Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Я. Г. Савула

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ВАРІАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

ЛЬВІВ
2004

Зміст

Вступ 7

Розділ 1. Варіаційні методи 9

1.1. Додатні та додатно визначені оператори 9
1.2. Варіаційна задача про мінімум квадратичного функціонала 15
1.3. Існування розв'язку задачі про мінімум функціонала енергії 18
1.4. Головні та природні граничні умови 22
1.5. Задачі з неоднорідними граничними умовами . . 24
1.6. Метод Рітца 27
1.7. Метод скінченних елементів 30
1.8. Слабкий розв'язок крайової задачі 36
1.9. Абстрактна варіаційна задача 38
1.10. Метод Бубнова–Гальоркіна 43
1.11. Вправи для самостійного виконання 45

Розділ 2. Апроксимація на скінченних елементах . 49

2.1. Похибки апроксимації кусково-лінійними функціями 50
2.2. Одновимірні скінченні елементи лагражового типу. 53
2.3. Ермітові одновимірні апроксимації на скінченних елементах 55

2.4. Одновимірні апроксимації функціями–бульбашками . 56
2.5. Апроксимації на трикутних скінченних елементах . . 58
2.6. Лагранжові апроксимації на прямокутних скінченних елементах 63
2.7. Ермітові апроксимації на прямокутних скінченних елементах 64
2.8. Двовимірні ізопараметричні апроксимації 66
2.9. Апроксимації на тетраедрах 70
2.10. Тривимірні ізопараметричні апроксимації 73
2.11. Вправи для самостійного виконання 75

Розділ 3. Крайові задачі 77

3.1. Крайова задача для рівняння парного порядку . . . 77
3.2. Апріорна оцінка точності МСЕ 79
3.3. Апріорна оцінка точності за Нітше 81
3.4. Схема МСЕ для рівняння четвертого порядку . . . 82
3.5. Крайова задача для системи диференціальних рівнянь . 85
3.6. Задача про циліндричний згин пластини 89
3.7. Крайові задачі для рівняння Пуассона 96
3.8. Схема МСЕ для рівняння Пуассона 101
3.9. Схема МСЕ, побудована на ізопараметричних апроксимаціях 105
3.10. Рівняння стаціонарної адвекції–дифузії 107
3.11. Бігармонічне рівняння 112
3.12. Крайові задачі для рівняння еліптичного типу . . . 117
3.13. Вправи для самостійного виконання 120

Розділ 4. Задачі на власні значення 123

4.1. Математичні моделі, які приводять до задач на власні значення 123
4.1.1. Коливання струни 123
4.1.2. Згинні коливання стрижня 125
4.1.3. Коливання мембрани 125
4.1.4. Коливання пластини 126

4.2. Властивості спектра оператора 127
4.3. Енергетичні теореми в проблемі власних чисел . . . 130
4.4. Дискретний спектр оператора Штурма–Ліувілля . . 137
4.5. Мінімаксимальний принцип Куранта 140
4.6. Теорема про порівняння власних чисел 142
4.7. Метод Рітца в задачах на власні значення 144
4.8. Слабке формулювання задачі на власні значення і метод Гальоркіна 150
4.9. Числовий аналіз спектральної задачі для оператора Штурма–Ліувілля 151
4.10. Спектр оператора задачі про згин пластини 155
4.11. Похибки власних чисел і власних функцій 157
4.12. Вправи для самостійного виконання 166

Розділ 5. Початково–крайові задачі 169

5.1. Параболічна задача. 169
5.2. Варіаційне формулювання параболічної задачі . . . 171
5.3. Напівдискретні апроксимації Гальоркіна 174
5.4. Енергетичне рівняння 175
5.5. Стійкість напівдискретних апроксимацій 176
5.5.1. Перша оцінка норми напівдискретного роз'язку . 177
5.5.2. Друга оцінка норми напівдискретного роз'язку . 178
5.6. Існування розв'язку варіаційної задачі 180
5.7. Збіжність напівдискретних апроксимацій 182
5.8. Дискретизація варіаційної задачі за часом 187
5.8.1. Кусково-лінійна апроксимація за часом 187
5.8.2. Однокрокова рекурентна схема 188
5.9. Стійкість рекурентних схем 190
5.10. Збіжність рекурентних схем 193
5.11. Вправи для самостійного виконання 197

Розділ 6. Проблема " великих" задач лінійної алгебри . 199

6.1. Редукція параметрів внутрішніх вузлових точок . . . 199

6.2. Класичний альтернувальний метод Шварца 202
6.3. Альтернувальний метод Шварца і блочний метод Гауса–Зейделя 204
6.4. Мультиплікативний метод Шварца 207
6.5. Адитивний метод Шварца 210
6.6. Випадок багатьох підобластей 213
6.7. Вправи для самостійного виконання 213

Додаток 215
Список рекомендованої літератури 221

Вступ

У сучасному інформаційному суспільстві важливу роль відіграє технологія комп'ютерного моделювання (обчислювального експерименту), яку можна розглядати як циклічне повторення трьох умовно виділених етапів: *математична модель - алгоритм - програма.*

На першому етапі формується математична модель явища, яка відображає всі його головні властивості. Математичні моделі — це здебільшого задачі математичної фізики. З використанням добре розвинених методів математичної фізики теоретично вивчають математичні моделі, що є одним із способів перевірки їхньої адекватності.

Другий етап — вибір алгоритму для реалізації математичної моделі на комп'ютері. Математичну модель подають у вигляді, зручному для застосування числових методів. Визначають послідовність операцій, яка дає змогу з заданою точністю отримувати числові значення шуканих величин. Обчислювальні алгоритми повинні бути такими, щоб не спотворювати головні властивості математичної моделі та бути економними в сенсі кількості виконуваних операцій.

На третьому етапі створюють програми, які є таким записом алгоритму, який дає змогу реалізувати його на комп'ютері.

Ефективність процесу комп'ютерного моделювання залежить від багатьох факторів. Зокрема, зростання потужностей комп'ютерів, що простежується сьогодні, безумовно, приводить до розширення сфер застосування і можливостей технології комп'ютерного моделювання. Проте успіхи комп'ютерного моделювання значно залежать і від вдалого вибору математичних моделей та числових методів їхнього аналізу. Зазначимо, що серед числових методів, які широко застосовують у комп'ютерному моделюванні, пріоритетне значення мають варіаційні. Засобами варіаційних методів можна ефективно виконати як теоретичне

дослідження математичних моделей, так і конструювання числових методів їхнього аналізу.

У посібнику викладено основи варіаційних методів у зв'язку з числовим аналізом задач математичної фізики методом скінченних елементів. Його матеріал був частиною курсів, які прочитано студентам факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Метод скінченних елементів посідає особливе місце серед числових методів прикладної математики, які застосовують у комп'ютерному моделюванні. Це зумовлене як його ефективністю в дослідженні задач, що виникають у різних галузях науки і технології, так і його придатністю для використання у комп'ютерних програмних комплексах. Теоретичною базою методу скінченних елементів є варіаційні методи математичної фізики, які беруть початок від праць відомих учених Бубнова, Гальоркіна та Рітца (1905–1915). Ці методи отримали новий поштовх для розвитку завдяки виникненненню електронно-обчислювальних машин у середині XX ст.

У перших п'яти розділах посібника описано методи варіаційних формулювань задач математичної фізики та методи знаходження їхніх наближених ров'язків, наведено різні способи побудови скінченноелементних апроксимацій шуканих розв'язків задач. Розглянуто найважливіші крайові задачі, задачі на власні значення та початково–крайові задачі.

Обчислювальні схеми варіаційних методів зумовлюють потребу розв'язування великих систем лінійних алгебричних рівнянь. Для цього розвинено арсенал методів та алгоритмів обчислювальної алгебри. Водночас є методи, які на рівні формування систем лінійних алгебричних рівнянь дають змогу зменшити їхні розміри і звести початкову задачу лінійної алгебри великого розміру до розв'язування послідовності задач менших розмірів. Найпоширеніші з цих методів описані у шостому розділі підручника.

Автор висловлює вдячність своїм колегам, колишнім студентам, аспірантам та співробітникам кафедри прикладної математики доц. І.І. Диякові та ст. наук. співроб. М.Ф. Копитко за допомогу і корисні зауваження в підготовці рукопису книги.

Розділ 1

Варіаційні методи

Описано методи побудови найпоширеніших варіаційних формулювань крайових задач та методи побудови їхніх наближених розв'язків. Значна частина матеріалу присвячена задачам з так званими додатно визначеними операторами. Поряд з цим розглянуто також задачі зі слабшими обмеженнями на їхні оператори. Наведено допоміжні поняття й означення, які є властивими теорії варіаційних методів.

1.1 Додатні та додатно визначені оператори

Розглядатимемо задачі вигляду

$$Au = f, \tag{1.1}$$

де A – лінійний оператор, що відображає деяку множину D_A (область визначення оператора A), яка належить гільбертовому простору H, на множину $R_A \subset H$ (область значень оператора A).

Приклад 1. Для крайової задачі

$$-u''(x) = f, \qquad x \in (a, b); \tag{1.2}$$

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0, \tag{1.3}$$

припускаючи, що $f \in C\,[a, b]$, схарактеризуємо область визначення D_A її оператора так:

$$D_A = \left\{ u(x) : u(x) \in C^{(2)}\,[a, b]\,,\ u(a) = 0,\ u'(b) = 0 \right\}. \tag{1.4}$$

Отже, оператор крайової задачі (1.2), (1.3) характеризований диференціальним рівнянням (1.2) та областю визначення (1.4).

Приклад 2. Розглянемо крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона у двовимірній області Ω з границею Γ:

$$-\Delta u = f\left(x_1, x_2\right), \qquad x_1, x_2 \in \Omega; \tag{1.5}$$

$$u = 0, \qquad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{1.6}$$

Тут

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

$f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Очевидно, що область визначення оператора задачі (1.5), (1.6) можна схарактеризувати так:

$$D_A = \left\{u(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) \in C^{(2)}\left(\overline{\Omega}\right);\ u = 0,\ x_1, x_2 \in \Gamma\right\}. \tag{1.7}$$

Означення. Оператор A називають симетричним, якщо його область визначення $D_A \subset H$ є щільною множиною у просторі H, і виконується співвідношення

$$(Au, v) = (u, Av), \qquad \forall u, v \in D_A. \tag{1.8}$$

Приклад 3. Доведемо, що оператор задачі (1.2), (1.3) симетричний. Перш за все зазначимо, що множина D_A (1.4) щільна в $L_2(0,1)$. Цей висновок ґрунтується на очевидному співвідношенні $C_0^{(\infty)} \subset D_A$ і тому факті, що $C_0^{(\infty)}$ утворює щільну множину у просторі $L_2(0,1)$ [5,10]. Розглянемо скалярний добуток

$$(Au, v) = -\int_a^b u'' v dx, \qquad \forall u, v \in D_A. \tag{1.9}$$

Зінтегруємо праву частину попереднього виразу частинами і візьмемо до уваги граничні умови (1.3). Отримаємо

$$(Au, v) = \int_a^b u' v' dx. \tag{1.10}$$

Оскільки права частина цього виразу є симетричною відносно функцій u та v, то можна записати

$$(Au, v) = (Av, u). \tag{1.11}$$

З огляду на симетрію скалярного добутку остаточно одержимо

$$(Au, v) = (u, Av)\,. \tag{1.12}$$

Означення. Оператор A називають додатним, якщо він симетричний, і виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} (Au, u) &\geq 0, \qquad \forall u \in D_A; & (1.13)\\ (Au, u) &= 0 \Rightarrow u \equiv 0. & (1.14) \end{aligned}$$

Якщо в цьому разі існує стала $\gamma > 0$ така, що виконується нерівність

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2\,, \tag{1.15}$$

то оператор A називають додатно визначеним.

Приклад 4. Доведемо додатність оператора крайової задачі Діріхле для рівняння Пуассона (1.5), (1.6). Область визначення D_A цього оператора є щільною множиною в просторі $L_2(\Omega)$ (див. приклад 1). Розглянемо вираз

$$(Au, u) = -\int\limits_{\Omega} \Delta u\; u d\Omega.$$

Щоб його перетворити, отримаємо формулу Гріна для оператора Лапласа. З цією метою використаємо формулу Остроградського [8,10]

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) d\Omega = \int\limits_{\Gamma} (\varphi l_1 + \psi l_2)\, d\Gamma, \tag{1.16}$$

де $l_i = \cos(\nu, x_i)$, $i = 1, 2$; $\nu -$ зовнішня нормаль до границі Γ області Ω. Приймемо у формулі (1.16) $\varphi = uv$, $\psi = 0$. Знайдемо

$$\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Omega + \int\limits_{\Gamma} uvl_1 d\Gamma. \tag{1.17}$$

Аналогічно матимемо

$$\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_2} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_2} d\Omega + \int\limits_{\Gamma} uvl_2 d\Gamma. \tag{1.18}$$

Підставивши у формули (1.17), (1.18) замість функції u її похідні $\partial u/\partial x_1$ та $\partial u/\partial x_2$ і додаючи їх, отримаємо формулу Гріна

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u\, v d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma, \tag{1.19}$$

де

$$\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} l_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} l_2. \tag{1.20}$$

Отже, для скалярного добутку (Au, u) з урахуванням формули Гріна та граничних умов (1.6) запишемо

$$(Au, u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2 \, d\Omega. \tag{1.21}$$

Очевидно, що $(Au, u) \geq 0$. Припустимо тепер, що

$$(Au, u) = 0. \tag{1.22}$$

Звідси, враховуючи (1.21), матимемо

$$\nabla u \equiv 0 \Rightarrow u \equiv \text{const}. \tag{1.23}$$

Якщо взяти до уваги граничну умову (1.6), то отримаємо потрібний результат $u \equiv 0$.

Зауваження. Для можливості застосування формули Остроградського вважатимемо, що область Ω – обмежена зв'язна множина евклідового простору $\mathbf{R}^2$ з ліпшицевою границею Γ.

Приклад 5. Доведемо додатну визначеність оператора задачі (1.2), (1.3). Для цього запишемо $u(x)$ у вигляді

$$u(x) = \int\limits_a^x \frac{du}{dt} dt. \tag{1.24}$$

Звідси, враховуючи нерівність Коші–Буняковського, отримаємо

$$u^2(x) = \left(\int\limits_a^x \frac{du}{dt} dt \right)^2 \leq \int\limits_a^x \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt \quad \int\limits_a^x dx \leq (x-a) \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt. \tag{1.25}$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини ланцюжка нерівностей (1.25), знайдемо

$$\int\limits_a^b u^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \tag{1.26}$$

Отриману нерівність (1.26) називають нерівністю Фрідріхса. Використовуючи її, можна довести додатну визначеність оператора задачі

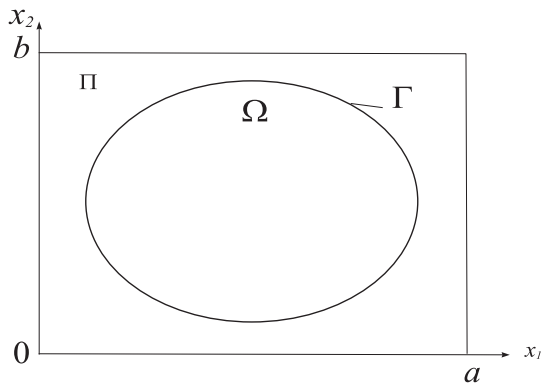

Рис. 1.1: Двовимірна область

(1.2), (1.3). Справді, враховуючи співвідношення (1.26), матимемо

$$(Au, u) \geq \frac{2}{(b-a)^2} \|u\|^2 . \tag{1.27}$$

Отже,

$$\gamma^2 = \frac{2}{(b-a)^2}.$$

Приклад 6. Доведемо додатну визначеність оператора задачі (1.5), (1.6). Припустимо, не зменшуючи загальності, що однозв'язна область Ω з ліпшицевою границею Γ розташована у першому квадранті декартової системи координат (рис. 1.1). Помістимо область Ω усередині прямокутника Π і довизначимо функцію $u(x_1, x_2)$ на $\Pi \backslash \Omega$, прийнявши, що в $\Pi \backslash \Omega$ вона дорівнює нулю. Запишемо далі очевидне співвідношення

$$u(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u\,(t, x_2)}{\partial t} dt. \tag{1.28}$$

Звідси, враховуючи нерівність Коші–Буняковського, знайдемо (аналогічно як у формулі (1.25))

$$u^2(x_1, x_2) = x_1 \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1. \tag{1.29}$$

Зінтегруємо цю нерівність на прямокутнику П

$$\int\limits_{\Pi} u^2(x_1,x_2)dx_1dx_2 \le \frac{a^2}{2}\int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1dx_2. \tag{1.30}$$

Подібним способом отримаємо і таку нерівність:

$$\int\limits_{\Pi} u^2(x_1,x_2)dx_1dx_2 \le \frac{b^2}{2}\int\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx_1dx_2. \tag{1.31}$$

Додаючи нерівності (1.30) та (1.31) і враховуючи, що в $\Pi\backslash\Omega$

$$u(x_1,x_2)\equiv 0, \frac{\partial u}{\partial x_1}\equiv 0, \frac{\partial u}{\partial x_2}\equiv 0,$$

отримаємо нерівність, яку теж називають нерівністю Фрідріхса:

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x_1,x_2)d\Omega \le c^2\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]d\Omega, \tag{1.32}$$

де

$$c^2=\max\left\{\frac{a^2}{4},\frac{b^2}{4}\right\}.$$

Урахувавши (1.21) та (1.32), отримаємо

$$(Au,u)\ge\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega}u^2d\Omega.$$

Отже, оператор задачі Діріхле для рівняння Пуассона додатно визначений.

1.2 Варіаційна задача про мінімум квадратичного функціонала

Уважатимемо тут, що задача

$$Au=f, \qquad f\in H \tag{1.33}$$

має додатний оператор, який відображає область його визначення D_A у гільбертів простір H.

Зазначимо перш за все, що властивість додатності оператора задачі (1.33) пов'язана з єдиністю її розв'язку. Виконується така теорема:

Теорема 1. *Нехай A – додатний оператор. Тоді, якщо задача (1.33) має розв'язок, то він єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки задачі (1.33) u_1 та u_2, причому u_1 не дорівнює тотожно u_2. Розглянемо скалярний добуток $(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2)$. Оскільки $A(u_1 - u_2) = Au_1 - Au_2 = f - f = 0$, то

$$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0.$$

Звідси, враховуючи, що A – додатний оператор, робимо висновок, що $u_1 - u_2 \equiv 0$. Це суперечить початковому припущенню, а отже, доводить теорему. ■

Наведена нижче теорема, яка встановлює зв'язок крайової задачі (1.33) з певною варіаційною задачею, надзвичайно важлива для конструювання методів побудови наближених розв'язків.

Теорема 2 *(теорема про мінімум функціонала енергії). Нехай A –додатний оператор. Якщо задача (1.33) має розв'язок, то він надає мінімуму функціоналу*

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f), \qquad u \in D_A. \tag{1.34}$$

Навпаки, функція, яка надає мінімального значення функціоналу (1.34), є одночасно розв'язком задачі (1.33).

Доведення. 1. Нехай функція u_0 є розв'язком задачі (1.33). Візьмемо довільну функцію $\eta \in D_A$. Очевидно, що $u_0 + \eta \in D_A$. Розглянемо $F(u_0 + \eta)$. Враховуючи симетрію оператора A та симетрію скалярного добутку, отримаємо

$$F(u_0 + \eta) = F(u_0) + 2(Au_0 - f, \eta) + (A\eta, \eta). \tag{1.35}$$

Зауважимо, що другий доданок у формулі (1.35) дорівнює нулю, оскільки $Au_0 - f = 0$. Отже, для довільної функції $u_0 + \eta$ справджується співвідношення

$$F(u_0 + \eta) = F(u_0) + (A\eta, \eta). \tag{1.36}$$

Оскільки останній доданок у правій частині формули (1.36) задовольняє нерівність $(A\eta, \eta) \geq 0$ (A – додатний оператор), то функціонал F досягає свого мінімального значення на функції u_0.

2. Доведемо тепер обернене твердження. Припустимо, що функція $u_0 \in D_A$ надає мінімального значення функціоналу (1.34). Це означає, що для довільної функції $\eta \in D_A$ і довільного дійсного числа t

$$F(u_0 + t\eta) \geq F(u_0). \tag{1.37}$$

Використавши знову симетрію оператора та симетрію скалярного добутку, отримаємо

$$F(u_0 + t\eta) = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) -$$

$$-2t(f, \eta) + 2t(Au_0, \eta) + t^2(A\eta, \eta). \tag{1.38}$$

Для вибраних функцій u_0, f, η $F(u_0 + t\eta)$ є квадратичною функцією змінної t. З умови теореми випливає існування у цієї функції мінімуму при $t = 0$. Це означає, що виконується рівність

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + t\eta) \mid_{t=0} = 0 \tag{1.39}$$

або, згідно з (1.38),

$$2(Au_0, \eta) - 2(f, \eta) = 0,$$

тобто

$$(Au_0 - f, \eta) = 0. \tag{1.40}$$

Оскільки η – довільна функція, а D_A – щільна множина, то звідси випливає [8]

$$Au_0 - f = 0.$$

■

Нехай A – додатно визначений оператор. Уведемо на множині $D_A \in H$ новий скалярний добуток

$$(u, v)_A = (Au, v). \tag{1.41}$$

Можна довести, що добуток (1.41) задовольняє всі аксіоми гільбертового простору. Розглянемо на множині D_A новий гільбертів простір H_A. У випадку, якщо цей простір не є повним, доповнимо його граничними (у сенсі метрики (1.41)) елементами Γ_A. Отже, для повного простору H_A маємо

$$H_A = D_A \cup \Gamma_A. \tag{1.42}$$

У монографії [8] доведено, що $H_A \subset H$.

Зауваження. Скалярний добуток (1.41) називають енергетичним добутком додатно визначеного оператора. Відповідну йому норму

$\|u\|_A = (u,u)_A^{1/2}$ – енергетичною нормою, простір H_A – енергетичним простором. Для довільного $u \in H_A$ виконується нерівність [8]

$$\|u\|_A \geq \gamma \|u\|, \tag{1.43}$$

яка є наслідком нерівності (1.15). Звідси випливає лема.

Лема 3. *Нехай A – додатно визначений оператор. Якщо послідовність $\{\varphi_n\}$ збіжна за енергетичною нормою (1.41), то вона збіжна і за нормою вихідного простору H.*

Доведення. Очевидне. ■

Функціонал (1.34), який визначений на множині D_A, у випадку додатно визначеного оператора A може бути поширений на енергетичний простір H_A. Справді, його можна навести у вигляді

$$F(u) = (u,u)_A - 2(u,f), \qquad u \in H_A.$$

Приклад 7. Запишемо функціонал енергії, що відповідає задачі

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \qquad x \in (a,b), \\ u(a) &= 0, \qquad u(b) = 0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги перетворення, виконані під час дослідження прикладу 3, запишемо

$$F(u) = \int_a^b \left(u'^2 - 2uf\right) dx, \qquad u \in H_A, \tag{1.44}$$

$$H_A = \{u(x) : u' \in L_2(0,1),\ u(a) = 0,\ u(b) = 0\}.$$

Приклад 8. Запишемо функціонал енергії, що відповідає задачі

$$-\Delta u = f, \quad x_1, x_2 \in \Omega,$$

$$u = 0 \quad x_1, x_2 \in \Gamma.$$

Урахувавши перетворення, виконані під час дослідження прикладу 4, отримаємо

$$F(u) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] d\Omega - 2\int_\Omega fu d\Omega, \qquad u \in H_A.$$

$$H_A = \left\{u(x_1,x_2) : \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L_2(\Omega); u = 0 \quad x_1, x_2 \in \Gamma\right\}.$$

1.3 Існування розв'язку задачі про мінімум функціонала енергії

Розглянемо функціонал

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f), \qquad u \in D_A. \tag{1.45}$$

Згідно з теоремою про функціонал енергії, якщо A – додатний оператор, то задача мінімізації цього функціонала еквівалентна задачі $Au = f$ за умови, що існує її розв'язок. Якщо оператор A – додатно визначений, то функціонал (1.45) можна розглядати в енергетичному просторі

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u, f), \qquad u \in H_A. \tag{1.46}$$

Тоді ж можна довести, що існує розв'язок задачі про мінімум функціонала.

Теорема 4. *Нехай A – додатно визначений оператор. Тоді варіаційна задача про мінімум функціонала енергії (1.46) має єдиний розв'язок $u_0 \in H_A$.*

Доведення. Розглянемо лінійний функціонал

$$l(u) = (u, f), \qquad u \in H_A. \tag{1.47}$$

Доведемо, що він обмежений у просторі H_A. Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, матимемо

$$|l(u)| = |(u, f)| \leq \|u\| \|f\|.$$

Запишемо далі, враховуючи (1.43),

$$|l(u)| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} \|u\|_A.$$

Звідси випливає обмеженість лінійного функціонала $l(u)$ в енергетичному просторі H_A. Тоді на підставі теореми Ріса [5,8,10] існує єдина функція $u_0 \in H_A$ така, що функціонал $l(u)$ можна записати у вигляді скалярного добутку

$$l(u) = (u, u_0)_A, \qquad u_0 \in H_A. \tag{1.48}$$

Врахувавши (1.48), перепишемо функціонал (1.46) так:

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u, u_0)_A. \tag{1.49}$$

Додамо і віднімемо у правій частині формули (1.49) скалярний добуток $(u_0, u_0)_A$. Отримаємо

$$F(u) = (u,u)_A - 2(u,u_0)_A + (u_0,u_0)_A - (u_0,u_0)_A =$$

$$= \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 . \tag{1.50}$$

З попередньої формули випливає, що мінімум функціонала досягається тоді і лише тоді, коли $u = u_0$. ■

Означення. Функцію u_0, яка надає мінімуму функціоналу енергії на множині функцій з простору H_A, називають узагальненим розв'язком рівняння $Au = f$.

Цей термін зумовлений тим, що розв'язок $u_0 \in H_A$ і, отже, може не належати області визначення оператора D_A.

Уважатимемо, що простір H – сепарабельний; тоді, як зазначено у [8], простір H_A теж сепарабельний. Отже, у ньому можна знайти повну ортонормовану систему функцій $\{\varphi_n\}$. Розвинемо узагальнений розв'язок u_0 у ряд Фур'є за цією системою функцій

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \varphi_n)_A \varphi_n. \tag{1.51}$$

Прийнявши у формулі (1.48) $u = \varphi_n$, отримаємо

$$(u_0, \varphi_n)_A = (f, \varphi_n). \tag{1.52}$$

Це приводить до такого запису u_0 у вигляді ряду Фур'є:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n. \tag{1.53}$$

Приклад 9. Розвинемо у ряд Фур'є розв'язок задачі

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, \qquad x \in (0,\pi), \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Виберемо повну ортогональну систему функцій у вигляді $\varphi_n = \sin nx$. Зауважимо, що згідно з перетвореннями, виконаними під час дослідження прикладу 3, для енергетичного скалярного добутку маємо вираз

$$(u,v)_A = \int_0^{\pi} u'v'dx.$$

Розглянемо скалярний добуток

$$(\varphi_m, \varphi_n)_A = mn \int\limits_0^\pi \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, \ m \neq n; \\ \frac{m^2\pi}{2}, \ m = n. \end{cases}$$

Отже, якщо взяти послідовність ортогональних функцій у вигляді

$$\{\varphi_n\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \sin nx,$$

то вона буде ще й нормованою. Обчислимо тепер скалярний добуток

$$(\varphi_n, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \int\limits_0^\pi \sin nx dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, \ n = 2i; \\ \frac{2\sqrt{2}}{n^2\sqrt{\pi}}, \ n = 2i - 1, \ i = 1, 2, ... \end{cases}$$

Тому з урахуванням попередньої формули ряд Фур'є для узагальненого розв'язку матиме вигляд

$$u_0 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx.$$

Приклад 10. Розвинемо у ряд Фур'є узагальнений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = 1, \qquad x_1, x_2 \in \Omega;$$

$$u = 0, \qquad x_1, x_2 \in \Gamma,$$

де Ω – прямокутна область

$$\Omega = \{x_1, x_2 : 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b\},$$

обмежена границею Γ. Виберемо повну ортонормовану систему функцій $\{\varphi_{mn}\}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= C \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}; m, n = 1, 2, ..., \\ C &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}. \end{aligned}$$

Ці функції нескінченно диференційовні і дорівнюють нулю на границі Γ області Ω. Отже, вони належать множині D_A – області визначення оператора. Легко довести, що вони утворюють ортонормовану систему в енергетичній метриці оператора задачі Діріхле для рівняння Пуассона, яка визначена скалярними добутком

$$(u,v)_A = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right] d\Omega.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулою (1.52):

$$\begin{aligned} (1,\varphi_{mn}) &= \frac{2ab}{\pi^2 mn}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2+a^2n^2}}, \\ m,n &= 1,3,5,\dots . \end{aligned}$$

Для парних значень індексів коефіцієнти ряду дорівнюють нулю. Отже, остаточно ряд Фур'є для узагальненого розв'язку матиме вигляд

$$u_0 = \frac{16a^2b^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}}{mn\left(b^2m^2+a^2n^2\right)}.$$

1.4 Головні та природні граничні умови

У параграфі 1.2 на множині D_A – області визначення оператора, побудовано повний енергетичний простір H_A. Елементами цього простору є елементи множини D_A, а також деякі граничні елементи, які утворюють множину Γ_A. Функції, що належать області визначення оператора D_A, очевидно, задовольняють усі граничні умови, які ставлять у задачі. Виявляється, що функції з множини Γ_A, які доповнюють D_A до повного простору, задовольняють тільки деякі граничні умови. Ці граничні умови називають головними граничними умовами. Наведемо формальну ознаку поділу граничних умов на головні та природні.

Означення. Нехай диференціальне рівняння має порядок $2k$. Тоді граничні умови, що містять похідні до порядку $k-1$ включно, є головними. Граничні ж умови, що містять похідні порядку k та вище, є природними граничними умовами.

У варіаційному формулюванні крайової задачі як задачі мінімізації квадратичного функціонала природні граничні умови та диференціальне рівняння становлять необхідні умови мінімуму функціонала (рівняння Ейлера).

Приклад 11. Розглянемо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f, \qquad x_1, x_2 \in \Omega; \tag{1.54}$$

$$u = 0, \qquad x_1, x_2 \in \Gamma_1; \tag{1.55}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad x_1, x_2 \in \Gamma_2, \qquad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{1.56}$$

де ν – зовнішня нормаль до границі Γ. Нескладно довести, що ця задача має додатний оператор. Отже, вона еквівалентна задачі про мінімум функціонала енергії

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) d\Omega - 2 \int\limits_{\Omega} f u \, d\Omega. \tag{1.57}$$

Оскільки диференціальне рівняння є рівнянням другого порядку, то $k = 1$. Отже, гранична умова (1.55) є головною умовою, а гранична умова (1.56) – природною. Шукатимемо розв'язок задачі про мінімум функціонала (1.57) на множині функцій

$$M = \left\{ u\left(x_1, x_2\right) : u \in C^{(2)}; u = 0, x_1, x_2 \in \Gamma_1 \right\}.$$

Ми намагатимемось довести, що функція, яка надає мінімального значення функціоналу, задовольняє рівняння (1.54). Тому в попередньому визначенні множини M є завищеними ($u \in C^{(2)}$), ніж звичайно, вимоги щодо гладкості функцій. Доведемо, що необхідними умовами мінімуму функціонала (1.57) є рівняння (1.54) та граничні умови (1.56). Нехай $F(u_0) \longrightarrow \min$; візьмемо довільну функцію $\eta \in M$. Розглянемо $v = u_0 + t\eta$, де $t \in R$. Запишемо необхідну умову мінімуму

$$\frac{dF(v)}{dt} \mid_{t=0} = 0. \tag{1.58}$$

Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \eta d\Omega = 0. \tag{1.59}$$

Перетворимо (1.59), використовуючи формулу Гріна (1.19), до вигляду

$$\int\limits_{\Omega} \left(-\Delta u_0 - f \right) \eta d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \eta d\Gamma = 0. \tag{1.60}$$

Оскільки η – довільний елемент із щільної множини, то з (1.60)

$$-\Delta u_0 = f \qquad \text{в } \Omega; \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на } \Gamma_2. \tag{1.62}$$

Отже, рівняннями Ейлера для функціонала (1.57) є диференціальне рівняння (1.54) та природна гранична умова (1.56).

1.5 Задачі з неоднорідними граничними умовами

Теорема про функціонал енергії та пов'язані з нею результати виконуються для лінійних операторів, описуваних лінійними рівняннями та однорідними граничними умовами. Зазначимо, що коли граничні умови є неоднорідними, то область визначення оператора не є лінійною множиною і, відповідно, оператор задачі не є лінійним. Тому для побудови варіаційного формулювання задачі вже неможливо використати згадану теорему. Проте шляхом заміни шуканої функції можна перетворити задачу до задачі з однорідними граничними умовами і для цієї задачі використати теорему про функціонал енергії.

Приклад 12. Проілюструємо це прикладом задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$-\Delta u\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_1, x_2\right), \qquad x_1, x_2 \in \Omega; \tag{1.63}$$

$$u\left(x_1, x_2\right) = g\left(x_1, x_2\right), \qquad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{1.64}$$

Область визначення цієї задачі

$$D_A = \left\{u\left(x_1, x_2\right): \ u \in C^{(2)}\left(\bar{\Omega}\right); \ u = g, x_1, x_2 \in \Gamma\right\}$$

не є лінійною множиною, бо для довільних $u, v \in D_A$ сума $u + v \notin D_A$, оскільки $u + v = 2g$, $x_1, x_2 \in \Gamma$. Для задачі (1.63), (1.64) виконаємо заміну шуканої функції

$$u = z + w, \tag{1.65}$$

де $z\left(x_1, x_2\right)$ – нова шукана функція; w – деяка відома функція, що має певний запас гладкості, наприклад, $w \in C^{(2)}\left(\bar{\Omega}\right)$ і $w = g$, $x_1, x_2 \in \Gamma$. З (1.65) випливає, що функція z повинна задовольняти на границі Γ умову

$$z = 0, \ x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{1.66}$$

Підставимо (1.65) в (1.63), отримаємо диференціальне рівняння для визначення функції z

$$-\Delta z = f + \Delta w. \tag{1.67}$$

Отже, шляхом заміни шуканої функції ми отримали крайову задачу (1.67) з однорідною граничною умовою (1.66). Запишемо для неї варіаційний функціонал. Згідно з теоремою про мінімум функціонала енергії отримаємо

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} z)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f z d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} \Delta w z d\Omega. \tag{1.68}$$

З використанням формули Гріна та граничної умови (1.66) перетворимо у формулі (1.68) останній доданок:

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} z)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f z d\Omega + 2\int\limits_{\Omega} \mathrm{grad} w\, \mathrm{grad} z d\Omega.$$

Додамо до останньої формули сталу величину

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} w)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f w d\Omega,$$

яка не змінює розв'язку задачі про мінімум функціонала, і перепишемо його у вигляді

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad})^2 u d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f u d\Omega. \tag{1.69}$$

Отже, видно, що функціонал має вигляд такий, як і для однорідних граничних умов. Проте в разі його мінімізації потрібно враховувати заміну (1.65)

Приклад 13. Розглянемо тут неоднорідну природну граничну умову Ньютона

$$\frac{\partial u\left(x_1, x_2\right)}{\partial \nu} + \sigma u\left(x_1, x_2\right) = g\left(x_1, x_2\right), \qquad x_1, x_2 \in \Gamma, \qquad \sigma = \mathrm{const}, \sigma > 0 \tag{1.70}$$

для рівняня Пуассона

$$-\Delta u\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_1, x_2\right), \qquad x_1, x_2 \in \Omega. \tag{1.71}$$

Як і в попередньому прикладі, виконаємо заміну

$$u = z + w, \tag{1.72}$$

де z – нова шукана функція; w – деяка відома функція, що має певний запас гладкості, наприклад $w \in C^{(2)}\left(\bar{\Omega}\right)$, і

$$\frac{\partial w\left(x_1, x_2\right)}{\partial \nu} + \sigma w\left(x_1, x_2\right) = g\left(x_1, x_2\right),\ x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{1.73}$$

З (1.73) випливає, що функція z повинна задовольняти на границі Γ умову

$$\frac{\partial z\left(x_1, x_2\right)}{\partial \nu} + \sigma z\left(x_1, x_2\right) = 0,\ x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{1.74}$$

Знову для визначення функції z отримаємо рівняння

$$-\Delta z = f + \Delta w. \tag{1.75}$$

Оскільки крайова задача (1.75), (1.74) є задачею з однорідними граничними умовами, то її варіаційне формулювання можна отримати з теореми про функціонал енергії. Згідно з цією теоремою задача зводиться до задачі мінімізації функціонала

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} z)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f z d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} \Delta w z d\Omega + \sigma \int\limits_{\Gamma} z^2 d\Gamma.$$

Перетворимо цей функціонал за аналогією з попереднім:

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} z)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f z d\Omega + 2\int\limits_{\Omega} \mathrm{grad} w\, \mathrm{grad} z d\Omega +$$

$$+\sigma \int\limits_{\Gamma} z^2 d\Gamma - 2\sigma \int\limits_{\Gamma} g z d\Gamma + 2\sigma \int\limits_{\Gamma} w z d\Gamma.$$

Додамо до останньої формули сталу величину

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} w)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f w d\Omega - 2\sigma \int\limits_{\Gamma} g w d\Gamma + \sigma \int\limits_{\Gamma} w^2 d\Gamma,$$

яка не змінює розв'язку задачі про мінімум функціонала, і перепишемо його у вигляді

$$F = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} u)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f u d\Omega - 2\int\limits_{\Gamma} g u d\Gamma + \sigma \int\limits_{\Gamma} u^2 d\Gamma. \tag{1.76}$$

Отже, для задачі, яка має природну граничну умову (1.70), функціонал енергії вже змінює свій вигляд.

Висновок. Для задачі з неоднорідними умовами головного типу достатньо врахувати заміну вигляду (1.65) і далі чинити так, як і для однорідних граничних умов. На випадок неоднорідних граничних умов природного типу потрібно врахувати відповідні зміни у записі функціонала енергії.

Цей висновок дуже важливий для конструювання числових методів побудови розв'язків крайових задач.

1.6 Метод Рітца

Для побудови наближеного розв'язку задачі про мінімум квадратичного функціонала можна скористатися методом Рітца.

Нехай A – додатно визначений оператор. Тоді крайова задача $Au = f$ еквівалентна (згідно з теоремою про функціонал енергії) задачі мінімізації функціонала

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u, f), \qquad u \in H_A. \tag{1.77}$$

Виберемо послідовність $\{\varphi_n\}$, кожна функція якої задовольняє вимоги

1° $\varphi_n \in H_A$,

2° $\det G \neq 0$,

3° $\forall u_0 \in H_A,\ \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N,\ \alpha_i : \left\| u_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\|_A \leq \varepsilon.$

Тут $G = \left\{ (\varphi_i, \varphi_j)_A \right\}$ – матриця Грамма послідовності функцій $\{\varphi_n\}$.

Зазначимо, що умова 2° є умовою лінійної незалежності, а умова 3° – умовою повноти.

Наближений розв'язок u_n задачі про мінімум функціонала (1.77) запишемо у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \tag{1.78}$$

де a_i – невідомі коефіцієнти. Для їхнього знаходження використаємо необхідні умови екстремуму функціонала (1.77) в підпросторі S_n, побудованому на базисі $\{\varphi_i\}$,

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.79}$$

Виконавши операцію диференціювання в (1.79), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (\varphi_i, \varphi_j)_A = (\varphi_i, f), \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.80}$$

Рівняння (1.80) утворюють систему лінійних алгебричних рівнянь для відшукання невідомих коефіцієнтів a_j.

Визначник системи лінійних алгебричних рівнянь (1.80) відмінний від нуля за умовою 2°. Отже, система рівнянь (1.80) має єдиний розв'язок.

Зауваження. Поширеною є також схема методу Рітца, у якому наближений розв'язок знаходять шляхом використання послідовностей базисних функцій

$$\varphi_{1,1}, ..., \varphi_{1,n}; ...; \varphi_{k,1}, ..., \varphi_{k,n_k}; ...$$

У цьому разі система лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів зберігає свій вигляд. Проте для кожного значення n вона утворюється на основі іншої послідовності базисних функцій.

Теорема 5. *Послідовність наближених розв'язків $\{u_n\}$ методу Рітца (1.78) збігається до узагальненого розв'язку як за енергією, так і за нормою вихідного простору H.*

Доведення. Використаємо для доведення запис функціонала енергії (1.50)

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \tag{1.81}$$

де u_0 – узагальнений розв'язок. З того, що u_n надає мінімального значення функціоналу (1.81), випливає, що різниця $\|u_n - u_0\|_A$ набуває мінімального значення на підпросторі S_n. Отже, згідно з умовою 3°

$$\|u_n - u_0\|_A \le \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i - u_0 \right\|_A \le \varepsilon. \tag{1.82}$$

Це й означає збіжність за енергією. Використаємо далі нерівність

$$\|u\|_A^2 \ge \gamma^2 \|u\|^2, \tag{1.83}$$

яка випливає з означення додатно визначеного оператора. Ця нерівність, як зазначено, виконується для довільної функції $u \in H_A$. Отже, з (1.82) та (1.83) випливає, що

$$\|u_n - u_0\| \le \varepsilon, \tag{1.84}$$

тобто що послідовність наближених розв'язків збігається також і за нормою вихідного простору. ■

Теорема 6. *Послідовність наближених розв'язків методу Рітца прямує знизу за енергією до узагальненого розв'язку.*

Доведення. Вважатимемо тут для спрощення викладок, що послідовність функцій $\{\varphi_n\}$ є ортонормованою за енергією, тобто виконується співвідношення

$$(\varphi_i, \varphi_j)_A = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{1.85}$$

Розвинемо узагальнений розв'язок u_0 у ряд Фур'є

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)_A \, \varphi_i. \tag{1.86}$$

З (1.86) маємо

$$\|u_0\|_A^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)_A^2 \,. \tag{1.87}$$

Якщо система функцій $\{\varphi_n\}$ ортонормована, то система рівнянь Рітца (1.80) спрощується. Вона набуває вигляду

$$a_i = (f, \varphi_i)\,, \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.88}$$

Підставимо (1.88) у формулу для u_n (1.78) і обчислимо

$$\|u_n\|_A^2 = (u_n, u_n)_A = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)^2 \,. \tag{1.89}$$

Порівнюючи (1.89) з (1.87), можемо записати нерівність

$$\|u_n\|_A^2 \leq \|u_0\|_A^2 \,, \tag{1.90}$$

яка доводить теорему. Якщо ж функції $\{\varphi_n\}$ не є ортонормованими, то їх можна ортонормувати шляхом використання процедури Грамма–Шмідта [5], яка передбачає перерахунок ортонормованих функцій через неортонормовані за скінченну кількість кроків. У цьому разі нерівність (1.90) знову виконуватиметься. ■

Зауваження. Нехай u_n – наближений за Рітцом розв'язок задачі про мінімум функціонала енергії. З умов мінімуму функціонала випливає, що

$$(Au_n - f, \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in S_n. \tag{1.91}$$

Узагальнений розв'язок u_0 задовольняє рівність

$$(Au_0 - f, \eta) = 0. \tag{1.92}$$

Віднімемо від (1.91) формулу (1.92):

$$(Au_n - Au_0, \eta) = 0,$$

або

$$(A(u_n - u_0), \eta) = 0. \tag{1.93}$$

З (1.93) випливає, що наближений розв'язок u_n є ортогональною проекцією

$$(u_n - u_0, \eta)_A = 0$$

узагальненого розв'язку на підпростір S_n, утворений на базисі $\{\varphi_n\}$.

1.7 Метод скінченних елементів

Опишемо варіант методу Рітца розв'язування крайових задач для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Його алгоритм будують з використанням спеціальних кусково-аналітичних базисних функцій. Цей метод відомий у науковій літературі як метод скінченних елементів.

Для запису одновимірних кусково-лінійних базисних функцій методу скінченних елементів розділимо проміжок $[a, b]$ на відрізки – скінченні елементи, точками $x_i,\ i = 0, 1, ..., n,\ x_0 = a,\ x_n = b$. Задамо базисну функцію $\varphi_i^h(x)$ співвідношенням

$$\varphi_i^h = \begin{cases} 0, & x_0 \le x < x_{i-1}; \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x < x_i; \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x_i \le x < x_{i+1}; \\ 0, & x_{i+1} \le x < x_n, \end{cases} \tag{1.94}$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Графік функції $\varphi_i^h(x)$ зображений на рис. 1.2.

Функції вигляду (1.94), які відмінні від нуля тільки в певній частині області визначення, називають функціями з компактним носієм.

З огляду на специфіку побудови функції $\varphi_i^h(x)$ мають такі властивості:

1° $\varphi_i^h(x) \in C[a, b]$;

2° $\left(\varphi_r^h, \varphi_s^h\right) = 0$, якщо $|r - s| \ge 2$;

3° $\varphi_i^h(x_j) = \delta_{ij}$.

З властивості 3° випливає: якщо

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i^h(x), \tag{1.95}$$

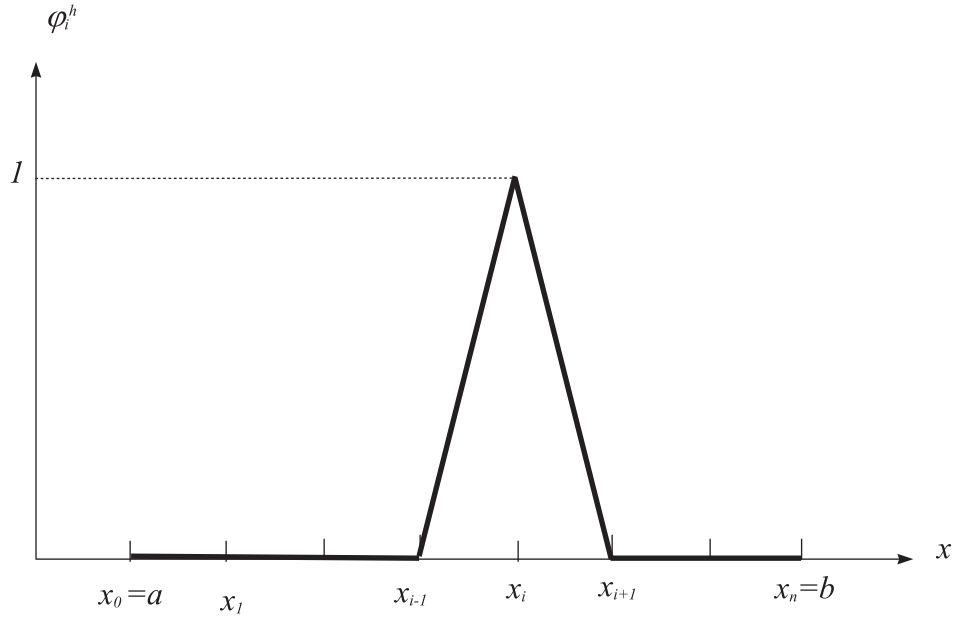

Рис. 1.2: Кусково-аналітичні базисні функції

то $a_i = u_h(x_i)$ (позначимо $u_h(x_i) = u_i^h$). На скінченному елементі $[x_{i-1}, x_i]$ функцію u_h можна записати у вигляді

$$u_h = u_{i-1}^h \varphi_{i-1}^h(x) + u_i^h \varphi_i^h(x). \tag{1.96}$$

Використаємо кусково-поліноміальні функції (1.94) для побудови наближеного розв'язку задачі Штурма–Ліувіля

$$-\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} + q(x) u = f(x), \qquad x \in (a, b); \tag{1.97}$$

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0. \tag{1.98}$$

Якщо коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$ рівняння (1.97) задовольняють умови $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, то оператор задачі (1.97), (1.98) є додатно визначений (параграф 1.1). Крайову задачу (1.97), (1.98) можна сформулювати як варіаційну. Її узагальнений розв'язок існує і єдиний. Застосувавши метод Рітца до побудови наближеного розв'язку, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} a_j (\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \left(f, \varphi_i^h\right), \qquad i = 1, ..., n, \tag{1.99}$$

де

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \int_a^b \left(p(\varphi_i^h)'(\varphi_j^h)' + q\varphi_i^h \varphi_j^h\right) dx, \qquad \left(f, \varphi_i^h\right) = \int_a^b f \varphi_i^h dx. \tag{1.100}$$

Позначимо тут для зручності скалярний добуток $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A$ на проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ через $\left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_k$, тобто

$$\left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(p\left(\varphi_i^h\right)' \left(\varphi_j^h\right)' + q\varphi_i^h \varphi_j^h\right) dx.$$

Врахувавши властивості кусково-поліноміальних функцій, знайдемо, що

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = 0, \ |i - j| \geq 2. \tag{1.101}$$

Для $|i - j| < 2$ матимемо

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \sum_{k=1}^{n} \left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_k. \tag{1.102}$$

Обчислимо i-й елемент стовпця вільних членів системи лінійних алгебричних рівнянь (1.99). Запишемо

$$\left(f, \varphi_i^h\right) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \varphi_i^h dx. \tag{1.103}$$

Позначимо тут значення скалярного добутку $\left(f, \varphi_i^h\right)$ на проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ через $\left(f, \varphi_i^h\right)_k$, тобто

$$\left(f, \varphi_i^h\right)_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \varphi_i^h dx.$$

У формулах (1.102), (1.103) для довільного фіксованого i відмінними від нуля є тільки два доданки, тобто

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_i + \left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_{i+1}; \tag{1.104}$$

$$\left(f, \varphi_i^h\right) = \left(f, \varphi_i^h\right)_i + \left(f, \varphi_i^h\right)_{i+1}. \tag{1.105}$$

У цьому разі, якщо врахувати (1.101), індекс j у (1.104) може набувати значення $i-1$, i, $i+1$. Якщо $j = i$, то у формулі (1.104) є два доданки. Якщо $j = i-1$ або $j = i+1$, то у цій формулі залишається тільки один, відповідно, перший або другий доданок.

Якщо поставити собі за мету обчислити всі можливі значення $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A$ на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ (скінченному елементі Ω_i), то їх можна розмістити у матриці

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h\right]_i & \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h\right]_i \\ \left[\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h\right]_i & \left[\varphi_i^h, \varphi_i^h\right]_i \end{pmatrix}. \tag{1.106}$$

Аналогічно стосовно скалярного добутку $\left(f, \varphi_i^h\right)$. Всі можливі його значення на Ω_i можна розмістити у матриці-стовпці

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \left(f, \varphi_{i-1}^h\right)_i \\ \left(f, \varphi_i^h\right)_i \end{pmatrix}. \tag{1.107}$$

Зазначимо, що, враховуючи вигляд скалярного добутку (1.102), матрицю A_i можна описати сумою двох матриць

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{M}_i, \tag{1.108}$$

де

$$\mathbf{K}_i = \left\{ \begin{array}{cc} \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h\right]_{i,p} & \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h\right]_{i,p} \\ \left[\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h\right]_{i,p} & \left[\varphi_i^h, \varphi_i^h\right]_{i,p} \end{array} \right\}; \tag{1.109}$$

$$\mathbf{M}_i = \left\{ \begin{array}{cc} \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h\right]_{i,q} & \left[\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h\right]_{i,q} \\ \left[\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h\right]_{i,q} & \left[\varphi_i^h, \varphi_i^h\right]_{i,q} \end{array} \right\}; \tag{1.110}$$

$$\left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_{i,p} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(\varphi_i^h)'(\varphi_j^h)' dx, \qquad \left[\varphi_i^h, \varphi_j^h\right]_{i,q} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_i^h \varphi_j^h dx.$$

Матриці K_i і M_i називають матрицями жорсткості та мас. Ця термінологія перейнята з інженерних наук, зокрема, з комп'ютерної механіки деформування інженерних конструкцій. Для побудови матриць $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{B}_i$ можна скористатись формалізмом матричних перетворень, а також матричним записом наближеного розв'язку (1.96) на Ω_i

$$u^h = \mathbf{N}_i\left(x\right)\mathbf{Q}_i, \tag{1.111}$$

де

$$\mathbf{N}_i\left(x\right) = \left(-\frac{x - x_i}{h_i}, \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right), \qquad \mathbf{Q}_i = \left(u_{i-1}^h, u_i^h\right)^T.$$

Легко бачити, що виконуються співвідношення

$$\mathbf{K}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d}{dx}\mathbf{N}_i\left(x\right)\right)^T p(x)\frac{d}{dx}\mathbf{N}_i\left(x\right)dx; \tag{1.112}$$

$$\mathbf{M}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i\left(x\right)^T q\left(x\right)\mathbf{N}_i\left(x\right)dx; \tag{1.113}$$

$$\mathbf{B}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i\left(x\right)^T f(x)dx. \tag{1.114}$$

Зазначимо, що для довільних коефіцієнтів $p\left(x\right)$, $q\left(x\right)$ з метою обчислення інтегралів у формулах (1.112)–(1.114) використовують квадратурні формули, зокрема, формули Гаусса. Якщо коефіцієнти p, q та права частина f – сталі, то інтеграли в формулах (1.112), (1.113), (1.114) можна обчислити у явному вигляді

$$\mathbf{K}_i = \frac{p}{h_i}\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right);$$

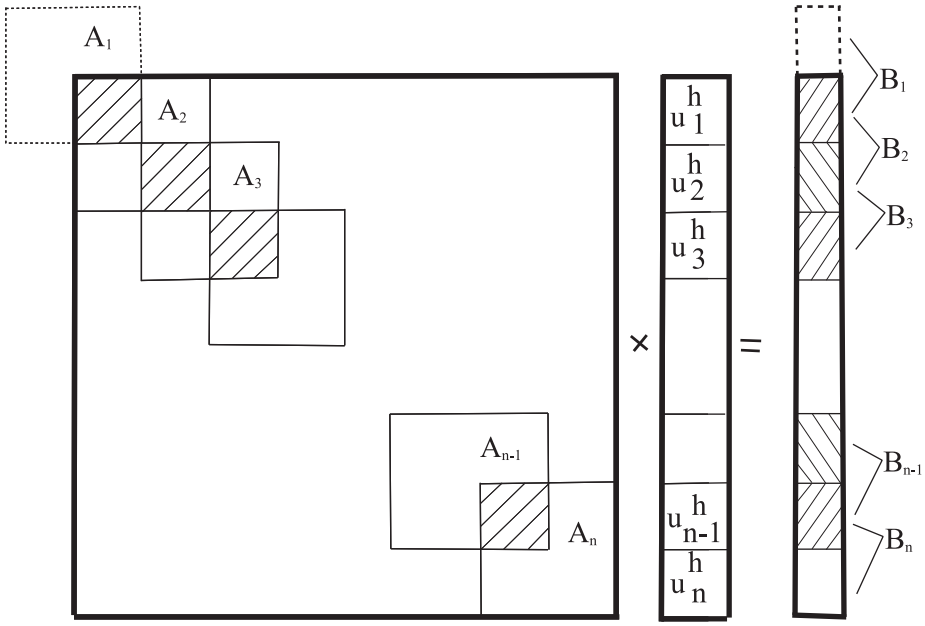

Рис. 1.3: Схема формування системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{M}_i = h_i \frac{q}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_i = f \frac{h_i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно, враховуючи попередні зауваги, систему лінійних алгебричних рівнянь (1.99) можна зобразити схемою, показаною на рис 1.3. Матриця системи є тридіагональною та симетричною. Коефіцієнти в заштрихованих частинах додають. Головна гранична умова $u(a) = 0$ врахована, оскільки індекс j у формулі (1.95) змінюється від значення 1 (не від нуля). Штрихом на рис. 1.3 зображені матриці $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{B}_1$, які формуються з урахуванням того, що індекс у формулі (1.95) починають відраховувати від одиниці. З кожної з цих матриць використовують тільки один елемент.

1.8 Слабкий розв'язок крайової задачі

Теорему про функціонал енергії можна використати для запису варіаційних формулювань задач, оператори яких є принаймні додатними. Проте існує чимало крайових задач, які є важливими з погляду їх застосування в комп'ютерному моделюванні, оператори яких не є додатними і не є навіть симетричними. Наведемо приклад такої задачі, яка моделює одновимірний процес перенесення забруднень.

Приклад 14. Процес описує диференціальне рівняння

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + Pe\frac{du}{dx} + u = f,\ x \in (a,b) \tag{1.115}$$

та граничні умови

$$u\,(a) = 0, \quad \frac{du\,(b)}{dx} = 0. \tag{1.116}$$

Тут Pe – безрозмірна стала, число Пекле; $f \in L_2\,(a,b)$. Область визначення D_A оператора цієї задачі можна описати таким співвідношенням:

$$D_A = \left\{ u\,(x) : u\,(x) \in W_2^{(2)}, u\,(a) = 0, \frac{du\,(b)}{dx} = 0 \right\}.$$

Тут $W_2^{(2)}$– простір Соболєва функцій, які інтегровні на проміжку $[a,b]$ разом з узагальненими похідними до другого порядку включно (див. додаток).

Запишемо вираз для скалярного добутку (Au,v), що відповідає операторові задачі (1.115), (1.116). Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$(Au,v) = \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + Pe\frac{du}{dx}v + uv \right) dx. \tag{1.117}$$

Видно, що скалярний добуток (1.117) не є симетричним.

З огляду на формулу (1.117) уведемо до розгляду простір

$$V = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}, u(a) = 0 \right\}, \tag{1.118}$$

де $W_2^{(1)}$–простір Соболєва функцій, які інтегровні на проміжку $[a,b]$ разом з узагальненими похідними до першого порядку включно; гранична умова $v(a) = 0$ для функцій простору $W_2^{(1)}$виконується в сенсі слідів (див. додаток).

Означення. Назвемо слабким розв'язком крайової задачі (1.115), (1.116) функцію $u\,(x) \in V$, яка задовольняє варіаційне рівняння

$$(Au, v) = (f, v)\,, \qquad \forall v \in V. \tag{1.119}$$

Виконується включення

$$D_A \subset V.$$

Тому, очевидно, якщо функція $u(x) \in D_A$ є розв'язком задачі ((1.115), (1.116))

$$Au = f,$$

вона є і слабким розв'язком, тобто задовольняє варіаційне рівняння (1.119).

Припустимо, що функція $u\,(x) \in V$ є слабким розв'язком. Тоді вона задовольняє варіаційне рівняння

$$\int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + Pe\frac{du}{dx}v + uv \right) dx = \int\limits_a^b fvdx.$$

Застосувавши до першого доданка у лівій частині формулу інтегрування частинами і врахувавши запис (1.118), перепишемо це рівняння

$$\int\limits_a^b \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + Pe\frac{du}{dx} + u - f \right) vdx + \frac{du\,(b)}{dx}v\,(b) = 0.$$

Оскільки $v(x)$ – довільна функція, то звідси випливають рівності

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + Pe\frac{du}{dx} + u - f = 0,$$

$$\frac{du\,(b)}{dx} = 0.$$

Отже, $u\,(x)$ є розв'язком задачі (1.115), (1.116), але таким, який належить ширшій, ніж область визначення D_A, множині V. Власне тому цей розв'язок і називають слабким розв'язком крайової задачі (1.115), (1.116).

1.9 Абстрактна варіаційна задача

Запишемо варіаційну задачу (1.119) у загальному вигляді. Знайдемо $u \in V$ таке, що

$$a\left(u,v\right)=l\left(v\right), \qquad \forall v \in V,$$

де $a\left(u,v\right)$, $l\left(v\right)$ – деякі задані білінійна та лінійна форми. Питання існування і єдиності слабкого розв'язку цієї варіаційної задачі розглянуто у такій теоремі.

Теорема 7 *(Лакса–Мільграма). Нехай V – гільбертів простір, у якому задана білінійна форма $a(u,v) : V \times V \to R$ та лінійна форма $l(v) : V \to R$. Уважатимемо, що білінійна форма неперервна та V-еліптична, тобто виконуються нерівності*

$$|a(u,v)| \leq M \left\|u\right\|_V \left\|v\right\|_V ; \tag{1.120}$$

$$a(u,u) \geq \alpha \left\|u\right\|_V^2 , \tag{1.121}$$

де M, α – сталі, $M > 0$, $\alpha > 0$, а лінійна форма $l(v)$ неперервна, тобто задовольняє нерівність

$$|l(v)| \leq K \left\|v\right\|_V , \tag{1.122}$$

де K – стала, $K > 0$. Тоді така варіаційна задача: знайти таку функцію $u \in V$, що

$$a\left(u,v\right)=l\left(v\right) \qquad \forall v \in V, \tag{1.123}$$

має єдиний розв'язок, і виконується нерівність

$$\left\|u\right\|_V \leq \frac{K}{\alpha}. \tag{1.124}$$

Доведення. Виберемо деяку функцію $u \in V$. Білінійну форму $a\left(u,v\right)$ при фіксованій функції u можна розглядати як лінійний функціонал від змінної v. Позначимо його $L(u)(v) = a\left(u,v\right)$. Під записом $L(u)(v)$ тут треба розуміти лінійний функціонал $L(u)$ від функції v. Лінійний функціонал $L(u)(v)$ обмежений, оскільки обмежена білінійна форма $a\left(u,v\right)$. Нехай V_*–простір, спряжений до V. Позначимо через$\left\|\cdot\right\|_*$ норму в просторі V_*. З означення норми обмеженого лінійного функціонала маємо

$$\left\|L(u)(v)\right\|_* = \sup_{\substack{v \in V \\ \left\|v\right\|_V \neq 0}} \frac{|L(u)(v)|}{\left\|v\right\|_V}.$$

Враховуючи далі, що $L(u)(v) = a\,(u, v)$ та нерівність (1.120), отримаємо

$$\|L(u)(v)\|_* \leq \frac{M\,\|u\|_V\,\|v\|_V}{\|v\|_V} = M\,\|u\|_V\,.$$

Отже, лінійний функціонал $L(u) : V \to V_*$ теж обмежений. Нехай $\tau : V_* \to V$ відображення Ріса, для якого за означенням виконується твердження. Довільний лінійний, обмежений функціонал можна записати у вигляді скалярного добутку. Візьмемо $l(v) \in V$. Тоді для довільної функції $v \in V$ правильний запис

$$l(v) = (\tau l, v)_V.$$

З іншого боку, згідно з (1.123) маємо

$$l(v) = a\,(u, v) = L(u)(v).$$

Праву частину останнього ланцюжка рівностей згідно з відображенням Ріса можна записати у вигляді

$$L(u)(v) = (\tau L(u), v)_V.$$

З урахуванням трьох останніх рівностей, матимемо

$$(\tau l, v)_V = (\tau L(u), v)_V. \tag{1.125}$$

Отже, розв'язування задачі (1.123) можна звести до знаходження розв'язку такої задачі:

$$\tau L(u) = \tau l. \tag{1.126}$$

Рівняння (1.126) має єдиний розв'язок, якщо існують значення параметра $\rho > 0$, за яких афінне відображення

$$u \in V \to u - \rho(\tau L(u) - \tau l)$$

є стискним. Для дослідження цього питання розглянемо вираз

$$\|u - \rho\tau L(u)\|_V^2\,.$$

Врахувавши властивості норми, отримаємо співвідношення

$$\|u - \rho\tau L(u)\|_V^2 = \|u\|_V^2 - 2\rho\,(\tau L(u), u)_V + \rho^2\,\|\tau L(u)\|_V^2\,. \tag{1.127}$$

Перетворимо окремо вирази в другому і третьому доданках

$$(\tau L(u), u)_V = L(u)(u) = a(u, u) \geq \alpha\,\|u\|_V^2\,, \tag{1.128}$$

$$\|\tau Lu\|_V^2 = (\tau Lu, \tau Lu)_V = Lu(\tau Lu) = a(u, \tau Lu) \leq$$
$$\leq M \|u\|_V \|\tau Lu\|_V .$$

Зазначимо, що з останнього співвідношення випливає

$$\|\tau L(u)\|_V \leq M \|u\|_V . \tag{1.129}$$

Урахувавши нерівності (1.128) та (1.129) в разі оцінювання зверху виразу (1.127), отримаємо

$$\|u - \rho\tau L(u)\|_V^2 \leq \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2\right) \|u\|_V^2 .$$

Вимагатимемо, щоб вираз у круглих дужках був менший від одиниці. Тоді повинна виконуватись нерівність

$$-2\rho\alpha + \rho^2 M^2 < 0.$$

Очевидно, що цю нерівність задовольняють $\rho \in (0, 2\alpha/M^2)$. Для таких значень ρ відображення є стискним, і, отже, існування розв'язку доведене. На завершення доведемо, що виконується нерівність (1.124). Прийнявши у формулі (1.123) $v = u$, отримаємо

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = l(u) \leq K \|u\|_V .$$

Звідси, поділивши цю нерівність на $\|u\|_V$, знайдемо

$$\|u\|_V \leq \frac{K}{\alpha}.$$

■

Приклад 15. Розглянемо приклад 14. Маємо простір

$$V = \left\{ u(x) : \ u(x) \in W_2^{(1)}(a, b) ; \ u(a) = 0 \right\},$$

білінійну форму

$$a(u, v) = (Au, v) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + Pe\frac{du}{dx}v + uv \right) dx,$$

та лінійну форму

$$l(v) = \int_a^b f(x) v dx.$$

Доведемо, що білінійна та лінійна форми задовольняють умови теореми Лакса–Мільграма, якщо $Pe = 1$:

$$(a(u,v))^2 = \left(\int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + uv \right) dx \right)^2 .$$

Застосувавши очевидну нерівність

$$2cd \le c^2 + d^2, \forall c, d \in \mathbf{R},$$

отримаємо

$$(a(u,v))^2 \le 3 \left(\int\limits_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \right)^2 + 3 \left(\int\limits_a^b \frac{du}{dx}vdx \right)^2 + 3 \left(\int\limits_a^b uvdx \right)^2 . \tag{1.130}$$

Оцінимо зверху кожен доданок у правій частині, використовуючи нерівність Шварца

$$\left(\int\limits_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx \right)^2 \le \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \int\limits_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx,$$

$$\left(\int\limits_a^b \frac{du}{dx}vdx \right)^2 \le \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \int\limits_a^b v^2 dx,$$

$$\left(\int\limits_a^b uvdx \right)^2 \le \int\limits_a^b u^2 dx \int\limits_a^b v^2 dx.$$

Отже, для $(a(u,v))^2$ матимемо оцінку

$$(a(u,v))^2 \le 3 \left\{ \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \int\limits_a^b \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \int\limits_a^b v^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_a^b u^2 dx \int\limits_a^b v^2 dx \right\}.$$

Підсилимо цю нерівність, додавши у правій частині невід'ємний доданок

$$\int\limits_a^b \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \int\limits_a^b u^2 dx.$$

Остаточно перепишемо нерівність (1.130) у вигляді

$$(a\,(u,v))^2 \leq 2\,\|u\|_1^2\,\|v\|_1^2\,,$$

де

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_a^b \left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2\right) dx.$$

Отже, ми довели неперервність білінійної форми, а саме: доведено нерівність

$$|a\,(u,v)| \leq 2\,\|u\|_1\,\|v\|_1\,.$$

Аналогічно можна довести, що лінійна форма $l(v)$ є теж неперервною. Доведемо тепер, що білінійна форма є $V-$еліптичною, тобто доведемо, що виконується нерівність

$$a\,(u,u) \geq \alpha\,\|u\|_1^2\,.$$

Запишемо

$$\begin{aligned} a\,(u,u) &= \int\limits_a^b \left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dx}u + u^2\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx} + u\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2\right) dx. \end{aligned}$$

Відкинувши перший невід'ємний доданок у правій частині попередньої формули, отримаємо

$$a\,(u,u) \geq \frac{1}{2}\,\|u\|_1^2\,.$$

Отже, білінійна форма $a\,(u,v)$ є V-еліптичною та $\alpha = 1.2$.

1.10 Метод Бубнова–Гальоркіна

Для побудови наближеного роз'язку варіаційної задачі

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V \tag{1.131}$$

застосуємо метод Бубнова–Гальоркіна (у науковій літературі цей метод називають також методом Гальоркіна), який полягає у такому. Виберемо у просторі V послідовність функцій $\{\varphi_i\}$, які задовольняють такі умови:

1° $\varphi_i \in V$;

2° $\{\varphi_i\}$ – лінійно незалежна система;

3° $\{\varphi_i\}$ – повна система.

Позначимо через S_n скінченновимірний підпростір простору V, натягнений на базисні функції $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Наближений розв'язок варіаційної задачі (1.123) шукатимемо у підпросторі S_n. Запишемо його у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \tag{1.132}$$

де $a_i \in R$ – невідомі коефіцієнти. Для їхнього знаходження підставимо (1.132) у варіаційне рівняння (1.131) замість функції u і приймемо $v = \varphi_j$ $(j = 1, ...n)$. Отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) a_j = l(\varphi_i), \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.133}$$

З умов 1°, 2°, накладених на базисні функції, випливає, що система рівнянь (1.133) має єдиний розв'язок. Справді, наслідком цих умов є те, що S_n – повний підпростір простору V, і, отже, в S_n справджується теорема Лакса–Мільграма, яка забезпечує існування в S_n розв'язку.

Для дослідження проблеми збіжності послідовності наближених розв'язків розглянемо лему

Лема 8 *(Сеа). Існує стала $C > 0$, яка не залежить від вимірності підпростору S_n така, що виконується нерівність*

$$\|u_0 - u_n\|_V \le C \|u_0 - v_n\|_V, \tag{1.134}$$

де u_0 – розв'язок варіаційної задачі (1.131); u_n – наближений розв'язок (1.132); v_n – довільна функція з підпростору S_n.

Доведення. Очевидно, що u_0 задовольняє співвідношення

$$a(u_0, v_n) = l(v_n), \qquad \forall v_n \in S_n.$$

З (1.133) випливає, що для u_n виконується формула

$$a(u_n, v_n) = l(v_n), \qquad \forall v_n \in S_n.$$

Віднімемо почленно від попереднього співвідношення останнє. Отримаємо

$$a(u_0 - u_n, v_n) = 0, \qquad \forall v_n \in S_n. \tag{1.135}$$

Використавши нерівність (1.121), запишемо

$$\begin{aligned} \alpha \|u_0 - u_n\|_V^2 &\leq a(u_0 - u_n, u_0 - u_n) = \\ a(u_0 - u_n, u_0 - v_n + v_n - u_n) &= a(u_0 - u_n, u_0 - v_n) + a(u_0 - u_n, v_n - u_n). \end{aligned}$$

Згідно з формулою (1.135)

$$a(u_0 - u_n, v_n - u_n) = 0.$$

Матимемо

$$\alpha \|u_0 - u_n\|_V^2 \leq a(u_0 - u_n, u_0 - v_n).$$

Використаємо далі нерівність (1.120) для оцінки зверху правої частини попередньої формули. Отримаємо

$$\alpha \|u_0 - u_n\|_V^2 \leq a(u_0 - u_n, u_0 - v_n) \leq M \|u_0 - u_n\|_V \|u_0 - v_n\|_V.$$

Звідси легко записати

$$\|u_0 - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u_0 - v_n\|_V,$$

що й потрібно було довести. ■

На підставі леми Сеа доведемо теорему про збіжність послідовності наближених розв'язків (1.132) до узагальненого розв'язку.

Теорема 9. *Нехай послідовність функцій $\{\varphi_i\}$ задовольняє умови 1°, 2°, 3°. Тоді послідовність наближених розв'язків (1.132) методу Бубнова–Гальоркіна варіаційної задачі (1.123) збіжна за нормою простору V до слабкого розв'язку, тобто*

$$\|u_0 - u_n\|_V \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доведення. Випливає з нерівності (1.134) (див. теорему про збіжність послідовності наближених розв'язків методу Рітца). ■

1.11 Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна

Розглянемо знову операторне рівняння

$$Au = f, \tag{1.136}$$

де A — лінійний оператор, що діє із гільбертового простору H в H.

Виберемо у просторі H дві послідовності $\{\varphi_i\}$ та $\{\psi_i\}$, які як і у попередньому випадку є повними та лінійно незалежними.

Запишемо наближений розв'язок задачі (1.136) у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i. \tag{1.137}$$

Далі алгоритм побудови наближеного розв'язку у формі (1.137) є подібним до звичайного методу Бубнова-Гальоркіна. Тобто, підставляємо наближений розв'язок (1.137) у рівняння (1.136) та ортогоналізуємо нев'язку в сенсі скалярного добутку у просторі H до кожної базисної функції $\psi_i, i = 1, n$. У результаті для знаходження невідомих сталих a_i у формулі (1.137) матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(A\varphi_i, \psi_j\right) = \left(f, \psi_j\right), j = i, n. \tag{1.138}$$

Така видозміна методу Бубнова-Гальоркіна відома під назвою *метод Гальоркіна-Петрова* .

Якщо покласти $\psi_i = B\varphi_i$, де B —певним чином вибраний оператор у просторі H, то тоді матимемо *метод моментів*. У випадку коли $B = A$ метод відомий під назвою *метод найменших квадратів*.

1.12 Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Довести симетрію операторів таких задач:

1.1)

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a, b), \qquad u'(a) = 0, \qquad u(b) = 0;$$

1.2)

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a, b), \qquad u'(a) = 0, \qquad u(b) = 0;$$

1.3) $$-\Delta u + \sigma u = f, \qquad u|_\Gamma = 0, \qquad \sigma(x_1, x_2) \geq 0;$$

1.4)

$$-\frac{d^4 u}{dx^4} = f, \qquad u(a) = u'(a) = 0,\ u(b) = u'(b) = 0.$$

Вправа 2. Визначити обмеження на коефіцієнти диференціального рівняння, за яких оператор задачі

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + g(x)u = f(x), \qquad u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0$$

буде додатно визначений.

Вправа 3. Визначити обмеження на коефіцієнти в граничних умовах задачі

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} &= f, \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) &= 0, \qquad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0, \end{aligned}$$

за яких оператор задачі додатно визначений.

Вправа 4. Довести додатну визначеність оператора задачі

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a, b)\,,$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) &= 0, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

$$\alpha_0\alpha_1 > 0,\ \beta_0\beta_1 > 0,\ \alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0,$$

$$p(x) \geq p_0 > 0, \qquad g(x) \geq 0.$$

Вправа 5. Записати функціонали, що еквівалентні крайовим задачам:

5.1) $$-u''(x) = f(x)\,, \qquad u'(a) = u(b) = 0;$$

5.2) $$-u''(x) = f(x)\,, \qquad u'(a) = u'(b) = 0;$$

5.3) $$-\Delta u + \sigma u = f, \qquad \sigma > 0, \qquad u\,|_{\Gamma} = 0;$$

5.4) $$-u^{(IV)}(x) = f, \qquad u(a) = u'(a) = 0, \qquad u(b) = u'(b) = 0;$$

5.5) $$-\tfrac{d}{dx}p(x)\tfrac{du}{dx} + q(x)u = f(x),$$
$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0, \qquad p(x) \geq p_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0;$$

5.6)
$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a,b),$$
$$\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = 0,$$
$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0,$$
$$\alpha_0\alpha_1 > 0,\ \beta_0\beta_1 > 0,\ \alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0,$$
$$p(x) \geq p_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0.$$

Вправа 6. Визначити тип граничних умов і довести, що з умов мінімуму функціонала енергії випливають диференціальне рівняння та природні граничні умови для таких задач:

6.1) $$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (a,b),$$
$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0;$$

6.2)
$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a,b),$$
$$u'(a) = 0, \qquad u(b) = 0, \qquad p(x) \geq p_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0;$$

6.3) $$w^{(IV)}(x) = f(x), \qquad x \in (a,b),$$
$$w(a) = w(b) = 0, \qquad w''(a) = w''(b) = 0;$$

6.4)

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x), \qquad x\in(a,b)\,,$$

$$\alpha_0 u\,(a)-\alpha_1 u^{'}\,(a)=0, \qquad u\,(b)=0,$$

$$p\,(x)\geq p_0>0, \qquad q\,(x)\geq 0.$$

Вправа 7. Побудувати методом Рітца наближений розв'язок задач:

7.1) $$-u''\,(x)+u=1, \qquad x\in(0,\pi)\,, \qquad u\,(0)=u(\pi)=0,$$

(вибрати систему функцій $\varphi_n=\sin nx$);

7.2) $$-\Delta u+u=1,$$

$$\Omega=\{x_1,x_2:\ 0\leq x_1\leq a,\ 0\leq x_2\leq b\}\,, \qquad u|_\Gamma=0,$$

(вибрати систему функцій $\{\varphi_{mn}\}=\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}$).

Вправа 8. Записати слабкі варіаційні формулювання і дослідити білінійні та лінійні форми, що еквівалентні крайовим задачам:

8.1) $$-u''\,(x)=f\,(x)\,, \qquad u'(a)=u(b)=0;$$

8.2) $$-u''\,(x)=f\,(x)\,, \qquad u'(a)=u'(b)=0;$$

8.3) $$-\Delta u+\sigma u=f, \qquad \sigma>0, \qquad u\,|_\Gamma=0;$$

8.4) $$-u^{(IV)}\,(x)=f, \qquad u(a)=u'(a)=0, \qquad u(b)=u'(b)=0;$$

8.5)

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x),$$

$$u(a)=0, \qquad u'(b)=0, \qquad p\,(x)\geq p_0>0, \qquad q\,(x)\geq 0;$$

8.6)

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x),$$

$$\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = 0,$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0,$$

$$\alpha_0\alpha_1 > 0,\ \beta_0\beta_1 > 0,\ \alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0,$$

$$p(x) \geq p_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0.$$

Розділ 1

Варіаційні методи

Розділ 2

Апроксимація на скінченних елементах

Один із числових методів, який має широке застосування,– метод скінченних елементів, здебільшого можна розглядати як варіаційний зі спеціальним вибором базисних функцій. У першому розділі найпростіші, кусково-лінійні базисні функції на одновимірних скінченних елементах використано для побудови схеми методу скінченних елементів. Тут описано інші, найуживаніші в методі скінченних елементів, базисні функції. Є різні означення скінченних елементів, які з погляду застосування однакові. Наведемо тут означення Сьярле [15].

Означення. Нехай

1° $\Omega_e \subseteq R^n$ – область n-вимірного евклідового простору (область скінченного елемента);

2° N – k-вимірний простір функцій на Ω_e (функції форми);

3° Q – набір лінійно незалежних функціоналів $Q_i : Q_i \to R$ $(i = 1, 2, ..., n)$ (вузлові параметри). Тоді трійку (Ω_e, N, Q) називають скінченним елементом.

Означення. Нехай (Ω_e, N, Q) – скінченний елемент і нехай $\left\{\varphi_1^h, \varphi_2^h, ..., \varphi_k^h\right\}$ – базис простору N, причому

$$Q_i\left(\varphi_j^h\right) = \delta_{ij}.$$

Тоді базис $\left\{\varphi_1^h, \varphi_2^h, ..., \varphi_k^h\right\}$ називають вузловим.

У практиці застосування методу скінченних елементів дуже часто асоціюють термін скінченний елемент з областю скінченного елемента Ω_e. Такий підхід є звичним і обґрунтованим, оскільки область Ω_e із вибраними вузловими точками справді визначає все інше, що пов'язане зі скінченним елементом.

2.1 Похибки апроксимації кусково-лінійними функціями

Найпростіші кусково-лінійні одновимірні базисні функції, які використовують у методі скінченних елементів, наведені в 1.7. Похибку апрокси-

мації цими базисними функціями визначає така теорема.

Теорема 1. *Нехай функція* $u(x) \in W_2^{(2)}(a,b)$. *Тоді для її інтерполянта*

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i \varphi_i^h(x), \quad u_i = u(x_i), \tag{2.1}$$

побудованого шляхом використання кусково-лінійних базисних функцій на сітці

$$x_i = a + \sum_{j=0}^{i} h_j, \quad i = 0, 1, ..., n$$

зі змінним кроком h_j *виконуються оцінки*

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{L_2} \le C_1 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}}, \tag{2.2}$$

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{W_2^{(1)}} \le C_2 h \|u\|_{W_2^{(2)}}, \tag{2.3}$$

де $h = \max\limits_i h_i$, C_1, C_2 *– сталі, які не залежать від* h.

Доведення. Розглянемо

$$\|u - u_h\|_{L_2}^2 = \int_a^b (u - u_h)^2 dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u - u_h)^2 dx, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W_2^{(1)}}^2 &= \int_a^b \left((u' - u_h')^2 + (u - u_h)^2 \right) dx = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left((u' - u_h')^2 + (u - u_h)^2 \right) dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

На кожному проміжку $[x_{j-1}, x_j]$ виконаємо заміну

$$x = x_{j-1} + \alpha, \ 0 \le \alpha \le h_j \ \ (h_j = x_j - x_{j-1}). \tag{2.6}$$

З урахуванням заміни (2.6) введемо позначення

$$e(\alpha) = u(\alpha) - u_h(\alpha). \tag{2.7}$$

Тут і далі індекс j при h будемо опускати. Оскільки u_h інтерполянт u, то $e(0) = e(h) = 0$. Розвинемо $e(\alpha)$ у ряд Фур'є

$$e(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi\alpha}{h}. \tag{2.8}$$

Звідси

$$\int_0^h e^2(\alpha) d\alpha = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \tag{2.9}$$

Диференціюючи ряд (2.8), отримаємо такі співвідношення:

$$e'(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{h} a_k \cos \frac{k\pi\alpha}{h}; \tag{2.10}$$

$$\int_0^h (e'(\alpha))^2 d\alpha = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 a_k^2; \tag{2.11}$$

$$e''(\alpha) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 a_k \sin \frac{k\pi\alpha}{h};$$

$$\int_0^h (e''(\alpha))^2 d\alpha = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 a_k^2. \tag{2.12}$$

Зазначимо, що для $k \geq 1$ виконуються нерівності

$$a_k^2 \leq \left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 a_k^2 \frac{h^4}{\pi^4}, \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 a_k^2 \leq \left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 a_k^2 \frac{h^2}{\pi^2}. \tag{2.14}$$

З (2.9), замінивши доданки у правій частині згідно з нерівністю (2.13), знайдемо

$$\int_0^h e^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{h}{2} \frac{h^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 a_k^2 = \frac{h^4}{\pi^4} \int_0^h (e'')^2(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.15}$$

Врахуємо в (2.15), що згідно з (2.7)

$$e'' = u'',$$

оскільки $u_h(\alpha)$ – лінійний інтерполянт. Підставимо (2.15) у праву частину формули (2.4), отримаємо

$$\|u - u_h\|_{L_2}^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j^4}{\pi^4} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'')^2(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.16}$$

Нехай $h = \max\limits_j h_j$, тоді, підсилюючи нерівність (2.16), одержимо нерівність

$$\|u - u_h\|_{L_2}^2 \leq \frac{h^4}{\pi^4} \int_a^b \left((u'')^2 + (u')^2 + u^2\right) dx. \tag{2.17}$$

Нерівність (2.17) можна переписати у вигляді

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq C_1 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}}.$$

Отже, нерівність (2.2) доведена.

Для доведення нерівності (2.3) використаємо співвідношення (2.11) та нерівність (2.14). Отримаємо

$$\int_0^h (e')^2(\alpha)\,d\alpha \le \frac{h}{2}\frac{h^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{h}\right)^4 a_k^2 = \frac{h^2}{\pi^2}\int_0^h (e'')^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{2.18}$$

За аналогією з попередніми викладом із (2.18)

$$\|u' - u_h'\|_{L_2}^2 \le \frac{h^2}{\pi^2}\|u\|_{W_2^{(2)}}^2. \tag{2.19}$$

Додамо нерівності (2.17) та (2.19):

$$\|u' - u_h'\|_{L_2}^2 + \|u - u_h\|_{L_2}^2 \le \frac{h^2}{\pi^2}\|u\|_{W_2^{(2)}}^2 + \frac{h^4}{\pi^4}\|u\|_{W_2^{(2)}}^2. \tag{2.20}$$

Нерівність (2.20) перепишемо у вигляді

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}}^2 \le \widehat{C}_2^2 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}}^2, \tag{2.21}$$

де

$$\widehat{C}_2^2 = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{h^2}{\pi^2}\right).$$

Очевидно, що

$$\widehat{C}_2^2 \le C_2^2 = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right). \tag{2.22}$$

Тому матимемо нерівність

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}}^2 \le C_2^2 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}}^2,$$

де стала C_2 не залежить від h та від функції u. З останнього співвідношення випливає нерівність (2.3). ■

Зазначимо, що сталі C_1, C_2 у нерівностях (2.2), (2.3) не залежать від кроку h та функції u.

2.2 Одновимірні скінченні елементи лагранжового типу

За аналогією з 1.7 можна побудувати кусково-поліноміальні функції вищих, аніж перший, порядків. Наведемо тут матричний запис апроксимуючої функції на скінченному елементі $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$

$$u_h = \mathbf{N}_i(x)\,\mathbf{q}_i, \tag{2.23}$$

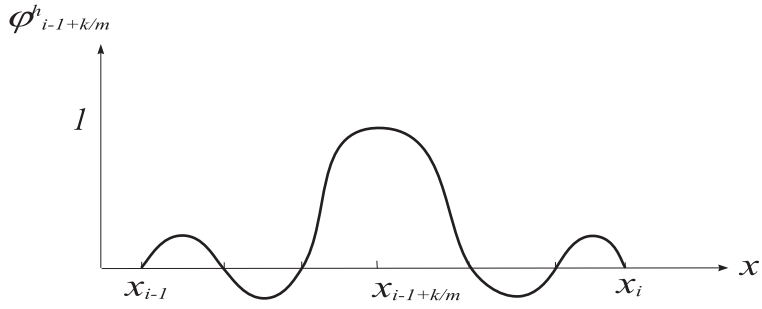

Рис. 2.1: Кусково-поліноміальна апроксимуюча функція

де

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_i(x) &= \left\{\varphi_{i-1}^{(i)}(x), \varphi_{i-1+\frac{1}{m}}^{(i)}(x), ..., \varphi_i^{(i)}(x)\right\},\\ \mathbf{q}_i &= \left\{u_{i-1}^h, u_{i-1+\frac{1}{m}}^h, ..., u_i^h\right\}.\end{aligned}$$

Щоб отримати вирази функцій $\varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^h(x)$ $(k = 0, 1, ..., m)$, уважатимемо, що на елементі (x_{i-1}, x_i) вибрано $m-1$ внутрішніх точок (рис. 2.1).

На системі точок x_{i-1}, $x_{i-1+\frac{k}{m}}$, x_i, використовуючи формулу для інтерполяційного полінома Лагранжа, запишемо

$$\varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^{(i)}(x) =$$

$$= \frac{(x-x_{i-1})...\left(x-x_{i-1+\frac{k-1}{m}}\right)\left(x-x_{i-1+\frac{k+1}{m}}\right)...(x-x_i)}{(\hat{x}-x_{i-1})...\left(\hat{x}-x_{i-1+\frac{k-1}{m}}\right)\left(\hat{x}-x_{i-1+\frac{k+1}{m}}\right)...(\hat{x}-x_i)},$$

$$\hat{x} = x_{i-1+\frac{k}{m}}. \tag{2.24}$$

Графіки функцій (2.24) зображені на рис. 2.1. За аналогією з 1.7 запишемо кусково-поліноміальну базисну функцію m степеня на $[a, b]$ у вигляді

$$\varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^h = \begin{cases} 0, & x \in [a, x_{i-2}), \\ \varphi_{i-1}^{(i-1)}(x), & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \cap k = 0, \\ 0, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \cap k \neq 0, \\ \varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^{(i)}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \varphi_i^{(i+1)}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}) \cap k = m, \\ 0, & x \in [x_i, x_{i+1}) \cap k \neq m, \\ 0, & x \in [x_{i+1}, b]. \end{cases} \tag{2.25}$$

Зазначимо, що функції вигляду (2.25) належать до класу $C[a, b]$. Похідні від них мають розриви першого роду на границях скінченних елементів.

У праці [13] з'ясовано, що для скінченноелементних апроксимацій степені k, тобто таких, за допомогою яких довільний повний поліном багатьох змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ степені, що не перевершує k, може бути поданий на скінченному елементі за допомогою лінійної комбінації базисних функцій, виконується оцінка похибки апроксимації

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(s)}} \leq C_s h^{k+1-s} \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \ s = 0, 1. \tag{2.26}$$

2.3 Ермітові одновимірні апроксимації на скінченних елементах

Для отримання наближених розв'язків задач, описуваних диференціальними рівняннями порядків, вищих, аніж другий, потрібно мати базисні функції, які задовольняють підвищені умови щодо їхньої гладкості. Такі функції можна будувати з використанням інтерполяційних поліномів Ерміта [15].

Проілюструємо це прикладом кубічного полінома Ерміта. Розглянемо скінченний елемент $\Omega_i = \{x : x_{i-1} < x < x_i\}$. Виберемо за вузлові параметри значення функції та її першої похідної

$$u_h(x_j) = u_j^h, \ \frac{du_h(x_j)}{dx} = \dot{u}_j^h, \ j = i-1, i.$$

Запишемо на Ω_i

$$u_h = \mathbf{N}_i(x)\,\mathbf{q}_i, \tag{2.27}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i(x) &= \{H_{i-1,0}(x), H_{i-1,1}(x), H_{i,0}(x), H_{i,1}(x)\}; \\
\mathbf{q}_i &= \left\{u_{i-1}^h, \dot{u}_{i-1}^h, u_i^h, \dot{u}_i^h\right\}^T; \\
H_{i-1,0}(x) &= H_{i-1}^2(x)(1 + 2H_i(x)); \\
H_{i,0}(x) &= H_i^2(x)(1 + 2H_{i-1}(x)); \\
H_{i-1,1}(x) &= (x_i - x_{i-1})\,H_{i-1}^2(x)\,H_i(x); \\
H_{i,1}(x) &= (x_{i-1} - x_i)\,H_i^2(x)\,H_{i-1}(x); \\
H_{i-1}(x) &= -\frac{x - x_i}{h}, \qquad H_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}.
\end{aligned}$$

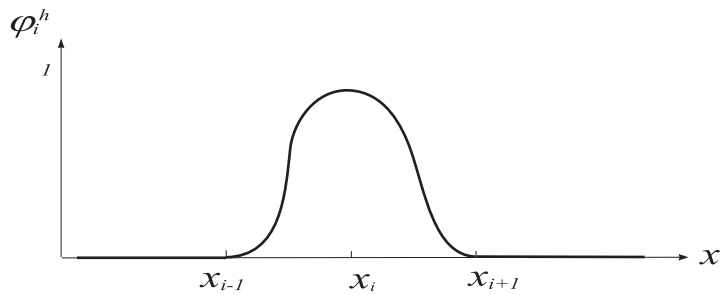

Рис. 2.2: Ермітова базисна функція першого виду

Отже, формула для наведення апроксимованої функції (2.27) отримана, шляхом використання двох видів базисних функцій $\varphi_i^h(x)$ та $\psi_i^h(x)$, графічно зображених на рис. 2.2, 2.3. Як бачимо з рисунків, ці базисні функції неперервні на проміжку $[a, b]$ разом з похідними першого порядку.

Можна переконатись, що приведені базисні функції задовольняють умови

$$\frac{d^s H_{rt}(x_p)}{dx^s} = \delta_{st}\delta_{rp}; \ r, p = i-1, i; \ s, t = 0, 1, \tag{2.28}$$

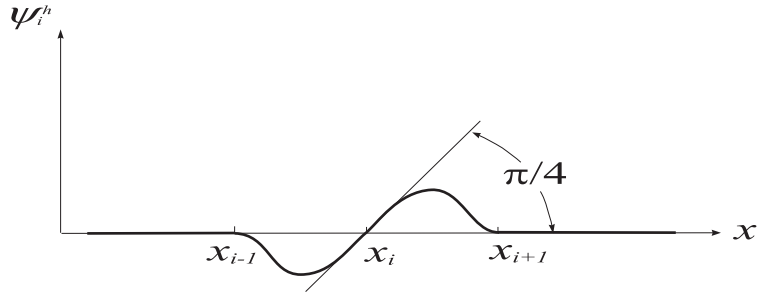

Рис. 2.3: Ермітова базисна функція другого виду

де δ_{st}- символ Кронекера.

2.4 Одновимірні апроксимації функціями-бульбашками

Існують задачі, для числового аналізу яких доцільно використовувати спеціальні апроксимації високих порядків, утворені так званими функціями-бульбашками [ ]. Опишемо тут апроксимації функціями-бульбашками на одновимірних скінченних елементах. Зазначимо, що вперше використання подібних апроксимацій у варіаційних методах описано у монографії С.Г. Міхліна [ ]

Нехай проміжок $[a, b]$ розділений точками

$$x_i, i = 0, 1, ...n, \ (x_0 = a, \ x_n = b)$$

на скінченні елементи

$$\Omega_k = \{x : x_{k-1} < x < x_k\}, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{2.29}$$

Відобразимо кожен елемент (2.29) на "стандартний" скінченний елемент Ω_* вигляду

$$\Omega_* = \{\xi : -1 < \xi < 1\} \tag{2.30}$$

за допомогою співвідношення

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_{k-1} + \frac{1+\xi}{2} x_k, \ \xi \in \Omega_*. \tag{2.31}$$

На елементі Ω_* побудуємо послідовність базисних функцій до p степеня

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}, \ \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}, \ \varphi_j = \Phi_{j-1}(\xi), \ j = 3, 4, ..., p+1. \tag{2.32}$$

Тут $\Phi_j(\xi)$ визначені через поліноми Лежандра P_{j-1} за формулою [7, 20]

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int\limits_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t)\, dt, \ j = 2, 3, ... \tag{2.33}$$

Наведемо тут вирази для поліномів Лежандра до п'ятого степеня:

$$
\begin{aligned}
P_0 = 1,\ P_1 = t,\\
P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),\\
P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),\\
P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3),\\
P_5 = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t).
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Зазначимо, що виконується рекурентна формула [7, 20]

$$(n+1)\,P_{n+1}(t) = (2n+1)\,tP_n(t) - nP_{n-1}(t)\,, \tag{2.35}$$

яка дає змогу знайти вираз для P_{n+1} через вирази для P_n та P_{n-1}. Тому, якщо відомі перші два поліноми Лежандра, за формулою (2.35) можна знайти вирази для всіх інших.

Відомо, що поліноми Лежандра є ортогональними на проміжку [-1,1], тобто виконується співвідношення

$$\int\limits_{-1}^{1} P_i(t)\,P_j(t)\,dt = \begin{cases} 0,\ i \neq j; \\ \frac{2}{2i+1},\ i = j. \end{cases} \tag{2.36}$$

Базисні функції φ_1, φ_2 називають вузловими. У випадку запису апроксимованої функції у вигляді суми за базисними функціями

$$u = u_{k-1}\varphi_1(\xi) + u_k\varphi_2(\xi) + \sum_{j=3}^{p+1} a_j\varphi_j(\xi) \tag{2.37}$$

їм відповідають вузлові значення u_{k-1}, u_k. Базисні функції $\varphi_j(\xi)$, $j = 3, 4, ..., p+1$, називають функціями-бульбашками. Ця назва зумовлена їхньою властивістю

$$\varphi_j(\xi) = 0,\ \xi = \pm 1,\ j = 3, 4, ..., p+1. \tag{2.38}$$

У записі (2.37) коефіцієнти a_j не є вузловими значеннями.

Властивість (2.38) зумовлена таким. При $\xi = -1$ базисні функції пропорційні (2.33) інтегралові з однаковими верхньою та нижньою границею. Те, що базисні функції при $\xi = 1$ дорівнюють нулю, зумовлене тим, що цей інтеграл теж дорівнює нулю, це випливає з властивості ортогональності поліномів Лежандра P_j $(j > 1)$ до одиниці. З формули

$$(2n+1)\,P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\,, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{2.39}$$

яку задовольняють поліноми Лежандра [7, 20], випливає таке важливе співвідношення:

$$\varphi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-3)}}\left(P_{j-1}(\xi) - P_{j-3}(\xi)\right),\ \ j = 3, 4, ...p+1. \tag{2.40}$$

З нього отримаємо

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\xi^2 - 1\right), \ \varphi_4 = \frac{5}{2\sqrt{10}}\xi\left(\xi^2 - 1\right), \ \varphi_5 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5\xi^2 - 1\right)\left(\xi^2 - 1\right). \tag{2.41}$$

Співвідношенням (2.40) можна також скористуватися для обчислення інтегралів від добутків базисних функцій.

З (2.33) та (2.36) випливає, що для базисних функцій-бульбашок виконується формула

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi}\frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi}d\xi = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}, \tag{2.42}$$

якою можна скористуватися для побудови матриць відповідної схеми методу скінченних елементів.

Описаний базис називають ієрархічним, оскільки збільшення його порядку на скінченному елементі передбаає збереження усіх базисних функцій нижчих порядків.

2.5 Апроксимації на трикутних скінченних елементах

Припустимо, що двовимірна область Ω розділена на скінченні елементи Ω_e трикутної форми (рис. 2.4).

Позначимо літерами i, j, m вершини трикутника з координатами, відповідно, x_1^i, x_2^i; x_1^j, x_2^j; x_1^m, x_2^m, літерою p – біжучу внутрішню точку трикутника з координатами x_1, x_2. Побудуємо на трикутнику Ω_e функції $\varphi_k(x_1, x_2)$, $k = i, j, m$ за формулою

$$\varphi_i(x_1, x_2) = \frac{S_{pjm}}{S_{ijm}}, \tag{2.43}$$

де S_{pjm}, S_{ijm} – площі трикутників pjm та ijm.

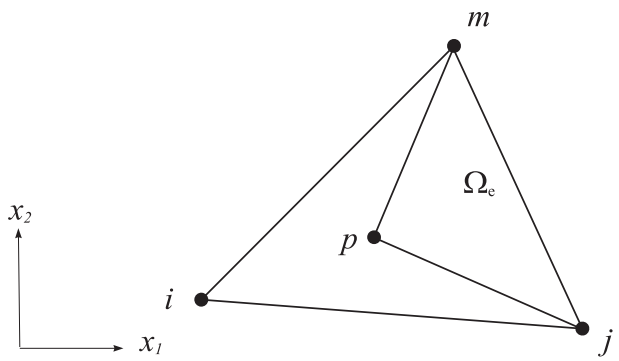

Рис. 2.4: Скінченний елемент трикутної форми

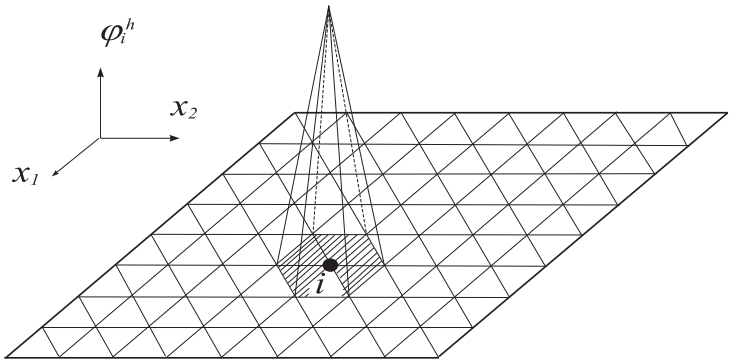

Рис. 2.5: Базисна функція на множині трикутних скінченних елементів

Очевидно, що $\varphi_i\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) = 1$ і $\varphi_i\left(x_1, x_2\right) = 0$ на лінії jm.

Використовуючи відомі співвідношення для обчислення площі трикутника через координати його вершин

$$S_{pjm} = \frac{1}{2}\det\left\{\begin{array}{ccc} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{array}\right\}, \qquad S_{ijm} = \frac{1}{2}\det\left\{\begin{array}{ccc} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{array}\right\},$$

знайдемо

$$\varphi_i\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) = \frac{1}{\delta}\left(a_i + b_i x_1 + c_i x_2\right), \tag{2.44}$$

де $a_i = x_1^{(j)} x_2^{(m)} - x_2^{(j)} x_1^{(m)}$, $b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(m)}$, $c_i = x_1^{(m)} - x_1^{(j)}$, $\delta = 2S_{ijm}$.

Отже, φ_i є лінійною функцією змінних x_1, x_2.

Нехай $\Omega = \underset{e}{\cup}\Omega_e$. Згідно з міркуваннями, викладеними в п.1.7, побудуємо на об'єднанні трикутників Ω_e кусково-лінійні базові функції

$$\varphi_i^h\left(x_1, x_2\right) = \left\{\begin{array}{cc} \varphi_i\left(x_1, x_2\right), & i \in \Omega_e, \\ 0, & i \notin \Omega_e. \end{array}\right. \tag{2.45}$$

Графічне зображення функції φ_i^h показано на рис. 2.5.

Функції φ_i^h вигляду (2.45) відмінні від нуля тільки в певній частині області Ω (заштрихована частина на рис. 2.5) на сукупності трикутників, що містять точку i. Вони мають такі властивості:

1°. $\varphi_i^h \in C\left(\Omega\right)$;

2°. $\left(\varphi_r^h, \varphi_s^h\right) = 0$, якщо точки r та s не належать одному трикутному скінченному елементу Ω_e.

З використанням лінійних функцій $\varphi_i\left(x_1, x_2\right)$ запишемо апроксимуючу функцію u_h на Ω_e у вигляді

$$u_h = u_i^h \varphi_i\left(x_1, x_2\right) + u_j^h \varphi_j\left(x_1, x_2\right) + u_m^h \varphi_m\left(x_1, x_2\right). \tag{2.46}$$

Приклад 1. Розглянемо одну особливість апроксимації функції $x_3 = x_1^2$ лінійною комбінацією (2.46) (рис. 2.6).

$$e_h = u_h - x_1^2, \tag{2.47}$$

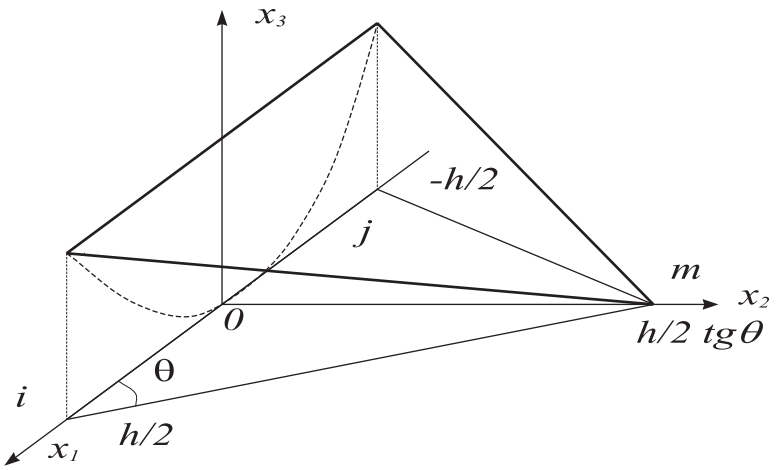

Рис. 2.6: Апроксимація функції на трикутнику

де

$$u_h = \frac{h^2}{4}\varphi_i + \frac{h^2}{4}\varphi_j.$$

Обчислимо

$$\frac{\partial e_h}{\partial x_2}.$$

при $x_1 = 0$. Згідно з формулою (2.47)

$$\frac{\partial e_h}{\partial x_2} = \frac{\partial u_h}{\partial x_2}.$$

З геометричних побудов видно, що

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_2} = -\frac{h}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Отже, значення похідної від похибки e_h наближення функції x_1^2 зростає зі зменшенням кута θ трикутного скінченного елемента. Звідси випливає висновок, що якість наближення похідних деякої функції на множині трикутників погіршується, якщо у цій множині є трикутники з гострими кутами.

У загальному випадку апроксимаційні властивості функцій (2.45) описує така [18] теорема.

Теорема 2. *Якщо* $u(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$ *і інтерполянт цієї функції* $u_h(x) = \sum\limits_i u_i\varphi_i^h(x_1, x_2)$, *то справджуються оцінки*

$$\|u - u_h\|_{L_2} \le C_1 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}};$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \le C_2 \frac{h}{\sin\theta} \|u\|_{W_2^{(2)}},$$

де $C_1, C_2 = \mathrm{const}$, h *— максимальне значення серед сторін трикутників (діаметр розбиття на скінченні елементи),* θ *— мінімальне значення серед кутів трикутників.*

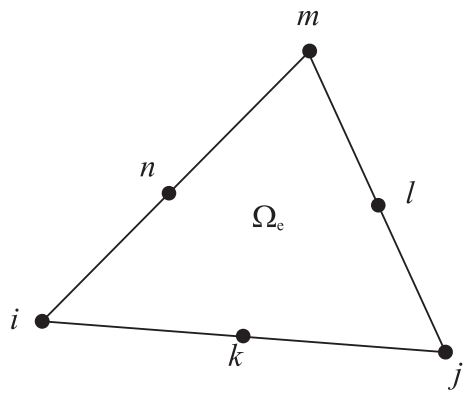

Рис. 2.7: Трикутний скінченний елемент з шістьма вузлами

Доведення. Наведене в монографії [18]. ■

Опишемо один спосіб побудови квадратичних апроксимацій на трикутних скінченних елементах. Для цього на серединах сторін трикутного скінченного елемента виберемо додаткові вузлові точки k, l, n, (рис. 2.7).

Використаємо функції (2.43) і запишемо формулу вигляду (2.46) для квадратичних апроксимацій на трикутнику

$$u_h = \psi_i\left(x_1, x_2\right) u_i^h + ... + \psi_n\left(x_1, x_2\right) u_n^h, \tag{2.48}$$

де $u_i^h, ..., u_n^h$ – вузлові значення апроксимованої функції;

$$\psi_i = \varphi_i\left(2\varphi_i - 1\right);$$

$$\psi_j = \varphi_j\left(2\varphi_j - 1\right);$$

$$\psi_m = \varphi_m\left(2\varphi_m - 1\right);$$

$$\psi_k = 4\varphi_i\varphi_j; \qquad \psi_l = 4\varphi_j\varphi_m; \qquad \psi_n^{(e)} = 4\varphi_i\varphi_m.$$

Можна переконатися, враховуючи властивості функцій ψ_i, що $\psi_r\left(x_1, x_2\right)$ задовольняють умову

$$\psi_r\left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}\right) = \delta_{rs}. \tag{2.49}$$

2.6 Лагранжові апроксимації на прямокутних скінченних елементах

Уважатимемо, що двовимірна область розділена на прямокутні скінченні елементи Ω_e (рис. 2.8).

На кожному елементі виберемо множину вузлових точок на перетині ліній $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$. Кожна вузлова точка однозначно характеризована парою чисел i, j і має координати $\left(x_1 = x_1^{(i)}, x_2 = x_2^{(j)}\right)$.

Для побудови базисних функцій на вибраному прямокутному скінченному елементі використаємо спосіб побудови інтерполяційного полінома Лагранжа у прямокутній області, згідно з яким

$$\varphi_{ij}\left(x_1, x_2\right) = l_i^{(m)}\left(x_1\right) l_j^{(n)}\left(x_2\right), \tag{2.50}$$

де

$$l_i^{(m)}(x_1) = \frac{\left(x_1 - x_1^{(1)}\right)\ldots\left(x_1 - x_1^{(i-1)}\right)\left(x_1 - x_1^{(i+1)}\right)\ldots\left(x_1 - x_1^{(m)}\right)}{\left(x_1^{(i)} - x_1^{(1)}\right)\ldots\left(x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}\right)\left(x_1^{(i)} - x_1^{(i+1)}\right)\ldots\left(x_1^{(i)} - x_1^{(m)}\right)};$$

$$l_j^{(n)}(x_2) = \frac{\left(x_2 - x_2^{(1)}\right)\ldots\left(x_2 - x_2^{(j-1)}\right)\left(x_2 - x_2^{(j+1)}\right)\ldots\left(x_2 - x_2^{(n)}\right)}{\left(x_1^{(j)} - x_1^{(1)}\right)\ldots\left(x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)}\right)\left(x_1^{(j)} - x_1^{(j+1)}\right)\ldots\left(x_1^{(j)} - x_1^{(n)}\right)}.$$

Оскільки функції $l_i^{(m)}(x_1)$ та $l_j^{(n)}(x_2)$ мають властивості

$$l_i^{(m)}\left(x_1^{(r)}\right) = \delta_{ir}, \qquad l_j^{(n)}\left(x_2^{(r)}\right) = \delta_{jr},$$

то подібну властивість має і функція $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$:

$$\varphi_{ij}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(r)}\right) = l_i^{(m)}\left(x_1^{(k)}\right) l_j^{(n)}\left(x_2^{(r)}\right) = \delta_{ik}\delta_{jr}, \tag{2.51}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Враховуючи (2.51), запишемо апроксимуючу функцію u_h на прямокутному скінченному елементі у вигляді

$$u_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^h \varphi_{ij}(x_1, x_2). \tag{2.52}$$

Тут u_{ij}^h – значення апроксимованої функції у вузловій точці ij.

Базисні функції $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ визначені на одному скінченному елементі. Як і в попередньому, вони можуть бути неперервно поширені на всю область. У цьому разі базисні функції, які відповідають внутрішнім вузловим точкам, локалізовані тільки на одному скінченному елементі (дорівнюють нулю на всіх інших скінченних елементах). Базисні функції, які відповідають граничним вузловим точкам, локалізовані на елементах, які містять ці вузлові точки.

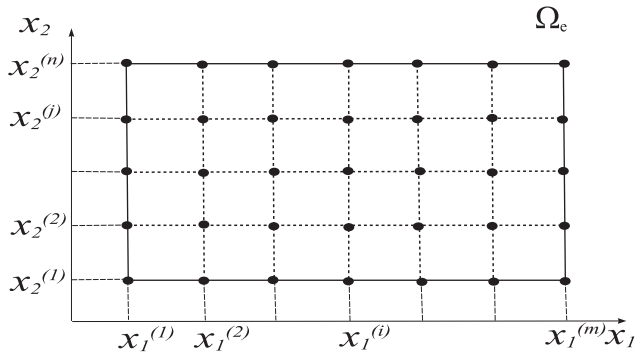

Рис. 2.8: Прямокутний скінченний елемент з множиною вузлів

2.7 Ермітові апроксимації на прямокутних скінченних елементах

Побудова на скінченних елементах базисних функцій двох і більше змінних, які задовольняють більш сильні, ніж неперервність вимоги, є дуже складною. Задача побудови таких функцій є відкритою, оскільки відомі її розв'язки лише в деяких часткових випадках. Одним із них є бікубічна апрокимація на прямокутному скінченному елементі, яку отримують як узагальнення одновимірної апроксимації Ерміта (параграф 2.3). Розглянемо прямокутний скінченний елемент Ω_e (рис.2.9).

Використовуючи ермітові кубічні поліноми (див. 2.3), запишемо на Ω_e таке подання для апроксимованої функції u_h:

$$\begin{aligned} u_h(x_1,x_2) &= H_{i-1,0}(x_1) f_{i-1}(x_2) + H_{i-1,1}(x_1) f_{i-1}^{(1)}(x_2) + \\ &\quad + H_{i,0}(x_1) f_i(x_2) + H_{i,1}(x_1) f_i^{(1)}(x_2), \end{aligned} \tag{2.53}$$

де $f_r(x_2)$, $r = i-1, i$ – значення функції $u_h(x_1,x_2)$ на лінії $x_1 = x_1^{(r)}$; $f_r^{(1)}(x_2)$ – значення першої похідної за змінною x_1 на лінії $x_1 = x_1^{(r)}$.

Наблизимо функції $f_r(x_2)$, $f_r^{(1)}(x_2)$, $(r = i-1, i)$ ермітовими кубічними поліномами за їхніми значеннями та значеннями їхніх перших похідних за змінною x_2 у вузлових точках. Отримаємо

$$\begin{aligned} f_r(x_2) &= H_{j-1,0}(x_2) u_{r,j-1}^h + H_{j-1,1}(x_2) \frac{\partial u_{r,j-1}^h}{\partial x_2} + \\ &\quad + H_{j,0}(x_2) u_{r,j}^h + H_{j,1}(x_2) \frac{\partial u_{r,j}^h}{\partial x_2}; \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} f_r^{(1)}(x_2) &= H_{j-1,0}(x_2) \frac{\partial u_{r,j-1}^h}{\partial x_1} + H_{j-1,1}(x_2) \frac{\partial^2 u_{r,j-1}^h}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &\quad + H_{j,0}(x_2) \frac{\partial u_{r,j}^h}{\partial x_1} + H_{j,1}(x_2) \frac{\partial^2 u_{r,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, \ r = i-1, i, \end{aligned} \tag{2.55}$$

де через

$$u_{r,s}^h, \quad \frac{\partial u_{r,s}^h}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_{r,s}^h}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 u_{r,s}^h}{\partial x_1 \partial x_2}$$

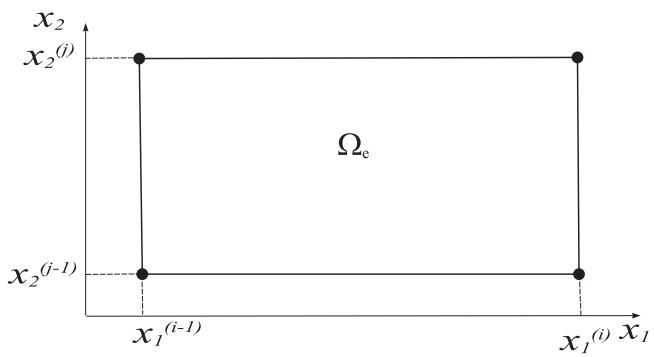

Рис. 2.9: Прямокутний скінченний елемент

позначені значення функції u_h та її похідних у вузловій точці $x_1^{(r)} x_2^{(s)}$ $(r = i-1, i\ ,\ s = j-1, j)$.

Підставляючи співвідношення (2.54), (2.55) у формулу (2.53), отримаємо вираз для апроксимації функції u_h на прямокутному скінченному елементі Ω_e. Запишемо його у матричному вигляді

$$u_h = \mathbf{N}_e\left(x_1, x_2\right)\mathbf{q}_e, \tag{2.56}$$

де

$$\mathbf{N}_e\left(x_1, x_2\right) = \left\{\varphi_{i-1,j-1}^{(0,0)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(1,0)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(0,1)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(1,1)}, ..., \varphi_{i,j-1}^{(1,1)}\right\};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,s}^{(0,0)} &= H_{r,0}\left(x_1\right) H_{s,0}\left(x_2\right); \\
\varphi_{r,s}^{(1,0)} &= H_{r,1}\left(x_1\right) H_{s,0}\left(x_2\right); \\
\varphi_{r,s}^{(0,1)} &= H_{r,0}\left(x_1\right) H_{s,1}\left(x_2\right); \\
\varphi_{r,s}^{(1,1)} &= H_{r,1}\left(x_1\right) H_{s,1}\left(x_2\right);
\end{aligned}$$

$$r = i-1, i;\ s = j-1, j;$$

$$\mathbf{q}_e^T = \left\{u_{i-1,,j-1}^h, \frac{\partial u_{i-1,,j-1}^h}{\partial x_1}, \frac{\partial u_{i-1,,j-1}^h}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u_{i-1,,j-1}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u_{i-1,,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u_{i-1,,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2}\right\}.$$

Вигляд функцій $H_{r,0}$, $H_{r,1}$ наведено у 2.2.

Отже, для бікубічної апроксимації ермітового типу у кожній вузловій точці маємо чотири вузлові параметри.

Базисні функції $\varphi_{ij}^{(r,s)}\left(x_1, x_2\right)$ побудовані на одному скінченному елементі. Як і у попереднньому, вони можуть бути поширені на всю область. При цьому розширенні зберігається неперервність до перших похідних включно в разі переходу через спільні сторони прямокутників.

2.8 Двовимірні ізопараметричні апроксимації

Характерною особливістю апроксимацій, які вже розглянуто в цьому розділі, було те, що двовимірну область у площині x_1, x_2 вважали полігональною, або в процесі побудови скінченних елементів вона апроксимувалась полігональною областю. Опишемо тут спосіб побудови таких апроксимацій, які вільні від зазначених обмежень. Питання точності подання областей з криволінійними границями в рамках цього підходу детально описано у монографії [18].

Розглянемо квадрат Ω_* у системі координат ξ, η

$$\Omega_* = \{\xi, \eta : -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}.$$

На квадраті виберемо три сукупності вузлових точок. На вибраних сукупностях вузлових точок побудуємо такі три системи базисних функцій:

1° білінійну (рис. 2.10)

$$\varphi_i\left(\xi, \eta\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \xi_i \xi\right)\left(1 + \eta_i \eta\right), \qquad i = 1, ..., 4; \tag{2.57}$$

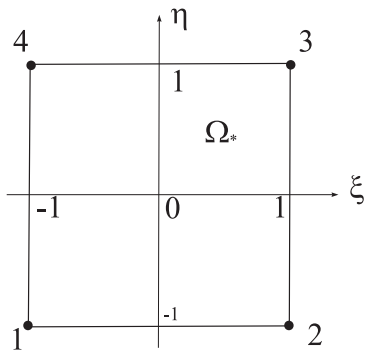

Рис. 2.10: Скінченний елемент у вигляді квадрата з чотирма вузлами

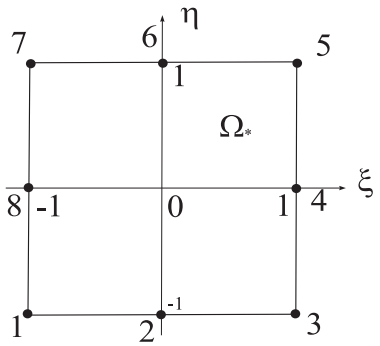

Рис. 2.11: Скінченний елемент у вигляді квадрата з вісьмома вузлами

$\xi_i\eta_i$ – координати i-ї вузлової точки;

2° біквадратичну (рис. 2.11)

$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1),$$
$$i = 1,3,5,7;$$
$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_i\eta), i = 2,6; \tag{2.58}$$
$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi_i\xi)\left(1-\eta^2\right), i = 4,8;$$

3° бікубічну (рис. 2.11)

$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{9}{32}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\left(\xi^2+\eta^2-\frac{10}{9}\right),$$
$$i = 1,4,7,10;$$
$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{27}{32}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_i\eta)\left(\frac{1}{3}+3\xi_i\xi\right), \tag{2.59}$$
$$i = 2,3,8,9;$$
$$\varphi_i(\xi,\eta) = \frac{27}{32}(1+\xi_i\xi)\left(1+\eta^2\right)\left(\frac{1}{3}+3\eta_i\eta\right), i = 5,6,11,12.$$

Не становить труднощів переконатися у тому, що всі побудовані базисні функції задовольняють умову

$$\varphi_i(\xi_j,\eta_j) = \delta_{ij}, \tag{2.60}$$

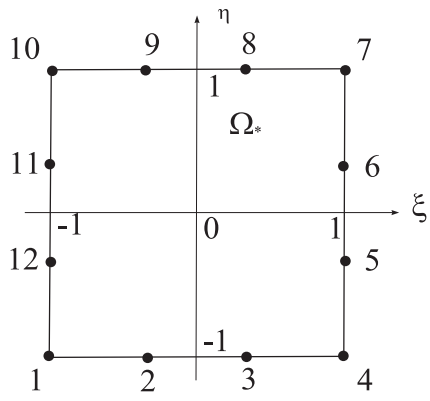

Рис. 2.12: Скінченний елемент у вигляді квадрата з дванадцятьма вузлами

тобто складають вузловий базис.

Відобразимо квадрат Ω^* на деякий криволінійний чотирикутник Ω_e за допомогою перетворення

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_i x_1^{(i)} \varphi_i(\xi, \eta); \\ x_2 &= \sum_i x_2^{(i)} \varphi_i(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{2.61}$$

де $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ – координата i-ї точки чотирикутника в площині $x_1 x_2$.

Для того, щоб перетворення координат (2.61) здійснювало взаємно однозначне відображення області Ω^* на область Ω_e, будемо домагатися, щоб якобіан перетворення (2.61) був відмінним від нуля в Ω^*, тобто

$$\det \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{array} \right\} \neq 0. \tag{2.62}$$

Від базисних функцій $\varphi_i(\xi, \eta)$ можна за аналогією з 1.7 перейти до функцій $\varphi_i^h(x_1, x_2)$, заданих у всій області. У цьому випадку ці функції належатимуть класу $C(\Omega)$, де $\Omega = \underset{e}{\cup} \Omega_e$.

Опишемо на Ω_e апроксимовану функцію u_h співвідношенням

$$u_h = \sum_i \varphi_i u_i^h, \tag{2.63}$$

яке можна навести у матричному вигляді

$$u_h = \mathbf{N}(\xi, \eta)\, \mathbf{q}_e,$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\xi, \eta) &= \{\varphi_1(\xi, \eta), \varphi_2(\xi, \eta), ...\}, \\ \mathbf{q}_e^T &= \{u_1^h, u_2^h, ...\}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що ці апроксимації називають ізопараметричними. Цей термін означає, що для подання апроксимованої функції і відображення Ω^*

на Ω_e використовують одні й ті ж вузлові точки та базисні функції. В літературі [14,17,18] відомі й інші типи апроксимацій, в основі побудови яких є ідея відображення областей, – це суперпараметричні та субпараметричні апроксимації.

2.9 Апроксимації функціями-бульбашками на чотирикутниках

Розглянемо стандартний чотирикутний елемент, зображений на рис.(2.10). Перенумеруємо його сторони таким чином: сторона 1-відповідає $\eta = -1$, сторона 2-відповідає $\xi = 1$, сторона 3-відповідає $\eta = 1$, сторона 4-відповідає $\xi = -1$. Вузлові базисні функції збігаються із функціями виду (2.57). Зауважимо, що ці функції є білінійними.

До кожної із сторін стандартного чотирикутника віднесемо базисні функції степені $p \geqslant 2$ виду.

$$\text{Сторона } 1\,(\eta = -1): \quad \varphi_k^{(1)} = \frac{1}{2}\,(1-\eta)\,\varphi_k\,(\xi)\,, \tag{2.64}$$

$$\text{Сторона } 2\,(\xi = 1): \quad \varphi_k^{(2)} = \frac{1}{2}\,(1+\xi)\,\varphi_k\,(\eta)\,, \tag{2.65}$$

$$\text{Сторона } 3\,(\eta = 1): \quad \varphi_k^{(3)} = \frac{1}{2}\,(1+\eta)\,\varphi_k\,(-\xi)\,, \tag{2.66}$$

$$\text{Сторона } 4\,(\xi = -1): \quad \varphi_k^{(4)} = \frac{1}{2}\,(1-\xi)\,\varphi_k\,(-\eta)\,, \tag{2.67}$$

де φ_k - функції виду (2.40), $k = 2, 3, ..., p$. Таким чином маємо $4\,(p-1)$ бисних функцій, прив'язаних до сторін чотирикутника.

Окрім наведених базисних функцій на на чотирикутнику задають також внутрішні базисні функції, які дорівнюють нулю на сторонах чотирикутника. Для вибраного степня простору p маємо $(p-2)\,(p-3)\,/2$ внутрішніх базисних функцій $p \geqslant 4$ виду

$$\varphi_{(k,l)} = \Phi_k\,(\xi)\,\Phi_l\,(\eta)\,,\ k = l = 2, 3, ..., p; k + l \leqslant p \tag{2.68}$$

2.10 Апроксимації функціями-бульбашками на трикутниках

Розглянемо стандартний скінченний елемент у вигляді рівностороннього трикутника Ω_* (рис. 2.13), вершини якого перенумеровані цифрами 1,2,3. Координатами цих вершин є відповідно пари чисел (-1,0); (1,0) та $(0,\sqrt{3})$. Побудуємо на цьому трикутнику ієрархічний базис з використанням функцій-бульбашок. Вузлові базисні функції є лінійними функціями,

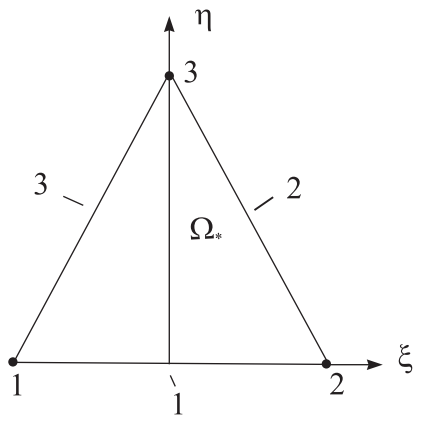

Рис. 2.13: Стандартний трикутний скінченний елемент

описаними в п.2.5. На вибраному стандартному скінченному елементі вони мають вигляд

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \xi + \frac{\eta}{2\sqrt{3}}\right),\ \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \xi + \frac{\eta}{2\sqrt{3}}\right),\ \varphi_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}. \tag{2.69}$$

На кожній із сторін трикутника виберемо змінну s.

На стороні 1: $s = \varphi_2 - \varphi_1$;

На стороні 2: $s = \varphi_3 - \varphi_2$;

На стороні 3: $s = \varphi_1 - \varphi_3$.

Для побудови ієрархічного базису на сторонах трикутника використаємо одновимірні базисні функції-бульбашки (2.41).Запишемо на стороні 1:

$$\varphi_k^{(1)} = \varphi_1\varphi_2\frac{4}{1-s^2}\Phi_k\left(s\right); \tag{2.70}$$

на стороні 2:

$$\varphi_k^{(2)} = \varphi_2\varphi_3\frac{4}{1-s^2}\Phi_k\left(s\right); \tag{2.71}$$

на стороні 3:

$$\varphi_k^{(3)} = \varphi_3\varphi_1\frac{4}{1-s^2}\Phi_k\left(s\right), k = 2, 3, ..., p. \tag{2.72}$$

Для повноти простору базисних функцій введемо ще $(p-1)(p-2)/2$ внутрішніх базисних функцій

$$\varphi_{k,l} = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 P_k\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) P_l\left(2\varphi_3 - 1\right), \tag{2.73}$$

де $k + l \leqslant p - 3$ і P_k є поліном Лежандра степені k.

2.11 Апроксимації на тетраедрах

Припустимо, що деяка тривимірна область Ω розділена на скінченні елементи Ω_e у вигляді тетраедрів (рис. 2.14).

Побудуємо на тетраедрі Ω_e лінійні апроксимаційні функції за аналогією зі способом побудови апроксимаційних функцій на трикутному елементі, викладеним у 2.5. Для цього виберемо в Ω_e деяку внутрішню точку $P\left(x_1, x_2, x_3\right)$. Введемо функцію

$$\varphi_k\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{V_{pijm}}{V_{kijm}}, \tag{2.74}$$

де V_{pijm}, V_{kijm} – об'єми тетраедрів $pijm$ та $kijm$. Для їхнього обчислення використаємо відому формулу з аналітичної геометрії. Отримаємо

$$V_{pijm} = \frac{1}{6}\det\left\{\begin{array}{cccc} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{array}\right\}; \tag{2.75}$$

$$V_{kijm} = \frac{1}{6}\delta, \tag{2.76}$$

де

$$\delta = \det\left\{\begin{array}{cccc} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & x_3^{(k)} \end{array}\right\}.$$

Розкриваючи визначник у формулі (2.75) за елементами першого рядка, знайдемо

$$\varphi_k = \frac{1}{\delta}\left(a_k + b_k x_1 + c_k x_2 + d_k x_3\right), \tag{2.77}$$

де

$$a_k = \det\left\{\begin{array}{ccc} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{array}\right\};$$

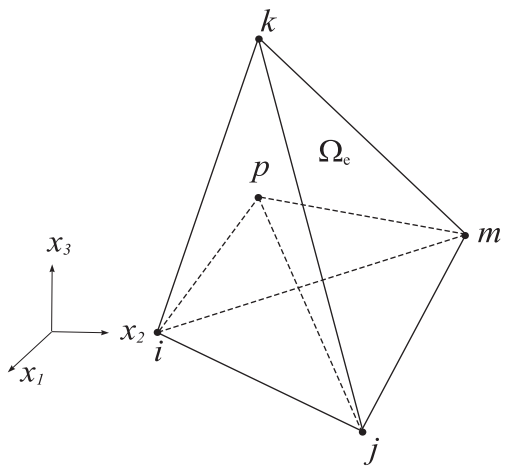

Рис. 2.14: Скінченний елемент у вигляді тетраедра

$$b_k = -\det \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{array} \right\};$$

$$c_k = \det \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & x_1^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_3^{(m)} \end{array} \right\};$$

$$d_k = -\det \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{array} \right\}.$$

Усі інші функції φ_r отримують аналогічно.

Функції φ_r мають властивість (вона є наслідком геометричної побудови)

$$\varphi_r \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)} \right) = \delta_{rs}. \tag{2.78}$$

За аналогією з п.1.7 запишемо вираз для кусково-аналітичних базисних функцій, заданих у всій області Ω:

$$\varphi_i^h \left(x_1, x_2, x_3 \right) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_i, & i \in \overline{\Omega}_e, \\ 0, & i \notin \overline{\Omega}_e. \end{array} \right. \tag{2.79}$$

Як і раніше (див. 2.5), для запису апроксимованої функції на скінченному елементі Ω_e матимемо формулу

$$u_h = u_i^h \varphi_i + u_j^h \varphi_j + u_m^h \varphi_m + u_k^h \varphi_k. \tag{2.80}$$

Використовуючи функції φ_r на тетраедрі, можна побудувати апроксимаційні формули вищих порядків, зокрема другого. Для цього на тетраедрі виберемо систему вузлових точок, зображених на рис. 2.15, де точки $1, ..., 6$ розміщені на серединах ребер тетраедра.

Система базисних функцій ψ_r на тетраедрі Ω_e має вигляд

$$\begin{array}{rcl} \psi_k & = & \varphi_k \left(2\varphi_k - 1 \right); \\ \psi_1 & = & 4\varphi_k \varphi_j. \end{array} \tag{2.81}$$

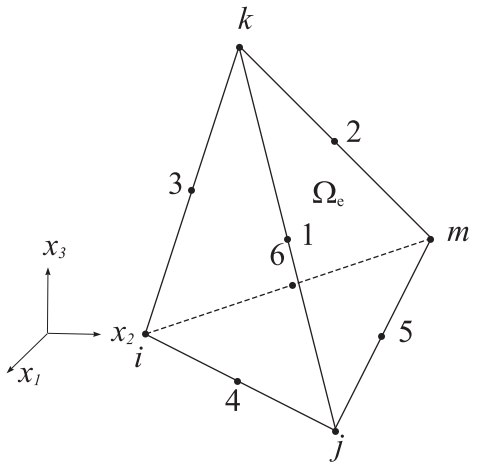

Рис. 2.15: Скінченний елемент у вигляді тетраедра з шістьма вузлами

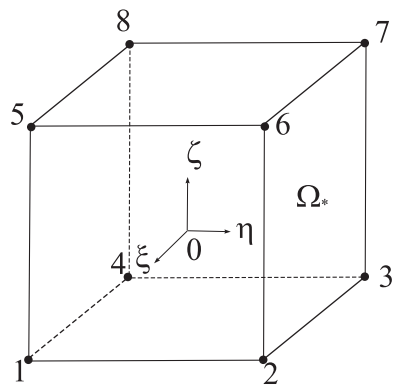

Рис. 2.16: Скінченний елемент у вигляді куба з вісьмома вузлами

Усі решта функції ψ_r отримують аналогічно. Можна переконатися, що ці функції задовольняють умови

$$\psi_r = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}\right) = \delta_{rs}. \tag{2.82}$$

Для запису апроксимованої функції на скінченному елементі Ω_e матимемо формулу

$$u_h = u_1^h \psi_1^{(e)} + u_2^h \psi_2^{(e)} + ... + u_9^h \psi_9^{(e)} + u_{10}^h \psi_{10}^{(e)}. \tag{2.83}$$

Зазначимо, що наведені тут апроксимаційні формули на тетраедрі утворюють у разі розширення їх на область Ω функції класу $C^{(0)}(\Omega)$.

2.12 Тривимірні ізопараметричні апроксимації

Криволінійні ізопараметричні апроксимації, запропоновані у 2.8, можна поширити на тривимірний випадок.

Розглянемо куб

$$\Omega_* = \{\xi, \eta, \zeta : -1 \le \xi \le 1,\ -1 \le \eta \le 1,\ -1 \le \zeta \le 1\}$$

у декартовій системі координат ξ, η, ζ. На кубі виберемо дві сукупності координатних вузлів (рис. 2.16, 2.17).

На вибраних системах вузлових точок запишемо такі сукупності базисних функцій:

1° полілінійну

$$\varphi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta), \qquad i = 1, ..., 8; \tag{2.84}$$

де ξ_i, η_i, ζ_i – координати i-ї вузлової точки;

2° поліквадратичну

$$\varphi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2), \tag{2.85}$$
$$i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19;$$

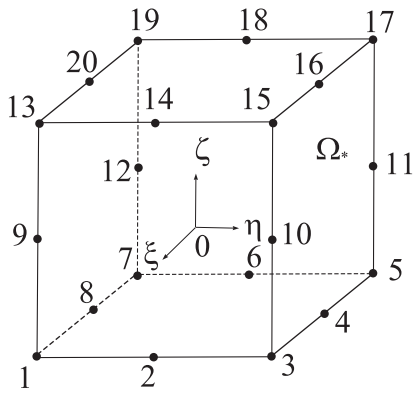

Рис. 2.17: Скінченний елемент у вигляді куба з двадцятьма вузлами

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{4}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta), \qquad i=8,4,16,20;\\
\varphi_i(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)\left(1-\eta^2\right)(1+\zeta_i\zeta), \qquad i=2,6,14,18;\\
\varphi_i(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\left(1-\zeta^2\right), \qquad i=9,10,11,12.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що всі вибрані функції $\varphi_r(\xi,\eta,\zeta)$ задовольняють умову

$$\varphi_r = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}\right) = \delta_{rs}. \tag{2.86}$$

Пропонуємо перевірити її шляхом безпосередніх обчислень.

За допомогою вибраних функцій виконаємо взаємно однозначне відображення куба на криволінійний шестигранник

$$x_k = \sum_i x_k^{(i)} \varphi_i(\xi,\eta,\zeta), \qquad k=1,2,3, \tag{2.87}$$

а також на Ω^* апроксимуємо деяку функцію $u(\xi,\eta,\zeta)$

$$u_h(\xi,\eta,\zeta) = \sum_i u_i^h \varphi_i(\xi,\eta,\zeta), \tag{2.88}$$

де u_i^h – вузлові значення апроксимованої функції.

2.13 Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Довести, що квадратичні базисні функції (2.48) є неперервними в разі переходу через спільну сторону двох суміжних трикутників.

Вправа 2. Зобразити графіки кубічних базисних функцій лагранжового типу на сукупності одновимірних скінченних елементів.

Вправа 3. Зобразити графіки апроксимованих функцій кубічними базисними функціями лагранжового типу та кубічними базисними функціями ермітового типу на сукупності одновимірних скінченних елементів. Яка між ними суттєва відмінність?

Вправа 4. Зобразити графіки квадратичних базисних функцій (2.48) на сукупності трикутних скінченних елементів (за аналогією з рис. 2.5).

Вправа 5. Нехай задано два скінченні елементи прямокутної форми, що мають спільну сторону вздовж лінії $x_1 = \text{const}$. На елементах побудовані апроксимаційні формули вигляду (2.52). Довести, що функції $u_h(x_1, x_2)$ є неперервними в разі переходу через спільну границю елементів.

Вправа 6. Нехай задано два скінченні елементи прямокутної форми, що мають спільну сторону вздовж лінії $x_2 = \text{const}$. На елементах побудовані апроксимаційні формули ермітового типу (2.56). Довести, що функції $u_h(x_1, x_2)$ і їхні похідні до першого порядку є неперервними в разі переходу через спільну границю елементів.

Вправа 7. Записати вирази для базисних функцій 9-вузлового (3×3) прямокутного скінченного елемента лагранжового типу (2.52). Порівняти їх з біквадратичним ізопараметричними апроксимаційними функціями. Які відмінності є між базисними функціми цих двох типів?

Вправа 8. Зобразити графіки білінійних базисних функцій типу (2.52) у прямокутній області, поділеній на 4×4 прямокутних скінченних елементів.

Вправа 9. За аналогією з нерівністю (2.17) вивести нерівність (2.19).

Вправа 10. Використовуючи рекурентну формулу (2.35) та вирази для поліномів Лежандра P_0, P_1, отримати вирази для поліномів P_2, P_3. Звірити їх з формулами (2.34).

Вправа 11. Використовуючи формулу (2.39), отримати співвідношення (2.40).

Вправа 12. Знайти образи сторін квадрата при білінійному, біквадратичному та бікубічному ізопараметричних відображеннях (2.61).

Розділ 1

Варіаційні методи

Розділ 2

Апроксимація на скінченних елементах

Розділ 3

Крайові задачі

У розділі наведено дослідження операторів класичних крайових задач, які описуються звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в часткових похідних, а також їхні варіаційні формулювання. Описано схеми методу скінченних елементів побудови наближених розв'язків крайових задач та досліджено питання їхньої збіжності.

3.1 Крайова задача для рівняння парного порядку

Розглянемо крайову задачу

$$Lu = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = f(x), \quad x \in (a,b); \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} u(a) = u'(a) = ... = u^{(s-1)}(a) = 0; \\ u(b) = u'(b) = ... = u^{(s-1)}(b) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Стосовно відомих коефіцієнтів рівняння та правої частини припустимо

$$p_k \in C^{(k)}[a,b],\ k = 0, ..., s,\ f(x) \in C^{(0)}[a,b].$$

Лема 1. *Оператор задачі (3.1), (3.2) симетричний.*

Доведення. Зазначимо, перш за все, що область визначення оператора цієї задачі

$$D_L = \left\{ u(x) : u \in C^{(2s)}[a,b], \quad u(a) = 0, ..., u^{(s-1)}(b) = 0 \right\}$$

є щільною множиною у просторі $H = L_2(a,b)$ оскільки $C_o^{(\infty)} \subset D_L$. Розглянемо скалярний добуток

$$(Lu, v) = \int_a^b \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right) v dx. \tag{3.3}$$

Для перетворення інтеграла у правій частині формули (3.3) використаємо формулу інтегрування частинами. Врахувавши граничні умови (3.2), отримаємо

$$(Lu, v) = \sum_{k=0}^{s} \int_a^b p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} dx. \tag{3.4}$$

Права частина формули (3.4) симетрична відносно функцій u, v. Отже, звідси випливає, що оператор симетричний. ■

Теорема 2. *Нехай $p_s(x) \geqslant P > 0$ і $p_k(x) \geqslant 0$, $k = 0, 1, ..., s-1$, тоді оператор задачі (3.1), (3.2) додатно визначений.*

Доведення. Використаємо формулу (3.4) для обчислення добутку

$$(Lu, u) = \sum_{k=0}^{s} \int_a^b p_k \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx. \tag{3.5}$$

Врахувавши обмеження, накладені на $p_k(x)$ у формулюванні теореми, запишемо

$$(Lu, u) \geqslant P \int_a^b \left(\frac{d^s u}{dx^s} \right)^2 dx. \tag{3.6}$$

Щоб оцінити знизу праву частину формули (3.6), використаємо нерівність Фрідріхса (1.26). Якщо врахувати крайові умови (3.2) для функції $u(x)$ та її похідних до $s-1$ порядку включно, отримаємо

$$\left\| \frac{du}{dx} \right\| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{b-a} \|u\|, \left\| \frac{d^2 u}{dx^2} \right\| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{b-a} \left\| \frac{du}{dx} \right\|, ...,$$

$$\left\| \frac{d^s u}{dx^s} \right\| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{b-a} \left\| \frac{d^{s-1} u}{dx^{s-1}} \right\|.$$

Підставимо ліву частину першої нерівності у праву частину другої і так далі до останньої нерівності; тоді

$$\left\| \frac{d^s u}{dx^s} \right\| \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a} \right)^s \|u\|. \tag{3.7}$$

З урахуванням нерівності (3.7) у (3.6) запишемо

$$(Lu, u) \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a} \right)^{2s} P \|u\|^2,$$

що й треба було довести. ■

За отриманими результатами сформулюємо задачу (3.1), (3.2) у такому варіаційному вигляді:

$$F(u) \to \min, \quad u \in U,$$

де

$$F(u) = \sum_{k=0}^{s} \int_a^b p_k \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx - 2\int_a^b uf dx;$$

$$U = \left\{u(x) : u(x) \in W_2^{(s)}, \quad u(a) = 0, ..., u^{(s-1)}(b) = 0\right\}.$$

3.2 Апріорна оцінка точності МСЕ

Зазначимо, що частковим випадком задачі, розглянутої у попередньому параграфі, є задача Штурма–Ліувілля

$$-\frac{d}{dx}p_1(x)\frac{du}{dx} + p_0(x)u = f(x), \quad x \in (a,b); \tag{3.8}$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{3.9}$$

У першому розділі описана схема МСЕ (на основі кусково–лінійних базисних функцій) числового розв'язування цієї задачі. Тут отримаємо апріорні оцінки точності послідовності числових розв'язків МСЕ. Для оцінки збіжності схеми МСЕ (див. 1.7) для задачі Штурма–Ліувілля використаємо теорему 2.1 про похибки апроксимації кусково-лінійними базисними функціями (див. 2.1).

Приймемо тут за аналогією з попереднім параграфом, що

$$p_1(x) \geq P > 0, P = \text{const}, p_0(x) \geq 0.$$

Тоді, очевидно, оператор є додатно визначений і для нього можна ввести поняття енергетичного добутку та енергетичної норми. Покажемо, що енергетична норма оператора задовольняє нерівність

$$m^2 \|u\|^2_{W_2^{(1)}} \leq \|u\|^2_A. \tag{3.10}$$

Справді

$$\|u\|^2_A = \int_a^b (p_1 u'^2 + p_0 u^2) dx \geqslant P \int_a^b u'^2 dx.$$

Застосуємо далі нерівність Фрідріхса (1.26). Отримаємо

$$\|u\|^2_A \geqslant \frac{1}{2}P\int_a^b u'^2 dx + \frac{P}{(b-a)^2}\int_a^b u^2 dx.$$

Отже, виконується нерівність (3.10), і

$$m^2 = \min\left\{\frac{1}{2}P, \frac{P}{(b-a)^2}\right\}.$$

Доведемо далі, що енергетичний скалярний добуток неперервний за кожним із аргументів, тобто має місце нерівність

$$(u,v)_A \leq M^2 \parallel u \parallel_{W_2^{(1)}} \parallel v \parallel_{W_2^{(1)}} . \tag{3.11}$$

Запишемо вираз для енергетичного скалярного добутку

$$(u,v)_A = \int\limits_a^b (p_1 u'v' + p_0 uv)dx.$$

Піднесемо його ліву і праву частини до квадрату

$$(u,v)_A^2 = \left\{ \int\limits_a^b p_1 u'v'dx \right\}^2 + 2\int\limits_a^b p_1 u'v'dx \int\limits_a^b p_0 uvdx + \left\{ \int\limits_a^b p_0 uvdx \right\}^2 .$$

Використовуючи очевидну нерівність

$$2cd \leq c^2 + d^2, \forall c, d \in \mathbf{R},$$

оцінимо праву частину попереднього виразу зверху. Отримаємо

$$(u,v)_A^2 \leq 2\left\{ \int\limits_a^b p_1 u'v'dx \right\}^2 + 2\left\{ \int\limits_a^b p_0 uvdx \right\}^2 .$$

Використовуючи нерівність Шварца, оцінимо далі зверху кожен із доданків попередньої формули. Запишемо

$$(u,v)_A^2 \leq 2\int\limits_a^b p_1 u'^2 dx \int\limits_a^b p_1 v'^2 dx + 2\int\limits_a^b p_0 u^2 dx \int\limits_a^b p_0 v^2 dx.$$

Врахуємо далі, що коефіцієнти рівняння (3.8) невід'ємні. Тоді можемо підсилити попередню нерівність і подати її у вигляді

$$(u,v)_A^2 \leq M^2 \left\{ \int\limits_a^b u'^2 dx \int\limits_a^b v'^2 dx + \int\limits_a^b u^2 dx \int\limits_a^b v^2 dx \right\},$$

де

$$M^2 = 2\max\left\{ \max_{x\in[a,b]} p_1^2(x), \max_{x\in[a,b]} p_o^2(x) \right\}.$$

Підсилимо цю нерівність, додавши у першому інтегралі першого доданку u^2 та у першому інтегралі другого доданку u'^2. Якщо після цього винести з обидвох доданків спільний множник, то отримаємо

$$(u,v)_A^2 \leq M^2 \parallel u \parallel_{w_2^{(1)}}^2 \parallel v \parallel_{w_2^{(1)}}^2 . \tag{3.12}$$

Таким чином, підсумовуючи, запишемо нерівність (3.10) для різниці $u_0 - u_h$ між узагальненим розв'язком та його наближенням, отриманим МСЕ на основі кусково-лінійної апроксимації

$$m^2 \parallel u_0 - u_h \parallel^2_{w_2^{(1)}} \leq (u_0 - u_h, u_0 - u_h)_A \,. \tag{3.13}$$

Виберемо довільну функцію v_h, яка є лінійною комбінацією скінченновимірного простору кусково-лінійних базисних функцій. Додамо і віднімемо цю функцію в одному із аргументів у правій частині нерівності (3.13). Матимемо

$$m^2 \parallel u_0 - u_h \parallel^2_{w_2^{(1)}} \leq (u_0 - u_h, u_0 - v_h + v_h - u_h)_A \,.$$

Перепишемо цю нерівність

$$m^2 \parallel u_0 - u_h \parallel^2_{w_2^{(1)}} \leq (u_0 - u_h, u_0 - v_h)_A + (u_0 - u_h, v_h - u_h)_A \,.$$

Оскільки розв'язок задачі, отриманий МСЕ є ортогональною проекцією на підпростір, що утворюють кусково-лінійні базисні функції, другий доданок у правій чаастині попередньої нерівності дорівнює нулю, тобто

$$(u_0 - u_h, v_h - u_h)_A = 0.$$

Остаточно запишемо

$$m^2 \parallel u_0 - u_h \parallel^2_{w_2^{(1)}} \leq (u_0 - u_h, u_0 - v_h)_A \,.$$

Оцінимо праву частину цієї нерівності, використовуючи нерівність (3.12). Отримаємо

$$m^2 \parallel u_0 - u_h \parallel^2_{w_2^{(1)}} \leq M \parallel u_0 - u_h \parallel_{w_2^{(1)}} \parallel u_0 - v_h \parallel_{w_2^{(1)}} \,.$$

Звідси отримаємо

$$\parallel u_0 - u_h \parallel_{w_2^{(1)}} \leq \frac{M}{m^2} \parallel u_0 - v_h \parallel_{w_2^{(1)}} \,. \tag{3.14}$$

Далі з урахуванням другої нерівності з теореми 1 розділу 2 для наближеного розв'язку u_h матимемо

$$\|u_0 - u_h\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \frac{M}{m^2} C_2 h \, \|u_0\|_{W_2^{(2)}} \,. \tag{3.15}$$

Оцінку вигляду (3.15) називають апріорною оцінкою похибки наближеного розв'язку u_h. Вона дає інформацію про швидкість збіжності наближеного розв'язку, який можна отримати МСЕ. Зокрема, для задачі, яку розглядаємо, з оцінки (3.15) випливає, що наближений розв'язок u_h прямує до узагальненого розв'язку u_0 як $O(h)$. У цьому разі узагальнений розв'язок повинен задовольняти умову $u_0 \in W_2^{(2)}$.

3.3 Апріорна оцінка точності за Нітше

У попередньому параграфі отримано оцінку збіжності схеми МСЕ у нормі простору $W_2^{(1)}$. З'ясовано, що її порядок є $O(h)$. Зі збіжності у нормі цього простору випливає збіжність (див. 1.6) і в нормі простору L_2. Опишемо тут спосіб визначення порядку збіжності у цій нормі, відомий під назвою способу Нітше.

Позначимо $e_h = u_0 - u_h$, де u_0 – узагальнений розв'язок задачі (3.8), (3.9). Розглянемо допоміжну задачу, яку описує цей же оператор, що й (3.8), (3.9), однак її права частина дорівнює e_h, тобто

$$Az = e_h. \tag{3.16}$$

Запишемо для (3.16) еквівалентну варіаційну задачу (див. 1.7)

$$(Az, v) = (e_h, v), \qquad \forall v \in H_A. \tag{3.17}$$

Приймемо в (3.17) $v = e_h$. Отримаємо

$$(Az, e_h) = (e_h, e_h). \tag{3.18}$$

Врахуємо, що наближений розв'язок u_h є ортогональною проекцією u_0 на підпростір S_h, натягнений на базисні функції φ_i^h. Це означає, що (див. 1.6)

$$(Ae_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S_h. \tag{3.19}$$

Якщо взяти до уваги, що A – симетричний оператор, то (3.19) можна переписати у вигляді

$$(Av_h, e_h) = 0, \quad \forall v_h \in S_h. \tag{3.20}$$

Віднімемо (3.20) від (3.18):

$$(A(z - v_h), e_h) = \|e_h\|^2.$$

Застосуємо далі нерівність Шварца. Отримаємо нерівність

$$\|e_h\|^2 \leqslant \|z - v_h\|_A \|e_h\|_A. \tag{3.21}$$

Для оцінки зверху множників у правій частині формули (3.21) вважатимемо, що v_h є лінійним інтерполянтом розв'язку z і використаємо нерівності

$$\|e_h\|_A^2 \leqslant C_u h \|u_0\|_{W_2^{(2)}}; \tag{3.22}$$

$$\|z - v_h\|_A \leqslant C_z h \|z\|_{W_2^{(2)}}, \tag{3.23}$$

які випливають з оцінки (3.15) та нерівності (3.10) для вихідної задачі (3.8), (3.9) і задачі (3.16). Окрім цього, використаємо нерівність [12]

$$\|z\|_{W_2^{(2)}} \leqslant K \|e_h\|,$$

яка виражає неперервну залежність розв'язку задачі (3.16) від правої частини. Підставимо (3.22), (3.23) у праву частину (3.21). Отримаємо

$$\left\|e^h\right\|^2 \leqslant C_z C_u h^2 K \left\|u_0\right\|_{W_2^{(2)}} \left\|e_h\right\|. \tag{3.24}$$

Скоротимо ліву та праву частини нерівності (3.24) на $\|e_h\|$. Остаточно запишемо

$$\|e_h\| \leqslant C h^2 \left\|u_0\right\|_{W_2^{(2)}}, \tag{3.25}$$

де $C = C_z C_u K$.

Нерівність (3.25) означає, що у нормі простору L_2 наближений розв'язок збігається до узагальненого як $O(h^2)$.

3.4 Крайова задача для системи диференціальних рівнянь

Розглянемо крайову задачу, яку описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$-\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dx}\left(p_{jk}(x)\frac{du_k}{dx}\right) - q_{jk}(x)u_k\right] = f_j(x); \quad x \in (a,b); \tag{3.26}$$

$$u_k(a) = u_k(b) = 0; \quad k, j = 1, 2, ..., s. \tag{3.27}$$

Уведемо позначення для матриць-стовпців невідомих і правих частин та матриць коефіцієнтів

$$\mathbf{u} = \{u_j(x)\}; \quad \mathbf{f} = \{f_j(x)\};$$

$$\mathbf{P} = \{p_{jk}(x)\}; \quad \mathbf{Q} = \{q_{jk}(x)\}.$$

Урахувавши їх, задачу (3.26), (3.27) можна записати у такому вигляді:

$$-\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx} + \mathbf{Q}(x)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x); \quad x \in (a,b); \quad \mathbf{f}(x) \in \mathbf{L}_2(a,b);$$

$$\mathbf{u}(a) = 0; \quad \mathbf{u}(b) = 0.$$

Зазначимо, що у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(a,b)$ векторних функцій скалярний добуток та норму визначено співвідношеннями

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{v} dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{s} u_k v_k dx;$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{u} dx.$$

Припустимо, що $f \in L_2(a,b)$, тоді область визначення D_A оператора цієї задачі можна задати співвідношенням

$$D_A = \left\{\mathbf{u} = \{u_1, ..., u_s\}^T : u_k \in W_2^{(2)}(a,b),\ u_k(a) = u_k(b) = 0, k = 1, ..., s\right\}.$$

Виконується така лема.

Лема 3. *Нехай* $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ *– симетричні матриці. Тоді оператор задачі (3.26), (3.27) симетричний.*

Доведення. Розглянемо скалярний добуток

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = -\int\limits_a^b \sum_{j,k=1}^s \frac{d}{dx} p_{jk}(x) \frac{du_k}{dx} v_j dx + \int\limits_a^b \sum_{j,k=1}^s q_{jk}(x) u_k v_j dx. \tag{3.28}$$

Зінтегруємо перший доданок частинами і врахуємо граничні умови (3.27). Отримаємо

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = \int\limits_a^b \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right)^T \mathbf{P} \frac{d\mathbf{v}}{dx} dx + \int\limits_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} dx. \tag{3.29}$$

Якщо врахувати, що область визначення оператора є щільною множиною (див. 1.1), то з (3.29) випливає, що оператор симетричний. ■

Доведемо теорему, яка визначає умови, за яких оператор задачі (3.26), (3.27) додатно визначений.

Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{P}$ *– додатно визначена матриця*

$$\mathbf{t}^T \mathbf{P} \mathbf{t} > 0, \quad \forall \mathbf{t} = (t_1, ..., t_s)^T, \quad t_i \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^s \mid t_i \mid \neq 0,$$

а $\mathbf{Q}$ *– невід'ємна матриця*

$$\mathbf{t}^T \mathbf{Q} \mathbf{t} \geqslant 0.$$

Тоді оператор задачі (3.26), (3.27) додатно визначений.

Доведення. Відомо, що для найменшого власного числа λ_1 додатно визначеної матриці $\mathbf{P}$, виконуються нерівності

$$\mathbf{t}^T \mathbf{P} \mathbf{t} \geqslant \lambda_1(x) \mathbf{t}^T \mathbf{t}, \quad \lambda_1(x) > 0,$$

Вважатимемо, що елементи матриці $\mathbf{P}$ є неперервними функціями x. Тоді $\lambda_1(x) \geqslant \lambda > 0$.

Розглянемо скалярний добуток (3.29)

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k=1}^s \int\limits_a^b p_{jk}(x) u_j' u_k' dx + \sum_{j,k=1}^s q_{jk} u_j u_k dx \geqslant \lambda \sum_{k=1}^s \int\limits_a^b (u_k')^2 dx. \tag{3.30}$$

Тут враховано попередні міркування й те, що $\mathbf{Q}$ – невід'ємна матриця. Для оцінки правої частини формули (3.30) використаємо нерівність Фрідріхса (1.26). Отримаємо

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \frac{2\lambda}{(b-a)^2} \|\mathbf{u}\|_{L_2}^2.$$

■ Оскільки оператор задачі (3.26), (3.27) додатно визначений, то її можна записати у таких варіаційних формулюваннях:

$$F(\mathbf{u}) \to \min, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}; \tag{3.31}$$

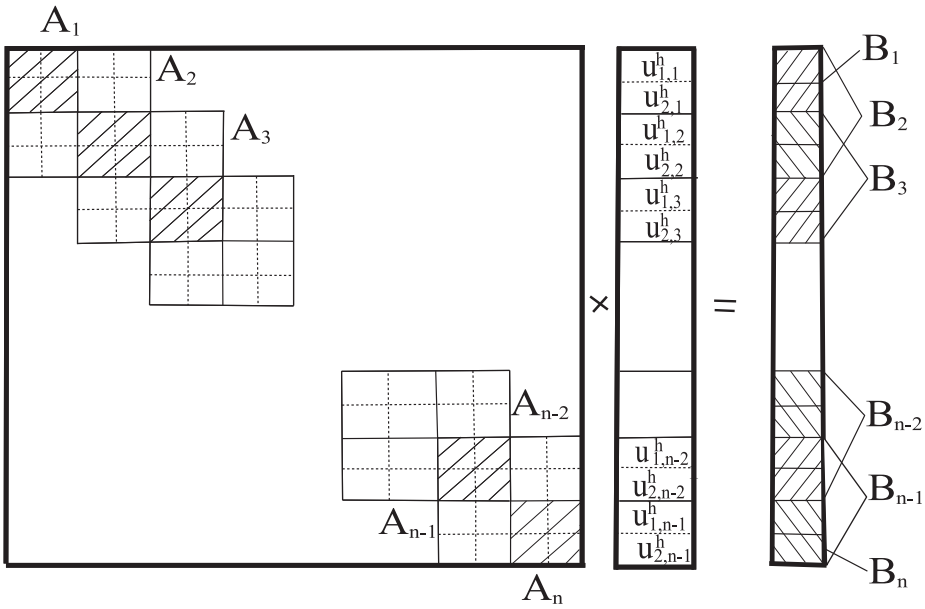

Рис. 3.1: Структура системи лінійних алгебричних рівнянь

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{j,k=1}^{s} \int_a^b p_{jk}(x) u_j' u_k' dx + \sum_{j,k=1}^{s} q_{jk} u_j u_k dx - 2 \sum_{j=1}^{s} \int_a^b u_j f_j dx;$$

$$\mathbf{U} = \Big\{ \mathbf{u} = \{u_1, ..., u_s\}^T : u_k \in W_2^{(1)}(a,b),\ u_k(a) = u_k(b) = 0, \quad k = 1, ..., s \Big\};$$

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \tag{3.32}$$

Варіаційні формулювання (3.31) та (3.32) є еквівалентними.

Для побудови наближеного розв'язку варіаційної задачі задамо поділ області

$$a = x_0 < x_1 <, ..., < x_{n-1} < x_n = b.$$

Оскільки система диференціальних рівнянь є другого порядку за кожною змінною, то для наближеного запису розв'язку можна використати кусково-поліноміальні базисні функції, описані в 2.2. Використаємо найпростіші кусково-лінійні базисні функції (1.96). На скінченному елементі $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$ наближений розв'язок $\mathbf{u}_h$ запишемо у вигляді

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{q}_i,$$

де матриця $\mathbf{N}_i(x)$ (розміру $s \times 2s$) має вигляд

$$\mathbf{N}_i(x) = \left\{ \begin{array}{cccccc} \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h \end{array} \right\};$$

$$\mathbf{q}_i^T = \big\{ u_{1,i-1}^h, u_{2,i-1}^h, ..., u_{s,i-1}^h, u_{1,i}^h, u_{2,i}^h, ..., u_{s,i}^h \big\}.$$

Діятимемо далі формально за аналогією з випадками параграфа 1.7. Використаємо одне з еквівалентних варіаційних формулювань (3.31) або

(3.32). Матриця системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ формується з матриць

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{M}_i,$$

де

$$\mathbf{K}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d}{dx}\mathbf{N}_i(x)\right)^T \mathbf{P}\frac{d}{dx}\mathbf{N}_i(x)dx; \tag{3.33}$$

$$\mathbf{M}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{N}_i dx. \tag{3.34}$$

Стовпець правих частин системи рівнянь МСЕ формується з матриць

$$\mathbf{B}_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i^T(x)\mathbf{f}(x)dx. \tag{3.35}$$

Схема формування системи лінійних алгебричних рівнянь (для $s = 2$) зображена на рис. 3.1.

3.5 Крайові задачі для рівняння Пуассона

Розглянемо головні крайові задачі для рівняння Пуассона (інша назва – неоднорідне рівняння Лапласа)

$$-\Delta u = f(x), \quad x = x_1, x_2, ..., x_n, \quad x \in \Omega, \tag{3.36}$$

де

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

$u(x)$ – шукана функція, $f(x) \in L_2(\Omega)$ – задана права частина, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – обмежена область, з ліпшицевою границею Γ. Для рівняння (3.36) звичайно ставлять три головні крайові задачі, які відповідають таким трьом крайовим умовам:

1° задача Діріхле

$$u(x) = 0,\ x \in \Gamma;$$

2° задача Ноймана

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0,\ x \in \Gamma,$$

де

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)$$

– похідна за напрямом зовнішньої нормалі ν до границі Γ;

3° задача Ньютона

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \sigma(x)\, u(x) = 0, x \in \Gamma,$$

де $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0,\ \sigma_0 = \text{const}$.

Позначимо через A_k – оператор k-ї крайової задачі для неоднорідного рівняння Лапласа, а через D_{A_k} – його область визначення.

Нехай i – вектор, координатами якого є невід'ємні цілі числа i_k

$$i = (i_1, i_2, ..., i_n).$$

Уведемо позначення

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} ... \partial x_n^{i_n}}, \tag{3.37}$$

де $|i| = i_1 + i_2 + ... + i_n$. З використанням уведеного позначення (3.37) усі похідні до другого порядку включно від функції u можна записати формулою

$$D^i u(x), \qquad |i| \leq 2.$$

Використавши цей факт, наведемо такі описи для множин областей визначення операторів A_k:

$$D_{A_1} = \left\{ u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2;\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma \right\};$$

$$D_{A_2} = \left\{ u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2;\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0,\ x \in \Gamma \right\};$$

$$D_{A_3} = \left\{ u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2;\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) u(x) = 0,\ x \in \Gamma \right\}.$$

Дослідимо властивості оператора A_k. Доведемо, що оператори A_k є симетричними. Для цього розглянемо скалярні добутки $(A_k u, v)$. Використавши формулу Гріна для оператора Лапласа (див. п 1.1) та врахувавши граничні умови $1^\circ - 3^\circ$, одержимо

$$(A_k u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega, \quad k = 1, 2; \tag{3.38}$$

$$(A_3 u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \sigma u v d\Gamma. \tag{3.39}$$

Тут

$$\nabla u = \left\{ \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right\}.$$

Оскільки, окрім цього, виконуються включення $C_0^{(\infty)} \subset D_{A_k}$, то оператори трьох головних крайових задач є симетричними.

З метою дослідити додатну визначеність операторів головних крайових задач для неоднорідного рівняння Лапласа використаємо нерівності Фрідріхса і Пуанкаре. Позначимо через M лінеал функцій

$$M = \left\{ u(x) : u \in W_2^{(1)} \right\}$$

. Наведемо нерівності Фрідріхса і Пуанкаре у вигляді теорем.

Теорема 5 *(Нерівність Фрідріхса). Нехай Ω – обмежена область з ліпшицевою границею Γ. Тоді існують невід'ємні сталі c_1, c_2, які залежать від області Ω і не залежать від функції лінеалу M, такі, що виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x)\,d\Omega \le c_1 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + c_2 \int\limits_{\Gamma} u^2(x)\,d\Gamma. \tag{3.40}$$

Див. [10, с.344].

Зазначимо, що у наведеній теоремі значення функції $u(x)$ на границі потрібно розуміти в сенсі слідів (див. Додаток).

Теорема 6 *(Нерівність Пуанкаре). Нехай Ω – обмежена область з ліпшицевою границею Γ. Тоді існують невід'ємні сталі c_3, c_4, які залежать від області Ω і не залежать від функції лінеалу M, такі, що виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x)\,d\Omega \le c_3 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + c_4 \left[\int\limits_{\Omega} u(x)\,d\Omega\right]^2. \tag{3.41}$$

Див. [10, с.345].

Теорема 7. *Оператори трьох головних крайових задач для неоднорідного рівняння Лапласа є додатно визначеними.*

Доведення. Для першої крайової задачі ($k = 1$) використаємо формулу (3.38) скалярного добутку $(A_1 u, u)$

$$(A_1 u, u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2\,d\Omega, \tag{3.42}$$

де

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2\,d\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Для оцінки знизу виразу у правій частині формули (3.42) застосуємо нерівність Фрідріхса (3.40), врахувавши крайову умову Діріхле 1°. Отримаємо

$$(A_1 u, u) \ge \frac{1}{c_1} \int\limits_{\Omega} u^2(x)\,dx.$$

Це й доводить теорему для задачі Діріхле.

Щодо задачі Ноймана зазначимо, що не для всіх функцій $f(x)$ правої частини рівняння Пуассона вона є несуперечною. Справді, розглянемо

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \Delta u d\Omega.$$

Застосуємо до правої частини попередньої рівності формулу Гріна, вважаючи, що другим множником під знаком інтеграла є одиниця. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla 1 d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} 1 d\Gamma.$$

Оскільки $\nabla 1 \equiv 0$ і виконується умова Ноймана 2°, то

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, d\Omega = 0. \tag{3.43}$$

Це і є додаткова умова, яку повинна задовольняти функція $f(x)$.

Легко бачити, що задача Ноймана ($k = 2$) для рівняння Пуассона не має єдиного розв'язку. Справді, простою перевіркою можна з'ясувати, що функція $u_0 + \mathrm{const}$, де u_0 – розв'язок задачі Ноймана, є теж її розв'язком. Отже, перш за все введемо у цьому випадку додаткову умову, яка могла б забезпечити єдиність розв'язку задачі Ноймана для рівняння Пуассона. Виберемо цю умову за аналогією з умовою (3.43) у вигляді

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\, d\Omega = 0. \tag{3.44}$$

Доведемо тепер, що оператор задачі Ноймана для рівняння Пуассона з додатковою умовою (3.44) є додатно визначеним. Доведення є таким же, як і попереднє з тією різницею, що використано нерівність Пуанкаре (3.41), в якій враховано співідношення (3.44). Отже,

$$(A_2 u, u) \geq \frac{1}{c_3} \int\limits_{\Omega} u^2(x)\, dx.$$

Для задачі Ньютона ($k = 3$) скалярний добуток $(A_3 u, u)$ має вигляд (3.39)

$$(A_3 u, u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \sigma u^2 d\Gamma.$$

Для дослідження додатної визначенності оператора використаємо очевидну нерівність

$$(A_3 u, u) \geq \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2\, d\Omega + \sigma_0 \int\limits_{\Gamma} u^2 d\Gamma$$

та нерівність Фрідріхса (3.40). Отримаємо

$$(A_3 u, u) \geq \gamma^2 \int\limits_{\Omega} u^2(x)\, dx,$$

де

$$\gamma^2 = \min\{1, \sigma_0\} / \max\{c_1, c_2\}.$$

З останньої нерівності випливає, що задача Ньютона для рівняння Пуассона має теж додатно визначений оператор. ■

Отже, оскільки оператори головних крайових задач для рівняння Пуассона є додатно визначеними, то ці задачі можна сформулювати як варіаційні задачі такого вигляду:

$$F_k(u) \to \min, \qquad u \in H_k, \tag{3.45}$$

де

$$F_k(u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2 \, d\Omega - 2 \int\limits_{\Omega} f u d\Omega, \quad k = 1, 2;$$

$$F_3(u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2 \, d\Omega - 2 \int\limits_{\Omega} f u d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \sigma u^2 d\Gamma;$$

$$H_1 = \Big\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega),\, u(x) = 0,\, x \in \Gamma \Big\};$$

$$H_2 = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega),\, \int\limits_{\Omega} u d\Omega = 0 \right\};$$

$$H_3 = \Big\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega) \Big\}.$$

Як наслідок з доведеної теореми про додатну визначеність операторів головних крайових задач для рівняння Пуассона випливає твердження про існування та єдиність їхніх узагальнених розв'язків.

3.6 Схема МСЕ для рівняння Пуассона

Нехай двовимірна обмежена область Ω з ліпшицевою границею Γ розділена на скінченні елементи трикутної форми

$$\Omega = \underset{e}{\cup} \Omega_e, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

На заданому поділі вибиремо базисні функції вигляду (2.42) (див. параграф 2.4) і наведемо наближений розв'язок варіаційних задач, що відповідають крайовим задачам для рівняння Пуассона на Ω_e, у вигляді

$$u_h = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e, \tag{3.46}$$

$$\mathbf{N}_e = \left(\varphi_i^e, \varphi_j^e, \varphi_m^e\right); \; \mathbf{q}_e = \left(u_i^h, u_j^h, u_m^h\right)^T.$$

На підставі варіаційних формулювань (3.45), методу Рітца, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_j u_j^h \left(A\varphi_i^h, \varphi_j^h\right) = \left(f, \varphi_i^h\right), \; i = 1, 2..., n. \tag{3.47}$$

За аналогією з 1.7 ця система (для задач Діріхле і Ноймана) формується з матриць

$$\mathbf{K}_e = \int\limits_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{N}_e)^T \nabla \mathbf{N}_e d\Omega; \tag{3.48}$$

$$\mathbf{Q}_e = \int\limits_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T f d\Omega, \tag{3.49}$$

де

$$\nabla \mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \left(\varphi_i^e, \varphi_j^e, \varphi_m^e\right). \tag{3.50}$$

Виконавши нескладні обчислення у формулі (3.50), отримаємо

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{2\delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_i b_m + c_i c_m & b_j b_m + c_j c_m & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Тут

$$b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(m)},\ c_i = x_1^{(m)} - x_1^{(j)}, \tag{3.52}$$

δ – подвоєна площа трикутника Ω_e. Формули для b_j, b_m, c_j, c_m можна отримати з (3.52) шляхом циклічного переставляння індексів i, j, m.

Для обчислення інтеграла у формулі (3.49) зінтерполюємо функцію f на трикутнику Ω_e виразом

$$f\left(x_1, x_2\right) = \mathbf{N}_e\left(x_1, x_2\right) \mathbf{f}_e, \tag{3.53}$$

де

$$\mathbf{f}_e = \left(f_i, f_j, f_m\right)^T,$$

$f_r = f\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}\right)$ – значення функції $f\left(x_1, x_2\right)$ у вузловій точці $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}$, $r = i, j, m$. Підставимо формулу (3.53) у вираз (3.49). Отримаємо

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{M}_e \mathbf{f}_e.$$

Тут

$$\mathbf{M}_e = \int\limits_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \left(\varphi_i^{(e)}\right)^2 & \varphi_i^{(e)}\varphi_j^{(e)} & \varphi_i^{(e)}\varphi_m^{(e)} \\ \varphi_i^{(e)}\varphi_j^{(e)} & \left(\varphi_i^{(e)}\right)^2 & \varphi_j^{(e)}\varphi_m^{(e)} \\ \varphi_i^{(e)}\varphi_m^{(e)} & \varphi_j^{(e)}\varphi_m^{(e)} & \left(\varphi_m^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix} d\Omega.$$

Для обчислення інтегралів у попередньому виразі використаємо формулу [11]

$$\int\limits_{\Omega_e} \left(\varphi_i^{(e)}\right)^a \left(\varphi_j^{(e)}\right)^b \left(\varphi_m^{(e)}\right)^c d\Omega = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}\delta, \tag{3.54}$$

де a, b, c – цілі невід'ємні числа; δ – подвоєна площа трикутника.

У результаті отримаємо

$$\mathbf{M}_e = \frac{\delta}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що для задачі Ньютона в разі формування матриці системи лінійних алгебричних рівнянь необхідно додатково враховувати інтеграл

за границею, який фігурує у варіаційному формулюванні. Для задачі Діріхле потрібно врахувати головну граничну умову, а для задачі Неймана – додаткову умову (3.44).

Для отримання апріорної оцінки збіжності схеми МСЕ, як і в попередньому, використаємо лему Сеа (див. 1.10) і оцінку похибки апроксимації на трикутних елементах (див. 2.4). Попередньо доведемо, що енергетична норма задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\|u\|_A^2 = \int\limits_\Omega (\nabla u)^2 \, d\Omega$$

задовольняє подвійну нерівність

$$m^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2 \le \|u\|_A^2 \le M^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2, \tag{3.55}$$

де

$$\|u\|_{W_2^{(1)}}^2 = \int\limits_\Omega \left[(\nabla u)^2 + u^2\right] d\Omega.$$

Права частина цієї нерівності є очевидною; справді, для $M = 1$

$$\int\limits_\Omega (\nabla u)^2 \, d\Omega \le \int\limits_\Omega \left[(\nabla u)^2 + u^2\right] d\Omega.$$

Для доведення лівої частини запишемо

$$\|u\|_A^2 = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega (\nabla u)^2 \, d\Omega + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega (\nabla u)^2 \, d\Omega.$$

Застосувавши далі нерівність Фрідріхса (3.40), отримаємо

$$\|u\|_A^2 \ge m^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2,$$

де

$$m^2 = \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Отже, подвійна нерівність доведена.

Згідно з лемою Сеа наближений розв'язок u_h задовольняє нерівність

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \le \frac{M^2}{m^2} \left\|u - u_I^h\right\|_{W_2^{(1)}}. \tag{3.56}$$

Оцінимо праву частину нерівності (3.56), використовуючи теорему 2.2. Припустивши в цьому разі, що розв'язок задачі $u \in W_2^{(2)}$, отримаємо

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \le \frac{M^2}{m^2} C_2 \frac{h}{\sin\theta} \|u\|_{W_2^{(2)}}. \tag{3.57}$$

З оцінки (3.57) випливає, що наближений розв'язок u_h прямує до узагальненого розв'язку задачі в нормі простору $W_2^{(1)}$, якщо $h \to 0$. Порядок збіжності становить $O(h)$.

З оцінки (3.57) випливає, що в разі поділу області на трикутні скінченні елементи потрібно уникати трикутників з гострими кутами, для яких $\sin\theta$ є малим.

3.7 Схема МСЕ, побудована на ізопараметричних апроксимаціях

Прикладом задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f \ \text{ в}\Omega, \ u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{3.58}$$

проілюструємо спосіб побудови схеми методу скінченних елементів, яка використовує ізопараметричні апроксимації (див. 2.7).

Як відомо (див. 3.7) задача (3.58) еквівалентна задачі про мінімум квадратичного функціонала

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla u d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} f u d\Omega, \quad u \in H_1,$$

де

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega), \, u(x) = 0, \, x \in \Gamma \right\}.$$

Уважатимемо, що область Ω розділена на скінченні елементи одного з трьох видів, які розглядали у параграфі 2.7, і кожен скінченний елемент може бути однозначно відображений на квадрат Ω^* у системі координат ξ, η

$$\Omega^* = \{\xi, \eta : -1 < \xi, \eta < 1\}.$$

Як і для інших скінченноелементних апроксимацій, систему лінійних алгебричних рівнянь формують з матриць

$$\mathbf{K}_e = \int\limits_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{N})^T \nabla \mathbf{N} d\Omega, \tag{3.59}$$

$$\mathbf{Q}_e = \int\limits_{\Omega_e} f \mathbf{N}^T d\Omega, \tag{3.60}$$

де

$$\mathbf{N} = (\varphi_1(\xi, \eta), \varphi_2(\xi, \eta), ...).$$

Врахуємо у співвідношеннях (3.59), (3.60), що за допомогою формул

$$x_1 = \sum_i x_1^i \varphi_i(\xi, \eta), x_2 = \sum_i x_2^i \varphi_i(\xi, \eta) \tag{3.61}$$

скінченний елемент Ω_e можна відобразити на квадрат Ω^*. Матимемо

$$d\Omega = \det J d\xi d\eta. \tag{3.62}$$

Тут J – матриця Якобі вигляду

$$J = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{array} \right\}.$$

Крім того, перейдемо у формулах диференціювання $\nabla\mathbf{N}$ до змінних ξ, η. Для цього запишемо

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix}.$$

Беручи до уваги останнє співвідношення, матимемо

$$\nabla\mathbf{N} = J^{-1}\nabla^*\mathbf{N},$$

де

$$\nabla^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix}.$$

Отже, остаточно формули (3.59), (3.60) можна звести до вигляду

$$\mathbf{K}_e = \int\limits_{\Omega^*} (\nabla^*\mathbf{N})^T \left(J^{-1}\right)^T J^{-1}\nabla^*\mathbf{N} \det J d\xi d\eta; \tag{3.63}$$

$$\mathbf{Q}_e = \int\limits_{\Omega^*} f\mathbf{N}^T \det J d\xi d\eta. \tag{3.64}$$

Для обчислення інтегралів у формулах (3.63), (3.64) використовують, як звичайно, квадратурні формули Гаусса.

3.8 Бігармонічне рівняння

Для бігармонічного рівняння

$$\Delta^2 u = f(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega, \tag{3.65}$$

де

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4};$$

Ω – обмежена область з ліпшицевою границею Γ; $f(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ – задана права частина, розглянемо крайові задачі, які відповідають таким крайовим умовам:

$$u(x_1, x_2) = 0, \ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial\nu} = 0, \ x_1, x_2 \in \Gamma, \tag{3.66}$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial\nu^2} = 0, \ x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{3.67}$$

Розглянемо скалярний добуток

$$\left(\triangle^2 u, v\right) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right) v d\Omega.$$

Використавши формулу Остроградського (1.16), отримаємо

$$\left(\triangle^2 u, v\right) = -\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} v\nu_1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} v\nu_2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} v\nu_1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} v\nu_2\right) d\Gamma.$$

Зазначимо, що другий доданок попередньої формули дорівнює нулю, якщо взяти до уваги граничні умови (3.66), або (3.67). Застосуємо до першого доданка правої частини повторно формулу Остроградського (1.16)

$$\left(\triangle^2 u, v\right) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) d\Omega -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2\right) d\Gamma. \quad (3.68)$$

Перетворимо граничний інтеграл у цій формулі, зважаючи на співвідношення

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_1. \quad (3.69)$$

Тут τ – напрям дотичної до границі Γ. З них отримаємо

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_2;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_1. \quad (3.70)$$

Підставимо отримані співвідношення у вираз граничного інтеграла у формулі (3.68):

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2\right) d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_2\right)\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_2\right)\nu_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_1\right)\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau}\nu_1\right)\nu_2\right] d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_2^2\right) d\Gamma +$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial\tau}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right]d\Gamma. \tag{3.71}$$

Зазначимо, що виконується формула, яку неважко перевірити

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\nu_1\nu_2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_2^2. \tag{3.72}$$

Перепишемо остаточно вираз для скалярного добутку $\left(\triangle^2 u,v\right)$:

$$\left(\triangle^2 u,v\right)=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial\tau}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right]d\Gamma. \tag{3.73}$$

З цього, що функція u набуває на границі Γ нульового значення (крайові умови (3.66), (3.67)), випливає

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=0,\ \text{при } x_1,x_2\in\Gamma. \tag{3.74}$$

Отже, видно, що для двох типів крайових умов (3.66), (3.67) інтеграли за границею у формулі (3.73) дорівнюють нулю. Звідси випливають такі лема та теорема.

Лема 8. *Оператори крайових задач (3.65), (3.66) та (3.65), (3.67) є симетричними.*

Доведення. Випливає з такого запису скалярного добутку:

$$\left(\triangle^2 u,v\right)= \tag{3.75}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)d\Omega.$$

■

Теорема 9. *Оператор крайової задачі (3.65), (3.66) є додатно визначеним.*

Доведення. Необхідно довести, що виконується нерівність

$$\left(\triangle^2 u,u\right)\geq\gamma^2\int\limits_{\Omega}u^2 d\Omega.$$

Зазначимо, що за умов цієї теореми можна використати нерівність Фрідріхса (3.40) для отримання таких нерівностей:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]d\Omega\geq\frac{1}{c_1}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]d\Omega\geq\frac{1}{c_1}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega.$$

Додавши ці нерівності та врахувавши формулу (3.75), отримаємо

$$\left(\triangle^2 u,u\right)\geq\frac{1}{c_1}\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]d\Omega.$$

Для оцінювання правої частини попередньої нерівності знову застосуємо нерівність Фрідріхса (3.40). Остаточно запишемо

$$\left(\triangle^2 u,u\right)\geq\frac{1}{c_1^2}\int\limits_{\Omega}u^2 d\Omega.$$

Отже, $\gamma^2=1/c_1^2$. ■

Отримані результати дають змогу сформулювати крайові задачі (3.65), (3.66) та (3.65) (3.66) у вигляді таких варіаційних задач.

Задача, еквівалентна крайовій задачі (3.65), (3.66),

$$F\left(u\right)\to\min, u\in H_{A_1}.$$

Задача, еквівалентна крайовій задачі (3.65), (3.67),

$$F\left(u\right)\to\min, u\in H_{A_2}.$$

Тут

$$F\left(u\right)=\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right]d\Omega-2\int\limits_{\Omega}ufd\Omega;$$

$$H_{A_1}=\left\{u:u\in W_2^{(2)}\left(\Omega\right);u=0,x_1,x_2\in\Gamma;\frac{\partial u}{\partial\nu}=0,x_1,x_2\in\Gamma\right\};$$

$$H_{A_2}=\left\{u:u\in W_2^{(2)}\left(\Omega\right);u=0,x_1,x_2\in\Gamma\right\}.$$

3.9 Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Записати крайову задачу (3.1), (3.2) у вигляді варіаційного рівняння для знаходження слабкого розв'язку.

Вправа 2. Довести, що варіаційні формулювання (3.31), (3.32) еквівалентні.

Вправа 3. За аналогією з параграфом 1.7 довести, що система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ формується з матриць (3.33), (3.34), (3.35).

Вправа 4. Отримати апріорну оцінку точності схеми МСЕ для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Вправа 5. Сформулювати основні крайові задачі для рівняння Пуассона у вигляді варіаційних рівнянь.

Вправа 6. Дослідити оператор змішаної крайової задачі для рівняння Пуассона, яка відповідає крайовим умовам

$$u = 0 \ \ \Gamma_1, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

Вправа 7. Записати варіаційні формулювання крайових задач для неоднорідного рівняння Лапласа у вигляді варіаційних рівнянь для знаходження слабких розв'язків. Дослідити питання існування їхніх розв'язків.

Вправа 8. Вивести формулу (3.54) шляхом відображення довільного трикутника на прямокутний, катети якого лежать на координатних осях, і зведення подвійного інтеграла до повторного.

Вправа 9. У припущенні, що слабкий розв'язок u_0 одновимірної задачі адвекції–дифузії задовольняє умову $u_0 \ \in W_2^{(m+1)}(0,1)$ і що похибка апроксимації за нормою $W_2^{(1)}(0,1)$ функціями-бульбашками mго степеня становить $O(h^m)$, отримати апріорну оцінку наближеного розв'язку методу скінченних елементів. Дослідити залежність апріорної оцінки від числа Pe.

Вправа 10. За аналогією з параграфом 1.7 зобразити схему формування системи лінійних алгебричних рівнянь методу скінченних елементів, побудованого з використанням апроксимацій на трикутних скінченних елементах (див. 3.8).

Вправа 11. Вивести формули (3.69), (3.70).

Вправа 12. 1°. Дослідити оператори крайових задач:

1)

$$\sin x \ u'' + \cos x \ u' - x^2 u = f\,(x), \ x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \ u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0, \ f\,(x) \in C^{(0)}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right);$$

2)

$$(1 - \sin x) \ u'' - \cos x \ u' + x^2 u = f\,(x), \ x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \ u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0, \ f\,(x) \in C^{(0)}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right);$$

3)

$$-(2 - \cos x) \ u'' - \sin x \ u' + e^x u = f\,(x), \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u\,(0) = 0, \ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ f\,(x) \in C^{(0)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

4)

$$-2\sin^2\frac{x}{2} \ u'' - tgx \ u' + 5u = f\,(x), \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

$$u'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0, \ u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \ f\,(x) \in C^{(0)}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right);$$

5)

$$-ctgx \sin x \; u'' + \sin x \; u' + u = f(x), \; x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

$$u'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0, \; u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \; f(x) \in C^{(0)}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right);$$

6)

$$-\left(e^x + \ln x\right) \; u'' - \left(e^x + \frac{1}{x}\right) \; u' + x^2 u = f(x), \; x \in (2, 3),$$

$$u'(2) = 0, \; u(3) = 0, \; f(x) \in C^{(0)}(2, 3).$$

2°. Записати їхні варіаційні формулювання.

3°. Довести збіжність методу скінченних елементів, побудованого на лінійних апроксимаціях.

Розділ 1

Варіаційні методи

Розділ 2

Апроксимація на скінченних елементах

Розділ 3

Крайові задачі

Розділ 4

Задачі на власні значення

Задачі на власні значення становлять окремий клас задач математичної фізики. До них належать задачі про вільні гармонічні коливання механічних систем (це показано у параграфі 4.1). У розділі розглянуто задачі на власні значення для операторів у гільбетовому просторі. Досліджено властивості власних чисел та власних функцій залежно від властивостей операторів задач. Описано способи варіаційних формулювань задач на власні значення. Наведено приклади застосувань методу скінченних елементів до знаходження власних чисел та власних функцій операторів.

4.1 Математичні моделі, які приводять до задач на власні значення

4.1.1 Коливання струни

Рух струни, натягненої силою p, описує рівняння

$$p\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \tag{4.1}$$

де $z(x,t)$ – відхилення струни в точці x у момент часу t в напрямі, перпендикулярному до осі x; ρ – густина матеріалу струни. Вважатимемо, що струна закріплена в точках $x = 0, a$. Тоді до рівняння (4.1) необхідно додати граничні умови

$$z(0,t) = 0, \qquad z(a,t) = 0. \tag{4.2}$$

Окрім співвідношень (4.1), (4.2), математична модель руху струни має ще початкові умови. Однак для розгляду вільних, гармонічних коливань струни початкові умови несуттєві. З огляду на це тут і надалі початкові умови опущено.

Якщо розглядати вільні, гармонічні коливання, то розв'язок задачі (4.1), (4.2) треба шукати у вигляді

$$z(x,t) = w(x)e^{i\omega t}, \tag{4.3}$$

де ω – колова частота (кількість повних коливань за період часу 2π).

Зазначимо: термін "вільні коливання" означає те, що рух струни відбувається тільки під дією сил інерції, будь-яких інших зовнішніх силових впливів нема. Термін "гармонічні коливання" означає таке: рух відбувається за певним гармонічним законом у часі t, що визначений формулою (4.3).

Частотою коливань називають величину

$$f = \frac{\omega}{2\pi},$$

яка дорівнює кількості повних коливань за одиницю часу.

Підставивши (4.3) в (4.1) та (4.2), отримаємо

$$-\frac{d^2w}{dx^2} - \lambda w = 0,\ w(0) = 0\ w(a) = 0, \tag{4.4}$$

де

$$\lambda = \omega^2\rho/p.$$

Задачу (4.4) називають задачею на власні значення для диференціального оператора

$$Aw = -\frac{d^2w}{dx^2},\ D_A = \left\{w(x) : w(x) \in C^{(2)}\left[0,a\right],\ w(0) = 0\ w(a) = 0\right\}. \tag{4.5}$$

Вона полягає у відшуканні значень частотного параметра λ і відповідних їм функцій $w(x)$, відмінних від тотожного нуля, які задовольняють співвідношення (4.4). Значення λ називають власними значеннями (власними числами) диференціального оператора (4.5), а $w(x)$ – відповідними їм власними функціями.

4.1.2 Згинні коливання стрижня

Відомо, що рух пружного стрижня під дією сил інерції описує рівняння

$$EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\rho F\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\ 0 < x < a,\ 0 < t \le T. \tag{4.6}$$

Тут $z(x,t)$ – зміщення точки серединної лінії стрижня в момент часу t в напрямі, перпендикулярному до осі x; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу стрижня; $F, J = \text{const}$ – площа та момент інерції поперечного перерізу стрижня.

У кінцевих точках стрижня $x = 0,\ \ x = a$ запишемо умови, що відповідають жорсткому защемленнню обидвох його країв:

$$z(0,t) = 0,\ \frac{\partial z(0,t)}{\partial x} = 0,\ z(a,t) = 0,\ \frac{\partial z(a,t)}{\partial x} = 0. \tag{4.7}$$

Розв'язок задачі (4.6), (4.7), який відповідає вільним гармонічним коливанням, шукатимемо у вигляді

$$z(x,t) = w(x)e^{i\omega t}. \tag{4.8}$$

Підставимо (4.8) в (4.6) та (4.7) і отримаємо задачу на власні значення, яка описує вільні згинні коливання стрижня,

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \lambda w = 0,\ x \in (a,b); \tag{4.9}$$

$$w(0) = 0,\ \frac{dw(0)}{dx} = 0,\ w(a) = 0,\ \frac{dw(a)}{dx} = 0, \tag{4.10}$$

де

$$\lambda = \rho F \omega^2 / EJ.$$

Задача (4.9), (4.10) полягає у знаходженні власних чисел λ та відповідних їм власних функцій $w(x)$, відмінних від тотожного нуля.

Ця задача є задачею на власні значення для оператора

$$Aw = \frac{d^4w}{dx^4};$$

$$D_A = \left\{ w\left(x\right) :\ w\left(x\right) \in C^{(4)}\left[0,a\right];\ w\left(0\right) = 0,\ w^{''}\left(0\right) = 0\ \ w\left(a\right) = 0,\ w^{''}\left(a\right) = 0 \right\}.$$

4.1.3 Коливання мембрани

Рух тонкої мембрани, натягнутої зусиллям інтенсивності p, в полі сил інерції описують рівнянням

$$p\Delta z = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T]. \tag{4.11}$$

Тут ρ – густина матеріалу; p – сила натягу мембрани; $z(x_1,x_2,t)$ – зміщення точки x_1, x_2 двовимірної обмеженої області Ω з ліпшицевою границею Γ в момент часу t у напрямі, перпендикулярному до площини мембрани;

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}.$$

Уважатимемо, що край Γ області Ω, яку займає мембрана, закріплений, тобто виконуються граничні умови

$$z(x_1,x_2,t) = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{4.12}$$

Як і в попередньому, розв'язок рівняння (4.11), який описує вільні гармонічні коливання, шукатимемо у вигляді

$$z(x_1,x_2,t) = w(x_1,x_2)e^{i\omega t}. \tag{4.13}$$

Підставивши (4.13) в (4.11), (4.12), отримаємо задачу на власні значення, яка описує вільні гармонічні коливання мембрани

$$-\Delta w - \lambda w = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega; \tag{4.14}$$

$$w = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma, \tag{4.15}$$

де $\lambda = \rho\omega^2/p$ – частотний параметр. Як і раніше, вона полягає у відшуканні власних чисел λ та відповідних їм власних функцій w, відмінних від тотожного нуля.

Ця задача є задачею на власні значення для оператора

$$Aw = \Delta w;$$

$$D_A = \left\{ w\left(x_1, x_2\right) : \; w\left(x_1, x_2\right) \in C^{(2)}\left(\bar{\Omega}\right); \; w\left(x_1, x_2\right) = 0, x_1, x_2 \in \Gamma \right\}$$

4.1.4 Коливання пластини

Нехай серединна площина пластини займає обмежену область Ω у площині x_1, x_2. Прогин $z(x_1, x_2, t)$ точки x_1, x_2 в момент часу t пластини під дією сил інерції описує рівняння

$$D\Delta\Delta z = -\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T]. \tag{4.16}$$

Тут ρ – густина матеріалу пластини; h – товщина пластини;

$$D = Eh^3/12;$$

E – модуль Юнга;

$$\Delta\Delta z = \frac{\partial^4 z}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4}.$$

Уважатимемо, що край пластини, який проходить уздовж кривої Γ (вважатимемо її ліпшицевою кривою) з зовнішньою нормаллю ν, жорстко защемлений. Це означає, що на краю Γ виконуються граничні умови

$$z\left(x_1, x_2, t\right) = 0, \quad \frac{\partial z\left(x_1, x_2, t\right)}{\partial \nu} = 0; \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{4.17}$$

Вільні, гармонічні коливання пластини розглядатимемо у вигляді

$$z(x_1, x_2, t) = w(x_1, x_2)e^{i\omega t}. \tag{4.18}$$

Підставивши (4.18) в (4.16), (4.17), отримаємо

$$\Delta\Delta w - \lambda w = 0; \quad x_1, x_2 \in \Omega, \tag{4.19}$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0; \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{4.20}$$

Тут $\lambda = \rho h\omega^2/D$ – частотний параметр.

Задача (4.19), (4.22) є задачею на власні значення для оператора

$$Aw = \Delta\Delta w,$$

$$D_A = \left\{ w\left(x_1, x_2\right) : \ w \in C^4\left(\bar{\Omega}\right); \ w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ якщо } x_1, x_2 \in \Gamma \right\}.$$

Якщо знайти її розв'язок, тобто власні числа λ і відповідні їм відмінні від нуля власні функції w, то можна описати явище вільних гармонічних коливань пластини.

4.1.5 Стійкість стиснутого стрижня

Задача про ейлерову форму втрати стійкості стрижня, стиснутого поздовжньою силою N, описується рівнянням [Уст и колеб]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2w}{dx^2}\right) + N\frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{4.21}$$

Тут $w\left(x\right)$-прогин стрижня у точці x, EJ-жорсткість стрижня на згин. Вважатимемо, що на кінцях стрижня в точках $x = 0$, $x = a$ задано граничні умови

$$w\left(0\right) = 0, \ \frac{d^2w\left(0\right)}{dx^2} = 0; \ w\left(a\right) = 0, \ \frac{d^2w\left(a\right)}{dx^2} = 0. \tag{4.22}$$

Якщо жорсткість стрижня на згин є постійною ($EJ = \text{const}$), рівняння (4.22) можна переписати у вигляді

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \alpha^2\frac{d^2w}{dx^2} = 0, \tag{4.23}$$

де $\alpha = N/EJ$.

Задача (4.23),(4.22) є задачею на власні значення. Тотожно нульовий розв'язок відповідає стійкому положенню стрижня. Якщо розв'язок відмінний від нуля (власна функція), це означає втрату стійкості. Критичне значення поздожньої сили можна визначити, розвязавши відповідну задачу на власні значення і отримавши значення найменшого власного числа.

Задамо множину власних функцій у вигляді

$$w_k = \sin\frac{k\pi}{a}x, k = 1, 2, 3, ... \tag{4.24}$$

Очевидно, що власні функції (4.24) задовольняють граничні умови (4.22). Підставлячи їх у рівняння (4.23), отримаємо $\alpha_k = k\pi/a$.

Звідси $N = EJk\pi/a$ - найменше значення поздовжньої сили, яке призводить до втрати стійкості стрижня. Його називають критичним значенням.

4.2 Властивості спектру оператора

Розглянемо задачу на власні значення вигляду

$$Au - \lambda u = 0, \tag{4.25}$$

де A – деякий оператор, який діє в гільбертовому просторі $H = L_2$.

Означення. Значення λ, для яких існує відмінний від тотожного нуля розв'язок задачі (4.25), називають власними значеннями оператора A (власними числами), а відповідні їм нетривіальні розв'язки u – власними функціями (власними елементами) оператора A. Сукупність усіх власних чисел і власних функцій оператора називають його спектром. Задачу (4.25) називають також спектральною задачею.

Наведені нижче теореми визначають якісні характеристики власних чисел та власних функцій залежно від властивостей симетрії, додатності і додатної визначеності оператора A.

Теорема 1. *Нехай A – симетричний оператор. Тоді власні числа задачі (4.25) є дійсними числами.*

Доведення. Домножимо (4.25) на власну функцію u:

$$(Au, u) = \lambda(u, u). \tag{4.26}$$

Звідси

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)},$$

де (u, u) – дійсне число. Вважаючи λ комплексним числом, запишемо до нього спряжене

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{(Au, u)}}{(u, u)}.$$

За першою аксіомою комплексного гільбертового простору маємо $(Au, u) = \overline{(u, Au)}$. Згідно з означенням симетричного оператора $(Au, u) = (u, Au)$. Отже, $\overline{(Au, u)} = (Au, u)$, тобто комплексне число (Au, u) дорівнює своєму спряженому. Таке число є дійсним. ■

Теорема 2. *Власні числа додатного оператора невід'ємні; власні числа додатно визначеного оператора додатні.*

Доведення. З формули (4.26) випливає, що

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{4.27}$$

Звідси, якщо взяти до уваги означення додатного і додатно визначеного оператора, отримаємо доведення теореми. ■

Теорема 3. *Власні функції симетричного оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні.*

Доведення. Нехай λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ – власні числа, а u_1, u_2 – відповідні їм власні функції. Тоді виконуються співвідношення

$$Au_1 - \lambda_1 u_1 = 0;$$
$$Au_2 - \lambda_2 u_2 = 0.$$

Домножимо скалярно обидва рівняння на функції u_2, u_1, відповідно:

$$(Au_1, u_2) = \lambda_1(u_1, u_2);$$
$$(Au_2, u_1) = \lambda_2(u_2, u_1).$$

Віднімемо від першого рівняння друге і врахуємо властивість симетрії оператора A та властивість симетрії скалярного добутку в дійсному гільбертовому просторі (перша аксіома), тобто

$$(Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = (Au_2, u_1).$$

Матимемо

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Звідси, оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, випливає, що $(u_1, u_2) = 0$, тобто власні функції u_1, u_2 ортогональні. ■

Якщо власному числу λ відповідає кілька лінійно незалежних власних функцій, то, використовуючи процес ортогоналізації Шмідта [5,6], ці власні функції можна ортогоналізувати між собою. Водночас згідно з доведеною теоремою вони є ортогональні до власних функцій, що відповідають іншим власним числам. Отже, всі власні функції симетричного оператора можна вважати ортогональними.

Теорема 4. *Власні функції додатно визначеного оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні за енергією.*

Доведення. Нехай λ_i, λ_j $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ – власні числа, а u_i, u_j – відповідні їм власні функції додатно визначеного оператора. З (4.25) випливає, що

$$Au_i - \lambda_i u_i = 0.$$

Домножимо це рівняння скалярно на власну функцію u_j. Отримаємо

$$(Au_i, u_j) = \lambda_i(u_i, u_j).$$

Права частина цього співвідошення дорівнює нулю згідно з теоремою 3. Отже,

$$(Au_i, u_j) = 0, \qquad i \neq j,$$

що доводить ортогональність власних функцій за енергією. ■

4.3 Енергетичні теореми в проблемі власних чисел

Задачі на власні значення, як і крайові задачі, можна наводити у вигляді певних варіаційних задач. Розглянемо теореми, які необхідні для формулювання варіаційних задач, еквівалентних задачам на власні значення.

Теорема 5. *Нехай A — додатно визначений оператор*

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2,$$

і нехай λ_1 ($\lambda_1 \geq \gamma^2$) — точна нижня границя значень функціонала

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{4.28}$$

Якщо існує функція $u_1 \in D_A$ (D_A — область визначення оператора A) така, що

$$\frac{(Au_1, u_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1, \tag{4.29}$$

то λ_1 є найменше власне число оператора A, а u_1 — відповідна йому власна функція.

Доведення. Припустимо, що існує u_1, для якої виконується співвідношення (4.29). Візьмемо довільну функцію $\eta \in D_A$. Розглянемо

$$v = u_1 + t\eta, \ \forall t \in R. \tag{4.30}$$

Очевидно, що $v \in D_A$. Розглянемо на множині функцій (4.30) функціонал (4.28)

$$\frac{(Av, v)}{(v, v)} = \frac{(A(u_1 + t\eta), u_1 + t\eta)}{(u_1 + t\eta, u_1 + t\eta)} = \varphi(t). \tag{4.31}$$

Функція дійсної змінної $\varphi(t)$ досягає мінімального значення при $t = 0$. Тоді виконується співвідношення $\varphi'(0) = 0$. Обчисливши похідну від правої частини формули (4.31), отримаємо

$$\varphi'(0) = 2\frac{(u_1, u_1)(Au_1, \eta) - (Au_1, u_1)(u_1, \eta)}{(u_1, u_1)^2} = 0. \tag{4.32}$$

Врахуємо в чисельнику цього виразу, що згідно з (4.29)

$$(Au_1, u_1) = \lambda_1 (u_1, u_1).$$

Остаточно запишемо

$$(Au_1 - \lambda_1 u_1, \eta) = 0. \tag{4.33}$$

Звідси, оскільки η — функція зі щільної множини D_A, випливає

$$Au_1 - \lambda_1 u_1 = 0,$$

тобто λ_1 – власне число, а u_1, – відповідна йому власна функція. З того, що λ_1 – точна нижня границя відношення (4.28), випливає, що λ_1 – найменше власне число. ■

Згідно з доведеною теоремою задачу про знаходження найменшого власного числа додатно визначеного оператора можна звести до задачі про мінімум функціонала

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)},\ u \in D_A. \tag{4.34}$$

Зауваження. Наведемо ще одне формулювання цієї задачі. Виконавши в (4.34) заміну $\psi = u/\|u\|$, отримаємо $\|\psi\| = 1$ і

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)} = (A\psi,\psi).$$

Отже, варіаційну задачу про відшукання мінімального власного числа можна сформулювати як задачу про мінімум функціонала

$$(Au,u)\,,\ u \in D_A, \tag{4.35}$$

за додаткової умови

$$\|u\| = 1. \tag{4.36}$$

Розглянемо тепер варіаційну задачу про знаходження інших, окрім першого, власних чисел.

Теорема 6. *Нехай $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$ – n перших власних чисел додатно визначеного оператора, $u_1, u_2, ..., u_n$ – відповідні їм ортонормовані власні функції. Нехай існує функція u_{n+1}, яка не дорівнює тотожному нулю і надає мінімального значення функціоналу*

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)}, \tag{4.37}$$

за додаткових умов

$$(u,u_i) = 0,\ i = 1,2,...,n. \tag{4.38}$$

Тоді u_{n+1} – власна функція, яка відповідає власному числу

$$\lambda_{n+1} = \frac{(Au_{n+1},u_{n+1})}{(u_{n+1},u_{n+1})}, \tag{4.39}$$

найменшому, яке йде після λ_n.

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\zeta \in D_A$. Приймемо

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^{n} (\zeta,u_k)\,u_k. \tag{4.40}$$

Можна переконатися, що функція η задовольняє умови (4.38). Разом з функцією η умови (4.38) задовольняє і функція

$$u_{n+1} + t\eta,\ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.41}$$

Підставимо (4.41) у функціонал (4.37). Отримаємо функцію змінної t

$$\varphi(t) = (A\,(u_{n+1} + t\eta), u_{n+1} + t\eta)\,/\,(u_{n+1} + t\eta, u_{n+1} + t\eta),$$

яка досягає мінімального значення при $t = 0$. Отже, вона задовольняє умову

$$\varphi'\,(t) = 0,\ t = 0. \tag{4.42}$$

Звідси за аналогією з доведенням теореми про варіаційну задачу для знаходження найменшого власного числа отримаємо

$$(Au_{n+1} - \lambda_{n+1}u_{n+1}, \eta) = 0. \tag{4.43}$$

Підставивши (4.40) в (4.43), після нескладних перетворень знайдемо

$$(Au_{n+1} - \lambda_{n+1}u_{n+1}, \zeta) = 0.$$

Оскільки ζ – довільна функція із щільної множини D_A, то

$$Au_{n+1} - \lambda_{n+1}u_{n+1} = 0.$$

Отже, λ_{n+1} – власне число, а u_{n+1} – відповідна йому власна функція. Доведемо, що λ_{n+1} – найменше власне число, яке йде після λ_n. Нехай λ^* – власне число оператора A, більше від λ_n, u^* – відповідна йому власна функція. Згідно з 4.2

$$\lambda^* = \frac{(Au^*, u^*)}{(u^*, u^*)} \geq \lambda_{n+1}, \tag{4.44}$$

оскільки λ_{n+1} є мінімумом функціонала (4.37) за додаткових умов (4.38). ■

Доведена теорема свідчить, що задачу про відшукання λ_{n+1} можна звести до задачі про мінімум функціонала такого ж, як і для найменшого власного числа, але за додаткових умов (4.38).

У наведених теоремах зроблено припущення про існування власних функцій та власних чисел задачі. Сформулюємо тепер теорему, яка дає умови існування власних функцій та власних чисел.

Теорема 7. *Нехай A – додатно визначений оператор, який діє в гільбертовому просторі H, і нехай довільна множина функцій, обмежена за енергетичною нормою, компактна в H. Тоді справджуються такі твердження: а) оператор A має нескінченну кількість власних чисел*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n ..., \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty;$$

б) відповідні власні функції утворюють систему, повну як у просторі H, так і в енергетичному просторі H_A.

Доведення. Тут доведемо існування найменшого власного числа та відповідної йому власної функції. З повним доведенням теореми можна ознайомитись у [8]. Нехай A – додатно визначений оператор. Тоді виконується нерівність

$$\|u\|_A^2 \geq \gamma^2\,\|u\|^2,\ u \in H_A. \tag{4.45}$$

Приймемо

$$\varphi(u) = \|u\|_A^2 / \|u\|^2, \ u \in H_A, \tag{4.46}$$

і позначимо через λ_1 точну нижню границю функціонала $\varphi(u)$. Очевидно, що $\lambda_1 \geq \gamma^2$. Доведемо, що існує функція u_1, яка задовольняє рівність

$$\varphi(u_1) = \lambda_1.$$

За означенням точної нижньої границі, яке б не було число $n \in Z$, можна знайти функцію v_n, таку, що виконуються нерівності

$$\lambda_1 \leq \varphi(v_n) \leq \lambda_1 + 1/n. \tag{4.47}$$

Подвійна нерівність (4.47) означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \lambda_1. \tag{4.48}$$

Зазначимо, що функціонал (4.46) не зміниться в разі домноження функції u на сталу. Домноживши v_n на $\|v_n\|^{-1}$, можна вважати, що $\|v_n\| = 1$. Тоді $\varphi(v_n) = \|v_n\|_A^2$, і з (4.48) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_A^2 = \lambda_1. \tag{4.49}$$

Нехай $\forall \eta \in H_A$, $\forall t \in R$. Очевидно, $v_n + t\eta \in H_A$ і

$$\frac{\|v_n + t\eta\|_A^2}{\|v_n + t\eta\|^2} \geq \lambda_1. \tag{4.50}$$

З (4.50) одержимо

$$t^2\left(\|\eta\|_A^2 - \lambda_1 \|\eta\|^2\right) + 2t\left((v_n, \eta)_A - \lambda_1 (v_n, \eta)\right) + \left(\|v_n\|_A^2 - \lambda_1\right) \geq 0. \tag{4.51}$$

Якщо квадратний тричлен задовольняє нерівність (4.51), то його дискримінант не додатний. Звідси випливає ланцюжок нерівностей

$$|(v_n, \eta)_A - \lambda_1 (v_n, \eta)| \leq \sqrt{\|\eta\|_A^2 - \lambda_1 \|\eta\|^2}\sqrt{\|v_n\|_A^2 - \lambda_1} \leq$$

$$\leq \|\eta\|_A \sqrt{\|v_n\|_A^2 - \lambda_1}. \tag{4.52}$$

Нехай довільна функція η є такою, що $\|\eta\|_A < C = \text{const}$. З (4.49) та (4.52) випливає, що

$$(v_n, \eta)_A - \lambda_1(v_n, \eta) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{4.53}$$

Оскільки $\|v_n\|_A^2 \to \lambda_1$, то $\|v_n\|_A < C_1$, де C_1 – деяка стала. Якщо прийняти, що $\eta = v_n - v_m$, то за нерівністю трикутника отримаємо

$$\|\eta\|_A \leq \|v_n\|_A + \|v_m\|_A \leq 2C_1.$$

Тоді згідно зі співвідношенням (4.53)

$$(v_n, v_n - v_m)_A - \lambda_1(v_n, v_n - v_m) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

З попередньої формули виведемо іншу шляхом заміни місцями m та n та додамо до попередньої:

$$\|v_n - v_m\|_A - \lambda_1 \|v_n - v_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \ . \tag{4.54}$$

Нерівність $\|v_n\|_A < C_1$ означає, що послідовність v_n обмежена за енергетичною нормою. За умовою теореми ця послідовність компактна в просторі H. Виділимо з неї підпослідовність, збіжну в H. Позначимо цю підпослідовність v_n. Нехай вона збігається до u_1, тобто

$$\|v_n - u_1\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тоді

$$\|v_n - v_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \ .$$

З (4.54) випливає, що тоді

$$\|v_n - v_m\|_A \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Це означає, що послідовність v_n є збіжною і в просторі H_A, причому граничним елементом цієї послідовності в H_A є цей же елемент u_1. Очевидним є факт, що

$$\|u_1\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 1,$$

а також

$$\|u_1\|_A = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_A = \lambda_1.$$

Доведемо тепер, що

$$Au_1 - \lambda_1 u_1 = 0.$$

Перейдемо в (4.53)до границі при $n \to \infty$:

$$(u_1, \eta)_A - \lambda_1 (u_1, \eta) = 0. \ \forall \eta \in H_A. \tag{4.55}$$

Розглянемо задачу

$$Au = \lambda_1 u_1. \tag{4.56}$$

Ця задача еквівалентна (згідно з теоремою про функціонал енергії) задачі про мінімум функціонала

$$(u, u)_A - 2(u, \lambda_1 u), \ u \in H_A.$$

Перепишемо цей функціонал з урахуванням співвідношення (4.55). Отримаємо

$$(u, u)_A - 2(u, u_1)_A.$$

Додамо до цього співідношення і віднімемо від нього вираз $(u_1, u_1)_A$

$$(u, u)_A - 2(u, u_1)_A = \|u - u_1\|_A - \|u_1\|_A \ .$$

Звідси ясно, що мінімум цього функціонала досягається при u_1. Отже, розв'язком задачі (4.56) (можливо, узагальненим) є функція u_1, тобто

$$Au_1 = \lambda_1 u_1.$$

Цим ми довели, що $\lambda_1,\ u_1$ є власне число та власна функція оператора A. З теореми 5 випливає, що λ_1 – найменше власне число. ■

Зауваження. Як видно з доведеної теореми, тут ідеться про існування власних функцій в узагальненому сенсі, тобто таких, що належать простору H_A.

4.4 Дискретний спектр оператора Штурма–Ліувілля

Розглянемо задачу на власні значення для оператора Штурма–Ліувілля, яку описують диференціальними рівняннями

$$-\frac{d}{dx}p\left(x\right)\frac{du}{dx}+q\left(x\right)u-\lambda u=0,\ a<x<b \tag{4.57}$$

та граничними умовами

$$u\left(a\right)=0,\qquad gu'\left(b\right)+du\left(b\right)=0. \tag{4.58}$$

Уважатимемо, що коефіцієнти $p\left(x\right)$ та $q\left(x\right)$ задовольняють на $[a,b]$ умови

$$p\left(x\right)\geq 0,\ q\left(x\right)\geq 0, p(b)\neq 0,\ \int\limits_a^b\frac{dx}{p\left(x\right)}=D<\infty, \tag{4.59}$$

а сталі g, d є такими, що

$$g\geq 0,\ d\geq 0\ g+d\neq 0.$$

Доведемо, що за таких умов оператор задачі на власні значення (4.57), (4.58) є додатно визначений. Для конкретності приймемо $d>0$. У цьому разі вважатимемо, що і $g>0$. Якщо $g=0$, то матимемо граничну умову $u\left(b\right)=0$, яка є значно простішою для дослідження.

Розглянемо скалярний добуток $\left(Au,u\right)$, що відповідає задачі (4.57), (4.58):

$$\left(Au,u\right)=\int\limits_a^b\left[p\left(x\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q\left(x\right)u^2\right]dx+\frac{d}{g}p\left(b\right)u^2\left(b\right).$$

Оцінивши його знизу, отримаємо

$$\left(Au,u\right)\geq B\left[\int\limits_a^b p\left(x\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+u^2\left(b\right)\right], \tag{4.60}$$

де

$$B=\min\left\{1,\frac{d}{g}p\left(b\right)\right\}.$$

Уважатимемо: функція $u(x)$ є такою, що виконується

$$u(x) = -\int_x^b \frac{du(t)}{dt} dt + u(b). \tag{4.61}$$

Урахувавши елементарну нерівність

$$(\eta + \zeta)^2 \leq 2\left(\eta^2 + \zeta^2\right),$$

з (4.61) матимемо

$$u^2(x) \leq 2u^2(b) + 2\left(\int_x^b \frac{du(t)}{dt} dt\right)^2. \tag{4.62}$$

Врахуємо далі таке співвідношення:

$$\left(\int_x^b \frac{du(t)}{dt} dt\right)^2 = \left(\int_x^b \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \sqrt{p(t)} \frac{du(t)}{dt} dt\right)^2.$$

Звідси за нерівністю Коші−Буняковського

$$\left(\int_x^b \frac{du(t)}{dt} dt\right)^2 \leq \int_x^b \frac{dt}{p(t)} \int_x^b p(t) \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 dt.$$

Замінюючи межу інтегрування x на a, підсилимо попередню нерівність. Тоді отримаємо

$$\left(\int_x^b \frac{du(t)}{dt} dt\right)^2 \leq \int_a^b \frac{dt}{p(t)} \int_a^b p(t) \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 dt.$$

Отже, з урахуванням співвідношення (4.62)

$$\int_a^b u^2 dx \leq C\left[\int_a^b p(t)\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 dt + u^2(b)\right], \tag{4.63}$$

де

$$C = \max\{2D(b-a), 2(b-a)\}.$$

Звідси, якщо врахувати нерівність (4.60), випливає, що оператор − додатно визначений,

$$\gamma^2 = \frac{B}{C}.$$

Енергетична норма, що відповідає цьому операторові, має вигляд

$$\|u\|_A^2 = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2\right] dx + \frac{d}{g} p(b) u^2(b).$$

Якщо $g = 0$, то останній доданок треба відкинути. З цієї формули, очевидно, випливає така оцінка:

$$\|u\|_A^2 \geq \int\limits_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx. \tag{4.64}$$

Нехай деяка функція $u(x)$ задовольняє умову $u(a) = 0$ і є такою, що виконується

$$u(x) = \int\limits_a^x u'(t)\, dt. \tag{4.65}$$

Прийнявши

$$v(x) = \sqrt{p(x)} u'(x), \; K(x,t) = \begin{cases} 1/\sqrt{p(t)}, \; a \leq t \leq x; \\ 0, \; x < t \leq b, \end{cases} \tag{4.66}$$

можемо переписати рівність (4.65) у вигляді

$$u(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\, v(t)\, dt. \tag{4.67}$$

Доведемо, що інтеграл

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,t)\, dxdt$$

є скінченним. Справді, з формули (4.66) видно, що для всіх можливих значень x, t з проміжку $[a, b]$ ядро $K(x,t)$ задовольняє нерівність

$$0 \leq K(x,t) \leq \frac{1}{\sqrt{p(t)}}.$$

Тому

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,t)\, dxdt \leq \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{dxdt}{p(t)} = (b-a)\, A < \infty.$$

Нехай задано множину функцій, обмежену за енергетичною нормою:

$$\|u\|_A \leq C = \text{const}. \tag{4.68}$$

Тоді, згідно з нерівністю (4.64)

$$\int\limits_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \leq C^2. \tag{4.69}$$

Використаємо в подальшому відомий результат з функціонального аналізу [8], який полягає у тому, що оператор Фредгольма (4.67), ядро якого є інтегровне з квадратом за двома змінними, цілком неперервний.

Отже, він перетворює обмежену згідно з (4.69) множину в компактну. Оскільки (4.69) є наслідком нерівності (4.68), то звідси випливає, що довільна обмежена за енергією оператора Штурма–Ліувілля множина є компактною. Тобто оператор Штурма–Ліувілля задовольняє умови теореми 7. Згідно з цією теоремою оператор Штурма–Ліувілля має дискретний спектр.

4.5 Мінімаксимальний принцип Куранта

Для варіаційного формулювання задачі про визначення власного числа λ_{n+1} $(n > 1)$ та відповідної йому власної функції u_{n+1} потрібно знати всі попередні власні функції $u_1, u_2, ..., u_n$ (теорема 7, див. 4.3). Інколи потрібно мати варіаційне формулювання задачі про визначення власного числа λ_{n+1} $(n > 1)$ та відповідної йому власної функції u_{n+1} за умови, коли невідомі всі попередні власні функції. Тоді можна використати мінімаксимальний принцип Куранта, який наведемо у вигляді такої теореми.

Теорема 8. *Нехай A – додатно визначений оператор з дискретним спектром, що діє в просторі H. Нехай $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n ...$ – власні числа оператора A і $u_1, u_2, ..., u_n ...$ – відповідні їм власні функції. Виберемо у просторі H_A довільні функції $v_1, v_2, ..., v_n$. Позначимо через $\lambda(v_1, v_2, ..., v_n)$ мінімальне значення величини $\|u\|_A^2$ за додаткових умов*

$$\|u\|^2 = 1; \tag{4.70}$$

$$(u, v_1) = (u, v_2) = ... = (u, v_n) = 0. \tag{4.71}$$

тоді $n + 1$–ше власне число λ_{n+1} оператора A дорівнює максимуму $\lambda(v_1, v_2, ..., v_n)$ за довільних змін функцій $v_1, ..., v_n$.

Доведення. За означенням дискретного спектра (див. 4.3) система власних функцій u_n повна й ортонормована у просторі H та ортогональна у просторі H_A. З огляду на це довільну функцію $u \in H$ можна розвинути у ряд Фур'є за цими функціями. Розвинемо функцію v_j, $j = 1, 2, ..., n$ у ряд Фур'є за власними функціями u_k:

$$v_j = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} u_k. \tag{4.72}$$

Виберемо деяку функцію u^* у вигляді суми

$$u^* = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k u_k \tag{4.73}$$

з невідомими коеффіцієнтами α_k. Для неї умови (4.70), (4.71) матимуть вигляд

$$\|u^*\|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 = 1; \tag{4.74}$$

$$(u^*, v_j) = \sum_{k=1}^{n+1} b_{jk}\alpha_k = 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{4.75}$$

Співвідношення (4.74), (4.75) можна розглядати як систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів α_k. Зазначимо, що для функції u^* виконується формула

$$\|u^*\|_A^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \alpha_k^2. \tag{4.76}$$

Замінимо в (4.76) λ_k найбільшим значенням λ_{n+1}:

$$\|u^*\|_A^2 \leq \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 = \lambda_{n+1}. \tag{4.77}$$

Отже,

$$\|u^*\|_A^2 \leq \lambda_{n+1}. \tag{4.78}$$

Однак тоді й нижня межа λ не перевершує λ_{n+1}. Цим доведено, що

$$\lambda(v_1, v_2, ..., v_n) \leqslant \lambda_{n+1}. \tag{4.79}$$

Знак рівності у формулі (4.79) досягається, якщо як функції v_j вибрати власні функції u_j, $\quad j = 1, 2, ..., n$. Тоді умови (4.71) збігаються з умовами теореми 7, які визначають власне число λ_{n+1}. ■

Наслідок. Як наслідок з доведеної теореми випливає такий спосіб визначення $n+1$ власного числа:

$$\lambda_{n+1} = \max_{v_j \in H_A} \min_{u \in H_A} \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1, \ (u, v_j) = 0. \tag{4.80}$$

4.6 Теорема про порівняння власних чисел

Нехай A і B – додатно визначені оператори, що діють у просторі H. Уважатимемо, що $A \geqslant B$, якщо:

1° $H_A \subset H_B$;

2° $\|u\|_A \geqslant \|u\|_B, \quad \forall u \in H_A$.

Теорема 9. *Нехай A і B – додатно визначені оператори з дискретними спектрами і такі, що $A \geqslant B$, тоді для довільного $k \in \mathbf{N}$*

$$\lambda_k \geqslant \mu_k, \tag{4.81}$$

де λ_k – k-не власне число оператора A і μ_k – k-не власне число оператора B.

Згідно з мінімаксимальним принципом

$$\lambda_k = \max_{v_j \in H_A} \min_{u \in H_A} \|u\|_A, \quad \forall v_j \in H_A, \quad \|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \tag{4.82}$$

$$j = 1, 2, ..., k-1;$$

$$\mu_k = \max_{v_{j \in H_B}} \min_{u \in H_B} \|u\|_A, \quad \forall v_j \in H_B, \quad \|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \tag{4.83}$$

$$j = 1, 2, ..., k-1.$$

Оскільки $A \geqslant B$, то нерівність

$$\min_{u \in H_A} \|u\|_A \geqslant \min_{u \in H_B} \|u\|_B \tag{4.84}$$

виконується і за додаткових умов

$$\|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \quad j = 1, 2, ..., k-1.$$

Таке ж міркування справджується і стосовно максимальних значень величин

$$\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k-1}) \geqslant \mu(v_1, v_2, ..., v_{k-1}) \tag{4.85}$$

Це й означає, що

Розглянемо приклад, який ілюструє можливе застосування доведеної теореми.

Приклад . Коливання струни, як відомо, (див. 4.1.1) описує задача

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} - \lambda z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(a) = 0. \tag{4.86}$$

Власні функції цієї задачі (4.86) мають вигляд

$$z_k = \sin \frac{k\pi x}{a}. \tag{4.87}$$

Підставивши (4.87) в (4.86), отримаємо значення власних чисел

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2. \tag{4.88}$$

Розглянемо струни різних довжин a_1 та a. Нехай $a_1 \geqslant a$. Тоді згідно з (4.88) власні числа μ_k струни довжини a_1 та власні числа λ_k струни довжини a задовольняють нерівність

$$\mu_k \leqslant \lambda_k. \tag{4.89}$$

Таку ж нерівність можна отримати шляхом застосування теореми про порівняння власних чисел. Розглянемо дві задачі на власні значення

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} - \lambda z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(a) = 0; \tag{4.90}$$

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} - \mu z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(a_1) = 0. \tag{4.91}$$

Оператори цих задач позначимо, відповідно, A та A_1. Оскільки $a_1 \geqslant a$, то поширимо функції, що становлять область визначення оператора A, на проміжок $[0, a_1]$, прийнявши, що вони дорівнюють нулю на $[a, a_1]$. Тоді виконується включення

$$H_A \subset H_{A_1}. \tag{4.92}$$

Енергетичні скалярні добутки, що відповідають a та a_1 запишемо у вигляді

$$\|u\|_A^2 = \int\limits_0^a z'^2 dx, \quad \|u\|_{A_1}^2 = \int\limits_0^{a_1} z'^2 dx. \tag{4.93}$$

Оскільки функції з області визначення оператора A поширені на $[0, a_1]$ нульовими значеннями, то виконується рівність

$$\|z\|_A = \|z\|_{A_1}, \quad \forall z \in H_A. \tag{4.94}$$

З (4.93) та (4.94) на основі теореми 10 випливає, що

$$\mu_k \leqslant \lambda_k.$$

Отже, отримана ця ж сама, що й у (4.89) оцінка для власних чисел, але без обчислення самих власних чисел.

4.7 Метод Рітца в задачах на власні значення

Нехай A – додатно визначений та цілком неперервний оператор. Тоді задача на власні значення

$$Au - \lambda u = 0 \tag{4.95}$$

має нескінченну кількість власних чисел

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

і відповідних їм власних функцій

$$u_1,\ u_2,\ u_3, ...u_n, ...$$

Як відомо (див. 4.2), задача визначення найменшого власного числа та відповідної йому власної функції у варіаційному формулюванні еквівалентна задачі мінімізації функціонала

$$\lambda_1 = \min \frac{(Au, u)}{(u, u)},\ u \in H_A, \tag{4.96}$$

або

$$\lambda_1 = \min (Au, u),\ (u, u) = 1,\ u \in H_A. \tag{4.97}$$

Зазначимо, що скалярний добуток (Au, u) для додатно визначеного оператора можна розуміти у сенсі енергетичного скалярного добутку $(u, u)_A$. Цим зумовлене включення $u \in H_A$.

До розв'язування задач (4.96) або (4.97) застосуємо метод Рітца, який полягає у такому. Виберемо послідовність базисних (координатних) функцій $\{\varphi_n\}$, які задовольняють умови

1° $\varphi_k \in H_A$;

2° для довільного n функції φ_k лінійно незалежні;

3° послідовність базисних функцій $\{\varphi_k\}$ повна за енергією.

Приймемо наближення власної функції u_1^n у вигляді

$$u_1^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{4.98}$$

де a_k – сталі коефіцієнти. Виберемо a_k, враховуючи варіаційне формулювання задачі на власні значення (4.97), тобто

$$(Au_1^n, u_1^n) = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (A\varphi_k, \varphi_m) \to \min, \tag{4.99}$$

за додаткової умови

$$(u_1^n, u_1^n) = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1. \tag{4.100}$$

Для розв'язування задачі (4.99), (4.100) використаємо метод множників Лагража. Розглянемо функцію

$$\Phi\,(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = (Au_1^n, u_1^n) - \lambda((u_1^n, u_1^n) - 1). \tag{4.101}$$

Необхідні умови її мінімуму можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0,\ m = 1, 2, ..., n. \tag{4.102}$$

Перепишемо умови (4.102) з урахуванням співвідношення (4.101). Отримаємо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих a_k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right] = 0,\ m = 1, 2, ..., n, \tag{4.103}$$

які не можуть всі одночасно дорівнювати нулю, оскільки наближене значення власної функції не може тотожно дорівнювати нулю. Це можливе тоді і тільки тоді, коли визначник системи рівнянь (4.103) дорівнює нулю, тобто

$$\det\left\{(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right\} = 0,\ k, m = 1, 2, ..., n. \tag{4.104}$$

Отже, задача зводиться до матричної задачі на власні значення.

Якщо система базисних функцій φ_k ортонормована у просторі H, то рівняння (4.104) дещо спрощується. Воно матиме вигляд

$$\det\left\{\begin{array}{ccc} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_1, \varphi_2) & ... \\ (A\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & ... \\ ... & ... & ... \end{array}\right\} = 0. \tag{4.105}$$

Теорема 10. *Рівняння (4.104) (4.105) є алгебричними рівняннями n-го степеня щодо невідомої λ.*

Доведення. Справді, коефіцієнтом при $(-1)^n \lambda^n$ в обидвох цих рівняннях є визначник Грамма

$$\det\{(\varphi_k, \varphi_m)\},\ k, m = 1, 2, ..., n \tag{4.106}$$

системи лінійно незалежних функцій. ■

Отже, рівняння (4.104), (4.105) мають по n коренів.

Теорема 11. *Всі корені рівнянь (4.104), (4.105) дійсні.*

Доведення. Нехай λ_j – довільний корінь рівняння (4.104) і $a_k^{(j)}(k = 1, 2, ..., n)$ – відповідний йому розв'язок, визначений з точністю до сталого множника. Виберемо цей множник так, щоб виконувалась умова нормування (4.100)

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(j)} a_m^{(j)} (\varphi_k, \varphi_m) = 1. \tag{4.107}$$

Підставимо в систему рівнянь (4.103) λ_j та $a_k^{(j)}$, домножимо кожне рівняння на $a_m^{(j)}$ і підсумуємо за індексом m. Отримаємо

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(j)} a_m^{(j)} (A\varphi_k, \varphi_m) = \lambda_j \sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(j)} a_m^{(j)} (\varphi_k, \varphi_m).$$

Множник при λ_j у правій частині попередньої формули згідно з (4.107) дорівнює одиниці. Тому

$$\lambda_j = (Au^n, u^n). \tag{4.108}$$

Звідси випливає, якщо врахувати симетрію оператора A, що всі корені рівняння (4.104) є дійсними. ■

Нехай функція u^n надає мінімального значення функціоналу (4.108). Тоді $\lambda_1^{(n)}$ можна розглядати як наближене значення найменшого власного числа. Виконується теорема

Теорема 12. *Нехай A – додатно визначений оператор з дискретним спектром і нехай базисні функції, які використовують у методі Рітца, задовольняють умови 1°–3 °, тоді послідовність наближених значень $\lambda_1^{(n)}$ найменшого власного числа λ_1, отриманих методом Рітца, є збіжною*

$$\lambda_1^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \lambda_1,$$

причому

$$\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_1.$$

Доведення. Нехай функція $u_n^{(1)}$ надає мінімального значення функціоналу (4.97). Візьмемо деяке $N > n$. Знайдемо з умови мімімуму функціонала (4.97) $u_N^{(1)}$ та обчислимо $\lambda_1^{(N)}$. Очевидно, що

$$\lambda_1^{(N)} \leq \lambda_1^{(n)}.$$

Звідси випливає, що послідовність значень $\lambda_1^{(n)}$ є монотонно незростаючою, обмеженою знизу точною нижньою границею функціонала (див. 4.3)

$$\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_1.$$

Така послідовність, як відомо, збіжна. Доведемо, що її границею є найменше власне число λ_1. За означенням точної нижньої границі для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $u^* \in H_A$ така, що $(u^*, u_*) = 1$ і

$$\lambda_1 \leq (Au^*, u^*) < \lambda_1 + \varepsilon.$$

Оскільки послідовність базисних функцій φ_n повна за енергією, то можна знайти таке n_* і відповідне йому

$$u^{n_*} = \sum_{k=1}^{n_*} b_k \varphi_k, \ b_k = \text{const},$$

для якого виконується умова

$$\|u^* - u^{n_*}\|_A < \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.109}$$

Звідси, врахувавши очевидне співвідношення

$$u_{n^*} = u^{n_*} - u^* + u^*$$

та нерівність трикутника, отримаємо

$$\|u^{n_*}\|_A \leq \|u^{n_*} - u^*\|_A + \|u^*\|_A < \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\lambda_1 + \varepsilon}.$$

Піднесемо ліву і праву частини отриманої нерівності до квадрата:

$$(Au^{n_*}, u^{n_*}) < \left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\lambda_1 + \varepsilon}\right)^2.$$

З цього, що оператор A обмежений знизу, випливає

$$\|u^{n_*} - u^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u^{n_*} - u^*\|_A .$$

З урахуванням нерівності (4.109) запишемо

$$\|u^{n_*} - u^*\| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_1}}.$$

Звідси, узявши до уваги очевидний запис

$$u_{n_*} = u_* - (u_* - u_{n_*})$$

та нерівність трикутника, отримаємо

$$\|u^{n_*}\| \geq \|u^*\| - \|u^* - u^{n_*}\| > 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda_1}}.$$

Перейдемо тепер до оцінки відношення

$$\frac{(Au^{n_*}, u^{n_*})}{(u^{n_*}, u^{n_*})}.$$

З огляду на отримання нерівності матимемо

$$\lambda_1^{(n_*)} \leq \frac{(Au^{n_*}, u^{n_*})}{(u^{n_*}, u^{n_*})} < \frac{\left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\lambda_1 + \varepsilon}\right)^2}{\left(1 - \sqrt{\varepsilon/\lambda_1}\right)^2} = \lambda_1 + \eta, \tag{4.110}$$

де η прямує до нуля разом з ε. Оскільки λ_1 є мінімумом виразу

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)},$$

то

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(n_*)} \leq \frac{(Au_{n_*}, u_{n_*})}{(u_{n_*}, u_{n_*})} < \lambda_1 + \eta.$$

Якщо $n \geq n_*$, то $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_1^{(n_*)}$ і, отже

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_1^{(n_*)} < \lambda_1 + \eta. \tag{4.111}$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1,$$

тобто послідовність $\lambda_1^{(n)}$ наближених значень власних чисел є збіжною до найменшого власного числа λ_1.

Аналогічно можна довести [8], що такий граничний перехід виконується і для інших власних чисел. ■

4.8 Слабке формулювання задачі на власні значення і метод Гальоркіна

Нагадаємо спочатку (див. параграф 1.8), що слабким розв'язком задачі

$$Au = f \tag{4.112}$$

називають функцію $u \in V$, де V – вибраний простір, яка задовольняє співвідношення

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \tag{4.113}$$

Тут $a(u, v)$ – білінійна форма, визначена диференціальним оператором

$$a(u, v) = (Au, v);$$

(f, v) – скалярний добуток у $H = L_2(\Omega)$.

Розглянемо задачу на власні значення

$$Au - \lambda u = 0. \tag{4.114}$$

Запишемо для неї за аналогією з (4.113) слабке формулювання

$$a(u, v) - \lambda(u, v) = 0, \quad \forall v \in V. \tag{4.115}$$

Задачу знаходження числа λ і функції $u(x)$ такої, що $u \in V$ задовольняє рівняння (4.115) і не дорівнює тотожно нулю, називають слабким формулюванням задачі на власні значення.

Для побудови наближеного розв'язку задачі (4.115) застосуємо метод Гальоркіна, який полягає у такому. Виберемо послідовність базисних функцій $\{\varphi_n\}$, які задовольняють умови

1° $\varphi_n \in V$;

2° для довільного n функції φ_n лінійно незалежні;

3° послідовність базисних функцій $\{\varphi_n\}$ повна у просторі V.

Приймемо

$$u^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{4.116}$$

де a_k – невідомі коефіцієнти. Для знаходження a_k підставимо (4.116) у варіаційне рівняння (4.115). У цьому разі замість функцій v підставлятимемо базисні функції φ_j, $j = 1, 2, ..., n$. Отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a(\varphi_k, \varphi_j) - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k (\varphi_k, \varphi_j) = 0. \tag{4.117}$$

Для того, щоб система однорідних рівнянь (4.117) мала розв'язок, відмінний від тотожного нуля, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$\det \{a(\varphi_k, \varphi_j) - \lambda (\varphi_k, \varphi_j)\} = 0. \tag{4.118}$$

Рівняння (4.118) є алгебричним рівнянням для визначення наближених за Гальоркіним власних чисел.

4.9 Числовий аналіз спектральної задачі для оператора Штурма–Ліувілля

Розглянемо задачу на власні значення для оператора Штурма–Ліувілля

$$-\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} + q(x) u - \lambda u = 0, \ 0 < x < \pi; \tag{4.119}$$

$$u(0) = 0, \qquad u'(\pi) = 0. \tag{4.120}$$

На коефіцієнти рівняння $p(x)$ та $q(x)$ накладемо такі обмеження: вважатимемо їх неперервними функціями, які задовольняють нерівності

$$p(x) \geq p_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0. \tag{4.121}$$

Ці умови забезпечують (див. 4.4) існування дискретного спектра оператора задачі (4.119), (4.120).

Отже, у разі виконання умов (4.121) задача (4.119), (4.120) має нескінченну послідовність дійсних власних чисел

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_l \underset{l\to\infty}{\to} \infty$$

і відповідну їй повну послідовність власних функцій $u_l\,(x)$.

Якщо $p, q = \text{const}$, то власні числа та функції можна знайти у явному вигляді. Зокрема, легко бачити, що функції вигляду

$$u_l\,(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(l - \frac{1}{2})x, \qquad l = 1, 2, ... \tag{4.122}$$

задовольняють граничні умови (4.120). Підставивши їх у рівняння (4.119), отримаємо таку формулу для обчислення власних чисел:

$$\lambda_l = p\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 + q, \qquad l = 1, 2, ... \,. \tag{4.123}$$

Згідно з теоремою про порівняння (див. 4.6) отримані значення власних чисел можна використати для одержання двосторонніх оцінок на випадок змінних коефіцієнтів. Матимемо

$$p_{\min}(l - \frac{1}{2})^2 + q_{\min} \leq \lambda_l \leq p_{\max}(l - \frac{1}{2})^2 + q_{\max}, \tag{4.124}$$

де $p_{\min}$, $q_{\min}$, $p_{\max}$, $q_{\max}$ – найменші та найбільші на проміжку $[0, \pi]$ значення коефіцієнтів $p\,(x)$ та $q\,(x)$.

З двосторонньої оцінки випливає, що порядок зростання $\lambda_l \underset{l\to\infty}{\to} \infty$ складає два по відношенню до l, тобто

$$\lambda_l = O\left(l^2\right). \tag{4.125}$$

Для побудови наближеного розв'язку задачі (4.119), (4.120) використаємо метод Рітца, описаний у параграфі 1.7 з вибором кусково-лінійних базисних "функцій-шапочок" методу скінченних елементів (див. 1.7). Згідно з цим методом задача на власні значення (4.119), (4.120) зведеться до такої матричної задачі на власні значення:

$$K_h Q_h - \lambda_h M_h Q_h = 0. \tag{4.126}$$

Якщо коефіцієнти оператора Штурма–Ліувілля є сталими, то матриці K_h, M_h, за аналогією з 1.7 можна записати у такому вигляді:

$$K_h = pE_h + qM_h, \tag{4.127}$$

де

$$E_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & & & \\ & & & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.128}$$

$$M_h = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}; \tag{4.129}$$

$$Q_h = \begin{bmatrix} u_1^h & u_2^h & u_3^h & . & . & u_{N-1}^h & u_N^h \end{bmatrix}^T.$$

У цьому разі наближений розв'язок задачі (4.119), (4.120) можна записати у вигляді

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j^h \varphi_j^h(x). \tag{4.130}$$

З урахуванням вигляду матриць (4.128), (4.129) наведемо систему рівнянь (4.126) у розгорнутому вигляді:

$$\frac{p}{h}\left(2u_j^h - u_{j+1}^h - u_{j-1}^h\right) + \frac{qh}{6}\left(4u_j^h + u_{j+1}^h + u_{j-1}^h\right) -$$

$$-\frac{\lambda_h h}{6}\left(4u_j^h + u_{j+1}^h + u_{j-1}^h\right) = 0,\ j = 1, 2, ..., N. \tag{4.131}$$

Зазначимо, що для $j = 1, N$ у рівнянні (4.131) потрібно прийняти, відповідно, $u_0^h = 0$ та $u_{N+1}^h = u_{N-1}^h$.

Компонентами власних векторів Q_h є вузлові значення наближених значень власних функцій u_h. Нехай u_l^h – наближена власна функція, яка відповідає власному числу λ_l^h.

Шляхом безпосередньої підстановки у (4.131) можна переконатися, що її вузлові значення u_{lj}^h обчислюють за формулою

$$u_{lj}^h = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(l - \frac{1}{2}\right) jh\right),\ j = 1, 2, ..., N. \tag{4.132}$$

З формули (4.132) випливає, що

$$\begin{aligned} u_{l(j-1)}^h &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)(j-1)h\right); \\ u_{l(j+1)}^h &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)(j+1)h\right). \end{aligned} \tag{4.133}$$

Урахувавши (4.132) та (4.133), з рівняння (4.131) отримаємо

$$\lambda_l^h = \frac{pk + qm}{m}, \tag{4.134}$$

де

$$k = \frac{2\left(1 - \cos\left(l - \frac{1}{2}\right)h\right)}{h^2},\ m = \frac{2 + \cos\left(l - \frac{1}{2}\right)h}{3}. \tag{4.135}$$

Отже, (див. формулу (4.132)) значення у вузлових точках наближених власних функцій u_l^h збігаються зі значеннями власних функцій u_l (див.

формулу (4.122)). З огляду на це згідно з теоремою про апроксимацію кусково-лінійними базисними функціями матимемо оцінки

$$\begin{aligned} \left\|u_l - u_l^h\right\|_{L_2} &\leq C_1 h^2 \left\|u_l\right\|_{W_2^{(2)}}; \\ \left\|u_l - u_l^h\right\|_{W_2^{(1)}} &\leq C_2 h \left\|u_l\right\|_{W_2^{(2)}}. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Отже, можемо зробити висновок, що похибки обчислення власних функцій у відповідних нормах мають цей же порядок, що й розв'язок крайової задачі, яку описує цей же оператор.

Розглянемо проблему знаходження похибки наближеного значення власного числа λ_l^h. Для її обчислення розвинемо в степеневі ряди функції k та m, уведені в формулі (4.134)

$$\begin{aligned} k &= \left(l - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{12}\left(l - \frac{1}{2}\right)^4 + O\left(l^6 h^4\right), \\ m &= 1 - \frac{h^2}{6}\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 + O\left(l^4 h^4\right). \end{aligned}$$

Підставивши ці співвідношення у вираз (4.134), знайдемо

$$\lambda_l^h = \lambda_l + O\left(l^2 h^2\right).$$

Нагадаємо, що тут λ_l – точне значення власного числа, яке обчислюють за формулою

$$\lambda_l = p\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 + q. \tag{4.137}$$

З (4.137) отримаємо оцінку

$$\left|\lambda_l - \lambda_l^h\right| = O\left(l^2 h^2\right). \tag{4.138}$$

Зазначимо, що збіжність наближених значень власних чисел має другий порядок по відношенню до h.

4.10 Похибки власних чисел і власних функцій

Розглянемо проблему апріорного оцінювання похибок наближених значень власних чисел і власних функцій задачі

$$Au - \lambda u = 0,\ u \in D_A \subset H,$$

які отримані шляхом застосування методу скінченних елементів.

Стосовно оператора A вважатимемо, що виконуються умови теореми 7, які забезпечують існування для нього дискретного спектра.

З оператором A асоціюватимемо білінійну форму

$$a\left(u, v\right) = \left(Au, v\right),\ u, v \in V,$$

де V – заданий гільбертів простір $V \subset W_2^{(m)}$. Уважатимемо, що білінійна форма є симетричною

$$a(u,v) = a(v,u),$$

додатно визначеною

$$a(u,u) \geq \gamma^2 \|u\|_V^2$$

та неперервною

$$a(u,v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V.$$

Тут γ, M – const, $\gamma > 0$, $M > 0$.

Позначимо через S_h скінченновимірний підпростір простору V, утворений на деякому вибраному скінченноелементному базисі φ_i^h, через $\Pi_h u$ – оператор ортогонального проектування відносно білінійної форми $a(u,v)$ функції $u \in V$ на підпростір S_h, тобто

$$a(u - \Pi_h u, v_h) = 0, \ \forall v_h \in S_h. \tag{4.139}$$

Використаємо тут також відомий результат (див. 2.2) про апріорну похибку апроксимації поліноміальними базисними функціями φ_i^h k-го степеня

$$\|u - \Pi_h u\|_{W_2^{(s)}} \leq C_s h^{k+1-s} \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \ s = 0, 1, ..., m, \tag{4.140}$$

де h – діаметр поділу області на скінченні елементи.

Доведемо три леми, необхідні для оцінки похибки наближених значень власних чисел.

Лема 13. *Нехай E_l – простір, утворений на системі власних функцій u_1, $u_2, ..., u_l$, і*

$$\sigma_l^h = \max_{u \in E_l} |2(u, u - \Pi_h u) - (u - \Pi_h u, u - \Pi_h u)|. \tag{4.141}$$

Розглянемо функції $\Pi_h u_1$, $\Pi_h u_2, ..., \Pi_h u_l$. Позначимо через S_l простір, побудований на цих функціях. Нехай $\sigma_l^h < 1$, тоді простір S_l l-вимірний.

Доведення. Достатньо довести, що рівність $\Pi_h u^* = 0$ $(\forall u^* \in E_l)$ виконується тоді і тільки тоді, якщо $u^* \equiv 0$. Доведемо від супротивного. Припустимо, що $\Pi_h u^* = 0$ виконується для u^*, відмінного від тотожного нуля. Нормалізуємо функцію u^*, тобто вважатимемо, що $(u^*, u^*) = 1$. Розглянемо

$$\sigma_l^h \geq |2(u^*, u^* - \Pi_h u^*) - (u^* - \Pi_h u^*, u^* - \Pi_h u^*)|. \tag{4.142}$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$|2(u^*, u^* - \Pi_h u^*) - (u^* - \Pi_h u^*, u^* - \Pi_h u^*)| = (u^*, u^*).$$

Урахувавши (4.142) та умову нормування функції u^*, матимемо нерівність

$$\sigma_l^h \geq 1,$$

яка суперечить умові леми $\sigma_l^h < 1$. ■

Лема 14. *Нехай e_l — множина нормованих функцій з E_l і нехай σ_l^h, (4.142), визначена на цій множині, є такою, що $\sigma_l^h < 1$. Тоді наближені значення власних чисел λ_l^h обмежені зверху, тобто*

$$\lambda_l^h \leq \frac{\lambda_l}{1-\sigma_l^h}. \tag{4.143}$$

Використавши мінімаксимальний принцип, запишемо

$$\lambda_l^h \leq \max_{u\in e_l} \frac{a\left(\Pi_h u, \Pi_h u\right)}{\left(\Pi_h u, \Pi_h u\right)}. \tag{4.144}$$

Оцінимо зверху чисельник у правій частині попередньої формули. Запишемо

$$a\left(u,u\right) = a\left(\Pi_h u, \Pi_h u\right) + 2a\left(u-\Pi_h u, \Pi_h u\right) + a\left(u-\Pi_h u, u-\Pi_h u\right). \tag{4.145}$$

Оскільки $\Pi_h u$ — проекція відносно білінійної форми, то згідно з (4.139)

$$a\left(u-\Pi_h u, \Pi_h u\right) = 0.$$

Останній доданок у формулі (4.145) невід'ємний. Тому, відкидаючи його, отримаємо нерівність

$$a\left(\Pi_h u, \Pi_h u\right) \leq a\left(u,u\right). \tag{4.146}$$

Знаменник у правій частині нерівності (4.145) обмежений знизу. Справді

$$\begin{aligned}\left(\Pi_h u, \Pi_h u\right) = \left(u,u\right) - 2(u, u-\Pi_h u) + (u-\Pi_h u, u-\Pi_h u) \geq \\ \geq 1-\sigma_l^h.\end{aligned} \tag{4.147}$$

Урахувавши нерівності (4.146), (4.147), отримаємо

Лема 15. *Нехай*

$$u = \sum_{i=1}^{l} c_i u_i,$$

де u_i — власні функції, c_i — сталі, і нехай $u \in e_l$. Тоді

$$(u, u-\Pi u) = \sum_{i=1}^{l} c_i \lambda_i^{-1} a\left(u_i - \Pi u_i, u-\Pi u\right). \tag{4.148}$$

Доведення. Оскільки u_i — власна функція, то згідно з (4.26) маємо

$$(u_i, u-\Pi_h u) = \lambda_i^{-1} a\left(u_i, u-\Pi_h u\right). \tag{4.149}$$

Крім того, якщо в означенні проектора (4.139) прийняти $v_h = \Pi_h u_i$, то

$$a\left(\Pi_h u_i, u-\Pi_h u\right) = 0.$$

Віднявши цей вираз, домножений на λ_i^{-1}, від правої частини формули (4.149), запишемо

$$(u_i, u-\Pi_h u) = \lambda_i^{-1} a\left(u_i - \Pi_h u_i, u-\Pi_h u\right).$$

Домноживши останню рівність на c_i і підсумувавши за індексом i, отримаємо (4.148). ■

Оцінку похибок наближених значень власних чисел дає така теорема.

Теорема 16. *Нехай S_h – скінченно-вимірний підпростір методу скінченних елементів степеня k. Тоді існує така стала δ, що для достатньо малих значень діаметра поділу області на скінченні елементи виконується двостороння нерівність*

$$\lambda_l \leq \lambda_l^h \leq \lambda_l + 2C'''\lambda_l h^{2(k+1-m)}. \tag{4.150}$$

Доведення. . Для отримання правої частини нерівності (4.150) використаємо нерівність (4.143). З цією метою оцінимо величину σ_l^h. Оскільки

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{W_2^{(m)}} \|v\|_{W_2^{(m)}},$$

то для першого доданка в σ_l^h (4.141) матимемо

$$2|(u, u - \Pi_h u)| = 2\left|\sum_{i=1}^{l} c_i \lambda_i^{-1} a(u_i - \Pi_h u_i, u - \Pi_h u)\right| \leq$$

$$\leq 2M \left\|\sum_{i=1}^{l} c_i \lambda_i^{-1} (u_i - \Pi_h u_i)\right\|_{W_2^{(m)}} \|u - \Pi_h u\|_{W_2^{(m)}}.$$

Позначимо

$$v = \sum_{i=1}^{l} c_i \lambda_i^{-1} u_i.$$

Використавши оцінки похибки апроксимації (4.140), запишемо

$$2|(u, u - \Pi_h u)| \leq C' h^{2(k+1-s)} \|v\|_{W_2^{(k+1)}} \|u\|_{W_2^{(k+1)}},$$

де C' – стала. Вважаючи норми

$$\|v\|_{W_2^{(k+1)}}, \|u\|_{W_2^{(k+1)}}$$

обмеженими, отримаємо

$$2|(u, u - \Pi_h u)| \leq C'' h^{2(k+1-s)}, \ C'' = \text{const}.$$

Для другого доданка в σ_l^h згідно з (4.140) матимемо

$$(u - \Pi_h u, u - \Pi_h u) \leq C_0^2 h^{2(k+1)} \|u\|^2_{W_2^{(k+1)}}.$$

Ця оцінка є вищого порядку, ніж оцінка для першого доданка. За нерівністю трикутника на підставі отриманих нерівностей для першого та другого доданків можемо записати

$$\sigma_l^h \leq C''' h^{2(k+1-m)}.$$

Уважатимемо h тут достатньо малим, щоб виконувалась умова $2\sigma_l^h < 1$. Тоді, врахувавши очевидну нерівність

$$\frac{1}{1 - \sigma_l^h} \leq 1 + 2\sigma_l^h,$$

яка виконується за цієї умови, отримаємо оцінку зверху для наближеного значення власного числа

$$\lambda_l^h \leq \lambda_l + 2C'''\lambda_l h^{2(k+1-m)}. \tag{4.151}$$

Згадаємо, що наближення за Рітцом є наближеннями зверху для власних чисел. Звідси остаточно отримаємо двосторонню нерівність (4.150). ■

Отже, з (4.150) випливає, що послідовності наближених значень власних чисел збігаються, і похибка наближеного значення власного числа становить $O(\lambda_l h^{2(k+1-m)})$.

Перейдемо до оцінювання похибок наближених власних функцій. Використаємо для цього таку лему.

Лема 17. *Нехай власні функції u_l та їхні наближені значення u_l^h, отримані методом скінченних елементів, є нормованими у нормі простору H, тобто виконуються співвідношення*

$$(u_l, u_l) = 1,\ \left(u_l^h, u_l^h\right) = 1. \tag{4.152}$$

Тоді виконуєтья співвідношення

$$a\left(u_l - u_l^h, u_l - u_l^h\right) = \lambda_l \left\|u_l - u_l^h\right\|_H^2 + \lambda_l^h - \lambda_l, \tag{4.153}$$

де λ_l — власне число, що відповідає власній функції u_l; λ_l^h — його наближене значення.

Доведення. Використовуючи властивість лінійності білінійної форми $a\,(u, v)$ за кожним аргументом, запишемо

$$a\left(u_l - u_l^h, u_l - u_l^h\right) = a\,(u_l, u_l) - 2a\left(u_l, u_l^h\right) + a\left(u_l^h, u_l^h\right).$$

Урахувавши тут (4.115) та умови нормування (4.152), отримаємо

$$a\left(u_l - u_l^h, u_l - u_l^h\right) = \lambda_l\left[2 - 2\left(u_l, u_l^h\right)\right] + \lambda_l^h - \lambda_l.$$

Перетворимо величину у квадратних дужках до вигляду

$$2 - 2\left(u_l, u_l^h\right) = (u_l, u_l) - 2\left(u_l, u_l^h\right) + \left(u_l^h, u_l^h\right) = \left\|u_l - u_l^h\right\|_H^2.$$

Урахувавши його, отримаємо потрібне співвідношення (4.153). ■

Доведена лема дає змогу оцінити енергетичну похибку наближеної власної функції, якщо відомі похибка наближеної власної функції в нормі вихідного простору $\left\|u_l - u_l^h\right\|_H$ та похибка наближеного значення власного числа $\lambda_l^h - \lambda_l$. Остання похибка відома за теоремою 16. Для отримання похибки наближеної власної функції у нормі вихідного простору доведемо лему.

Лема 18. *Для довільних значень j та l виконується тотожність*

$$\left(\lambda_j^h - \lambda_l\right)\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right) = \lambda_l\left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right). \tag{4.154}$$

Доведення. Оскільки член $-\lambda_l\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right)$ є в обох частинах тотожності (4.154), то його можна опустити. Отже, достатньо довести, що

$$\lambda_j^h\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right) = \lambda_l\left(u_l, u_j^h\right). \tag{4.155}$$

З огляду на те, що u_l та u_j^h – власні функції, маємо

$$Au_j^h = \lambda_j^h u_j^h,\ Au_l = \lambda_l u_l.$$

Тому можемо записати

$$\lambda_j^h\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right) = \left(\Pi_h u_l, Au_j^h\right) = a\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right)$$

та

$$\lambda_l\left(u_l, u_j^h\right) = \left(Au_l, u_j^h\right) = a\left(u_l, u_j^h\right).$$

Отже, співвідношення (4.155) можна переписати у вигляді

$$a\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right) = a\left(u_l, u_j^h\right).$$

Урахувавши лінійність білінійної форми за кожним аргументом, запишемо його так:

$$a\left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right) = 0.$$

Останнє збігається із визначенням проектора (4.139). Звідси випливає (4.154). ■

Перепишемо (4.154) за аналогією з викладом, наведеним у доведенні попередньої леми, у такому вигляді:

$$\left(A\Pi_h u_l - \lambda_l \Pi_h u_l, u_j^h\right) = 0.$$

Ліва частина цього виразу є похибкою рівняння на власні значення, домноженою на u_j^h. Зазначимо, що множина $u_1^h, u_2^h, ..., u_n^h$ утворює в S_h ортогональний базис. Тому виконується

$$\Pi_h u_l = \sum_{j=1}^{n}\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right) u_j^h. \tag{4.156}$$

Із (4.154) видно, що скалярний добуток $\left(\Pi_h u_l, u_j^h\right)$ є малим, якщо λ_l^h не близьке до λ_l.

Нехай λ_l – власне число, відмінне від інших власних чисел (λ_l – некратне власне число). Тоді згідно з оцінками (4.150) існує така стала ρ, що для малих h виконується нерівність

$$\frac{\lambda_l}{\left|\lambda_j^h - \lambda_l\right|} \le \rho \text{ для } \forall j \in \{1, 2, ..., n\},\ j = l. \tag{4.157}$$

Позначимо через β величину

$$\beta = \left(\Pi_h u_l, u_l^h\right).$$

Матимемо

$$\left\|\Pi_h u_l - \beta u_l^h\right\|_H^2 = \sum_{j\neq l} \left(\Pi_h u_l, u_j^h\right)^2.$$

Згідно з (4.154) перепишемо праву частину попереднього співвідношення у вигляді

$$\sum_{j\neq l} \left(\Pi_h u_l, u_j^h\right)^2 = \sum_{j\neq l} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_j^h - \lambda_l}\right)^2 \left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right)^2.$$

Використаємо далі оцінку (4.157)

$$\sum_{j\neq l} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_j^h - \lambda_l}\right)^2 \left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right)^2 \leq \rho^2 \sum_{j\neq l} \left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right)^2.$$

Звідси отримаємо

$$\rho^2 \sum_{j\neq l} \left(u_l - \Pi_h u_l, u_j^h\right)^2 \leq \rho^2 \left\|u_l - \Pi_h u_l\right\|_H^2.$$

З наведеного ланцюжка рівностей та нерівностей, урахувавши нерівність трикутника, одержимо таку оцінку:

$$\left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H \leq \left\|u_l - \Pi_h u_l\right\|_H + \left\|\Pi_h u_l - \beta u_l^h\right\|_H \leq$$

$$\leq (1+\rho) \left\|u_l - \Pi_h u_l\right\|_H. \tag{4.158}$$

Основним результатом отриманого співвідношення (4.158) є те, що похибку наближеного значення власної функції можна виразити через похибку апроксимації на вибраній системі базисних функцій. Похибку апроксимації обчислюють за нерівністю (4.140). Урахувавши її, запишемо

$$\left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H \leq C_0 (1+\rho) h^{2(k+1)} \left\|u\right\|_{W_2^{(k+1)}}. \tag{4.159}$$

Використаємо отриману формулу (4.159) для апріорного оцінювання похибки наближених значень власних функцій.

Теорема 19. *Нехай власні функції u_l та їхні наближені значення u_l^h, отримані методом скінченних елементів, є нормованими у нормі простору H. Тоді виконуються оцінки*

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_H \leq c_0 h^{2(k+1)} \left\|u\right\|_{W_2^{(k+1)}}; \tag{4.160}$$

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_A \leq c_1 h^{2(k+1-m)}. \tag{4.161}$$

Доведення. Нерівність (4.160) випливає з (4.159). Доведемо тільки, що виконується співвідношення

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_H \leq 2 \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H. \tag{4.162}$$

Запишемо очевидну рівність

$$\|u_l\|_H = \left\|(u_l - \beta u_l^h) + \beta u_l^h\right\|_H.$$

Застосуємо до її правої частини нерівність трикутника

$$\|u_l\|_H \le \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H + \left\|\beta u_l^h\right\|_H.$$

Звідси отримаємо

$$\|u_l\|_H - \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H \le \left\|\beta u_l^h\right\|_H. \tag{4.163}$$

Праву частину цієї нерівності перетворимо подібним способом

$$\left\|\beta u_l^h\right\|_H = \left\|u_l - (u_l - \beta u_l^h)\right\|_H.$$

До правої частини отриманого співвідношення знову застосуємо нерівність трикутника

$$\left\|\beta u_l^h\right\|_H \le \left\|u_l^h\right\|_H + \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H. \tag{4.164}$$

Згадаємо, що згідно з умовою теореми $\left\|u_l^h\right\|_H = 1$ та $\|u_l\|_H = 1$. Оскільки в цьому разі власні функції u_l^h та u_l визначені з точністю до множника ± 1, то виберемо цей множник так, щоб коефіцієнт β задовольняв умову $\beta \ge 0$. Тоді з нерівностей (4.163), (4.164) отримаємо дві нові нерівності

$$-(\beta - 1) \le \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H;$$

$$(\beta - 1) \le \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H. \tag{4.165}$$

Вони еквівалентні такій нерівності:

$$|\beta - 1| \le \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H. \tag{4.166}$$

Для норми різниці

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_H$$

виконаємо перетворення, аналогічні до попередніх, тобто

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_H = \left\|(u_l - \beta u_l^h) + (\beta u_l^h - u_l^h)\right\|_H \le \left\|u_l - \beta u_l^h\right\|_H + \left\|(\beta - 1)u_l^h\right\|_H.$$

Оцінимо останній доданок правої частини

$$\left\|(\beta - 1)u_l^h\right\|_H \le |\beta - 1| \left\|u_l^h\right\|_H.$$

Урахувавши, що $\left\|u_l^h\right\|_H = 1$, а також (4.166), отримаємо (4.162). З (4.162) та (4.159) випливає нерівність (4.160).

Доведення теореми (нерівність (4.161)) випливає тепер з попередньої леми. Оцінимо зверху різницю $\lambda_l^h - \lambda_l$ у правій частині формули (4.153) за нерівністю (4.151)

$$\lambda_l^h - \lambda_l \le 2C'''\lambda_l h^{2(k+1-m)}.$$

Для оцінювання $\left\|u_l - u_l^h\right\|_H^2$ використаємо формулу (4.160):

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_H^2 \leq c_0 h^{2(k+1)} \left\|u\right\|_{W_2^{(k+1)}}^2.$$

Отже, для похибки в енергетичній нормі матимемо таку оцінку:

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_A^2 \leq c_0^2 h^{2(k+1)} \left\|u\right\|_{W_2^{(k+1)}}^2 + 2C'''\lambda_l h^{2(k+1-m)}, \tag{4.167}$$

де

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_A^2 = a\left(u_l - u_l^h, u_l - u_l^h\right).$$

З нерівності (4.167) отримаємо

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_A \leq c_1 h^{k+1-m}, \tag{4.168}$$

де стала c_1 не залежить від діаметра поділу області на скінченні елементи. ■

Зазначимо, що згідно з лемою Сеа подібну оцінку можна отримати і в нормі простору V. Вона матиме вигляд

$$\left\|u_l - u_l^h\right\|_V \leq \frac{M}{\gamma^2} c_1 h^{k+1-m}. \tag{4.169}$$

З отриманих апріорних оцінок випливає, що порядок збіжності наближених власних функцій до точних власних функцій у нормах енергетичного простору та простору V становить $O(h^{k+1-m})$. Цей порядок збігається з порядком збіжності наближеного розв'язку крайової задачі (яку описує оператор A), отриманого МСЕ шляхом використання цих же базисних функцій.

4.11 Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Знайти власні числа задачі

$$-\frac{d^2w}{dx^2} - \lambda w = 0,\ w(0) = 0\ w(\pi) = 0,$$

де

$$\lambda = \omega^2 \rho / p,$$

яка описує вільні, гармонічні коливання натягнутої струни. Як власні функції вибрати такі:

$$w_n = \sin nx.$$

Проаналізувати вплив змін густини та сили натягу струни на зміни колової частоти ω.

Вправа 2. Знайти власні числа задачі

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \lambda w = 0,\ x \in (0, a);$$

$$w(0) = 0,\ \frac{d^2w(0)}{dx^2} = 0,\ w(a) = 0,\ \frac{dw^2(a)}{dx^2} = 0,$$

де

$$\lambda = \rho F \omega^2 / EJ,$$

яка описує згинні вільні, гармонічні коливання стрижня. Як власні функції вибрати такі:

$$w_n = \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Проаналізувати вплив змін густини та площі поперечного перерізу стрижня на зміни колової частоти ω згинних коливань.

Вправа 3. Використовуючи теорему про порівняння власних чисел, з'ясувати яку нерівність можна поставити між коловими частотами згинних коливань ω_1, ω_2 стрижнів (див. вправу 2), які мають площі поперечних перерізів $F_1 > F_2$.

Вправа 4. Використовуючи теорему про порівняння власних чисел, з'ясувати яку нерівність можна поставити між коловими частотами коливань ω_1, ω_2 мембран (див. 4.1.3), виготовлених з однакового матеріалу, натягнених однаковою силою натягу і розміщених в областях Ω_1 та Ω_2 так, що $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Вправа 5. Використовуючи теорему про порівняння власних чисел, з'ясувати яку нерівність можна поставити між коловими частотами коливань ω_1, ω_2 пластин (див. 4.1.4), виготовлених з однакового матеріалу і розміщених в областях Ω_1 та Ω_2 так, що $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Вправа 6. Отримати вираз для параметра η у формулі (4.110).

Вправа 7. Використовуючи метод повної математичної індукції, довести правильність формули (4.106).

Вправа 8. Вивести формули (**??**), (**??**).

Вправа 9. Використовуючи результати 4.11, переконатися, що для задачі Штурма–Ліувілля можна отримати однакові оцінки похибок для власних чисел та власних функцій, що і в 4.9.

Розділ 1

Варіаційні методи

Розділ 2

Апроксимація на скінченних елементах

Розділ 3

Крайові задачі

Розділ 4

Задачі на власні значення

Розділ 5

Початково-крайові задачі

У розділі наведено схему побудови числових розв'язків початково-крайових задач для рівняння параболічного типу. Як приклад такої задачі розглянуто початково-крайову задачу теплопровідності. Описано спосіб побудови варіаційного формулювання початково-крайової задачі та напівдискретизації її розв'язку за методом Гальоркіна. Розглянуто питання стійкості та збіжності напівдискретизованого розв'язку, а також існування слабкого розв'язку варіаційної задачі. Побудовано рекурентні схеми дискретизації задачі за часовою змінною, досліджено їхню стійкість та збіжність.

5.1 Параболічна задача

Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння параболічного типу, яка полягає у знаходженні функції $u(x,t)$ такої, що задовольняє рівняння

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T] \tag{5.1}$$

та початкові умови

$$u(x,t) = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,\ t = 0. \tag{5.2}$$

Тут $u(x,t)$ – шукана функція; A – додатно визначений оператор, який діє у гільбертовому просторі H (див., наприклад, 3.12); Ω – обмежена область евклідового простору $\mathbf{R}^n$. Уважатимемо, що границя Γ області Ω є ліпшицевою. Через $x = x_1, x_2, ..., x_n$ позначимо точку області Ω, а через t – часову змінну.

Характерним прикладом рівняння параболічного типу (5.1) є рівняння теплопровідності. Для нього оператор A визначений співвідношеннями

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \tag{5.3}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T]. \tag{5.4}$$

Коефіцієнт ρ_0 рівняння теплопровідності (5.1) в операторі Au вигляду (5.3) такий:

$$\rho_0 = \rho c_v,$$

де $\rho(x)$ – густина середовища; $c_v(x)$ – теплоємність середовища за сталого об'єму. Відомо, що коефіцієнти теплопровідності середовища $\lambda_{ij}(x)$ мають властивість симетрії

$$\lambda_{ij}(x) = \lambda_{ji}(x) \tag{5.5}$$

та додатної визначеності

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \text{ для } \forall\ (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{5.6}$$

де $\lambda_0 = \text{const}$, $\lambda_0 > 0$.

Уважатимемо також, що функції $\rho(x)$, $c_v(x)$, $\lambda_{ij}(x)$ достатньо гладкі: $u_0 \in L_2(\Omega)$; $f(x,t) \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$.

Зазначимо, що гранична умова вигляду (5.4), не є єдино можливою. Як і раніше (див. розділ 3), можна розглянути також граничні умови Неймана

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i = 0$$

та Ньютона

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i + \sigma u = 0,$$

а також неоднорідні граничні умови.

5.2 Варіаційне формулювання параболічної задачі

Уведемо деякий простір V. Домножимо рівняння (5.1) та початкову умову (5.2) на довільну функцію $v(x) \in V$ і зінтегруємо в області Ω:

$$\int_\Omega \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + \int_\Omega Auv d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega, \quad \forall v \in V; \tag{5.7}$$

$$\int_\Omega \rho_0 (u(x,0) - u_0) v d\Omega = 0. \tag{5.8}$$

Уведемо позначення

$$m(u,v) = \int_\Omega \rho_0 uv d\Omega; \tag{5.9}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega Auv d\Omega; \tag{5.10}$$

$$l(v) = \int_\Omega fv d\Omega; \tag{5.11}$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Наведемо варіаційне формулювання параболічної задачі.
Знайти функцію $u(x,t) \in L_2(0,T;V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(u',v) + a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V; \tag{5.12}$$

$$m(u(x,0) - u_0, v) = 0. \tag{5.13}$$

Розв'язок варіаційної задачі (5.12) та (5.13) називатимемо слабким розв'язком початково-крайової задачі (5.1), (5.2).

Зазначимо, що умову (5.13) можна записати також іншим шляхом, зокрема

$$(u(x,0) - u_0, v) = 0,$$

де

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} uv d\Omega.$$

З подальшого буде зрозуміло, чому співвідношення (5.13) вибране саме у такому вигляді.

Для задачі нестаціонарної теплопровідності білінійна форма $a\,(u,v)$ матиме вигляд

$$a\,(u,v) = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} v d\Omega. \tag{5.14}$$

З використанням формули Гріна (розділ 1) та врахуванням граничних умов (5.4) перетворимо її до симетричного вигляду

$$a\,(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega. \tag{5.15}$$

Простір V ідентифікуємо співвідношенням

$$V = \Big\{ v\,(x) : v\,(x) \in W_2^{(1)}, \quad v\,(x) = 0, \quad x \in \Gamma \Big\}. \tag{5.16}$$

Сформулюємо властивості білінійних форм $m\,(u,v)$ та $a\,(u,v)$ у двох теоремах.

Теорема 1. *Нехай $u, v \in H$ ($H = L_2\,(\Omega)$). Білінійна форма $m\,(u,v)$ – симетрична, неперевна та $H-$еліптична.*

Доведення. Властивість симетрії є очевидною. Із запису (5.9) випливає, що виконується нерівність

$$m\,(u,u) \geq c_1^2 \left\| u \right\|_0^2,$$

де

$$\left\| u \right\|_0 = \int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega,$$

$$c_1 = \min_{\Omega} \{\rho c_v\};\ c_1 > 0.$$

Це й доводить $H-$еліптичність білінійної форми $m\,(u,v)$.

Використовуючи нерівність Шварца, неважко довести і неперервність білінійної форми

$$m\,(u,v) \leqslant C_1^2 \|u\|_0 \|v\|_0\,,$$

де

$$C_1^2 = \max_{\Omega} \{\rho c_v\};\ C_1 > 0.$$

■

Наслідок 1. Як наслідок з доведеної теореми випливає подвійна нерівність

$$c_1 \|u\|_0 \leq m(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \|u\|_0\,.$$

Теорема 2. *Нехай $u, v \in V$. Білінійна форма $a\,(u,v)$ − симетрична, неперервна та V −еліптична.*

Доведення. Наведемо доведення цієї теореми для оператора що відповідає задачі теплопровідності з граничною умовою Діріхле. Симетрія форми $a\,(u,v)$ випливає з властивості симетрії (5.5) коефіцієнтів теплопровідності λ_{ij}. Якщо ж урахувати властивість додатної визначеності (5.6), то отримаємо

$$a\,(u,u) \geq \lambda_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

Далі, використовуючи нерівність Фрідріхса (розділ 3) запишемо

$$a\,(u,u) \geq c_2^2 \|u\|^2_{W_2^{(1)}}\,.$$

Очевидно, що $c_2 > 0$. Це й доводить V −еліптичність білінійної форми $a\,(u,v)$.

Що стосується неперервності, то вона доводиться шляхом використання нерівності Шварца (див. 3.10) і означає

$$a\,(u,v) \leqslant C_2^2 \|u\|_{W_2^{(1)}} \|v\|_{W_2^{(1)}}\,.$$

■

Наслідок 2. Як наслідок з доведеної теореми випливає подвійна нерівність

$$c_2 \|u\|_{W_2^{(1)}} \leq a(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \|u\|_{W_2^{(1)}}\,.$$

5.3 Напівдискретні апроксимації Гальоркіна

Виберемо у просторі V лінійно незалежну, повну послідовність функцій $\left\{\varphi_j^h\right\}$. Нехай V_h − скінченновимірний підпростір простору V, який утворюється на базисі φ_j^h, $j = 1, ..., N$.

Для отримання наближеного розв'язку задачі

$$m(u', v) + a(u, v) = l(v); \quad \forall v \in V; \tag{5.17}$$

$$m(u(x, 0) - u_0, v) = 0 \tag{5.18}$$

використаємо напівдискретне подання [2,6,14,16]

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N} U_j(t) \varphi_j^h(x); \tag{5.19}$$

Від задачі (5.17), (5.18) перейдемо до її наближеної форми

$$m(u_h', v_h) + a(u_h, v_h) = l(v_h); \quad \forall v_h \in V_h; \tag{5.20}$$

$$m(u_h(x, 0) - u_0, v_h) = 0. \tag{5.21}$$

Підставимо формулу (5.19) замість розв'язку u_h у рівняння (5.20) та (5.21) і згідно з методом Гальоркіна виберемо за функції v базисні функції φ_i^h. Отримаємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{N} \left\{ m_{ij} U_j'(t) + a_{ij} U_j(t) \right\} = l_i(t), \ t \in (0, T], \ i = 1, ..., N; \tag{5.22}$$

$$\sum_{j=1}^{N} m_{ij} U_j(0) = p_i, \tag{5.23}$$

де

$$\begin{aligned} m_{ij} &= m\left(\varphi_i^h, \varphi_j^h\right); \ a_{ij} = a\left(\varphi_i^h, \varphi_j^h\right); \\ l_i(t) &= l\left(\varphi_i^h\right); \ p_i = m\left(u_0, \varphi_i^h\right). \end{aligned}$$

У матричних позначеннях

$$M = \{m_{ij}\}; \ A = \{a_{ij}\};$$

$$U(t) = \{U_i(t)\}; Ł(t) = \{l_i(t)\}; P = \{p_i\}$$

(M, A – квадратні матриці, U, L, P – матриці-стовпці) задачу (5.22), (5.23) можна записати у такому вигляді:

$$MU'(t) + AU(t) = L(t), \ t \in (0, T]; \tag{5.24}$$

$$MU(0) = P. \tag{5.25}$$

Зазначимо, що як наслідок попереднього матриці M та A є матрицями з відмінними від нуля визначниками (як матриці Грама лінійно незалежної системи функцій відносно скалярних добутків $m(\cdot, \cdot)$ та $a(\cdot, \cdot)$); вони є симетричними та додатно визначеними.

Теорема 3 *Розв'язок задачі Коші (5.24), (5.25) існує та єдиний [2,14,16].*

Доведення. Доведення випливає[2,14,16] із властивостей матриць M та A. ■

5.4 Енергетичне рівняння

Вивчимо властивості напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $u_h(x,t) \in L_2(0,T;V_h)$. Для цього підставимо у варіаційну задачу

$$m(u_h', v_h) + a(u_h, v_h) = l(v_h); \quad \forall v_h \in V_h; \quad t \in (0,T];$$
$$m(u_h(x,0) - u_0, v_h) = 0$$

замість довільної функції v наближений розв'язок $u_h(x,t)$. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}m(u_h,u_h) + a(u_h,u_h) = l(u_h); \quad t \in (0,T]; \tag{5.26}$$

$$m(u_h,u_h) = m(u_0,u_h); \quad t = 0. \tag{5.27}$$

З урахуванням позначення

$$u_h(t) = u_h(x,t)$$

та

$$\begin{aligned} \|u_h\|_M^2 &= m(u_h,u_h); \\ \|u_h\|_A^2 &= a(u_h,u_h) \end{aligned}$$

перепишемо ці формули у вигляді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|_M^2 + \|u_h\|_A^2 = l(u_h); \quad t \in (0,T]; \tag{5.28}$$

$$\|u_h(0)\|_M^2 = m(u_0, u_h(0)). \tag{5.29}$$

Зінтегруємо рівняння (5.28) на проміжку [0,t], $0 < t \le T$, матимемо

$$\frac{1}{2}\|u_h(t)\|_M^2 + \int_0^t \|u_h(\tau)\|_A^2\,d\tau = \frac{1}{2}\|u_h(0)\|_M^2 + \int_0^t l(u_h(\tau))\,d\tau. \tag{5.30}$$

Отримане рівняння для задачі теплопровідності називають енергетичним рівнянням температурного поля. Кожний його доданок має таку фізичну інтерпретацію:

$$\frac{1}{2}\|u_h(t)\|_M^2$$

– енергія температурного поля в момент часу t;

$$\int_0^t \|u_h(\tau)\|_A^2\,d\tau$$

– дисипація енергії температурного поля, зумовлена дифузійним розсіянням;

$$\int_0^t l(u_h(\tau))\,d\tau$$

– енергія внутрішніх джерел теплоти;

$$\frac{1}{2}\|u_h(0)\|_M^2$$

– енергія початкового розподілу температурного поля.

5.5 Стійкість напівдискретних апроксимацій

Для дослідження стійкості напівдискретних апроксимацій Гальоркіна отримаємо оцінки зверху для двох норм напівдискретного розв'язку u_h. Сформулюємо також відповідні теореми про єдиність.

5.5.1 Перша оцінка норми напівдискретного розв'язку

Для отримання оцінки використаємо енергетичне рівняння у формі (5.30)

$$\frac{1}{2}\left\|u_h(t)\right\|_M^2 + \int\limits_0^t \left\|u_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau = \frac{1}{2}\left\|u_h(0)\right\|_M^2 + \int\limits_0^t l\left(u_h(\tau)\right) d\tau.$$

Оцінимо зверху другий доданок у правій частині цього співвідношення. Для цього запишемо очевидний ланцюжок нерівностей

$$l\left(u_h\right) \leq \mid l\left(u_h\right) \mid = \mid \left(f, u_h\right) \mid \leqslant \| f \|_0 \| u_h \|_0 . \tag{5.31}$$

Використаємо далі нерівності з наслідку 1

$$c_1 \left\|u\right\|_0 \leq m(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \left\|u\right\|_0 \tag{5.32}$$

а також нерівність, яка характеризує додатну визначеність оператора A

$$\| u \|_A \geqslant \gamma \| u \|_0, \gamma > 0. \tag{5.33}$$

Враховуючи ліву частину нерівності (5.32) та нерівність (5.33), продовжимо запис ланцюжка нерівностей (5.31). Отримаємо

$$l\left(u_h\right) \leq \alpha^{-1} \| f \|_M \| u_h \|_A, \tag{5.34}$$

де $\alpha = c_1\gamma$. Використаємо далі елементарну нерівність

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \ \forall a, b, \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0, \tag{5.35}$$

У ній покладемо

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, a = \| u_h \|_A, b = \alpha^{-1} \| f \|_M .$$

Із співвідношень (5.33) та (5.35) виведемо

$$l\left(u_h\right) \leq \frac{1}{2} \| u_h \|_A^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \| f \|_M^2 .$$

Інтегруючи цю нерівність, запишемо

$$\int\limits_0^t l\left(u_h\right) d\tau \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left\{ \| u_h \|_A^2 \, d\tau + \frac{1}{2\alpha^2} \| f \|_M^2 \right\} d\tau.$$

Підставимо це у праву частину енергетичного рівняння (5.30) і проведемо нескладні алгебричні перетворення. Матимемо

$$\| u_h(t) \|_M^2 + \int_0^t \| u_h(\tau) \|_A^2 \, d\tau \leq \| u_h(0) \|_M^2 + \alpha^{-2} \int_0^t \| f(\tau) \|_M^2 \, d\tau.$$

Використаємо знову нерівність з наслідку 1 (5.32) а також нерівність з наслідку 2

$$c_2 \|u\|_{W_2^{(1)}} \leq a(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \|u\|_{W_2^{(1)}}$$

для підсилення попередньої нерівності. Отримаємо

$$c_1 \| u_h(t) \|_0^2 + c_2 \int_0^t \| u_h(\tau) \|_V^2 \, d\tau \leq \| u_h(0) \|_M^2 + \alpha^{-2} \int_0^t \| f(\tau) \|_M^2 \, d\tau.$$

Якщо позначити

$$\beta = \min\{c_1, c_2\},$$

то остаточно можемо записати першу оцінку для напівдискретного розв'язку

$$\| u_h(t) \|_0^2 + \int_0^t \| u_h(\tau) \|_V^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \left\{ \| u_h(0) \|_M^2 + \alpha^{-2} \int_0^t \| f(\tau) \|_M^2 \, d\tau \right\}.$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 4. *Нехай задане значення параметра дискретизації h (вибраний базис φ_j^h). Тоді напівдискретизована варіаційна задача (5.17), (5.18), яка приводить до задачі Коші (5.22), (5.23), має (якщо він існує) єдиний розв'язок у просторі $L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;V)$.*

5.5.2 Друга оцінка норми напівдискретного розв'язку

Розглянемо ще одну оцінку норми напівдискретного розв'язку. З цією метою перепишемо рівняння (5.28) у вигляді

$$\|u_h(t)\|_M \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_M + \|u_h(t)\|_A^2 = l(u_h(t)).$$

Використаємо тут означення додатної визначенності та ліву частину нерівності з наслідку 1, отримаємо нерівність

$$\|u\|_A \geq \alpha \|u\|_M \ \forall u \in V, \ \alpha = c_1\gamma, \ \alpha = \text{const} > 0. \tag{5.36}$$

Отримаємо

$$\|u_h(t)\|_M \frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_M + \alpha^2 \|u_h(t)\|_M^2 \le l(u_h(t)).$$

Оцінимо праву частину цієї нерівності за нерівністю Шварца

$$|l(u_h(t))| \le \|f\|_0 \|u_h(t)\|_0.$$

Знайдемо

$$\|u_h(t)\|_M \frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_M + \alpha^2 \|u_h(t)\|_M^2 \le \|f\|_0 \|u_h(t)\|_0.$$

Використаємо ліву частину нерівності із наслідка 1, тобто

$$c_1 \|u(t)\|_0 \le \|u(t)\|_M,$$

отримаємо

$$c_1^2 \|u_h(t)\|_0 \frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_0 + c_1^2\alpha^2 \|u_h(t)\|_0^2 \le \|f\|_0 \|u_h(t)\|_0.$$

Поділимо обидві частини цієї нерівності на $c_1^2 \|u_h(t)\|_0$:

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_0 + \alpha^2 \|u_h(t)\|_0 \le \frac{1}{c_1^2}\|f\|_0. \tag{5.37}$$

Зазначимо, що

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha^2 t} g(t)\right\} = e^{\alpha^2 t}\left\{\frac{d}{dt} g(t) + \alpha^2 g(t)\right\}.$$

Тоді вираз зліва у формулі (5.37) можемо подати у вигляді

$$e^{-\alpha^2 t}\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha^2 t}\|u_h(t)\|_0\right\}. \tag{5.38}$$

З формули (5.37), врахувавши (5.38), отримаємо

$$e^{-\alpha^2 t}\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha^2 t}\|u_h(t)\|_0\right\} \le \frac{1}{c_1^2}\|f(t)\|_0,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{\alpha^2 t}\|u_h(t)\|_0\right\} \le e^{\alpha^2 t}\frac{1}{c_1^2}\|f(t)\|_0.$$

Зінтегруємо цю нерівність на проміжку $[0,t]$:

$$e^{\alpha^2 t}\|u_h(t)\|_0 - \|u_h(0)\|_0 \le \frac{1}{c_1^2}\int_0^t e^{\alpha^2\tau}\|f(\tau)\|_0\, d\tau.$$

Остаточно перепишемо попередню нерівність у вигляді

$$\|u_h(t)\|_0 \le e^{-\alpha^2 t}\|u_h(0)\|_0 + \frac{1}{c_1^2}\int_0^t e^{-\gamma^2(t-\tau)}\|f(\tau)\|_H\, d\tau. \tag{5.39}$$

Отримана оцінка теж визначає стійкість напівдискретного розв'язку, але в нормі простору $L_\infty(0,T;H)$. З цієї нерівності випливає висновок про те, що в разі відсутності внутрішніх джерел тепла ($f \equiv 0$) температурне поле прямує до нульового значення за експоненціальним законом $e^{-\gamma^2 t}$ при $t \to \infty$.

5.6 Існування розв'язку варіаційної задачі

Напівдискретизацію за Гальоркіним можна використовувати також для теоретичного дослідження початково-крайових задач. Зокрема, застосувавши напівдискретне подання, доведемо у цьому параграфі теорему про існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі (5.12), (5.13), що еквівалентна початково-крайовій задачі теплопровідності.

Теорема 5. *Нехай задані функції* $u_0 \in H$ *та* $f \in L_2(0,T;H)$. *Тоді варіаційна задача теплопровідності (5.12), (5.13) має єдиний розв'язок* $u \in L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;V)$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо властивість повноти базисних функцій φ_j^h (див 5.3), згідно з якою послідовність напівдискретних розв'язків є збіжною за нормою простору V, тобто

$$u_h \underset{V}{\to} u,$$

де u – границя послідовності, яка належить простору V. Використаємо тут властивість додатної визначенності оператора A та наслідки 1,2, матимемо

$$u_h \underset{M}{\to} u, u_h \underset{A}{\to} u,$$

де ця ж гранична функція u належить одночасно просторам H_A та H (див. 1.6). Треба тільки довести, що ця гранична функція задовольняє рівняння варіаційної задачі

$$m(u_h', v) + a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h; \tag{5.40}$$

$$m(u_h(x,0) - u_0, v) = 0. \tag{5.41}$$

Уважатимемо для цього, що функція v залежить від часової змінної t, є неперервною до похідних першого порядку за цією змінною і задовольняє умову

$$v(x,T) = 0.$$

Отже,

$$v \in W_h = \left\{ v \in C^{(1)}(0,T;V_h); v(x,T) = 0 \right\}.$$

Зінтегруємо рівняння (5.40) за часом на проміжку $[0,T]$, використовуючи у першому доданку спосіб інтегрування частинами. Отримаємо

$$\int_0^T \{-m(u_h, v') + a(u_h, v) - l(v)\}\, dt = m(u_0, v).$$

Перейдемо в одержаному рівнянні до границі при $h \to 0$ і застосуємо до першого доданка знову спосіб інтегрування частинами. Матимемо

$$\int_0^T \{m(u', v) + a(u, v) - l(v)\}\, dt = m(u(x,0) - u_0, v). \tag{5.42}$$

Далі зазначимо, що з огляду на повноту системи базисних функцій φ_j^h множина W_h утворює щільну множину у просторі $L_2(0,T;V)$. З урахуванням цієї обставини, а також умови (5.41), з рівняння (5.42) одержимо

$$m(u',v)+a(u,v)=l(v).$$

Це означає, що границя u є розв'язком варіаційної задачі (5.40), (5.41), і виконується енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_M^2+\int\limits_0^t\|u(\tau)\|_A^2\,d\tau=\frac{1}{2}\|u(0)\|_M^2+\int\limits_0^t l(u(\tau))\,d\tau.$$

Отже, виконується нерівність

$$\|u(t)\|_M^2+\int\limits_0^t\|u(\tau)\|_A^2\,d\tau\le\|u(0)\|_M^2+$$

$$+\gamma^{-2}\int\limits_0^t l(u(\tau))\,d\tau,\ t\in[0,T]. \tag{5.43}$$

Доведемо далі, що задача (5.12), (5.13) має єдиний розв'язок. Припустимо протилежне: нехай u_1 та u_2 – два різні розв'язки цієї задачі. Внаслідок лінійності функція $u=u_1-u_2$ також є розв'язком задачі (5.12), (5.13) для випадку $f\equiv 0$, $u_0\equiv 0$. Оцінка (5.43) тоді дає змогу зробити висновок $u\equiv 0$, а це суперечить припущенню, що розв'язки є різними. ■

5.7 Збіжність напівдискретних апроксимацій

Оцінимо поведінку похибки напівдискретних апроксимацій Гальоркіна

$$e_h=u_h(t)-u(t) \tag{5.44}$$

при прямуванні величини $h\to 0$ або, що рівнозначно, величини $N\to\infty$.

Зазначимо, що внаслідок лінійності задач для визначення $u_h(t)$ та $u(t)$ похибка e_h є розв'язком варіаційної задачі

$$m(e_h',v)+a(e_h,v)=0;\quad \forall v\in V_h,\ e_h\in L_2(0,T;V_h); \tag{5.45}$$

$$m(e_h(0),v)=0. \tag{5.46}$$

Запишемо похибку апроксимації у вигляді

$$e_h(t)=\varepsilon_h(t)-E_h(t), \tag{5.47}$$

де

$$\varepsilon_h(t)=u_h(t)-\Pi_h u(t);$$

$$E_h(t)=u(t)-\Pi_h u(t).$$

Тут $\Pi_h : V \to V_h$ – оператор ортогонального проектування простору V на V_h відносно скалярного добутку $a(\cdot,\cdot)$. З огляду на це виконується співвідношення (див. 1.6)

$$a(u - \Pi_h u, v) = 0, \ \forall v \in V_h. \tag{5.48}$$

Відомо, що

$$\|u - \Pi_h u\|_A = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_A. \tag{5.49}$$

На підставі формули (5.47) та нерівності трикутника можемо записати

$$\|e_h\|_M \le \|\varepsilon_h\|_M + \|E_h\|_M; \tag{5.50}$$

$$\|e_h\|_A \le \|\varepsilon_h\|_A + \|E_h\|_A. \tag{5.51}$$

Отже, норму похибки e_h можна оцінити, якщо будуть отримані оцінки для норм величин ε_h та E_h.

Для оцінки норми похибки E_h використаємо апроксимаційні властивості базисних функцій φ_j^h. Зокрема, для кусково-аналітичних базисних функцій методу скінченних елементів можна використати такий результат (див. 2.2).

Нехай апроксимована функція

$$u \in V \cap W_2^{(k+1)}(\Omega); \qquad k \ge 0,$$

тоді існує $N \in \mathbf{R}$ та сталі $\alpha_j \in \mathbf{R}$ такі, що виконуються нерівності

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j^h(x) \right\|_{W_2^{(m)}} \le D_m h^{k+1-m} \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \ m = 0, ..., k, \tag{5.52}$$

де $D_m = \text{const}$, які не залежать від h. З останнього співвідношення для задачі, яка містить оператор A за просторовими змінними другого порядку (зокрема задачі теплопровідності) (5.49) та наслідків 1,2, випливає нерівність

$$\|u - \Pi_h u\|_A \le \widetilde{D}_1 h^k \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \widetilde{D}_1 = \text{const}.$$

Звідси

$$\|E_h\|_A \le \widetilde{D}_1 h^k \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \tag{5.53}$$

Аналогічно приходимо ще й до такої нерівності:

$$\|E_h\|_M \le \widetilde{D}_0 h^{k+1} \|u\|_{W_2^{(k+1)}}, \widetilde{D}_0 = \text{const}. \tag{5.54}$$

Залишається оцінити величину $\|\varepsilon_h\|_A$. Для цього використаємо варіаційну задачу (5.45), (5.46) та подання (5.47). Підставивши (5.47) у рівняння (5.45), (5.46), отримаємо

$$m(\varepsilon_h'(t), v) + a(\varepsilon_h(t), v) = m(E_h'(t), v), \qquad \forall v \in V_h; \tag{5.55}$$

$$m(\varepsilon_h(0), v) = m(E_h(0), v). \tag{5.56}$$

Зазначимо, що у формулі (5.55) опущений доданок $a\left(E_h\left(t\right),v\right)$, оскільки згідно з (5.48) він дорівнює нулю.

Приймемо у рівняннях (5.55), (5.56) $v=\varepsilon_h\left(t\right)$ і знайдемо вигляд енергетичного рівняння для складової $\varepsilon_h\left(t\right)$ похибки:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2+\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2=m\left(E_h'\left(t\right),\varepsilon_h\left(t\right)\right).$$

Використавши оцінки (**??**) та (5.39), отримані в попередньому параграфі, знайдемо

$$\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|\varepsilon_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau\leq\left\|E_h\left(0\right)\right\|_M^2+\alpha^{-2}\int\limits_0^t\left\|E_h'\left(\tau\right)\right\|_M^2d\tau. \tag{5.57}$$

Тут враховано, що

$$\left\|\varepsilon_h\left(0\right)\right\|_M^2=\left\|e_h\left(0\right)\right\|_M^2+\left\|E_h\left(0\right)\right\|_M^2,$$

а також прийнятий запис початкової Зазначимо, що власне тут використаний цей запис початкової умови, про який ішлося у 5.2.

Перейдемо тепер до оцінки величини

$$\left\|e_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|e_h\left(t\right)\right\|_A^2d\tau.$$

Підставимо у цю формулу співвідношення

$$e_h\left(t\right)=\varepsilon_h\left(t\right)-E_h\left(t\right).$$

Отримаємо

$$\left\|e_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|e_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau=\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|\varepsilon_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau+$$

$$+\left\|E_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|E_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau-$$

$$-2\left(\varepsilon_h\left(t\right),E_h\left(t\right)\right)_M-2\int\limits_0^t\left(\varepsilon_h\left(\tau\right),E_h\left(\tau\right)\right)_Ad\tau. \tag{5.58}$$

Зазначимо, що згідно з (5.48) останній інтеграл у попередній формулі дорівнює нулю. Оцінимо зверху добуток $-2\left(\varepsilon_h\left(t\right),E_h\left(t\right)\right)_H$, використовуючи елементарну нерівність

$$-2\left(\varepsilon_h\left(t\right),E_h\left(t\right)\right)_M\leq\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2+\left\|E_h\left(t\right)\right\|_M^2. \tag{5.59}$$

Підставимо нерівність (5.59) в (5.58):

$$\left\|e_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|e_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau\leq2\left\|\varepsilon_h\left(t\right)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|\varepsilon_h\left(\tau\right)\right\|_A^2d\tau+$$

$$+2\left\|E_h(t)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|E_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau.$$

Підсилимо останню нерівність, домноживши другий доданок у правій частині на коефіцієнт 2:

$$\left\|e_h(t)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|e_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau\leq 2\left\|\varepsilon_h(t)\right\|_M^2+2\int\limits_0^t\left\|\varepsilon_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau+$$

$$+2\left\|E_h(t)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|E_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau.$$

Оцінимо перші два доданки за нерівністю (5.57). Остаточно запишемо

$$\left\|e_h(t)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|e_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau\leq 2\left\|E_h(0)\right\|_M^2+2\left\|E_h(t)\right\|_M^2+$$

$$+\int\limits_0^t\left\|E_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau+2\alpha^{-2}\int\limits_0^t\left\|E_h'(\tau)\right\|_M^2 d\tau.$$

Використаємо тепер оцінки (5.50) та (5.51), згідно з якими

$$\left\|e_h\right\|_M-\left\|E_h\right\|_M\leq\left\|\varepsilon_h\right\|_M,$$

$$\left\|e_h\right\|_A-\left\|E_h\right\|_A\leq\left\|\varepsilon_h\right\|_A.$$

Зібравши разом попередні оцінки та (5.57), запишемо Врахуємо далі нерівності (5.53), (5.54). Матимемо

$$\left\|e_h(t)\right\|_H^2+\int\limits_0^t\left\|e_h(t)\right\|_V^2 d\tau\leq C_2h^{2k}\left\{\left\|u_0\right\|_{W_2^{k+1}}^2+\left\|u\right\|_{W_2^{k+1}}^2+\right.$$

$$\left.\int\limits_0^t\left[\left\|u(\tau)\right\|_{W_2^{k+1}}^2+\beta^{-2}\left\|E_h'(\tau)\right\|_{W_2^{k+1}}^2\right]d\tau\right\}. \qquad (5.60)$$

Звідси випливає така теорема

Теорема 6. *Нехай напівдискретизація варіаційної задачі теплопровідності виконана з використанням базисних функцій, що мають апроксимаційні властивості (5.52), і розв'язок варіаційної задачі характеризує включення*

$$u\in V\cap W_2^{(k+1)}(\Omega),\qquad k\geq 0,$$

тоді послідовність апроксимацій $\{u_h(t)\}$ при $h\to 0$ збігається відносно норми

$$\left\|u\right\|=\left\{\left\|u\right\|_{L_\infty(0,T;H)}^2+\left\|u\right\|_{L_2(0,T;V)}^2\right\}^{1/2}$$

до розв'язку u задачі, і порядок похибки $e_h(t)$ характеризує оцінка (5.60) (вона становить k).

5.8 Дискретизація варіаційної задачі за часом

5.8.1 Кусково-лінійна апроксимація за часом

Розділимо проміжок часу $[0,T]$ на N_t частин – проміжки $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, ..., N_t - 1$. Для спрощення подальшого викладу вважатимемо ці частини однаковими за довжиною $\delta = t_{j+1} - t_j$. Називатимемо величину δ кроком дискретизації задачі за часом.

На кожному проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $u_h(t)$ задачі (5.20), (5.21) будемо апроксимувати лінійною функцією $u_h^\delta(t)$, яка має вигляд

$$u_h^\delta(t) = (1 - \omega_j(t))\, u^j + \omega_j(t)\, u^{j+1}. \tag{5.61}$$

Тут

$$\omega_j(t) = (t - t_j)/\delta, \quad t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0, 1, ..., N_t;$$

u^j, u^{j+1} – невідомі функції, які з огляду на вибір $\omega_j(t)$, є значеннями апроксимованої функції $u_h^\delta(t)$ у вузлах поділу проміжку часу t_m, тобто

$$u_h^\delta(t_m) = u^m, \quad m = 0, 1, ..., N_t - 1.$$

Отже, $u_h^\delta(t)$ на проміжку $[0,T]$ є неперервною кусково-лінійною функцією.

Зазначимо, що, окрім запису (5.61) цієї функції на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$, можна отримати ще й інші записи. Зокрема, формулу (5.61) можемо записати у вигляді

$$u_h^\delta(t) = u^j + \omega_j(t)\left(u^{j+1} - u^j\right). \tag{5.62}$$

Її можна переписати ще й таким способом:

$$u_h^\delta(t) = \frac{1}{2}\left(u^{j+1} + u^j\right) + \delta\left(\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right)\frac{(u^{j+1} - u^j)}{\delta} =$$

$$= u^{j+\frac{1}{2}} + \delta\left(\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right)\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}. \tag{5.63}$$

Тут використані позначення

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(u^{j+1} + u^j\right),\ \dot{u}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{(u^{j+1} - u^j)}{\delta}. \tag{5.64}$$

5.8.2 Однокрокова рекурентна схема

Виберемо деяку функцію $\xi(t)$ таку, що виконується співвідношення

$$(\xi(t), 1) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\, dt \neq 0.$$

Підставимо апроксимації (5.63) у перший доданок та (5.62) у другий доданок варіаційного рівняння (5.20), домножимо на вибрану функцію $\xi(t)$, зінтегруємо на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ і прирівняємо отриманий вираз до нуля.

Іншими словами, домагатимемося, щоб відхил апроксимованого за часом розв'язку від слабкого розв'язку був мінімальним. Отримаємо

$$(\xi,1)\,m\left(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}},v\right)+((\xi,1)-(\xi,\omega_j))\,a\left(u^j,v\right)+$$

$$+(\xi,\omega_j)\,a\left(u^{j+1},v\right)=(\xi,1)\,l^{j+\frac{1}{2}}(v). \tag{5.65}$$

Тут лінійний функціонал у правій частині апроксимований на часовому проміжку $[t_j,t_{j+1}]$ сталою за часом величиною

$$l^{j+\frac{1}{2}}(v)=l(v)\,|_{t=\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}\,.$$

Домножимо формулу (5.62) на функцію $\xi(t)$ і зінтегруємо на проміжку часу $[t_j,t_{j+1}]$. Увівши позначення

$$u^{j+\theta}=\frac{1}{(\xi(t),1)}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\xi(t)\,u_h^{\delta}(t)\,dt, \tag{5.66}$$

отримаємо

$$u^{j+\theta}=u^j+\theta\left(u^{j+1}-u^j\right), \tag{5.67}$$

де

$$\theta=(\xi,\omega_j)\,(\xi,1)^{-1}.$$

Можна довести, що

$$0\le\theta\le 1.$$

З урахуванням співвідношення (5.67) перепишемо рівняння (5.65) у вигляді

$$m\left(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}},v\right)+a\left(u^{j+\theta},v\right)=l^{j+\frac{1}{2}}(v)\,,\ \forall v\in V_h,\ j=0,1,...,N_t, \tag{5.68}$$

подібному до рівняння (5.20).

До рівнянь (5.68) додамо ще одне співвідношення, яке випливає з початкової умови (5.18),

$$m\left(u^0-u_0,v\right)=0\,\forall v\in V_h. \tag{5.69}$$

Зазначимо, що перетворення, подібне до перетворення формули (5.62) до вигляду (5.67), можна застосувати і до формули (5.63). Тоді матимемо

$$u^{j+\theta}=u^{j+\frac{1}{2}}+\delta\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}. \tag{5.70}$$

Використавши рівняння (5.68) та (5.69), можна сформулювати рекурентні послідовності обчислень для знаходження функцій u^{j+1}, $u^{j+\theta}$. Для цього, застосувавши (5.67) та (5.70), зведемо рівняння (5.68) до одного з наступних виглядів:

$$m\left(u^{j+1},v\right)+\theta\delta a\left(u^{j+1},v\right)=\left(l^{j+\frac{1}{2}}(v)-(1-\theta)\,a\left(u^j,v\right)\right)+$$

$$+m\left(u^j, v\right), \ \forall v \in V_h, \ j = 0, 1, ..., N; \tag{5.71}$$

або

$$m\left(u^{j+\theta}, v\right) + \theta\delta a\left(u^{j+\theta}, v\right) = \delta\theta l^{j+\frac{1}{2}}(v) + m\left(u^j, v\right),$$
$$\forall v \in V_h, \ j = 0, 1, ..., N. \tag{5.72}$$

5.9 Стійкість рекурентних схем

Дослідимо стійкість побудованих рекурентних схем інтегрування за часовою змінною. Для цього використаємо запис рекурентної схеми у вигляді (5.68)

$$m\left(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v\right) + a\left(u^{j+\theta}, v\right) = l^{j+\frac{1}{2}}(v), \ \forall v \in V_h, \ j = 0, 1, ..., N. \tag{5.73}$$

Приймемо у цьому рівнянні $v = u^{j+\frac{1}{2}}$. Виконаємо перетворення першого доданка

$$m\left(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\delta} m\left(u^{j+1} - u^j, u^{j+1} - u^j\right) =$$
$$= \frac{1}{2\delta}\left(\left\|u^{j+1}\right\|_M^2 - \left\|u^j\right\|_M^2\right). \tag{5.74}$$

Аналогічно перетворимо і другий доданок

$$a\left(u^{j+\theta}, u^{j+\frac{1}{2}}\right) = a\left(u^{j+\frac{1}{2}} + \delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, u^{j+\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\left\|u^{j+1}\right\|_A^2 - \left\|u^j\right\|_A^2\right). \tag{5.75}$$

Підставимо отримані співвідношення (5.74), (5.75) у рівняння (5.73):

$$\frac{1}{2\delta}\left(\left\|u^{j+1}\right\|_M^2 - \left\|u^j\right\|_M^2\right) + \left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\left\|u^{j+1}\right\|_A^2 - \left\|u^j\right\|_A^2\right) = l^{j+\frac{1}{2}}\left(u^{j+\frac{1}{2}}\right), \ j = 0, 1, ..., N. \tag{5.76}$$

Додамо всі рівняння (5.76), які відповідають значенням індексу $j = 0, 1, ..., m$:

$$\frac{1}{2}\left\|u^{m+1}\right\|_M^2 + \delta\sum_{j=0}^{m}\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left\|u^{m+1}\right\|_A^2 = \frac{1}{2}\left\|u^0\right\|_M^2 +$$
$$+\delta\sum_{j=0}^{m} l^{j+\frac{1}{2}}\left(u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left\|u^0\right\|_A^2, \quad m = 0, 1, ..., N. \tag{5.77}$$

Порівнюючи одержані рівняння з енергетичними рівняннями (див. 5.4)

$$\frac{1}{2}\left\|u_h(t)\right\|_M^2+\int\limits_0^t\left\|u_h(\tau)\right\|_A^2 d\tau=\frac{1}{2}\left\|u_h(0)\right\|_M^2+\int\limits_0^t l\left(u_h(\tau)\right)d\tau,$$

бачимо, що використана дискретизація в часі породжує додаткові члени у випадку $\theta\neq\frac{1}{2}$.

В отриманих співвідношеннях (5.76) (5.77) врахуємо оцінку вигляду і ліву частину нерівності з наслідка 1

$$c_1\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_H\leq\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M.$$

Одержимо

$$l^{j+\frac{1}{2}}\left(u^{j+\frac{1}{2}}\right)\leq\frac{1}{c_1^2}\left\|l^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M.$$

Використаємо далі нерівність вигляду (5.35)

$$ab\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,\ \forall a,b,\varepsilon\in\mathbf{R},\ \varepsilon>0. \tag{5.78}$$

Врахуємо нерівність (див. 5.5.1)

$$a(u,u)\geq\alpha\left\|u\right\|_H^2$$

і приймемо в (5.78)

$$\varepsilon=\alpha c_1^2, a=\left\|l^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M,\ b=\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M.$$

Запишемо остаточно

$$l^{j+\frac{1}{2}}\left(u^{j+\frac{1}{2}}\right)\leq\frac{1}{2}\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2+\frac{1}{2\alpha c_1^2}\left\|l^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M^2.$$

Наведемо (5.76) та (5.77) у вигляді нерівностей

$$\frac{1}{\delta}\left(\left\|u^{j+1}\right\|_M^2-\left\|u^j\right\|_M^2\right)+\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2+$$

$$+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\left\|u^{j+1}\right\|_A^2-\left\|u^j\right\|_A^2\right)\leq\frac{1}{\alpha c_1^2}\left\|l^{j+\frac{1}{2}}\right\|_H^2,$$

$$j=0,1,...,N_t-1 \tag{5.79}$$

та

$$\left\|u^{m+1}\right\|_M^2+\delta\sum_{j=0}^m\left\|u^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2+\delta\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left\|u^{m+1}\right\|_A^2\leq$$

$$\leq\left\|u^0\right\|_M^2+\delta\frac{1}{\alpha c_1^2}\sum_{j=0}^m\left\|l^{j+\frac{1}{2}}\right\|_M^2+\delta\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left\|u^0\right\|_A^2,$$

$$m=0,1,...,N_t-1. \tag{5.80}$$

З одержаної нерівності (5.80) випливає, що побудована однокрокова рекурентна схема є безумовно стійкою за нормами просторів M та H_A, якщо параметр схеми

$$\theta \geq \frac{1}{2}. \tag{5.81}$$

Справді, у цьому випадку з нерівності (5.80) випливає, що для довільного натурального числа m величина

$$\left\|u^{m+1}\right\|_M^2 + \left\|u^{m+1}\right\|_A^2$$

є обмеженою. Якщо ж

$$\theta < \frac{1}{2}, \tag{5.82}$$

то ліва частина нерівності (5.80) містить невід'ємні доданки за умови, що

$$1 + \alpha c_1^2 \delta \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Ця нерівність буде виконана, якщо накласти на крок інтегрування в часі обмеження

$$\delta \leq \frac{2}{\alpha c_1^2 (1 - 2\theta)}. \tag{5.83}$$

У цьому випадку однокрокова схема буде умовно стійкою. Її стійкість забезпечена виконанням додаткової умови (5.83) на крок інтегрування за часом.

Приведені висновки щодо стійкості однокрокової схеми у нормах просторів M та H_A справедливі також для просторів H та V. Це випливає з наслідків 1,2 лем 1,2.

5.10 Збіжність рекурентних схем

Для того, щоб схарактеризувати збіжність рекурентних схем, оцінимо похибку

$$\varepsilon^\delta(t) = u_h^\delta(t) - u_h(t) \tag{5.84}$$

апроксимації наближеного розв'язку $u_h^\delta(t)$, отриманого шляхом використання однокрокової рекурентної схеми, відносно напівдискретного розв'язку $u_h(t)$ задачі (5.12), (5.13).

Отримаємо рівняння для значень похибки

$$\varepsilon^j = \varepsilon^\delta(t_j)$$

у вузлах

$$t_j, \quad j = 0, 1, ..., N_t$$

часового проміжку $[0, T]$. Для цього використаємо рівняня (5.73)

$$m\left(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v\right) + a\left(u^{j+\theta}, v\right) = l^{j+\frac{1}{2}}(v), \ \forall v \in V_h, \ j = 0, 1, ..., N. \tag{5.85}$$

Врахуємо у ньому, що згідно з (5.84) та (5.64)

$$\dot{\varepsilon}^{j+\frac{1}{2}} = \dot{u}^{j+\frac{1}{2}} - \delta^{-1}\left(u_h\left(t_{j+1}\right) - u_h\left(t_j\right)\right), \tag{5.86}$$

а також, що згідно з (5.67)

$$\varepsilon^{j+\theta} = u^{j+\theta} - u_h\left(t_j\right) - \theta\left(u_h\left(t_{j+1}\right) - u_h\left(t_j\right)\right). \tag{5.87}$$

Знайдемо, що похибка ε^j задовольняє співвідношення

$$m\left(\dot{\varepsilon}^{j+\frac{1}{2}}, v\right) + a\left(\varepsilon^{j+\theta}, v\right) = \gamma^j\left(v\right),\ \forall v \in V_h,\ j = 0, 1, ..., N, \tag{5.88}$$

де лінійні функціонали $\gamma^j\left(v\right)$ мають вигляд

$$\gamma^j\left(v\right) = l^{j+\frac{1}{2}}\left(v\right) - \delta^{-1} m\left(u_h\left(t_{j+1}\right) - u_h\left(t_j\right), v\right) -$$

$$-a\left(\theta u_h\left(t_{j+1}\right) + \left(1-\theta\right) u_h\left(t_j\right), v\right). \tag{5.89}$$

Перетворимо вирази для лінійних функціоналів (5.89). Для цього припустимо, що

$$u_h\left(t\right) \in C^{(3)}\left[0, T\right]$$

і розвинемо $u_h\left(t\right)$ в ряд Тейлора в околі точки $t = t_{j+\frac{1}{2}}$

$$u_h\left(t\right) = u_h\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(t - t_{j+\frac{1}{2}}\right) u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(t - t_{j+\frac{1}{2}}\right)^2 u_h''\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{6}\left(t - t_{j+\frac{1}{2}}\right)^3 u_h'''\left(\xi\right).$$

Обчислимо за цією формулою вирази

$$u_h\left(t_{j+1}\right) = u_h\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\delta}{2} u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\delta^2}{8} u_h''\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\delta^3}{48} u_h'''\left(\xi\right);$$

$$u_h\left(t_j\right) = u_h\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\delta}{2} u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\delta^2}{8} u_h''\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\delta^3}{48} u_h'''\left(\xi\right).$$

Звідси отримаємо

$$\delta^{-1}\left(u_h\left(t_{j+1}\right) - u_h\left(t_j\right)\right) = u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{24}\delta^2 u_h'''\left(\xi\right); \tag{5.90}$$

$$\theta u_h\left(t_{j+1}\right) + \left(1-\theta\right) u_h\left(t_j\right) = u_h\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) + \delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\delta^2\left(u_h''\left(\eta\right) + \frac{1}{3}\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) u_h'''\left(\xi\right)\right);\ \xi, \eta \in \left(t_j, t_{j+1}\right). \tag{5.91}$$

Підставимо (5.90) та (5.91) у праву частину (5.89):

$$\gamma^j\left(v\right) = \left(l\left(v\right) - m\left(u_h'\left(t_j\right), v\right) - a\left(u_h\left(t_j\right), v\right)\right) -$$

$$-\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a\left(u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right), v\right) - \delta^2 R_j\left(v\right).$$

Врахуємо, що сума перших трьох доданків дорівнює згідно з рівнянням (5.20) нулю, отже,

$$\gamma^j(v) = -\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a\left(u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right), v\right) - \delta^2 R_j(v),\ \forall v \in V_h. \tag{5.92}$$

Тут лінійні функціонали $R_j(v)$ мають вигляд

$$R_j(v) = \frac{1}{8}\left\{a\left(u_h''(\eta), v\right) + \frac{1}{3} m\left(u_h'''(\xi), v\right) + \right.$$

$$\left. +\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a\left(u_h'''(\xi), v\right)\right\}, \quad \forall v \in V_h. \tag{5.93}$$

З урахуванням виконаних перетвореннь запишемо рівняння для визначення похибок у вигляді

$$m\left(\dot{\varepsilon}^{j+\frac{1}{2}}, v\right) + a\left(\varepsilon^{j+\theta}, v\right) =$$

$$= \delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a\left(u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right), v\right) - \delta^2 R_j(v),\ j = 0, 1, ..., N,\ \forall v \in V_h; \tag{5.94}$$

$$m\left(\varepsilon^0, v\right) = 0. \tag{5.95}$$

Звідси випливає, що однокрокова рекурентна схема має перший порядок апроксимації ($O(\delta)$), якщо $\theta \neq 1/2$ і другий порядок апроксимації ($O(\delta^2)$), якщо $\theta = 1/2$.

Приймемо у формулі (5.94) $v = \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}$ і виконаємо перетворення аналогічно, як у попередньому параграфі. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\left\|\varepsilon^{m+1}\right\|_M^2 + \delta\sum_{j=0}^{m}\left\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left\|\varepsilon^{m+1}\right\|_A^2 =$$

$$\delta^2\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a\left(u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right), \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right) + \delta R_j\left(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right)\right\},\ m = 0, 1, ..., N. \tag{5.96}$$

З використанням нерівності (5.35)

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2,\ \forall a, b, \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0$$

запишемо

$$a\left(u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right), \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right\|_V^2 + \right.$$

$$\left. +\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left\|u_h'\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right\|_V^2\right); \tag{5.97}$$

$$R_j\left(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{4}\delta^{-2}\left\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right\|_V^2 + \delta^2\left\|R_j\right\|^2. \tag{5.98}$$

Зазначимо таке: в записі оцінки (5.97) було використано, що $\theta > 1/2$. У випадку, коли $\theta = 1/2$, необхідність у цій оцінці відпадає.

З урахуванням (5.97) та (5.98) з рівняння (5.96) одержимо

$$\frac{1}{2}\left\|\varepsilon^{m+1}\right\|_M^2 + \delta\sum_{j=0}^{m}\left\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\delta\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left\|\varepsilon^{m+1}\right\|_A^2 \leq$$

$$\leq 2\delta^2 T\left\{\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\|u_h'\|_{C(0,T;V)}^2 + \delta^2 \max_{0\leq j\leq N}\|R_j\|^2\right\}. \qquad (5.99)$$

Отже, доведено таку теорему про збіжність однокрокової схеми.

Теорема 7. *Нехай розв'язок u_h задачі (5.12), (5.13) є таким, що $u_h''' \in C(0,T;V)$, u_h^δ – його кусково-лінійна апроксимація, обчислена за допомогою безумовно стійкої однокрокової рекурентної схеми (5.71) з параметром $\theta \geq 1/2$. Тоді значення $u_h^\delta(t_m)$ збігаються відносно норм $\|\cdot\|_M$ та $\|\cdot\|_A$ до значень $u_h(t_m)$, $\quad m = 1, 2, ...N$, і в цьому разі для похибок*

$$\varepsilon^\delta = u_h^\delta(t_m) - u_h(t_m)$$

виконуються апріорні оцінки (5.99).

З формули (5.99) випливає, що оптимальний порядок збіжності (відповідає апроксимації за часом лінійним законом і дорівнює 2) досягається при

$$\theta = \frac{1}{2} + O(\delta).$$

Виконується також теорема про збіжність відносно норм $\|\cdot\|_H$ та $\|\cdot\|_V$. Це випливає з еквівалентності (див. леми 1,2) цих і таких норм: $\|\cdot\|_M$ та $\|\cdot\|_A$.

5.11 Вправи для самостійного виконання

Вправа 1. Записати одновимірне за просторовою змінною формулювання задачі теплопровідності (5.1), (5.2) з однорідними граничними умовами типу Діріхле у крайових точках.

Вправа 2. Записати одновимірне за просторовою змінною формулювання задачі теплопровідності (5.1), (5.2) з однорідними граничними умовами типу Ньютона у крайових точках.

Вправа 3. Записати одновимірне за просторовою змінною формулювання задачі теплопровідності (5.1), (5.2) зі змішаними однорідними граничними умовами (в одній крайовій точці задана умова Діріхле, а в іншій – умова Неймана) крайових точках.

Вправа 4. Навести варіаційне формулювання одновимірної за просторовою змінною задачі теплопровідності (із вправи 1).

Вправа 5. Навести варіаційне формулювання одновимірної за просторовою змінною задачі теплопровідності (із вправи 2).

Вправа 6. Навести варіаційне формулювання одновимірної за просторовою змінною задачі теплопровідності (із вправи 3).

Вправа 7. Дослідити білінійні форми, які містяться у варіаційному формулюванні одновимірної задачі теплопровідності (із вправи 1).

Вправа 8. Дослідити білінійні форми, які містяться у варіаційному формулюванні одновимірної задачі теплопровідності (із вправи 2).

Вправа 9. Дослідити білінійні форми, які містяться у варіаційному формулюванні одновимірної задачі теплопровідності (із вправи 3).

Вправа 10. Записати енергетичне рівняння (5.28) для одновимірної за просторовими змінними задачі теплопровідності (із вправи 1) у явному вигляді, замінивши $\|u_h(t)\|_H^2$, $\|u_h\|_V^2$ та $l(u_h)$ їх явними виразами.

Вправа 11. Записати енергетичне рівняння (5.28) для одновимірної за просторовими змінними задачі теплопровідності (із вправи 2) у явному вигляді, замінивши $\|u_h(t)\|_H^2$, $\|u_h\|_V^2$ та $l(u_h)$ їх явними виразами.

Вправа 12. Записати енергетичне рівняння (5.28) для одновимірної за просторовими змінними задачі теплопровідності (із вправи 3) у явному вигляді, замінивши $\|u_h(t)\|_H^2$, $\|u_h\|_V^2$ та $l(u_h)$ їх явними виразами.

Додаток

Лінійна множина функцій

Позначимо символом Ω N-вимірну область, тобто відкриту зв'язну множину евклідового простору $\mathbf{R}^N$. Координати точки $x \in \mathbf{R}^N$ позначатимемо $x_1, x_2, ..., x_N$. Розглядатимемо тут тільки обмежені області з границями Ліпшиця. До цього класу областей належать, наприклад, двовимірні області з кусково-гладкими границями, які не мають точок звороту; тривимірні області з кусково-гладкими границями, які не мають ребер звороту. Зазначимо, що такі види областей є характерними для багатьох задач математичної фізики, які трапляються в іженерній практиці та науці.

Позначимо символом Γ границю області Ω. Множину $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ називатимемо замкненою областю.

Нехай M – множина функцій, заданних на області Ω.

Означення 1. *Множину функцій називають лінійною (лінеалом), якщо разом з функціями u_1, u_2, із M вона містъ їхню лінійну комбінацію*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2,$$

де a_i – довільні дійсні сталі.

Позначимо через $C^{(k)}(\Omega)$ множину функцій $u(x)$, частинні похідні яких до k-го порядку включно неперервні в області Ω. Похідною порядку нуль вважаємо саму функцію $u(x)$. Неважко перевірити, що множина $C^{(k)}(\Omega)$ є лінійною.

Гільбертів простір

Розглянемо деякий лінеал M. Для двох довільних функцій $u, v \in M$ визначимо число (u, v) – скалярний добуток, який задовольняє умови

$$(u, v) = \overline{(v, u)};$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v);$$

$$(u, u) \geq 0;$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0, x \in \Omega.$$

Тут число $\overline{(v, u)}$ є комплексним спряженим числом.

Означення 2. *Лінійну множину M разом з уведеним на ній скалярним добутком називають гільбертовим простором. Позначатимемо його H.*

Поряд із введеним комплексним гільбертовим простором розглядають також дійсний гільбертів простір, у якому перша умова, яку задовольняє скалярний добуток, має вигляд

$$(u, v) = (v, u).$$

На основі скалярного добутку можна ввести дуже важливе поняття, а саме: норму функції

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Норма у гільбертовому просторі має такі властивості:

1^0 тотожно нульова і тільки тотожно нульова функція має норму, яка дорівнює нулю;

2^0 якщо λ – дійсне число, а u елемент простору H, то

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|;$$

3^0 для довільної пари функцій $u, v \in H$ виконується нерівність Коші–Буняковського (нерівність Шварца)

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\|;$$

4^0 для довільної пари функцій $u, v \in H$ виконується нерівність трикутника

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Відомо, що множина функцій, визначених майже всюди в області Ω та інтегровних в Ω з квадратом, є лінеалом. Визначимо на цій множині скалярний добуток, прийнявши

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} uvd\Omega.$$

Утворений таким способом гільбертів простір позначають $L_2(\Omega)$. Норма у цьому просторі визначена співвідношенням

$$\|u\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega}.$$

Означення 3. *Функції $u, v \in H$ називають ортогональними, якщо*

$$(u, v) = 0.$$

Означення 4. *Функцію $u \in H$ називають нормованою, якщо*

$$\|u\| = 1.$$

Означення 5. *Функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ називають лінійно залежними, якщо можна відшукати сталі $a_1, a_2, ..., a_n$, серед яких не всі дорівнюють нулю, такі, щоб виконувалось співвідношення*

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n = 0.$$

Ці функції називають лінійно незалежними, якщо остання рівність виконується тільки за умови

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Виконується така теорема:

Теорема 6. *Для того, щоб функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in H$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб дорівнював нулю визначник (визначник Грама)*

$$\det \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & ... & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & ... & (\varphi_2, \varphi_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & ... & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Збіжність у гільбертовому просторі

Нехай у гільбертовому просторі H задана послідовність функцій $\{\varphi_n\}$. Називатимемо цю послідовність збіжною до функції φ, якщо

$$1^0)\ \varphi \in H;$$

$$2^0)\ \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0.$$

Функцію φ називатимемо границею послідовності $\{\varphi_n\}$. Якщо послідовність збіжна, то виконується співвідношення

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0.$$

Проте із виконання цього співвідношення збіжність послідовності $\{\varphi_n\}$ випливає тільки тоді, коли простір H-повний. Тут розглядатимемо тільки повні гільбертові простори. Для них наведене співвідношення є необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності. Саму ж послідовність, яка задовольняє цю умову, називають фундаментальною.

Гільбертів простір $L_2(\Omega)$ є повним.

Означення 7. *Множину $M \subset H$ називатимемо щільною в гільбертовому просторі H, якщо довільну функцію $\varphi \in H$ можна отримати як границю деякої послідовності $\varphi_n \in M$.*

Позначимо через $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ множину функцій, які є нескінченну кількість разів диференційовними в області Ω і такими, що дорівнюють нулю у деякому околі границі Γ області Ω. Відомо, що множина $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ є щільною у просторі $L_2(\Omega)$.

Наведемо одну лему, яку використовують у викладі теорії варіаційних методів.

Лема 8. *Функція, ортогональна до всіх функцій щільної множини, дорівнює нулю.*

Простори Соболєва

Нехай неперервна в Ω функція $f(x)$ має неперервну в Ω похідну f_{x_1}. Тоді для довільної функції $g(x) \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$ виконується формула

$$\int\limits_{\Omega} f g_{x_1} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} f_{x_1} g d\Omega,$$

яка випливає з формули Остроградського. Цією рівністю визначають узагальнену похідну.

Означення 9. *Якщо у попередній рівності відмовитися від неперервності функції f та функції f_{x_1}, а замість цього домагатися інтегровності лівої та правої частин цієї рівності в сенсі Лебега, то f_{x_1} називають узагальненою похідною функції f.*

Позначимо через $W_2^{(1)}$ гільбертів простір функцій, які мають інтегровні з квадратом усі узагальнені перші похідні. Скалярний добуток у цьому просторі визначений формулою

$$(u,v)_{W_2^{(1)}} = \int\limits_{\Omega} \left\{ uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} d\Omega.$$

Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|u\|_{W_2^{(1)}} = \left(\int\limits_{\Omega} \left\{ u^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

За аналогією з наведеним означенням узагальненої похідної першого порядку можна дати означення узагальнених похідних вищих порядків і розглянути простори Соболєва $W_2^{(k)}$.

Загалом відомо, що простір $W_2^{(k)}$ утворений функціями із лінеалу $C^{(\infty)}\left(\overline{\Omega}\right)$ та його поповненням за нормою, яка визначена на цьому просторі, тобто такими функціями, про похідні яких можна говорити в узагальненому сенсі.

На границі Γ значення функцій $u\left(x\right) \in C^{(\infty)}\left(\overline{\Omega}\right)$ однозначно визначені та інтегровні з квадратом. Значення на границі інших функцій із $W_2^{(k)}$ потрібно розуміти в певному узагальненому сенсі, який називатимемо слідом функції. Важливе значення в цьому плані має така теорема.

Теорема 10. *Нехай Ω — область з границею Ліпшиця. Тоді існує єдиний обмежений, лінійний оператор T, який відображає простір $W_2^{(1)}\left(\Omega\right)$ в простір $L_2\left(\Gamma\right)$. Якщо $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega})$, то $Tu(x) = u(\Gamma)$, тобто слідом функції $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega})$ є її значення на границі.*

З наведеної теореми випливає, що для довільної функції $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ існує деяка функція $u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$, яка є її слідом.

Якщо деяка функція $u(x) \in W_2^{(k)}(\Omega), (k > 1)$, то вона належить також простору $W_2^{(1)}(\Omega)$. Отже, згідно з наведеною теоремою така функція має слід $u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$.

Якщо деяка функція $u(x) \in W_2^{(k)}(\Omega), (k > 1)$, то $D^i u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ для всіх $i = (i_1, ..., i_N)$ таких, що $|i| \leq k - 1$. Тоді згідно з наведеною теоремою для похідних $D^i u(x)$ існують сліди $D^i u(\Gamma) \in L_2(\Gamma)$.

Список рекомендованої літератури

1. *Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д.* Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. К.: Либідь, 1995.

2. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М.: Мир, 1974.

3. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998.

4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

5. *Колмогоров А.М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій и функціонального анализу. К.: Вища школа, 1974.

6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

7. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

8. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

9. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.

11. *Савула Я.Г.* Метод скінченних елементів. К.: НМК ВО, 1993.

12. *Савула Я.Г., Флейшман Н.П.* Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1989.

13. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А.* Метод скінченних елементів. Львів: Вища школа, 1976.

14. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.

13. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1985. 1980.

15. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991.

16. *Brenner S.C., Scott L.R.* The mathematical theory of finite element methods. Springer–Verlag, 1994

17. *Kolar V., Kratochvil J., Leitner F., Zenisek A.* Vypocet plosnych a prostorovych konstrukci metodou konecnych prvku. Praha: SNTL, 1979.

18. *Smith B., Bjorstad P., Gropp W.* Domain decompozition. Parallel multylevel methods for elliptic partial differencial equations. Cambridge University Press, 1996.

19. *Szabo B., Babushka I.* Finite element analysis. John Wiley and Sons.Inc., 1991.