5 \cdot 0,72761 + 2 \cdot 0,48507 \\ 3 \cdot 0,48507 + 2 \cdot 0,72761 + 1 \cdot 0,48507 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,3955 \\ 5,57833 \\ 3,3955 \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = \frac{(y^{(2)}, y^{(2)})}{(y^{(2)}, \tilde{y}^{(1)})} =$$

$$= \frac{\left(3,3955 \cdot 3,3955 + 5,57833 \cdot 5,57833 + 3,3955 \cdot 3,3955\right)}{\left(3,3955 \cdot 0,48507 + 5,57833 \cdot 0,72761 + 3,3955 \cdot 0,48507\right)} =$$

$$= \frac{54,17940}{7,35334} = 7,368.$$

Результати цих та наступних кроків занесемо у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Результати обчислень за методом скалярних добутків

	k $y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	μ_k
	3,46410	5,19615	3,46410	7,28571
	3,39549	5,57831	3,39549	7,36800

	3,36101	5,63464	3,36101	7,37207
	3,35245	5,64554	3,35245	7,37227

З табл. 3.2 видно, що для отримання максимального власного числа з похибкою $\varepsilon = 0,0001$ достатньо чотирьох ітерацій. Отже, отримано такі власне число та ненормований і нормований власні вектори:

$$\mu_4 = 7,37227; \quad y^{(4)} = \begin{pmatrix} 3,35052 \\ 5,64787 \\ 3,35052 \end{pmatrix}; \quad \tilde{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,45593 \\ 0,76436 \\ 0,45593 \end{pmatrix}.$$

Реалізувати метод скалярних добутків на комп'ютері можна також у вигляді SP-алгоритму.

Крок 1. Увести: задану $n \times n$-матрицю A, довільний n-вимірний початковий вектор $y^{(0)} \neq 0$, мале число $\varepsilon > 0$ (допустиму абсолютну похибку шуканого власного числа λ_1), число $\lambda^{(0)}$ для початкового порівнювання (наприклад, 0). Задати $k = 1$ (включити лічильник ітерації).

Крок 2. Обчислити скаляри $s^{(0)} = (y^{(0)}, y^{(0)})$,

$\left\| y^{(0)} \right\|_2 = \sqrt{s^{(0)}}$ і вектор $x^{(0)} = \dfrac{y^{(0)}}{\left\| y^{(0)} \right\|_2}$.

Крок 3. Обчислити $y^{(k)} = Ax^{(k-1)}$ (ітерація нормованого вектора).

Крок 4. Обчислити $s^{(k)} = (y^{(k)}, y^{(k)})$ і $t^{(k)} = (y^{(k)}, x^{(k-1)})$;

$\left\| y^{(k)} \right\|_2 = \sqrt{s^{(k)}}$, $x^{(k)} = \dfrac{y^{(k)}}{\left\| y^{(k)} \right\|_2}$ (наближення до нормованого власного вектора), $\lambda^{(k)} = \dfrac{s^{(k)}}{t^{(k)}}$ (наближення до власного числа λ_1).

Крок 5. Якщо $\left|\lambda_k - \lambda_{k-1}\right| > \varepsilon$, то задати $k := k+1$ і повторити крок 3, інакше завершити роботу алгоритму, вважаючи, що $\lambda_1 \approx \lambda^{(k)}$, $x_1 \approx x^{(k)}$.

Зауваження. Цей алгоритм дає змогу швидше, ніж PM**-** алгоритм**,** знайти з потрібною точністю найбільше власне число матриці, проте точність наближеної рівності $x_1 \approx x^{(k)}$ для відповідного власного вектора може виявитися недостатньою.

3.4. Метод зворотних ітерацій

У деяких практичних задачах виникає потреба в знаходженні мінімального за модулем власного значення і відповідного йому власного вектора. Для розв'язування задачі можна використати модифікацію степеневого методу, ітеруючи вектор оберненою матрицею

$$y^{(k)} = A^{-1}\ y^{(k-1)}. \tag{3.5}$$

Отже, можна обчислювати максимальне власне значення матриці A^{-1}. Його обернене значення дорівнює мінімальному власному значенню матриці A. У випадку реалізації цього методу на практиці нема потреби знаходити обернену до A матрицю, оскільки це передбачає велику кількість арифметичних операцій. Тому замість ітерацій за формулою (3.5) на кожному кроці ітераційного процесу можна розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь

$$Ay^{(k)} = y^{(k-1)}.$$

У цьому разі, як і в степеневому методі, на кожному кроці необхідне нормування вектора.

Метод зворотних ітерацій, як і степеневий, має лінійну збіжність, тому на практиці використовують ті чи інші прийоми, що прискорюють його збіжність.

Один із можливих варіантів прискорення збіжності методу зворотних ітерацій відомий під назвою метод Віландта. В цьому методі за вихідною матрицею A будують деяку допоміжну матрицю $B = \left(A - \mu_i E\right)^{-1}$ з власними числами $v^{(k)} = \dfrac{1}{\left(\lambda_k - \mu_i\right)}$, де

μ_i – наближення до i-го власного значення λ_i матриці A. Потім степеневим методом знаходять максимальне власне значення матриці B. Оскільки за доброго початкового наближення μ_i значення λ_i домінує над іншими власними значеннями, то степеневий метод збігається за декілька ітерацій. Після отримання власного значення $\lambda_i^{(k)}$ (k – номер ітерації) матриці B власне значення матриці A знаходять за формулою

$$\lambda_i = \mu + \frac{1}{v^{(k)}}, \tag{3.6}$$

а $y_i^{(k)}$ є власним вектором, що відповідає цьому власному значенню. У цьому випадку, як і в методі зворотних ітерацій, нема потреби попередньо знаходити обернену матрицю до $\left(A - \mu_i E\right)$, а достатньо на кожному кроці степеневого методу розв'язати СЛАР

$$\left(A - \mu E\right) y^{(k)} = y^{(k-1)}. \tag{3.7}$$

Обчислювальну схему методу зворотних ітерацій для уточнення i-го власного значення матриці A` і обчислення відповідного йому власного вектора можна реалізувати так.

Перед початком ітераційного процесу задають наближення μ і λ_i, початкове наближення $y^{(0)}$ до власного вектора y_i, відносну похибку отримуваного власного значення ε. Тоді для $k = 1, 2, \ldots$

$$\left(A - \mu E\right)\tilde{y}^{(k)} = y^{(k-1)},\ v^{(k)} = \max_{1 \le i \le n}\left\{ \tilde{y}^{(k)} \right\},$$

$$y^{(k)} = \frac{\tilde{y}^{(k)}}{v^{(k)}}. \tag{3.8}$$

Якщо виявиться, що всі значення $y_i^{(k)} < 0$, то як $v^{(k)}$ беруть мінімальну компоненту $\tilde{y}_i^{(k)}$. Якщо $\left| v^{(k)} - v^{(k-1)} \right| < \varepsilon \left| v^{(k)} \right|$, то приймають

$$\lambda_i = \mu + \frac{1}{v^{(k)}}, \quad \text{а} \quad y_i = y^{(k)}.$$

У разі невиконання нерівності ітераційний процес продовжують.

Розглянутий нами метод Віландта можна використовувати в різних варіантах. Ним можна уточнювати довільні власні значення

матриці або власні значення і відповідні їм власні вектори. Цей метод дає змогу за відомим власним значенням знайти власний вектор, який йому належить. Методом Віландта можна обчислити мінімальне власне значення і відповідний йому вектор матриці A. Для цього попередньо виконують декілька зворотних ітерацій без зсуву; отримавши таким способом початкове наближення до мінімального власного значення, його уточнюють методом Віландта.

Перевагами методу є достатньо швидка збіжність, можливість збереження вихідної структури матриці, простота реалізації на комп'ютерах. До недоліків треба зачислити необхідність розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь на кожному кроці процесу. Та, якщо відомий трикутний розклад матриці, то на кожному кроці потрібно виконувати лише зворотний хід.

Приклад 3.5. Нехай задано матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 10 \\ -1 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, відоме наближення до третього власного значення $\mu_3 = 0,7$. Потрібно уточнити третє власне значення і відповідний власний вектор.

Розв'язування. Побудуємо матрицю

$$\left(A - \mu_3 E\right) = \begin{pmatrix} 32,3 & 16,0 & 72,0 \\ -24,0 & -10,7 & -57,0 \\ -8,0 & -4,0 & -17,7 \end{pmatrix}.$$

Виберемо початкове наближення до другого власного вектора $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ і, розв'язавши систему лінійних алгебричних рівнянь $\left(A - \mu_3 E\right) \tilde{y}^{(1)} = y^{(0)}$,

отримаємо $\tilde{y}^{(1)}=\begin{pmatrix} -2{,}06254 \\ 1{,}65652 \\ 0{,}55730 \end{pmatrix}\times 10^2$. Виконаємо нормування $\tilde{y}^{(1)}$, поділивши всі його компоненти на максимальну за модулем компоненту $v^{(1)}=-2{,}06254\cdot 10^2$. Отримаємо $y^{(1)}=\begin{pmatrix} 1{,}00000 \\ -0{,}80314 \\ -0{,}27020 \end{pmatrix}$.

Далі $v^{(2)}=3{,}90819$, розв'язуємо систему рівнянь $\left(A-\mu_3 E\right)\tilde{y}^{(2)}=y^{(1)}$ і нормуємо її розв'язок. Тоді отримаємо $y^{(2)}=\begin{pmatrix} 1{,}00000 \\ -0{,}80022 \\ -0{,}26723 \end{pmatrix}$ і т.д. У підсумку матимемо $v^{(5)}=3{,}33693$, а $v^{(6)}=3{,}33411$, $y^{(6)}=\begin{pmatrix} 1{,}00000 \\ -0{,}79999 \\ -0{,}26666 \end{pmatrix}$.

Отже, з точністю до трьох десяткових знаків значення $v^{(6)}$ є максимальним власним значенням матриці $\left(A-\mu_3 E\right)^{-1}$. Третім власним значенням матриці A є

$$\lambda_3=\mu_3+\frac{1}{v^{(6)}}=0{,}7+0{,}29992=0{,}99992\ ,$$

а $y^{(6)}$ – наближений власний вектор, що відповідає λ_3.

Зазначимо, що точними власними значеннями матриці є $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

3.5. Зворотні ітерації зі змінними зсувами. RQI-алгоритм

Практика обчислень засвідчує, що збіжність процесу зворотних ітерацій зі зсувами має велику швидкість (порівняно зі звичайним

степеневим методом). Однак ще більшу швидкість збіжності можна отримати введенням змінних зсувів, які визначені якоюсь послідовністю чисел $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, ...,$ збіжною до шуканого власного числа. Як такі числа *доцільно* використовувати наближення $\lambda_j^{(k)}$ до власного λ_j, отримувані за формулою (3.6).

Отже, зворотні ітерації зі змінними зсувами можна визначити сукупністю рівностей

$$\left(A - \lambda_j^{(k-1)} E\right) y^{(k)} = x^{(k-1)};$$

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\left\| y^{(k)} \right\|}; \qquad (3.9)$$

$$\lambda_j^{(k)} = \lambda_j^{(k-1)} + \left\langle \frac{x_i^{(k-1)}}{y_i^{(k)}} \right\rangle,$$

де $k = 1, 2, ...,$ а число $\lambda_i^{(0)} \approx \lambda_i$ і нормований вектор $x^{(0)}$ задані.

Швидкість збіжності такого процесу – квадратична [7], тоді як у випадку постійних зсувів – лише лінійна, хоча з малими, як звичайно, знаменниками геометричної прогресії. Часто буває достатньо зробити дві–три ітерації, щоб отримати задану власну пару з реально можливою точністю. Однак у першому випадку при кожному k розв'язують СЛАР з однією й тією ж матрицею коефіцієнтів, а в другому – на різних кроках треба розв'язувати цілком різні системи.

У методі (3.9) часто не відомо, як підбирати початковий зсув $\sigma = \lambda_i^{(0)}$, хіба що треба знайти власне число, найближче до заданого значення, і відповідний йому власний вектор.

Визначенішою і, до того ж, швидше збіжною, є така модифікація методу (3.9): зворотні ітерації зі співвідношеннями Релея, які застосовують для розв'язування симетричних задач на власні значення. Їхньою основою є RQI-алгоритм (Rayleigh quotient iteration) [3,10,19].

RQI-алгоритм.

Крок 0. Задати вектор $x^{(0)}$ такий, що $\left\| x^{(0)} \right\| = 1$.

Крок 1. Для $k = 1, 2, ...$:

1.1) обчислити $\rho_{k-1} = \left(Ax^{(k-1)}, x^{(k-1)}\right) / \left(x^{(k-1)}, x^{(k-1)}\right)$;

1.2) знайти $y^{(k)}$ з рівняння $\left(A - \rho_{k-1}E\right) y^{(k)} = x^{(k-1)}$;

1.3) нормувати $y^{(k)}$, тобто прийняти $x^{(k)} = y^{(k)} / \left\| y^{(k)} \right\|$;

1.4) перевірити ρ_{k-1}, $x^{(k)}$ на збіжність. Перейти на крок 1.1 або зупинитися.

Після нормального припинення роботи алгоритму за деякого $k = k_0$ за власну для заданої матриці A беруть пару $\left(\rho_{k_0-1}, x^{(k_0)}\right)$. Зазначимо, що як критерій припинення можна використати умову $\left\| y^{(k)} \right\| > C$, де C – достатньо велике число.

Зсуви на співвідношення Релея за наявності ортонормованого базису із власних векторів $x_1, x_2, ..., x_n$ забезпечують асимптотично кубічну швидкість збіжності послідовності Релея $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ до деякого з векторів цього базису. До якого – залежить від вибору початкового вектора цієї послідовності.

Зазначимо, що RQI-алгоритм потребує доброго початкового наближення. Тому іноді корисно зробити спочатку *кілька кроків* PM -алгоритму.

Приклад 3.6. До симетричної матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ застосувати RQI-алгоритм, узявши за початковий вектор $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ та прийнявши $C = 10^5$.

*Розв'язування***.** Для $k = 1$.

Крок 1.1. Потрібно знайти спочатку добуток матриці A на початковий вектор $x^{(0)}$: $Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Далі обчислюємо скалярний добуток векторів: $\left(Ax^{(0)}, x^{(0)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 21$; $\left(x^{(0)}, x^{(0)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3$.

Тоді, маючи необхідні дані, знаходимо $\rho_0 = \left(Ax^{(0)}, x^{(0)}\right) / \left(x^{(0)}, x^{(0)}\right) = 21/3 = 7$.

Крок 1.2. З заданого рівняння $\left(A - \rho_0 E\right) y^{(1)} = x^{(0)}$, тобто з рівняння

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

отримаємо вектор $y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Крок 1.3. Знайдемо $x^{(1)} = y^{(1)} / \left\| y^{(1)} \right\|$. Норму $\left\| y^{(1)} \right\|$ шукаємо так: $\left\| y^{(1)} \right\| = \sqrt{\left(\left(y_1^{(1)}\right)^2 + \left(y_2^{(1)}\right)^2 + \left(y_3^{(1)}\right)^2\right)}$. Тоді $\left\| y^{(1)} \right\| = \sqrt{4 + 12,25 + 4} = 4,5$. Тепер можемо знайти вектор

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} / 4,5 \\ y_2^{(1)} / 4,5 \\ y_3^{(1)} / 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,444444444444 \\ 0,777777777778 \\ 0,444444444444 \end{pmatrix}.$$

Крок 1.4. Перевіряємо на збіжність так: чи $\left\| y^{(k)} \right\| > C$, якщо так, то виходимо з алгоритму, інакше переходимо на крок 1.1. Очевидно, $\left\| y^{(1)} \right\| < C$.

Тепер виконаємо цей алгоритм для $k = 2$.

Крок 1.1. Потрібно визначити $\rho_1 = \left(Ax^{(1)}, x^{(1)}\right) / \left(x^{(1)}, x^{(1)}\right)$.

Знайдемо спочатку добуток матриці A на вектор

$$x^{(1)} : Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,444444444444 \\ 0,777777777778 \\ 0,444444444444 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,333333333333 \\ 5,666666666667 \\ 3,333333333333 \end{pmatrix}.$$

Далі обчислимо добутки векторів:

$$\left(Ax^{(1)}, x^{(1)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3{,}333333333333 \\ 5{,}666666666667 \\ 3{,}333333333333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}444444444444 \\ 0{,}777777777778 \\ 0{,}444444444444 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 7{,}37037037037037;$$

$$\left(x^{(1)}, x^{(1)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0{,}444444444444 \\ 0{,}777777777778 \\ 0{,}444444444444 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}444444444444 \\ 0{,}777777777778 \\ 0{,}444444444444 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 1{,}00000000000000.$$

Тоді, маючи необхідні дані, знайдемо

$$\rho_1 = \left(Ax^{(1)}, x^{(1)}\right) / \left(x^{(1)}, x^{(1)}\right) = 7{,}37037037037037 .$$

Крок 1.2. З рівняння $\left(A - \rho_1 E\right) y^{(2)} = x^{(1)}$, тобто з системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -6{,}370370370370 & 2{,}000000000000 & 3{,}000000000000 \\ 2{,}000000000000 & -2{,}370370370370 & 2{,}000000000000 \\ 3{,}000000000000 & 2{,}000000000000 & -6{,}370370370370 \end{pmatrix} y^{(2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}444444444444 \\ 0{,}777777777778 \\ 0{,}444444444444 \end{pmatrix}$$

знаходимо $y^{(2)}$:

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 2{,}37749999999776 \\ 4{,}00874999999623 \\ 2{,}37749999999776 \end{pmatrix} \times 10^2.$$

Крок 1.3. Шукаємо $\left\| y^{(2)} \right\| = 5{,}232120895243966 \times 10^2$. Тепер можемо знайти вектор $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}45440463773666 \\ 0{,}76618069044242 \\ 0{,}45440463773666 \end{pmatrix}.$$

Крок 1.4. Перевіряємо на збіжність, тобто чи $\left\| y^{(k)} \right\| > C$. Задана умова не виконується.

Продовжуємо алгоритм для $k = 3$.

Крок 1.1. Знаходимо $\rho_2 = \left(Ax^{(2)}, x^{(2)} \right) / \left(x^{(2)}, x^{(2)} \right)$ та добуток матриці A на вектор $x^{(2)}$:

$$Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}45440463773666 \\ 0{,}76618069044242 \\ 0{,}45440463773666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}34997993183149 \\ 5{,}64852200315875 \\ 3{,}34997993183149 \end{pmatrix}.$$

Далі обчислюємо добуток векторів

$$\left(Ax^{(2)}, x^{(2)} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3{,}34997993183149 \\ 5{,}64852200315875 \\ 3{,}34997993183149 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}45440463773666 \\ 0{,}76618069044242 \\ 0{,}45440463773666 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 7{,}37228132305734;$$

$\left(x^{(2)}, x^{(2)} \right) = 1{,}00000000000000$ і знаходимо

$$\rho_2 = \left(Ax^{(1)}, x^{(1)} \right) / \left(x^{(1)}, x^{(1)} \right) = 7{,}37228132305734.$$

Крок 1.2. З рівняння $\left(A - \rho_2 E \right) y^{(3)} = x^{(2)}$, тобто з

$$\begin{pmatrix} -6{,}37228132305734 & 2{,}00000000000000 & 3{,}00000000000000 \\ 2{,}00000000000000 & -2{,}37228132305734 & 2{,}00000000000000 \\ 3{,}00000000000000 & 2{,}00000000000000 & -6{,}37228132305734 \end{pmatrix} \times$$

$$\times y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}45440463773666 \\ 0{,}76618069044242 \\ 0{,}45440463773666 \end{pmatrix}.$$

знаходимо:

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 2{,}14669210717966 \\ 3{,}61962484992548 \\ 2{,}14669210717966 \end{pmatrix} \times 10^9.$$

Крок 1.3. Шукаємо $\left\| y^{(3)} \right\| = 4{,}724220365335739 \cdot 10^9$ та $x^{(3)}$:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}45440134904187 \\ 0{,}76618459132108 \\ 0{,}45440134904187 \end{pmatrix}.$$

Крок 1.4. Перевіряємо на збіжність. Оскільки $\left\| y^{(3)} \right\| = 4{,}724220365335739 \cdot 10^9 > C$, то ітераційний процес завершений. У цьому разі $\rho_3 = \left(Ax^{(3)}, x^{(3)} \right) / \left(x^{(3)}, x^{(3)} \right) =$ $=7{,}37228132326901$. На підставі порівняння цього значення з попереднім ρ_2 бачимо, що в них збігаються десять десяткових знаків. Це свідчить про високу швидкість збіжності розглянутого алгоритму.

3.6. Метод поворотів Якобі для знаходження власних пар симетричної матриці

Для розв'язування повної проблеми власних значень для симетричних матриць розроблено класичний метод Якобі, який має квадратичну швидкість збіжності.

Класичний ітераційний метод поворотів, запропонований Якобі (1846), передбачає побудову послідовності матриць

$$B_0 (:= A), B_1, B_2, ..., B_k, ...$$

за допомогою перетворень типу

$$B_k = T_{ij}^T B_{k-1} T_{ij} \tag{3.10}$$

такої, що на k-му кроці зазнає занулення максимальний за модулем елемент матриці B_{k-1} попереднього кроку (а отже, і симетричний до нього елемент). На кожному кроці таких перетворень відбуваються перетворення тільки двох рядків (або двох стовпців, що неважливо з огляду на симетрію) матриці попереднього кроку. Хоча, на жаль, не треба сподіватися, що таким способом за скінченну кількість кроків можна точно знайти діагональну матрицю Λ, бо отримані на деякому етапі перетворень нульові елементи на наступному етапі стануть ненульовими, проте

$$B_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \Lambda ,$$

де Λ – діагональна матриця, на діагоналі якої стоять власні числа матриці A.

У n-вимірному випадку запишемо сукупність формул, які визначають *один крок методу поворотів Якобі*.

Для простоти будемо вважати, що перетворюємо матрицю A в матрицю B згідно з (3.10), хоча насправді на k-му кроці потрібно застосовувати перетворення (3.10) до матриці $B_{k-1} = \left(b_{ml}^{(k-1)}\right)$ з результатом $B_k = \left(b_{ml}^{(k)}\right)$.

Нехай a_{ij} – головний елемент перетворюваної матриці A. Матрицю B, подібну до A, формують так.

1. Обчислюють $p := 2a_{ij}$, $q := a_{ii} - a_{jj}$, $d := \sqrt{p^2 + q^2}$.

2. Якщо $q \neq 0$, то $r := \dfrac{|q|}{2d}$, $c := \sqrt{0,5 + r}$, $s := \sqrt{0,5 - r} \cdot \mathrm{sign}(pq)$

(якщо $p << q$, то ліпше $s := |p| \cdot \mathrm{sign}(pq)/(2cd)$, якщо ж $q = 0$, то $c = s := \sqrt{2}/2$).

3. Обчислюють нові діагональні елементи

$b_{ii} := c^2 a_{ii} + s^2 a_{jj} + 2csa_{ij}$,

$b_{jj} := s^2 a_{ii} + c^2 a_{jj} - 2csa_{ij}$.

4. Приймають $b_{ij} = b_{ji} := 0$ (або для контролю обчислюють $b_{ij} = b_{ji} := \left(c^2 - s^2\right)a_{ij} + cs\left(a_{jj} - a_{ii}\right)\Big)$.

5. При $m = 1, 2, ..., n$ таких, що $m \neq i$, $m \neq j$, обчислюють змінювані позадіагональні елементи:

$b_{im} = b_{mi} := ca_{mi} + sa_{mj}$,

$b_{jm} = b_{mj} := -sa_{mi} + ca_{mj}$.

6. Для решти пар індексів m, l приймають $b_{ml} := a_{ml}$.

Звичайно, в реальних обчисленнях, якщо це вважати основою алгоритму, не все записане тут треба виконувати, зокрема, останні переприсвоювання. Також потрібно враховувати симетрію отримуваної матриці B.

Зазначимо, що найбільші вимоги до точності в описуваному методі ставлять саме на стадії обчислення c і s, оскільки тут можливі найбільші втрати точності, а спотворення c і s порушує

ортогональність матриць T_{ij}. Це веде до неусувних похибок (метод поворотів, ітераційний за формою, не є ітераційним за суттю: йому не властиве самовиправлення методів послідовних наближень).

Приклад 3.7. Методом поворотів Якобі розв'язати задачу знаходження усіх власних пар матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язування***.** Для заданої симетричної матриці A ми поетапно застосовуємо алгоритм, що переводить її у матрицю B, яка подібна до A і має меншу суму квадратів позадіагональних елементів. У цьому разі ключовий позадіагональний елемент a_{ij} будемо брати у піддіагональній частині матриці A (можна і навпаки, у цьому разі принципово нічого не зміниться) і припускатимемо, що всі обчислення будемо проводити точно (тобто розглядаємо ідеальний процес).

Перший етап. Вибираємо ключовий елемент a_{31} (максимальний у зазначеній частині матриці) і фіксуємо індекси $i = 3,\ j = 1$. Знаходимо

$$p = 2a_{31} = 6; \qquad q = a_{33} - a_{11} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далі знаходимо елементи нової матриці

$$b_{33} = c^2 a_{33} + s^2 a_{11} + 2csa_{31} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 2\frac{1}{2}\cdot 3 = 4;$$

$$b_{11} = s^2 a_{33} + c^2 a_{11} - 2csa_{31} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 - 2\frac{1}{2}\cdot 3 = -2$$

і при $m = 2$

$$b_{32} = b_{23} = ca_{23} + sa_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+2) = 2\sqrt{2};$$

$$b_{12} = b_{21} = -sa_{23} + ca_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2+2) = 0.$$

Отже, $A \infty B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

Другий етап. Отриману на попередньому кроці матрицю B вважатимемо матрицею A, тобто будемо обчислювати за тими ж формулами, прийнявши $A := B$. Ключовий елемент тут $a_{32} = 2\sqrt{2}$, тобто $i = 3,\ j = 2$. Згідно з алгоритмом,

$$p = 2a_{32} = 4\sqrt{2}; \qquad q = a_{33} - a_{22} = 4 - 5 = -1$$

(зазначимо, що $p \cdot q < 0$),

$$d = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{32+1} = \sqrt{33}, \quad r = \frac{|q|}{2d} = \frac{1}{2\sqrt{33}};$$

$$c = \sqrt{0,5 + r} = \sqrt{0,5 + \frac{1}{2\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}};$$

$$s = \operatorname{sign}(p \cdot q)\sqrt{0,5 - r} = -\sqrt{0,5 - \frac{1}{2\sqrt{33}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}}.$$

Знаючи числа c і s, які визначають перетворення повороту, обчислимо

$$b_{33} = c^2 a_{33} + s^2 a_{22} + 2csa_{32} = \frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}} \cdot 4 +$$

$$+ \frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}} \cdot 5 + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}}\right)\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}}\right) \cdot 2\sqrt{2} \approx 1,6277;$$

$$b_{22} = s^2 a_{33} + c^2 a_{22} - 2csa_{32} \frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}} \cdot 4 +$$

$$+ \frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}} \cdot 5 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}}\right)\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}}\right) \cdot 2\sqrt{2} \approx 7,3723$$

і далі при $m = 1$

$$b_{31} = b_{13} = ca_{13} + sa_{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} \cdot 0 + \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} \right) \cdot 0 = 0;$$

$$b_{12} = b_{21} = -sa_{23} + ca_{21} = \sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} \cdot 0 + \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} \cdot 0 = 0 .$$

Отже, уже після другого етапу (це не норма, а будемо вважати, що пощастило) отримано діагональну матрицю

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7,3723 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6277 \end{pmatrix},$$

подібну до початкової матриці A, з огляду на що можна стверджувати, що власними значеннями матриці A є числа

$\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 7,3723$; $\lambda_3 = 1,6277$.

Щоб знайти відповідні їм власні вектори, випишемо матрицю плоских поворотів першого і другого етапів (відповідно до їхньої структури):

$$T_{ij}^{(1)} = T_{31} = \begin{pmatrix} c^{(1)} & 0 & s^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s^{(1)} & 0 & c^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$T_{ij}^{(2)} = T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^{(2)} & s^{(2)} \\ 0 & -s^{(2)} & c^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} & -\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} & \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} \end{pmatrix}.$$

Їхній добуток, тобто матриця

$$T = T_{31} \cdot T_{32} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} & -\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{2\sqrt{33}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{2\sqrt{33}}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}4544 & 0{,}5418 \\ 0 & 0{,}7662 & -0{,}6426 \\ -0{,}7071 & 0{,}4544 & 0{,}5418 \end{pmatrix},$$

згідно з теоретичними твердженнями, має стовпцями власні вектори матриці A.

Легко перевірити за означенням, що її стовпці у природному порядку, тобто вектори $x_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7071 \\ 0 \\ -0{,}7071 \end{pmatrix}$; $x_2 = \begin{pmatrix} 0{,}4544 \\ 0{,}7662 \\ 0{,}4544 \end{pmatrix}$; $x_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5418 \\ -0{,}6426 \\ 0{,}5418 \end{pmatrix}$ утворюють власні пари з числами $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7{,}3723$, $\lambda_3 = 1{,}6277$, відповідно.

3.7. LU -алгоритм для несиметричних задач

Часто (принаймні в несиметричному випадку) алгоритми наближеного розв’язування повних проблем власних значень грунтуються на зведенні заданих матриць до подібних їм матриць не діагонального, а трикутного вигляду. Найпростіший з таких алгоритмів обчислення власних чисел грунтується на добре відомому LU -розкладі матриць.

Нехай задано $(n \times n)$-матрицю A у вигляді $A = LU$, де L і U – відповідно, нижня і верхня трикутні матриці. Позначимо $A_1 = UL$ (нагадаємо, що добуток матриць не комутативний), тоді $U = A_1 L^{-1}$. Підставимо цей вираз матриці U в рівняння $A = LU$, отримаємо нове зображення A:

$$A = LA_1 L^{-1}, \tag{3.11}$$

яке свідчить про подібність матриць A і A_1, тобто рівність їхніх власних чисел λ_A і λ_{A_1}.

Якщо матрицю A_1 можна, як і A, записати у вигляді добутку нижньої L_1 і верхньої U_1 трикутних, тобто $A_1 = L_1 U_1$, то, прийнявши $A_2 = U_1 L_1$ і визначивши звідси $U_1 = A_2 L_1^{-1}$, аналогічно до попереднього отримаємо

$$A_1 = L_1 A_2 L_1^{-1}. \tag{3.12}$$

Відповідно, A_1 подібна A_2 і, отже, $\lambda_{A_1} = \lambda_{A_2}$.

Суперпозиція цих двох перетворень, тобто підстановка (3.12) в (3.11), дає A через A_2:

$$A = LLA_2 L_1^{-1} L^{-1} = LL_1 A_2 (LL_1)^{-1},$$

звідки випливає рівність власних чисел λ_A і λ_{A_1}.

Такий процес побудови теоретично нескінченної послідовності подібних матриць і є основою LU (інакше LR)-алгоритму. Він визначений фактично двома формулами:

$$A_k = L_k U_k, \quad A_{k+1} = U_k L_k, \tag{3.13}$$

де $A_0 = A$, $k = 0, 1, 2$, причому перша з цих формул означає процедуру трикутної факторизації матриці A_k на k-му кроці, а друга – просте множення верхньої трикутної матриці на нижню.

Приклад 3.8. Розглянемо, як поводиться LU-алгоритм (3.13), застосований для знаходження власних чисел матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Виконаємо LU-розклад за формулами $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \geq j), \quad u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) \quad (i < j),$ отримаємо

$$A_0 := A = L_0 U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A_1 := U_0 L_0 = \begin{pmatrix} 21 & -90 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}.$$

Після факторизації цієї матриці аналогічно до попередньої маємо

$$A_1 = L_1 U_1 = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 4 & -0,8571 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4,2857 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ звідки

$$A_2 := U_1 L_1 = \begin{pmatrix} 3,8571 & 3,6734 \\ 4 & -0,8571 \end{pmatrix}.$$ Наступний крок дає

$$A_2 = L_2 U_2 = \begin{pmatrix} 3,8571 & 0 \\ 4 & -4,6667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,9524 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ далі

$$A_3 := U_2 L_2 = \begin{pmatrix} 7,6667 & -4,4445 \\ 4 & -4,6667 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = L_3 U_3 = \begin{pmatrix} 7,6667 & 0 \\ 4 & -2,3478 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5797 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_4 := U_3 L_3 = \begin{pmatrix} 5,3478 & 1,3611 \\ 4 & -2,3478 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = L_4 U_4 = \begin{pmatrix} 5,3478 & 0 \\ 4 & -3,3659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,2545 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_5 := U_4 L_4 = \begin{pmatrix} 6,3659 & -0,8566 \\ 4 & -3,3659 \end{pmatrix}.$$

Якщо в тому ж прикладі фіксувати одиничну діагональ у матриць L_k, то процес (3.13), для якого використовують формули $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$ при $i \geq j$, $l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})$ при $i < j$, розвиватиметься так:

$$\tilde{A}_0 := A = \tilde{L}_0\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_1 := \tilde{U}_0\tilde{L}_0 = \begin{pmatrix} 21 & 5 \\ -72 & -18 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{L}_1\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3,4286 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 0 & -0,8571 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_2 := \tilde{U}_1\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 3,8571 & 5 \\ 2,9388 & -0,8571 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_2 = \tilde{L}_2\tilde{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,7619 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3,8571 & 5 \\ 0 & -4,6667 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_3 := \tilde{U}_2\tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} 7,6667 & 5 \\ -3,5556 & -4,6667 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{L}_3\tilde{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,4638 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7,6667 & 5 \\ 0 & -2,3478 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_4 := \tilde{U}_3\tilde{L}_3 = \begin{pmatrix} 5,3478 & 5 \\ 1,0888 & -2,3478 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_4 = \tilde{L}_4\tilde{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2036 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5,3478 & 5 \\ 0 & -3,3659 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_5 := \tilde{U}_4\tilde{L}_4 = \begin{pmatrix} 6,3659 & 5 \\ -0,6853 & -3,3659 \end{pmatrix}.$$

Діагоналі матриць A_k і $\tilde{A}_k$, які несуть наближення до власних чисел A, за одних і тих же значеннь A повністю збігаються.

Приклад 3.9. Розглянемо, як поводиться LU-алгоритм (3.13), застосований для знаходження власних чисел матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Виконаємо LU-розклад за формулами

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\ , \qquad (i \ge j\ ) \qquad u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj})\ , \qquad (i < j\ )$$

отримаємо

$$A_0 = A = L_0 U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 5 & -8 & 1,6666 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1,8333 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = U_0 L_0 = \begin{pmatrix} 24 & -36 & 5 \\ 13,1666 & -20,6667 & 3,0555 \\ 5 & -8 & 1,6667 \end{pmatrix}.$$

Після факторизації цієї матриці аналогічно до попередньої, маємо

$$A_1 = L_1 U_1 = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 13,1667 & -0,9167 & 0 \\ 5 & -0,5 & 0,4545 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1,5 & 0,26 \\ 0 & 1 & -0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки

$$A_2 = U_1 L_1 = \begin{pmatrix} 5,2917 & 1,2708 & 0,0947 \\ 11,4621 & -0,5757 & 4,7004 \\ 5 & -0,5 & 0,4545 \end{pmatrix}.$$

Наступний крок дає

$$A_2 = L_2 U_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 5,2917 & 0 & 0 \\ 11,4621 & -3,3285 & 0 \\ 5 & -1,7008 & 8,0106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,2401 & 0,0179 \\ 0 & 1 & 4,4953 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = U_2 L_2 = \begin{pmatrix} 8,1338 & -0,8119 & 0,1433 \\ 33,9419 & -10,9740 & 36,0101 \\ 5 & -1,7008 & 8,0106 \end{pmatrix}.$$

Для отримання остаточного результату обчислимо матрицю A на 10- і 20-му кроках за допомогою відповідної програми. Отримаємо такий результат:

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 7,1741 & 0,0007 & 0 \\ 11,9051 & -2,6917 & 0 \\ 5 & -1,2989 & 0,5176 \end{pmatrix};$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 7,1751 & 0 & 0 \\ 11,9051 & -2,6927 & 0 \\ 5 & -1,2989 & 0,5176 \end{pmatrix}.$$

Якщо в тому ж прикладі фіксувати одиничну діагональ у матриць L_k, то процес (3.13), для якого використовують формули

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \le j); \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})$ при $i > j$, буде розвиватися так:

$$\tilde{A}_0 = A = \tilde{L}_0 \tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1,3333 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1,6667 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{U}_0 \tilde{L}_0 = \begin{pmatrix} 24 & 5,9999 & 3 \\ -79 & -20,6667 & -11 \\ 8,3331 & 2,2223 & 1,6667 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{L}_1 \tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3,2917 & 1 & 0 \\ 0,3472 & 0,1515 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 5,9999 & 3 \\ 0 & 0,9167 & -1,1249 \\ 0 & 0 & 0,7955 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_2 := \tilde{U}_1 \tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 5,2416 & 6,0454 & 3 \\ -3,408 & 0,7462 & -1,125 \\ 0,2762 & 0,1515 & 0,7955 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_2 = \tilde{L}_2 \tilde{U}_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,6512 & 1 & 0 \\ 0,0527 & -0,0357 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,2416 & 6,0454 & 3 \\ 0 & 4,6768 & 0,8255 \\ 0 & 0 & 0,6669 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{U}_2 \tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} 8{,}1338 & 5{,}9383 & 3 \\ -3{,}0455 & -10{,}9740 & 0{,}8255 \\ 0{,}0351 & -0{,}0238 & 8{,}0106 \end{pmatrix}.$$

Для отримання остаточного результату обчислимо матрицю A на 10- і 20-му кроках за допомогою відповідної програми. Отримаємо такий результат:

$$\tilde{A}_{10} = \begin{pmatrix} 7{,}1741 & 5{,}7208 & 3 \\ 0{,}0016 & -2{,}6917 & -2{,}1108 \\ 0 & 0 & 0{,}5176 \end{pmatrix};,$$

$$\tilde{A}_{20} = \begin{pmatrix} 7{,}1751 & 5{,}7208 & 3 \\ 0 & -2{,}6927 & -2{,}1112 \\ 0 & 0 & 0{,}5176 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, діагоналі матриць A_k і $\tilde{A}_k$, які становлять наближення до власних чисел матриці A, за одних і тих же значень k збігаються, а відносна швидкість спадання модулів наддіагональних елементів A_k і піддіагональних елементів $\tilde{A}_k$ приблизно однакова.

3.8. QR-алгоритм з використанням перетворень Хаусхолдера

Ідейно близьким до описаного LU-алгоритму є QR-алгоритм (В.Н. Кублановська, 1961; Дж. Френсіс, 1962). При $k = 0,1,2,...$, починаючи з $A_0 := A$, тут будують послідовність матриць A_k за формулами

$$A_k = Q_k R_k; \qquad A_{k+1} = R_k Q_k, \tag{3.14}$$

перша з яких означає розклад матриці A_k в добуток ортогональної Q_k і правої трикутної R_k (такий розклад існує для довільної квадратної матриці), а друга – перемноження отриманих унаслідок факторизації A_k матриць Q_k і R_k у зворотному порядку.

Аналогічно до п. 3.7, на підставі властивості ортогональних матриць $Q_k^T = Q_k^{-1}$, відповідно до (3.14), матрицю A можна записати у вигляді

$$A = Q_0 Q_1 ... Q_{k-1} Q_k A_{k+1} Q_k^T Q_{k-1}^T ... Q_1^T Q_0^T$$

або

$$A = (Q_0 Q_1 ... Q_{K-1} Q_K) A_{k+1} (Q_0 Q_1 ... Q_{k-1} Q_k)^{-1}.$$

Це означає, що кожна з матриць послідовності A_k ортогонально подібна до матриці A.

Якщо матриця A не має однакових за модулем власних значень, то за певних обмежень утворена процесом (3.14) послідовність матриць $\{A_k\}$ збігається до матриці правої трикутної форми з діагоналлю із власних чисел. Швидкість занулення піддіагональних частин матриць A_k лінійна і залежить, як і в багатьох інших методах, від співвідношення $\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|}$ при $i > j$ (уважаємо $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$).

У випадку наявності комплексно-спряжених пар власних чисел у заданої дійсної матриці A граничною матрицею для A_k буде матриця квазітрикутного (блоково-трикутного) вигляду. Кожній комплексній парі власних чисел у такій матриці буде відповідати діагональний 2×2-блок, причому збіжність тут простежується за формою матриці, а не поелементно (тобто елементи всередині цих блоків можуть змінюватися без помітної залежності від k зі збереженням незмінними їхніх власних чисел).

Як звичайно, QR-алгоритм (3.14) застосовують не до вихідної матриці A, а до подібної їй правої майже трикутної матриці B, яку називають матрицею Хессенберга:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & b_{32} & ... & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ .. & 0 & ... & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & ... & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

В основі перетворення A до вигляду B (де $b_{ij}=0$ при $j<i-1$) є перетворення Хаусхолдера, або перетворення відбиття, виконуване за допомогою матриці відбиття (Хаусхолдера) $H=E-2ww^T$, де w – довільний вектор-стовпець, але такий, що його евклідова норма дорівнює одиниці. Як відомо, матриця відбиття ортогональна, тому матриці A і B, пов'язані співвідношенням $B=HAH$ $\left(=HAH^T=HAH^{-1}\right)$, є подібними.

У разі побудови матриць відбиття елементи векторів w вибирають так, щоб за скінченну кількість кроків перетворень Хаусхолдера довільну задану матрицю A звести до форми Хессенберга B.

Справді, започаткованим з $B_1:=A$ процесом

$$B_{m+1}=H_mB_mH_m, \qquad m=1,2,...,n-2,$$

де

$$H_m=E-2ww^T \qquad (=Q)$$

задана $n\times n$-матриця A за $n-2$ кроки буде зведена до вигляду B, тобто $B:=B_{n-1}$ подібна до A, якщо вектори w_m, які задають матриці Хаусхолдера H_m, за заданою матрицею A будувати так [14].

При $m=1$ вектор w_1 визначений рівністю

$$w_1^T=\mu_1(0,a_{21}-s_1,a_{31},...,a_{n,1}) \ ,$$

де $s_1=\operatorname{sign}(-a_{21})\sqrt{\sum_{i=2}^{n}a_{i,1}^{\ 2}}$, $\mu_1=\dfrac{1}{\sqrt{2s_1(s_1-a_{21})}}$.

Таке задання w_1 забезпечує ортогональність симетричної матриці $H_1=E-2w_1w_1^T$ й одночасне отримання за її допомогою потрібних $n-2$ нулів у першому стовпці матриці

$$B_2=H_1B_1H_1 \quad (=H_1AH_1) \ .$$

Вектор w_2 за матрицею B_2 будують аналогічно, тільки фіксують нульовими не одну, а дві перші його координати. Визначальну роль відіграють тут не перший, а другий стовпець матриці B_2 і його третій елемент. У цьому разі в матриці $B_3=H_2B_2H_2$ виявляються $n-3$ нульові елементи у другому

стовпці і зберігаються отримані на попередньому кроці нулі в першому стовпці.

Цей процес аналогічно можна продовжити до вичерпання.

Зазначимо, що для симетричних матриць цей процес приводить до тридіагональної матриці.

Розглянемо на прикладі, як матрицю зводять до форми Хессенберга, коли для цього потрібний лише один крок перетворень Хаусхолдера.

Приклад 3.10. Задано матрицю $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю B, подібну до матриці A, яка має форму Хессенберга.

Розв'язування. Шукану матрицю знаходимо за такими формулами для $n=3$:

$$s=\operatorname{sign}(-a_{21})\sqrt{a_{21}^2+a_{31}^2};\ \mu=\frac{1}{\sqrt{2s(s-a_{21})}};$$

$$w^T=\mu(0;a_{21}-s;a_{31});\ H=E-2ww^T;\ \ B=HAH.$$

Маємо

$$s=-\sqrt{4+25}=-\sqrt{29};$$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{-2\sqrt{29}(-\sqrt{29}-2)}}=\frac{1}{\sqrt{58+4\sqrt{29}}};$$

$$ww^T=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\2+\sqrt{29}\\5\end{pmatrix}\left(0,\quad 2+\sqrt{29},\quad 5\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\left(2+\sqrt{29}\right)^2}{29+2\sqrt{29}} & \dfrac{10+5\sqrt{29}}{29+2\sqrt{29}}\\ 0 & \dfrac{10+5\sqrt{29}}{29+2\sqrt{29}} & \dfrac{25}{29+2\sqrt{29}}\end{pmatrix};$$

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{29}} & -\dfrac{5}{\sqrt{29}}\\ 0 & -\dfrac{5}{\sqrt{29}} & \dfrac{2}{\sqrt{29}}\end{pmatrix};\qquad HA=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -\sqrt{29} & -\dfrac{7}{\sqrt{29}} & \dfrac{9}{\sqrt{29}}\\ 0 & -\dfrac{3}{\sqrt{29}} & \dfrac{8}{\sqrt{29}}\end{pmatrix};$$

$$B=HAH=\begin{pmatrix}4 & -\dfrac{9}{\sqrt{29}} & -\dfrac{8}{\sqrt{29}}\\ -\sqrt{29} & -\dfrac{31}{29} & \dfrac{53}{29}\\ 0 & -\dfrac{34}{29} & \dfrac{31}{29}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4 & -1,67 & -1,48\\ -5,37 & -1,06 & 1,81\\ 0 & -1,16 & -1,06\end{pmatrix}.$$

Ми знайшли матрицю B, подібну до матриці A, яка має форму Хессенберга.

Приклад 3.11. Задано матрицю $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$. Знайти матрицю B, подібну до матриці A, яка має тридіагональну форму.

*Розв'язування***.** Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо

$$s=-\sqrt{4+1}=-\sqrt{5};\ \mu=\frac{1}{\sqrt{-2\sqrt{5}(-\sqrt{5}-2)}}=\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}};$$

$$ww^T = \frac{1}{5+2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2+\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}{5+2\sqrt{5}} & \frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} & \frac{1}{5+2\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}; \qquad HA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} & 0 \\ -\sqrt{5} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -2,2361 & 0 \\ -2,2361 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ми знайшли матрицю B, подібну до матриці A, яка має тридіагональну форму.

Для обчислення власних значень симетричної матриці A, також використовують метод Хаусхолдера. Цю задачу розв'язують у два етапи: спочатку виконують зведення вихідної матриці до тридіагонального вигляду; після цього знаходять власні значення симетричної тридіагональної матриці. Якщо z – власний вектор тридіагональної матриці A_{n-1}, то $Q_1Q_2...Q_{n-2}z$ – власний вектор матриці A.

Для виконання відображення елементи матриці Q не обов'язково записувати в явному вигляді, оскільки матриця повністю визначена вектором w. Метод Хаусхолдера для реалізації потребує $\frac{2}{3}n^3$ операцій множення і $n-2$ знаходження квадратного кореня.

Обчислена за методом Хаусхолдера тридіагональна матриця A_{n-1} ортогонально подібна до матриці $A+d\cdot A$, де

$\|d \cdot A\|_E \le Kn^2 2^{-t} \|A\|_E$, K – константа, яка залежить від способу заокруглення, t – кількість двійкових знаків мантиси числа.

Якщо матриця має кратні корені, то тридіагональна матриця має у випадку точних обчислень нульові недіагональні елементи. Водночас наявність нульового недіагонального елемента в тридіагональній матриці не є свідченням того, що матриця має кратні корені.

3.9. QR-алгоритм з використанням плоских поворотів Гівенса

Часто на другому етапі – зведенні матриці Хессенберга до верхньої трикутної матриці – застосовують інше перетворення, а саме: перетворення плоских поворотів Гівенса. Матриця $G_{ij} = (g_{ml})_{m,l=1}^{n}$, яка визначає ці перетворення, у разі фіксованих індексів i, j головного елемента перетворюваної матриці має таку ж структуру, як і матриця плоских поворотів Якобі T_{ij}. Однак тут двовимірну підматрицю з елементів, які стоять на перетині i- і j-х рядків та стовпців, візьмемо у вигляді [3, 19]

$$\hat{G}_{ij} = \begin{pmatrix} s & c \\ -c & s \end{pmatrix}.$$

Як і раніше, числа s і c пов'язані співвідношенням $s^2 + c^2 = 1$ (це дає змогу інтерпретувати їх як синус та косинус деякого кута θ, що забезпечує ортонормованість матриць G_{ij}).

Перший повний крок перетворення Гівенса, застосованого до матриці Хессенберга B n-го порядку за QR-алгоритмом

$$A_k = Q_k R_k; \quad A_{k+1} = R_k Q_k \tag{3.15}$$

складається з $n-1$ елементарних підкроків, кожен з яких занулює піддіагональні елементи в стовпцях від першого до $n-1$-го. У підсумку одержуємо розклад матриці B в добуток ортогональної і трикутної, що потрібно за першою формулою (3.7) при $k = 1, A_1 := B$.

Оскільки в кожному стовпці матриці Хессенберга треба занулювати тільки один елемент, то в цьому випадку матриці поворотів Гівенса можна позначати тільки одним індексом G_i.

Візьмемо $c = \cos\theta$ і $s = \sin\theta$ такими, що $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b_{11}}{b_{21}}$, матимемо $b_{11}\cos\theta = b_{21}\sin\theta$, тобто $-cb_{11} + sb_{21} = 0$. Тому результат першого проміжного кроку – матриця $B_1 = G_1 B$, отримана за таких s і c, - не міститиме ненульових елементів під діагоналлю в першому стовпці.

Другий проміжний крок роблять аналогічно. Матрицю $B_2 = G_2 B_1$ отримують з попередньої B_1 за допомогою матриці Гівенса G_2, яка відрізняється від G_1 тим, що матриця $\begin{pmatrix} s & c \\ -c & s \end{pmatrix}$ зсувається на одну позицію вздовж діагоналі, а кут повороту підбирають так, щоб у матриці B_2 занулити елемент $b_{32}^{(2)}$.

Якщо процес перетворень Гівенса продовжити, то в підсумку отримаємо праву трикутну матрицю $B_{n-1} = G_{n-1}G_{n-2}...G_1 B$. Останню рівність можна переписати у вигляді $(G_{n-1}G_{n-2}...G_1)^{-1} B_{n-1} = B$, який дає змогу вважати виконаним необхідний у (3.15) при k розклад $B = Q_1 R_1$, де $Q_1 := (G_{n-1}G_{n-2}...G_2 G_1)^{-1} = G_1^T G_2^T ... G_{n-2}^T G_{n-1}^T$ ортогональна, а $R_1 := B_{n-1}$ – права трикутна матриці. У цьому разі матриця

$$A_2 = R_1 Q_1 = (G_{n-1}...G_1) B (G_{n-1}...G_1)^{-1},$$

яка є підсумком першого повного кроку QR-алгоритму (застосованого до матриці B), зберігає не тільки спектр заданої матриці, а й форму Хессенберга, завдяки чому зведення вихідної матриці A до майже трикутного вигляду B достатньо виконати тільки один раз.

Скалярні параметри $c_j = \cos\theta_j$ і $s_j = \sin\theta_j$ матриць Гівенса G_j, за допомогою яких виконують перехід від матриці Хессенберга $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ через матриці Хессенберга

$B_j = (b_{im}^{(j)})_{i,m=1}^{n}$ до матриці Хессенберга A_2, можна обчислити на j-му проміжному кроці $(j = 1, 2, ..., n-1)$ за формулами

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{1+t_j^{\,2}}}; \quad s_j = t_j c_j, \tag{3.16}$$

де $t_j = \dfrac{b_{jj}^{(j-1)}}{b_{j+1,j}^{(j-1)}} \quad \left(= \operatorname{tg} \theta_j\right)$, $b_{ij}^{(0)} := b_{ij}$ (якщо знаменник у виразі t_j дорівнює нулю або за модулем менший від деякого суттєво малого порогового значення, то можна вважати $c_j = 0$, $s_j = 1$, тобто $G_j := E$).

Приклад 3.12. Перетвореннями Гівенса виконати два кроки QR-алгоритму для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -\dfrac{9}{\sqrt{29}} & -\dfrac{8}{\sqrt{29}} \\ -\sqrt{29} & -\dfrac{31}{29} & \dfrac{53}{29} \\ 0 & -\dfrac{34}{29} & \dfrac{31}{29} \end{pmatrix},$$

отриманої внаслідок перетворень Хаусхолдера з матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (див. приклад 3.10).

Розв'язування. Для розв'язування цієї задачі використовуємо формули (3.16).

При $j = 1$ поступово знаходимо

$$t_1 = -\frac{4}{\sqrt{29}}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{29}}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}}, \quad s_1 = -\frac{4}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}} = -\frac{4}{\sqrt{45}};$$

$$G_1=\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}596285 & 0{,}802773 & 0 \\ -0{,}802773 & -0{,}596285 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_1=G_1B=\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{45}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -\frac{9}{\sqrt{29}} & -\frac{8}{\sqrt{29}} \\ -\sqrt{29} & -\frac{31}{29} & \frac{53}{29} \\ 0 & -\frac{34}{29} & \frac{31}{29} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{45}{\sqrt{45}} & \frac{5}{\sqrt{45\cdot 29}} & \frac{85}{\sqrt{45\cdot 29}} \\ 0 & \frac{385}{29\cdot\sqrt{45}} & \frac{20}{29\cdot\sqrt{45}} \\ 0 & -\frac{34}{29} & \frac{31}{29} \end{pmatrix}.$$

При $j=2$ (заокруглюючи до 10^{-6})

$$t_2=\frac{385}{\sqrt{45}\cdot 29}\left(-\frac{29}{34}\right)=-\frac{385}{34\cdot\sqrt{45}}=-\frac{385}{228{,}0789}=-1{,}688012;$$

$$c_2=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{385}{34\cdot\sqrt{45}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{148225}{1156\cdot 45}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{148225}{52020}}}=\frac{1}{1{,}961985}=0{,}509687;$$

$$s_2=-1{,}688012\cdot 0{,}509687=-0{,}860358.$$

Отже, отримуємо таку матрицю:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}860358 & 0{,}509687 \\ 0 & -0{,}509687 & -0{,}860358 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$R_1 = B_2 = G_2 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}860358 & 0{,}509687 \\ 0 & -0{,}509687 & -0{,}860358 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -6{,}708204 & 0{,}138409 & 2{,}352961 \\ 0 & 1{,}979049 & 0{,}102808 \\ 0 & -1{,}172414 & 1{,}068965 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6{,}708204 & 0{,}138409 & 2{,}352961 \\ 0 & -2{,}300255 & 0{,}456385 \\ 0 & 0 & -0{,}972092 \end{pmatrix}.$$

Одержимо

$$Q_1 = G_1^T G_2^T = \begin{pmatrix} -0{,}596285 & -0{,}802773 & 0 \\ 0{,}802773 & -0{,}596285 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}860358 & -0{,}509687 \\ 0 & 0{,}509687 & -0{,}860358 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}596285 & 0{,}690672 & 0{,}409163 \\ 0{,}802773 & 0{,}513018 & 0{,}303919 \\ 0 & 0{,}509687 & -0{,}860358 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = R_1 Q_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -6{,}708204 & 0{,}138409 & 2{,}352961 \\ 0 & -2{,}300255 & 0{,}456385 \\ 0 & 0 & -0{,}972092 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -0{,}596285 & 0{,}690672 & 0{,}409163 \\ 0{,}802773 & 0{,}513018 & 0{,}303919 \\ 0 & 0{,}509687 & -0{,}860358 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}111112 & -3{,}362889 & -4{,}727073 \\ -1{,}846583 & -0{,}947459 & -1{,}091745 \\ 0 & -0{,}495463 & 0{,}836347 \end{pmatrix}.$$

Переходимо на наступний крок QR-алгоритму, беручи за матрицю B отриману матрицю A_2.

При $j = 1$ поступово знаходимо

t_1=-2,226335; $c_1 = 0{,}4097344$; s_1=-0,912204;

$$G_1 = \begin{pmatrix} -0{,}912204 & 0{,}409734 & 0 \\ -0{,}409734 & -0{,}9122048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = G_1 B = \begin{pmatrix} -4{,}506785 & 2{,}679443 & 3{,}864733 \\ -0{,}000000 & 2{,}242174 & 2{,}932744 \\ -0{,}000000 & -0{,}495464 & 0{,}836350 \end{pmatrix}.$$

При $j = 2$

$t_2 =$ -4,525395; $c_2 = 0{,}215769$; $s_2 =$ -0,976444.

Отже, отримуємо таку матрицю:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}976444 & 0{,}215769 \\ 0 & -0{,}215769 & 0{,}976444 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$R_1 = B_2 = G_2 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} -4{,}506785 & 2{,}679443 & 3{,}864733 \\ 0{,}000000 & -2{,}296264 & -2{,}683202 \\ 0{,}000000 & -0{,}000000 & -1{,}449447 \end{pmatrix}.$$

Остаточно

$$Q_1 = G_1^T G_2^T = \begin{pmatrix} -1{,}449447 & 0{,}400082 & 0{,}088408 \\ 0{,}409734 & 0{,}890717 & 0{,}196826 \\ 0 & 0{,}215769 & -0{,}976444 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 5{,}208971 & 1{,}417432 & -3{,}644749 \\ -0{,}940858 & -2{,}624276 & 2{,}168032 \\ -0{,}000000 & -0{,}312747 & 1{,}415304 \end{pmatrix}.$$

Отже, ми за допомогою перетворень Гівенса зробили два кроки QR-алгоритму для матриці, отриманої внаслідок перетворень Хаусхолдера, і одержали матрицю A_2. Вона має ті ж власні значення, що й B і A, зберігає форму Хессенберга, і модулі її піддіагональних елементів менші, ніж у матриці B, однак вона ближча до подібної B матриці трикутного вигляду, на діагоналі якої повинні бути власні числа заданої матриці

(λ_1=5,00000000000000; $\lambda_2 \approx$ -2,30277563773199;

$\lambda_3 \approx$ 1,30277563773199).

3.10. Метод Ланцоша зведення симетричної матриці до тридіагонального вигляду

Метод Ланцоша – це алгоритм зведення симетричної матриці A до тридіагональної матриці *T*. Основою алгоритму є рекурентне співвідношення

$$q_{j+1} = Aq_j - q_j\alpha_j - q_{j-1}\alpha_{j-1}, \quad j = 1,...,n, \quad q_0 = 0. \qquad (3.16)$$

Це співвідношення випливає з такої матричної рівності:

$$Q_n T_n = A Q_n,$$

де $Q_n = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ – ортогональна матриця; T_n – тридіагональна матриця

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Якщо T_n не розкладається, то, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\beta_i > 0$. Тоді співвідношення (3.16) дає змогу записати алгоритм побудови матриці T_n за матрицею A.

Задамо початковий вектор $\|q_1\| = 1$, потім для *j = 1, 2, …, n* повторимо таке:

1) $u_j = Aq_j$;
2) $\alpha_j = (q_j, Aq_j)$;
3) $r_j = u_j - q_j\alpha_j - q_{j-1}\beta_{j-1}$; $\qquad q_0 = 0$;
4) $\beta_j = \|r_j\|$;
5) $q_{j+1} = r_j / \beta_j$.

Після виконання *n* кроків такого алгоритму в точній арифметиці отримаємо тридіагональну матрицю T_n, подібну до вихідної матриці A, отже, задача знаходження власних значень симетричної матриці зводиться до знаходження власних значень тридіагональної матриці.

Припинення процесу може відбутися, якщо $\beta_j = 0$. Це трапиться в тому випадку, коли вектор q_1 ортогональний принаймні до одного власного вектора A. Якщо $\beta_j = 0$, то за q_{i+1} можна взяти будь-який одиничний вектор, ортогональний до попередніх векторів q_i, і продовжити процес.

Приклад 3.13. Методом Ланцоша звести до тридіагонального вигляду матрицю $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язування. За початковий вектор q_1 візьмемо одиничний вектор $q_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Обчислимо $u_1=Aq_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\alpha_1=1$.

За відповідною формулою знайдемо r_1:

$$r_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix};\ \beta_1=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

Аналогічно, як на попередньому кроці, визначимо $q_2, u_2, \alpha_2, r_2, \beta_{21}$:

$$q_2=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix},\qquad u_2=\begin{pmatrix}\frac{13}{\sqrt{13}}\\ \frac{16}{\sqrt{13}}\\ \frac{7}{\sqrt{13}}\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\frac{32}{\sqrt{13}}+\frac{21}{\sqrt{13}}=\frac{53}{\sqrt{13}};$$

$$r_2=\begin{pmatrix}\frac{13}{\sqrt{13}}\\ \frac{16}{\sqrt{13}}\\ \frac{7}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \frac{106}{13}\\ \frac{159}{13}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sqrt{13}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{16\sqrt{13}-106}{13}\\ \frac{7\sqrt{13}-159}{13}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0\\ -3,72\\ -10,29\end{pmatrix};$$

$$\beta_2\approx\sqrt{13,8384+105,8841}=\sqrt{119,7225}=10,94.$$

На третьому кроці обчислимо q_3, u_3, α_3:

$$q_3 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -0,34 \\ -0,94 \end{pmatrix}; \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -3,58 \\ -1,62 \end{pmatrix}; \ \alpha_3 = 1,2172 + 1,5228 = 2,74 .$$

Отже, отримано таку тридіагональну матрицю:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{13} & 0 \\ \sqrt{13} & \dfrac{53}{\sqrt{13}} & 10,94 \\ 0 & 10.94 & 2,74 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 14,72 & 10,94 \\ 0 & 10,94 & 2,74 \end{pmatrix}.$$

Однак у разі реалізації розглянутого алгоритму на практиці для великих A строга ортогональність векторів q_i, зазвичай, втрачається. Головною причиною цього є скінченна розрядність комп'ютерів, що призводить до похибок заокруглень. У цьому випадку можна використати метод Ланцоша з дуже точною переортогоналізацією. Однак така процедура досить дорога.

3.11. Метод бісекцій

Для обчислення власних значень тридіагональних матриць розроблено досить ефективний метод бісекцій (половинного поділу). Його також можна вважати одним зі способів локалізації власних чисел. Розглянемо цей метод детальніше.

Нехай задано тридіагональну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Не зменшуючи загальності, можна припустити, що жоден з елементів b_i не рівний нулю. Дійсно, нехай для деякого q елемент $b_q = 0$. Тоді можна розглядати тридіагональні матриці: A_1 порядку $q-1$ і A_2 порядку $n-q+1$, для них

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриць A_1 і A_2 є власними значеннями матриці A. Якщо v – власний вектор матриці A_1, то відповідний власний вектор матриці A буде $(v^T, \underbrace{0, \ ..., \ 0}_{n-q+1})^T$.

Можна довести, що в симетричній тридіагональній матриці, яка не має ненульових недіагональних елементів, усі власні значення різні. Якщо симетрична матриця має кратну кількість власних значень, то тридіагональна матриця, побудована з неї методом Хаусхолдера, матиме декілька близьких до нуля недіагональних елементів. Тому метод бісекцій можна розглядати для симетричних тридіагональних матриць з ненульовими недіагональними елементами.

Метод половинного поділу ґрунтується на властивості послідовності Штурма. Якщо інтервал (A_0, B_0), на якому шукають власне значення, невідомий, то прийнятними для A_0 і B_0 є значення $\pm \|A\|_\infty$. Оскільки матриця має тридіагональний вигляд, цю норму легко знайти:

$$\|A\|_\infty = \max\{|b_i| + |a_i| + |b_{i+1}|\}; \quad b_1 = b_{n+1} = 0.$$

Схема обчислення методу половинного поділу для визначення k-го власного значення може бути організована так. Перед обчисленням задають значення A_0, B_0 і ε – умова закінчення ітераційного процесу. Потім ділять інтервал (A_{r-1}, B_{r-1}) (r – номер ітерації, $r = 1, 2, ...$) навпіл. Точка $C_r = \frac{1}{2}(A_{r-1} + B_{r-1})$ є його серединою. Обчислюють послідовність $p_0(C_r), \ p_1(C_r), ..., p_n(C_r)$ за правилом

$$p_0(C_r) = 1; \qquad p_1(C_r) = a_1 - C_r;$$

$$p_k(C_r) = (a_k - C_r) \cdot p_{k-1} - b_k \cdot p_{k-2}; \quad 2 \le k \le n$$

і визначають кількість збігів, що знаків $s(C_r)$.

Якщо $s(C_r) \geq k$, то вважають $A_r = C_r$, $B_r = B_{r-1}$, а у випадку $s(C_r) < k$ уважають, що $A_r = A_{r-1}$, $B_r = C_r$. Тепер $\lambda_k \in (A_r, B_r)$. Цей процес повторюють доти, доки не буде виконана умова

$$\frac{B_r - A_r}{2} < \varepsilon C_{r+1}.$$

У разі виконання цієї умови значення C_{r+1} приймають за наближене значення λ_k.

На кожному кроці методу бісекцій необхідно $2n$ операцій множення і $2n$ операцій віднімання.

Опишемо застосування цього методу на прикладах.

Приклад 3.14. Нехай потрібно знайти третє власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

методом половинного поділу.

Розв'язування. Оскільки інтервал, у якому є третє власне значення, невідомий, то визначаємо $\|A\|_\infty = 4$ і власні значення будемо шукати в інтервалі $(-4, 4)$. Справді, підставивши значення -4 в послідовність Штурма, отримаємо

$p_0(-4) = 1;$ $p_1(-4) = 6;$ $p_2(-4) = 35;$ $p_3(-4) = 204;$ $p_4(-4) = 1184.$

Отже, кількість збігів знака $s(-4) = 4$. Це означає, що всі чотири власні значення матриці A більші, ніж -4. Підставимо тепер у послідовність Штурма число 4, отримаємо

$$p_0(4) = 1,\ \ p_1(4) = -2,\ \ p_2(4) = 3,\ \ p_3(4) = -4,\ \ p_4(4) = 5.$$

Кількість збігів знаків $s(4) = 0$ і всі власні значення матриці A не більші від чотирьох.

Тоді ділимо інтервал $(-4,\ 4)$ навпіл, отримаємо

$$C_1 = \frac{1}{2}(-4+4) = 0$$

і побудуємо послідовність Штурма для цього значення C_1:

$$p_0(0) = 1;\ \ p_1(0) = 2;\ \ p_2(0) = 3;\ \ p_3(0) = 4.$$

Оскільки маємо три збіги знаків, то подальші обчислення значень поліномів можна не виконувати. Отже, $s(0) \geq 3$ означає, що $\lambda_3 \in (0,4)$. Далі маємо

$$C_2 = \frac{1}{2}(0+4) = 2,$$

$$p_0(2) = 1;\ \ p_1(2) = -0;\ \ p_2(2) = -1;\ \ p_3(2) = +0;\ \ p_4(2) = 1.$$

Знак нуля в $p_1(2)$ беруть протилежний до знака $p_0(2)$, а знак $p_3(2)$ – протилежний до знака $p_2(2)$. В побудованій послідовності Штурма $s(2) = 2 < 3$. Це означає $\lambda_3 \in (0,2)$. Тоді ділимо $(0,2)$ навпіл:

$$C_3 = \frac{1}{2}(0+2) = 1;$$

$$p_0(1) = 1;\ \ p_1(1) = 1;\ \ p_2(1) = -0;\ \ p_3(1) = -1;\ \ p_4(1) = -1.$$

У розглянутій послідовності Штурма $s(1) = 3$ означає $\lambda_3 \in (1,2)$ і т.д. Продовживши цей процес, отримаємо $\lambda_3 \approx 1{,}382$, що добре узгоджується з істинним значенням $\lambda_3 = 1{,}381966....$

Приклад 3.15. Знайти друге власне число матриці A методом бісекцій, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Аналогічно до попереднього прикладу визначаємо $\|A\|_\infty = 7$. Тому початковий інтервал, на якому міститься друге власне значення, є $(-7,7)$. Справді, підставивши значення -7 у послідовність Штурма, маємо

$$p_0(-7) = 1;\ p_1(-7) = 8;\ p_2(-7) = 76;\ p_3(-7) = 576.$$

Отже, кількість збігів знака $s(-7)=3$. Це означає, що всі три власні значення матриці A більші, ніж -7. Підставляємо тепер у послідовність Штурма число 7, отримуємо

$$p_0(7)=1;\quad p_1(7)=-6;\quad p_2(7)=20;\quad p_3(7)=-96.$$

Кількість збігів знаків $s(7)=0$, і всі власні значення матриці A не більші від семи.

Тоді ділимо інтервал $(-7,\ 7)$ навпіл, отримаємо

$$C_1=\frac{1}{2}(-7+7)=0$$

і побудуємо послідовність Штурма для цього значення C_1:

$$p_0(0)=1;\quad p_1(0)=1;\quad p_2(0)=-1;\quad p_3(0)=-5.$$

Оскільки $s(0)=2$, то $\lambda_2\in(0,7)$. Далі маємо

$$C_2=\frac{1}{2}(0+7)=3,5;$$

$$p_0(3,5)=1;\quad p_1(3,5)=-2,5;\quad p_2(3,5)=-2,75;\quad p_3(3,5)=16,875.$$

Оскільки $s(3,5)=1<2$, то $\lambda_2\in(0;3,5)$;

$$C_3=\frac{1}{2}(0+3,5)=1,75;$$

$$p_0(1,75)=1;\quad p_1(1,75)=-0,75;\quad p_2(1,75)=-4,9375;$$

$$p_3(1,75)=6,703125.$$

Тут $s(1,75)=1<2$, тому $\lambda_2\in(0;1,75)$ і т. д.

Продовживши цей процес, отримаємо $\lambda_2\approx 1,001$ (з точністю $\varepsilon=0,01$), а оскільки істинне $\lambda_2=1$, то побачимо, що обчислення виконано правильно.

Зазначимо, що розглянутий метод визначення власних значень матриці універсальний. Його можна використовувати не тільки для знаходження заданого за номером власного значення, а й для обчислення всіх чи частини власних значень, для дослідження загального розподілу власних значень тощо. На його реалізацію не впливає наявність близьких і кратних власних значень, і навіть дуже велике їхнє скупчення. У цьому разі точність не залежить від розмірів матриці.

3.12. QL -метод знаходження власних значень симетричної тридіагональної матриці

QL-метод знаходження власних значень симетричної тридіагональної матриці зводиться до перетворення в ітераційному процесі вихідної тридіагональної матриці A в діагональну за допомогою перетворень подібності

$$A_{k+1} = Q_k A_k Q_k^T = Q_k Q_{k-1} A_{k-1} Q_{k-1}^T Q_k^T = Q_k \ldots Q_1 A_1 Q_1^T \ldots Q_k^T .$$

Тут $A_1 = A$.

По суті, QL-метод реалізують так:

$$Q_k A_k = L_k ; \; A_{k+1} = L_k Q_k^T \;, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де Q_k – ортогональна матриця, що перетворює A_k в ліву трикутну матрицю L_k; k – номер ітерації. За досить великого k матриця A_k стає близькою до діагональної. Її діагональні елементи є наближеними власними значеннями матриці A. Матриця перетворення Q_k на кожному кроці ітерації є добутком елементарних матриць поворотів чи відбиттів.

Розглянемо варіант методу, що ґрунтується на використанні матриць поворотів. Нехай задано матрицю

$$A_k = \begin{pmatrix} d_1^{(k)} & l_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ l_1^{(k)} & d_2^{(k)} & l_2^{(k)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n-2}^{(k)} & d_{n-1}^{(k)} & l_{n-1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{n-1}^{(k)} & d_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Анулюємо елемент $l_{n-1}^{(k)}$, використовуючи матрицю повороту, яка має вигляд

$$P_{n-1}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & -s \\ 0 & \cdots & 0 & s & c \end{pmatrix}.$$

Унаслідок перетворення $P_{n-1}^{(k)}A_k$ відбувається анулювання елемента $l_{n-1}^{(k)}$, а перетворення $P_{n-1}^{(k)}A_k(P_{n-1}^{(k)})^T$ веде, з одного боку, до появи нового елемента $l_{n-1}^{(k)}$, меншого за значенням порівняно з попереднім, а з іншого, – до появи на місці $(n-2, n)$, і, відповідно, з огляду на симетрію матриці, на місці $(n, n-2)$ ненульового елемента $g_l^{(k)}$. На схемі 1 елементи матриці A_k позначені значком $\times$, елементи $(n, n-1)$ і $(n-1, n)$, які знову з'явились, - $\bullet$, а елемент $g_l^{(k)}$ - $\otimes$.

$$\begin{pmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & & & \\ & \times & \times & \times & & \\ & & \times & \times & \times & \otimes \\ & & & \times & \times & \bullet \\ & & & \otimes & \bullet & \times \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & & & \\ & \times & \times & \times & \otimes & \\ & & \times & \times & \times & 0 \\ & & \otimes & \times & \times & \bullet \\ & & & 0 & \bullet & \times \end{pmatrix}$$

Схема 1 **Схема 2**

Отже, на цьому етапі обчислень матриця A_k перестає бути тридіагональною, тому її необхідно звести до тридіагональної. Для цього обчислюють коефіцієнти поворотів

$$c_{n-1}^{(k)} = \frac{l_{n-2}^{(k)}}{\sqrt{(l_{n-2}^{(k)})^2 + (g_l^{(k)})^2}}; \qquad s_{n-1}^{(k)} = \frac{g_l^{(k)}}{\sqrt{(l_{n-2}^{(k)})^2 + (g_l^{(k)})^2}}$$

і перетворюють рядки й стовпці з номерами $n-1$ і $n-2$ за формулами методу Гівенса.

У підсумку g_1 дорівнює нулю, а на місці елементів з індексами $(n-3, n-1)$ і, відповідно, $(n-1, n-3)$ з'являється елемент $g_2^{(k)}$ (схема 2).

Для анулювання елемента, що виникає, знову застосовують формули Гівенса і т. д. Лише анулювання елемента $g_{n-2}^{(k)}$, який має індекси (1, 3), (3, 1), не спричиняє виникнення елемента g. На цьому крок процесу вважають закінченим. Кроки ітераційного процесу повторюють доти, доки елемент $l_{n-1}^{(k)}$ не стане достатньо

малим. У цьому випадку елемент з індексами (n, n) можна взяти за наближення до власного значення матриці A. Після отримання наближеного власного значення розглядають матрицю, отриману з вихідної викреслюванням останнього стовпця і останнього рядка, порядок якого на одиницю менший від попереднього, і повторюють знову всю ітераційну процедуру обчислення наступного власного значення. І так продовжують доти, доки не обчислять усі власні значення з заданим ступенем точності. Отже, замість тридіагональної матриці отримують наближено діагональну.

Приклад 3.16. QL-методом знайти власні значення тридіагональної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Крок 1. Занулюємо елемент a_{23}. Для цього знаходимо s і c в матриці поворотів P_2:

$$s = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{33}^2}} = -0,5547; \quad c = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{33}^2}} = 0,8321.$$

Матриця поворотів матиме вигляд

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8321 & 0,5547 \\ 0 & -0,5547 & 0,8321 \end{pmatrix}.$$

Нескладно переконатись, що

$$P_2 A P_2^T = \begin{pmatrix} 3,0000 & -1,6641 & 1,1094 \\ -1,6641 & 1,8462 & -1,2308 \\ 1,1094 & -1,2308 & 5,1538 \end{pmatrix}.$$

Тепер занулюємо елемент a_{13} матриці $P_2 A P_2^T$. Для цього обчислюємо s і c:

$$s = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{13}^2}} = 0,6695\,; \quad c = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{13}^2}} = -0,7428\,,$$

після чого отримаємо нову матрицю

$$P_3 = \begin{pmatrix} -0,7428 & -0,6695 & 0 \\ 0,6695 & -0,7428 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

і

$$P_3 A P_3^T = \begin{pmatrix} 0,8276 & -0,7460 & 0 \\ -0,7460 & 4,0186 & 1,6570 \\ 0 & 1,6570 & 5,1538 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Приймаємо $A = P_3 A P_3^T$, виконуємо операції аналогічно до кроку 1.

Занулюємо елемент a_{23}. Для цього знаходимо

$$s = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{33}^2}} = 0,3061; \quad c = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{33}^2}} = 0,9520.$$

Матриця поворотів матиме вигляд

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9520 & -0,3061 \\ 0 & 0,3061 & 0,9520 \end{pmatrix}$$

і

$$P_2 A P_2^T = \begin{pmatrix} 0,8276 & -0,7102 & -0,2283 \\ -0,7102 & 3,1593 & 1,0157 \\ -0,2283 & 1,0157 & 6,0131 \end{pmatrix}.$$

Тепер занулюємо елемент a_{13} матриці $P_2 A P_2^T$. Для цього обчислюємо

$$s = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{13}^2}} = -0,2193\,; \quad c = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + a_{13}^2}} = 0,9757\,,$$

після чого отримаємо нову матрицю

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}9757 & 0{,}2193 & 0 \\ -0{,}2193 & 0{,}9757 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 \end{pmatrix}$$

і

$$P_3 A P_3^T = \begin{pmatrix} 0{,}6358 & -0{,}1429 & 0{,}0000 \\ -0{,}1429 & 3{,}3511 & 1{,}0411 \\ -0{,}0000 & 1{,}0411 & 6{,}0131 \end{pmatrix}.$$

Після 12 кроків ми отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 0{,}6277 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 3{,}0000 & 0{,}0006 \\ 0{,}0000 & 0{,}0006 & 6{,}3723 \end{pmatrix},$$

з якої бачимо, що з точністю до трьох десяткових знаків ми обчислили наближені власні значення $\lambda_1 = 6{,}3723$; $\lambda_2 = 3{,}0000$; $\lambda_3 = 0{,}6277$.

Задачі до розділу 3

1. Задано матриці:

1) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Знайти найбільше за модулем власне число і відповідний йому власний вектор:

а) степеневим методом;

б) методом скалярних добутків.

(За початкове наближення взяти вектор (1;1;…;1)).

2. Для матриць із вправи 3.1 знайти найменше за модулем власне число і відповідний йому власний вектор:

а) методом зворотних ітерацій;

б) методом зворотних ітерацій зі співвідношенням Релея.

3. Для матриць із вправи 3.1 розв'язати повну проблему власних значень методом поворотів Якобі.

Точність $\varepsilon = 10^{-6}$ (у евклідовій нормі).

4. Знайти грубі наближення до власних чисел матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

степеневим методом, уточнити ці значення зворотними ітераціями зі зсувами.

5. А. Проаналізувати збіжність степеневого методу у випадку, якщо λ_1 − найбільше кратне за модулем власне число $n \times n$-матриці простої структури. Як можна знайти всі відповідні йому власні вектори залежно від показника кратності?

Б. Що можна сказати про поведінку послідовності відношень, якщо $\lambda_1 = -\lambda_2$, і $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ $(\lambda_i \in R)$?

В. Розглянути і пояснити поведінку степеневого методу у випадку, коли задана матриця A − діагональна.

6. Знайти всі власні пари матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) методом скалярних добутків ;

б) RQI − алгоритмом, починаючи його з різних векторів.

7. Методом поворотів Якобі знайти власні пари матриці A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

8. Порівняти два підходи для знаходження всіх власних чисел матриці

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

методом поворотів Якобі:

а) застосовуючи його безпосередньо до заданої матриці;

б) попередньо звівши її до тридіагонального вигляду перетвореннями Хаусхолдера.

9. Для знаходження власних пар симетричних додатно визначених матриць побудувати LU −алгоритм на базі U^TU (або LL^T) -розкладу Холецького. Випробувати його на матрицях:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чи зберігають отримані на кожному кроці такого алгоритму подібні до матриці B тридіагональну структуру?

10. Задано матрицю $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Зробити по три кроки:

а) LU -алгоритму;

б) QR -алгоритму на підставі перетворень Гівенса;

в) QR -алгоритму на підставі перетворень .

Порівняти отримані наближення до власних чисел матриці A за точністю (знайшовши спочатку її точні значення за допомогою характеристичного рівняння) і за обчислювальними затратами.

11. Матрицю $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ звести до тридіагонального вигляду:

а) перетворенням Гівенса;

б) методом Ланцоша.

Порівняти ці способи за обчислювальними затратами.

12. Для $n \times n$-матриці приблизно підрахувати кількості арифметичних операцій, потрібних для:

а) одного кроку степеневого методу;

б) одного кроку методу зворотних ітерацій (без зсувів);

в) одного повного циклу методу поворотів Якобі;

г) повний цикл зведення матриці до форми Хессенберга перетвореннями Хаусхолдера.

13. Знайти власні значення тридіагональних матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

використовуючи:

а) метод бісекцій;

б) QL-метод.

14. Матриця Уілкінсона

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 20 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 18 & 20 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

має найменше за модулем власне число, що дорівнює 1. Як воно зміниться внаслідок збурення першого елемента останнього рядка на $\varepsilon = 20^{-19} 20! \approx 5 \cdot 10^{-7}$?

15. Довести, що коли $A = QR$, то

$$\frac{1}{n}\operatorname{cond}_1 A \le \operatorname{cond}_1 R \le n \cdot \operatorname{cond}_2 A .$$

Довести також, що $\operatorname{cond}_2 A = \operatorname{cond}_2 R$. Тут використано позначення: $\operatorname{cond}_1 B$ і $\operatorname{cond}_2 B$ – числа зумовленості матриці B за нормами $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ відповідно.

16. Знайти матрицю поворотів Якобі, яка б давала нуль у позиції (3, 1) матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

17. Довести, що для квадратних матриць A і B однакового розміру спектри матриць AB і BA збігаються.

18. Нехай $A = A^T > 0$. Довести, що

$$\lambda_{\max} A = \max R_A(x); \quad \lambda_{\min} A = \min R_A(x),$$

де $R_A(x) = \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$ – співвідношення Релея.

19. Нехай $P = I - \mu w w^T$, де w – вектор такий, що $w^T w = 1$.

А. Довести, що матриця P буде ортогональною тоді й тільки тоді, коли $\mu = 2$.

Б. Довести, що коли Q – матриця Хессенберга, а R – верхня трикутна, то добуток RQ є матрицею Хессенберга.

20. Довести, що коли A і B – дійсні ортогональні матриці розмірності $n \times n$, то матриця AB – також є ортогональною. Після цього довести, що коли кожен з векторів w_i задовольняє умову $w_i^T w_i = 1$, то матриця

$$Q = (I - 2w_1^T w_1)(I - 2w_2^T w_2)\ldots(I - 2w_{n-1}^T w_{n-1})(I - 2w_n^T w_n)$$

ортогональна.

Список літератури

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
2. *Березин Н.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. –Т.1.– 632 с.
3. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
4. *Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.* Методи обчислень. Ч.1 – К.: Вища школа, 1995. – 368 с.
5. *Демидович Б.П., Марон К.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 660 с.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984. - 304 с.
7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. - М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. *Крылов В.И., Бобков В.В.*, *Монастырный П.И.* Вычислительные методы высшей математики / Под ред. Мысовских И.П. – Минск. Вышейш. школа, 1972. – Т.1. – 584 с.
9. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
10. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. – М.: Мир, 1983. - 382 с.
11. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. - 432 с.
12. Сборник задач по методам вычислений / Азаров А.И., Басик В.А., Мелешко И.Н. и др. / Под ред. П.И.Монастырного. – М.: Наука, 1983. - 287 с.
13. *Уилкинсон Дж., Райнш К.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 329 с.
14. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
15. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 734 с.

16. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К*. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 168 с.
17. *Хейгеман Л., Янг Д*. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 448 с.
18. *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 408 с.
19. *Шахно С.М*. Чисельні методи лінійної алгебри. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 245 с.
20. *Kelley C.* Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. – Philadelphia: SIAM Publications, 1995. – 166 p.
21. *Quarteroni A., Sacco R., Saleri F*. Numerical Mathematics. – New York Berlin Heidelberg: Springer, 2000. – 655 p.

Зміст

Вступ 3
1. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь 4
1.1. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь за допомогою LU -розкладу 4
1.2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь 8
1.3. Метод квадратних коренів 13
1.4. Метод ортогоналізації 16
1.5. Метод прогонки розв'язування СЛАР з тридіагональною матрицею 19
1.6. Метод поворотів розв'язування СЛАР 22
2. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь 27
2.1. Принципи побудови ітераційних процесів 27
2.2. Метод простих ітерацій 29
2.3. Метод Зейделя 36
2.4. Метод релаксації 42
2.5. Ітераційні методи варіаційного типу 45
2.5.1. Метод мінімальних відхилів 45
2.5.2. Метод мінімальних поправок 48
2.5.3. Метод спряжених градієнтів (МСГ) 51
Задачі до розділів 1,2 55
3. Методи розв'язування задач на власні значення 71
3.1. Класичний спосіб 72
3.2. Степеневий метод знаходження максимального за модулем власного значення і відповідного йому власного вектора 75
3.3. Метод скалярних добутків 80
3.4. Метод зворотних ітерацій 84
3.5. Зворотні ітерації зі змінними зсувами. RQI-алгоритм 87
3.6. Метод поворотів Якобі для знаходження власних пар симетричної матриці 93
3.7. LU -алгоритм для несиметричних задач 98
3.8. QR-алгоритм з використанням перетворень Хаусхолдера 104
3.9. QR-алгоритм з використанням плоских поворотів Гівенса 110

3.10. Метод Ланцоша зведення симетричної матриці до тридіагонального вигляду 116
3.11. Метод бісекцій 119
3.12. QL -метод знаходження власних значень симетричної тридіагональної матриці 124
Задачі до розділу 3 128
Список літератури 133

Навчальне видання

Шахно Степан Михайлович
Дудикевич Анна Теодорівна
Левицька Софія Михайлівна

Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри

Редактор М.М. Мартиняк
Технічний редактор С.З. Сеник
Коректор Ю.А. Бурка

Підп.до друку . Формат 60x84/16.
Папір друк. Друк на різогр. Умовн.друк. арк. . Обл.-вид. арк. .
Тираж 300. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.