УДК 517.51, 518.12, 518:517.948, 519.6, 517.925
№ держреєстрації 0107U002056
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
(ЛНУ ім. Івана Франка)
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1; тел. (032) 272-70-40
факс (032) 297-89-03, ndch@franko.lviv.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
д-р хім. наук, проф.

_____ Б. Котур

____.____._____

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
МЕТОДИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ТА ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ ФІЗИКИ І МЕХАНІКИ
Пі-70Ф
(заключний)

Заст. проректора канд. хім. наук, ст. наук. співроб.	С. Орищин
Декан ф-ту ПМІ д-р фіз.-мат. наук, проф.	Я. Савула
Керівник НДР д-р фіз.-мат. наук, проф.	Г. Шинкаренко
Керівник НДР д-р фіз.-мат. наук, доц.	Р. Хапко

2007

Рукопис закінчено 2.11.2007 р.
Результати цієї роботи розглянула Вчена Рада ф-ту прикладної математики та інформатики. Протокол № 20 від 7.11.2007 р.

С П И С О К А В Т О Р І В

Пров. наук. співроб.,
док. фіз.-мат. наук, доц. _____ Р.С. Хапко (розд. 1, 2)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ Б.А. Остудін (розд. 3)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ С.М. Шахно (розд. 4)

Асист., мол. наук. співроб. _____ Я.С. Гарасим (розд. 3)

Зав. лаб. комп. модел.,
інж. І категорії _____ Л.Б. Пахолків (розд. 1, 2)

Аспірант,
мол. наук. співроб. _____ Г.П. Дацiв (розд. 1)

Аспірант,
мол. наук. співроб. _____ С.В. Лаврик (розд. 1)

Гол. наук. співроб.,
док. фіз.-мат. наук, проф. _____ Г.А. Шинкаренко (розд. 5-8)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ І.Є. Бернакевич (розд. 8)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ П.П. Вагін (розд. 8)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ П.С. Венгерський (розд. 8)

Ст. наук. співроб.
канд. фіз.-мат. наук, доц. _____ В.Д. Вовк (розд. 8)

Канд. фіз.-мат. наук, доц.	_____	В.М. Трушевський (розд. 8)
Мол. наук. співроб.	_____	Р.Б. Малець (розд. 8)
Аспірант, мол. наук. співроб.	_____	Ю.О. Сінчук (розд. 5, 6)
Аспірант, інженер III категорії	_____	Т.С. Мандзюк (розд. 8)
Аспірант	_____	Є.М. Абрамов (розд. 6)
Аспірант	_____	О.В. Фундак (розд. 8)
Аспірант	_____	Ф.В. Чабан (розд. 7)
Аспірант	_____	І.Я. Шот (розд. 8)
Аспірант	_____	А.С. Ямелинець (розд. 6)
Студент	_____	М.Б. Брухаль (розд. 8)
Студент	_____	О.С. Ліпіна (розд. 6)
Студент	_____	Р.В. Терлецький (розд. 8)

Нормоконтролер М. Благітко

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 334 с., 55 рис., 44 табл., 230 джерел.

Об'єктом дослідження є прямі та обернені еволюційні задачі, граничні та варіаційні фізики та механіки, інтегральні рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі, задача Діріхле для рівняння Лапласа у випадку розімкнених ліпшицевих поверхонь.

Мета роботи – створення та обґрунтування чисельних методів для розв'язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики на основі варіаційних, граничних інтегральних і нелінійних функціональних рівнянь, а також граничних статичних та динамічних задач теорії потенціалу в суттєво просторовій постановці.

Методи дослідження – метод Петрова-Гальоркіна, метод скінченних елементів (МСЕ), граничні інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функція Гріна.

Запропоновано стабілізовані та ε-адаптивні схеми методу скінченних елементів для сингулярно збурених початкових та крайових задач з рівнянням дифузії-адвекції-реакції з використанням дискретизації Гальоркіна та Петрова-Гальоркіна. Стабілізовані схеми МСЕ побудовано застосуванням як експоненціальних базисних функцій простору апроксимацій, так і простору тестових функцій. Встановлено безумовну стійкість таких схем та порядки їх збіжності, проаналізовано результати числових експериментів.

Адаптивні схеми МСЕ побудовано з використанням апостеріорних оцінювачів похибок, які засновані на властивостях лишків варіаційних рівнянь обчислених із апроксимацій МСЕ. Знайдений розподіл норм похибок на кожному скінченному елементі покладено в основу гнучкої системи керування структурою тріангуляцій, здатних забезпечити відшукання апроксимацій МСЕ з наперед гарантованою точністю. Надійність та ефективність запропонованих

h-адаптивних схем демонструється результатами розв’язування модельних та прикладних задач.

Розроблено алгоритми оцінки розмірів і місцезнаходження включення у частково-необмеженій області на площині. Побудовано наближені схеми розв’язування обернених задач реконструкції тріщин у частково-необмежених областях. Побудовані чисельні розв’язки для нестаціонарних задач: еволюційної задачі поширення гравітаційних хвиль у контейнері з вільною поверхнею; початково-крайової задачі теплопровідності для тривимірних просторових областей; нестаціонарної задачі для рівняння Стокса; обернених граничних задач теплопровідності. Побудувані наближені схеми розв’язування інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі. Доведено збіжність ітераційного процесу з надквадратичною збіжністю для розв’язування нелінійних рівнянь у випадку, коли в умовах Ліпшиця використовується додатна інтегровна функція.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ, ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЕВОЛЮЦІЙНІ ЗАДАЧІ, РІВНЯННЯ СТОКСА, ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, ПРОСТОРОВІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНІ ПОЛЯ, НЕЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА, ВАРІАЦІЙНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ, АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ, АДАПТУВАННЯ ТРІАНГУЛЯЦІЙ, СТАБІЛІЗОВАНА СХЕМА.

З М І С Т

ВСТУП

Побудова і обґрунтування чисельних методів розв'язування граничних задач математичної фізики складає значний інтерес у різних прикладних та інженерних застосуваннях. Значної популярності в цій області набув метод скінченних елементів, який ефективно використовується інженерами і прикладними математиками. Однак існує цілий ряд випадків коли застосовність цього підходу є проблематичною. Перш за все це стосується задач у необмежених областях. Саме в цьому випадку практично поза конкуренцією є методи, що ґрунтуються на граничних інтегральних рівняннях. Шляхом проведення аналітичної роботи такі задачі вдається звести до значно простіших і будувати наближені схеми власне для останніх. На кафедрі обчислювальної математики Львівського університету такий підхід розвивається на протязі значного часу і в цьому напрямі отримано вагомі здобутки, які відображені у багаточисленних публікаціях, в тому числі у зарубіжних журналах. За час виконання даної держбюджетної теми було отримано такі основні результати:

- Побудовано комбінації методів часткової дискретизації (перетворення Лагерра, перетворення Келлі, метод Роте) і граничних інтегральних рівнянь для наближеного розв'язування нестаціонарних задач для рівнянь параболічного і гіперболічного типів, зокрема: рівняння теплопровідності у суттєво-просторовій області; рівняння Стокса; еволюційне рівняння гравітаційних хвиль на вільній поверхні в осесиметричному випадку.
- Розроблено алгоритми визначення розмірів і місцезнаходження обмеженого включення у частково-необмеженій області для обернених граничних задач нестаціонарної теплопровідності. Застосовано гібридний метод для оберненої задачі реконструкції обмеженого включення і тріщини в частково-необмеженій області.

- Обґрунтовано алгоритми розв’язування осесиметричних задач у електронній оптиці. Розроблено алгоритми розв’язування граничних задач теорії потенціалу в істотно просторовій постановці з використанням апарату функцій Гріна та методу Шварца. Побудовано та досліджено алгоритм розв’язування стаціонарних осесиметричних самоузгоджених задач. Створено відповідне програмне забезпечення.
- Розроблено чисельно-аналітичний підхід розв’язування двовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма першого і другого роду з сингулярними ядрами.
- Досліджено ітераційно-різницеві методи з єдиного погляду використовуючи схему Ф.А. Потра причому за слабших вимог до гладкості нелінійного оператора рівняння ніж було відомо в літературі. Запропоновано нові методи для розв’язування нелінійних рівнянь і на низці відомих тестових задач виконано числове дослідження цих методів та відомих методів аналогічного класу. Також проведено глибше дослідження деяких відомих ітераційних методів як для нелінійних операторних рівнянь, так і для нелінійних задач про найменші квадрати.

В першому розділі розглядаються питання чисельного розв’язування прямих еволюційних задач. Зокрема розглядаються нестаціонарні задачі для рівнянь теплопровідності та Стокса і задача поширення гравітаційних хвиль у контейнері з вільною поверхнею.

Другий розділ в основному присвячений чисельному розв’язуванню обернених еволюційних задач. При цьому основна увага зосереджена на обернених граничних задачах в частково-необмежених областях.

В третьому розділі на основі методу інтегральних рівнянь, розв’язуються граничні задачі теорії потенціалу в суттєво просторовій постановці, будуються наближені схеми розв’язування інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.

Четвертий розділ присвячений дослідженню чисельних методів розв’язування нелінійних рівнянь. Зокрема, запропоновано нові методи для розв’язування нелінійних рівнянь і на низці відомих тестових задач виконано числове дослідження цих методів та відомих методів аналогічного класу. Також проведено глибше дослідження деяких відомих ітераційних методів як для нелінійних операторних рівнянь, так і для нелінійних задач про найменші квадрати.

Ефективність розроблених методів перевіряється проведенням обчислювальних експериментів та порівняннями з існуючими результатами. Числові результати представлені в роботі у вигляді таблиць, графіків, а також за допомогою малюнків та іншого графічного матеріалу.

1 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У цьому розділі розглядаються питання побудови наближеного розв'язку таких трьох різнопланових нестаціонарних задач: першої початково-крайової задачі для системи рівнянь Стокса; еволюційної задачі на вільній поверхні осесиметричного контейнера та тривимірної за просторовими координатами нестаціонарної задачі теплопровідності. Загальна схема чисельного розв'язування полягає в наступному: спершу здійснюється часткова дискретизація вихідної задачі за часовою змінною за допомогою того чи іншого інтегрального перетворення; далі застосовується метод граничних інтегральних рівнянь; повна дискретизація зроблена методами типу квадратур.

1.1 Чисельне розв'язування першої початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в R^3

1.1.1 Формулювання задачі

Числове розв'язування початково-крайових задач математичної фізики є важливою проблемою обчислювальної математики. Розглянемо наближене розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності у двозв'язній області. Така задача часто виникає в контексті розв'язування обернених задач реконструкції гладких тривимірних включень. Зокрема, у разі використання ітераційного методу Ньютона на кожній ітерації доводиться розв'язувати прямі задачі теплопровідності [59].

Для напівдискретизації задачі за часовою змінною використовують різні методи – метод Роте [57], який дає змогу отримати перший чи другий порядок

апроксимації за часовою змінною; метод Лагерра, похибка апроксимації якого невідома тощо. Ми застосуємо метод, що ґрунтується на використанні перетворення Лапласа та апроксимації оберненого перетворення Лапласа. Такий підхід є ефективним, оскільки у випадку аналітичності вхідних даних він має експоненціальний порядок апроксимації. У підсумку вихідна нестаціонарна задача зводиться до сукупності стаціонарних задач, які можна розв'язувати паралельно. Для наближеного розв'язування стаціонарних задач доцільно використовувати метод граничних інтегральних рівнянь, що дає змогу побудувати ефективний метод розв'язування вихідної задачі з експоненціальним порядком апроксимації як для часової, так і для просторових змінних. Головне наше завдання – перевірка застосовності комбінації методів перетворення Лапласа та граничних інтегральних рівнянь, дослідження особливостей практичної реалізації методу та проблем, які виникають у процесі його використання. Нехай $D \subset R^3$ – двозв'язна область, обмежена поверхнями Γ_1 і Γ_2, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Необхідно знайти обмежену функцію $u(x,t)$, $u \in C^{2,1}(D \times (0,\infty)) \cap C(\overline{D} \times [0,\infty))$, яка задовольняє нестаціонарне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad (x,t) \in D \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

нульову початкову умову

$$u(x,0) = 0, \quad x \in D, \tag{1.2}$$

і граничні умови Діріхле

$$u(x,t) = f_1(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty); \tag{1.3}$$

$$u(x,t) = f_2(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty). \tag{1.4}$$

Уважаємо, що граничні функції обмежені, неперервні й задовольняють умови погодженості $f_1(x,0) = 0$, $x \in \Gamma_1$ і $f_2(x,0) = 0$, $x \in \Gamma_2$.

Будемо розглядати границі Γ_1 і Γ_2, дифеоморфні одиничній сфері ∂B:

$$\partial B = \left\{ p(s,t),\ p(s,t) = \begin{bmatrix} \sin(s)\cos(t) \\ \sin(s)\sin(t) \\ \cos(s) \end{bmatrix} (s,t) \in [0;\pi] \times [0;2\pi) \right\}. \qquad (1.5)$$

Вважаємо, що задано аналітичні функції $q_1 : \partial B \to \Gamma_1$, $q_2 : \partial B \to \Gamma_2$, які описують вигляд поверхонь Γ_1 і Γ_2 відповідно. У разі потреби будемо розглядати функції $q_i : (s,t) \to \Gamma_i$ як функції двох скалярних аргументів.

На рис. 1.1 показано приклад внутрішньої поверхні Γ_1 і зовнішньої – Γ_2, описуваних наступними функціями:

$$q_1(x,y,z) = \left(x^2 + 0.3x^3 + 0.7\left(y^2 + 0.3y^3\right) + z^2 + 0.3z^3\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

$$q_2(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1.6x\sin(2x) \\ 1.6y\sin(2y) \\ 1.6z\sin(2z) \end{bmatrix}.$$

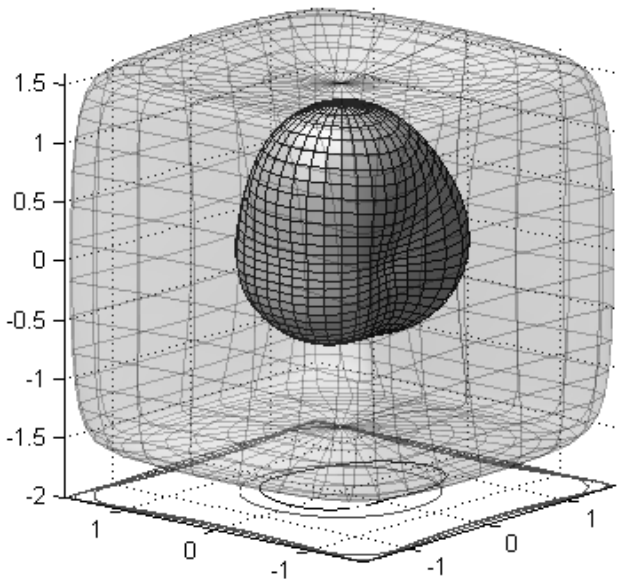


Рисунок 1.1 – Внутрішня поверхня Γ_1 та зовнішня Γ_2

Зроблені припущення на граничні функції та область дають підстави стверджувати, що класичний розв’язок задачі (1.1) – (1.4) існує і єдиний [24]

1.1.2 Перетворення Лапласа та напівдискретизація задачі за часом

Нехай $f(t)$ – функція дійсної змінної така, що

$$f(t)=0, t<0;$$

при $t>0$ функція $f(t)$ має на будь-якому проміжку не більше, ніж скінченну кількість розривів першого роду; при $t\to\infty$ функція $f(t)$ має обмежений степінь зростання

$$\exists(M,a):|f(t)|\le Me^{at}.$$

Перетворення Лапласа функції $f(t)$ має вигляд

$$L(f)=F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt, \quad p=\sigma+i\tau. \tag{1.6}$$

Інтеграл (1.6) є збіжний при $\mathrm{Re}(p)>a_0$, де a_0 – степінь зростання функції $f(t)$, причому $F(p)$ – аналітична функція.

Будемо використовувати таку властивість перетворення Лапласа [21]:

$$L(f'(t))=pF(p)-f(0),\ \mathrm{Re}(p)>a_0. \tag{1.7}$$

Оскільки функція $u(x,t)$ обмежена за часовою змінною, тобто її степінь зростання дорівнює 0, то до обох частин рівняння (1.1) можна застосувати перетворення Лапласа за часовою змінною. З урахуванням властивості (1.7) і нульової початкової умови в просторі зображень отримаємо таке рівняння:

$$\Delta U(x,p)-pU(x,p)=0, \quad x\in D, \quad \mathrm{Re}(p)>0, \tag{1.8}$$

де $U(x,p)=L(u(x,t))$.

На границях області функція $U(x,p)$ задовольняє такі граничні умови:

$$U(x,p)=F_1(x,p), \quad x\in\Gamma_1, \quad \mathrm{Re}(p)>0; \tag{1.9}$$

$$U(x,p)=F_2(x,p), \quad x\in\Gamma_2, \quad \mathrm{Re}(p)>0, \tag{1.10}$$

де $F_1(x,p)=L(f_1(x,t)), \quad F_2(x,p)=L(f_2(x,t))$.

Отже, задачі (1.1)–(1.4) у просторі зображень відповідає гранична задача для рівняння Гельмгольца з комплексним параметром (1.8)–(1.10).

Для відомого розв'язку $U(x,p)$ розв'язок вихідної задачі (1.1)–(1.4) можна знайти у вигляді оберненого перетворення Лапласа, описуваного інтегралом Мелліна [21]

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{z-i\infty}^{z+i\infty}e^{pt}U(x,p)dp\,,\quad z>0\,. \tag{1.11}$$

Для напівдискретизації задачі (1.1)–(1.4) за часовою змінною необхідно апроксимувати інтегральне подання (1.11).

Один з підходів до апроксимації оберненого перетворення Лапласа запропонований у [80]. Розглянуто комплекснозначні функції U комплескної змінної z. Якщо U можна голоморфно поширити на множину $C\setminus\Sigma_\delta$, де

$$\Sigma_\delta=\left\{z\in C:\left|\arg(-z)\right|\le\delta,\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}\right\},$$

а також існує $M>0$ таке, що

$$\left|U(z)\right|\le\frac{M}{|z|},\quad z\in C\setminus\Sigma_\delta,$$

тобто $\left|U(z)\right|=O(1/|z|)$, то для знаходження оберненого перетворення Лапласа функції U запропоновано квадратурну формулу, яка ґрунтується на застосуванні sinc-квадратури до інтеграла (1.11) зі спеціальним контуром інтегрування:

$$\gamma(\omega)=\lambda(1-\sin(\alpha+i\omega)),\quad \omega\in R\,, \tag{1.12}$$

де $\lambda>0$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\delta$ – довільні параметри, що визначають геометрію контура (1.12).

У роботі [68] з'ясовано, що зображення розв'язку задачі теплопровідності $U(x,p)$ як функції комплексного аргумента p можна голоморфно поширити на множину $Z=C\setminus(-\infty,0]$, а також існує константа $M>0$ така, що

$$\left\|U(\cdot,p)\right\|_X\le\frac{M}{|p|},\quad p\in Z\,.$$

Тут X – простори Соболєва $H^k(D)$, $k = 0,1,2,\ldots$

Отже, у нашому випадку можна застосувати підхід [80] та використати контур (1.12) для довільних $\lambda > 0$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, який є лівою гілкою гіперболи з фокусом у точці $(1;0)$ та асимптотами $\pm|\arg(-z)| = \alpha$. На рис. 1.2 зображено вигляд $\gamma(\omega)$ при $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

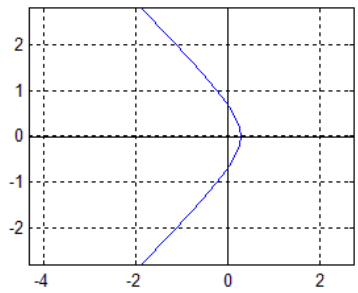


Рисунок 1.2 – Вигляд $\gamma(\omega)$ при $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Параметризуємо (1.11) за допомогою контуру (1.12), отримаємо

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t\gamma(w)} U(x,\gamma(\omega))\gamma'(\omega)d\omega. \tag{1.13}$$

Нехай $N_t > 0$, $N_t \in N$, $h_{N_t} = \ln N_t / N_t$, $\omega_j^{(N_t)} = h_{N_t} j$. Інтеграл (1.13) апроксимуємо за допомогою такої квадратурної формули [68]

$$\left(T_{N_t}U\right)(x,t) = \frac{h_{N_t}}{2\pi i}\sum_{j=-N_t}^{N_t} e^{t\gamma\left(\omega_j^{(N_t)}\right)} U\left(x,\gamma\left(\omega_j^{(N_t)}\right)\right)\gamma'\left(\omega_j^{(N_t)}\right). \tag{1.14}$$

Позначимо $s_j^{(N_t)} = \gamma\left(\omega_j^{(N_t)}\right)$ і $\gamma_j^{(N_t)} = h_{N_t}\gamma'\left(\omega_j^{(N_t)}\right)/2\pi i$, отримаємо

$$\left(T_{N_t}U\right)(x,t) = \sum_{j=-N_t}^{N_t} \gamma_j^{(N_t)} e^{ts_j^{(N_t)}} U\left(x, s_j^{(N_t)}\right). \tag{1.15}$$

Зазначимо, що для обчислення $\left(T_{N_t}U\right)(x,t)$ при різних t використовують той

самий набір значень $U\left(x, s_j^{(N_t)}\right)$.

Виконується така оцінка похибки апроксимації (1.15) [80]:

$$\left\| u(x,t) - \left(T_{N_t} U\right)(x,t) \right\|_X \le C_1 e^{-cN_t / \ln N_t}, \quad t \in [t_0, t_1] \subset (0, \infty). \tag{1.16}$$

Оцінка (1.16) справджується для скінченних підінтервалів $[t_0, t_1] \subset (0, \infty)$, причому $C_1 \sim e^{\Lambda t}$, $\Lambda = t_1 / t_0$.

У випадку наближеного обчислення $U\left(x, s_j^{(N_t)}\right)$ похибку апроксимації (1.15) можна оцінити співвідношенням

$$\begin{aligned} &\left\| u(x,t) - \left(T_{N_t} U_h\right)(x,t) \right\|_X \le C_1 e^{-cN_t / \ln N_t} + \\ &+ C_2 \sup_{j=-N_t,\ldots,N_t} \left\| U\left(x, s_j^{(N_t)}\right) - U_h\left(x, s_j^{(N_t)}\right) \right\|_X . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Як і (1.16), оцінка (1.17) справджується для $t \in [t_0, t_1] \subset (0, \infty)$ і $C_1 \sim e^{\Lambda t}$, $C_2 \sim e^{\Lambda t}$, $\Lambda = t_1 / t_0$.

Оцінки (1.16) і (1.17) засвідчують, що апроксимація (1.15) має експоненціальну точність.

У разі застосування описаного підходу, для знаходження наближеного розв'язку задачі (1.1) – (1.4) необхідно обчислити $U_j^{(N_t)}(x) \approx U\left(x, s_j^{(N_t)}\right)$, тобто розв'язати сукупність задач (1.8) – (1.10) при $p = s_j^{(N_t)}$:

$$\Delta U_j^{(N_t)}(x) - s_j^{(N_t)} U_j^{(N_t)}(x) = 0, \; x \in D; \tag{1.18}$$

$$U_j^{(N_t)}(x) = F_{1,j}^{(N_t)}(x), \quad x \in \Gamma_1; \tag{1.19}$$

$$U_j^{(N_t)}(x) = F_{2,j}^{(N_t)}(x), \quad x \in \Gamma_2. \tag{1.20}$$

Тут $F_{1,j}^{(N_t)}(x) = F_1\left(x, s_j^{(N_t)}\right)$, $\quad F_{2,j}^{(N_t)}(x) = F_2\left(x, s_j^{(N_t)}\right)$.

Важливо наголосити, що задачі (1.18) – (1.20) є незалежними одна від одної, що дає змогу розв'язувати їх паралельно.

1.1.3 Наближене розв'язування стаціонарних задач

Для наближеного розв'язування задач (1.18) – (1.20) будемо використовувати метод граничних інтегральних рівнянь.

Нехай $\widetilde{q}_j = \sqrt{-s_j^{(N_t)}}$, $\widetilde{q}_j = q_j^R + iq_j^I$, $q_j^I < 0$. Фундаментальні розв'язки рівнянь (1.18) мають вигляд

$$\Phi_j^{(N_t)}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{q_j|x-y|}}{|x-y|}, \quad x,y \in R^3, \quad x \neq y. \tag{1.21}$$

Тут $q_j = q_j^I - iq_j^R$.

Функції $U_j^{(N_t)}(x)$ можна записати у вигляді суперпозиції потенціалів подвійного шару на границях Γ_1 і Γ_2:

$$U_j^{(N_t)}(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_{j,1}^{(N_t)}(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_1(y)} ds_y + \int_{\Gamma_2} \varphi_{j,2}^{(N_t)}(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_2(y)} ds_y. \tag{1.22}$$

Тут $\varphi_{j,1}^{(N_t)}(y)$, $\varphi_{j,2}^{(N_t)}(y)$ – густини потенціалів, ν_1, ν_2 – нормалі до поверхонь Γ_1 і Γ_2, зовнішні щодо до області D. Обчислення ν_1 і ν_2 детальніше описано в нижче.

Уведемо такі інтегральні оператори:

$$\left(A_j^{(N_t)}\mu\right)(x) = \int_{\Gamma_1} \mu(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_1(y)} ds_y, \quad x \in \Gamma_1; \tag{1.23}$$

$$\left(B_j^{(N_t)}\mu\right)(x) = \int_{\Gamma_2} \mu(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_2(y)} ds_y, \quad x \in \Gamma_1; \tag{1.24}$$

$$\left(K_j^{(N_t)}\mu\right)(x) = \int_{\Gamma_1} \mu(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_1(y)} ds_y, \quad x \in \Gamma_2; \tag{1.25}$$

$$\left(L_j^{(N_t)}\mu\right)(x) = \int_{\Gamma_2} \mu(y)\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_2(y)} ds_y, \quad x \in \Gamma_2. \tag{1.26}$$

З вигляду (1.21) очевидно, що

$$\frac{\partial \Phi_j^{(N_t)}(x,y)}{\partial \nu_l(y)} = \frac{e^{q_j|x-y|}}{4\pi} \frac{(\nu_l(y), x-y)}{|x-y|^3}\left[1+q_j|x-y|\right], \quad l=1,2. \tag{1.27}$$

Ядра операторів $B_j^{(N_t)}$ і $K_j^{(N_t)}$ є неперервними, ядра операторів $A_j^{(N_t)}$ і $L_j^{(N_t)}$ мають слабку особливість порядку $1/|x-y|$.

Спрямуємо точку x у співвідношенні (1.22) на границі Γ_1 і Γ_2 та врахуємо властивості потенціалу подвійного шару, тоді з граничних умов (1.19) і (1.20) отримаємо сукупність систем інтегральних рівнянь для знаходження густин $\varphi_{j,1}^{(N_t)}$ і $\varphi_{j,2}^{(N_t)}$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\varphi_{j,1}^{(N_t)}(x) + \left(A_j^{(N_t)}\varphi_{j,1}^{(N_t)}\right)(x) + \left(B_j^{(N_t)}\varphi_{j,2}^{(N_t)}\right)(x) = F_{1,j}^{(N_t)}(x),\ x\in\Gamma_1; \\ -\frac{1}{2}\varphi_{j,2}^{(N_t)}(x) + \left(K_j^{(N_t)}\varphi_{j,1}^{(N_t)}\right)(x) + \left(L_j^{(N_t)}\varphi_{j,2}^{(N_t)}\right)(x) = F_{2,j}^{(N_t)}(x),\ x\in\Gamma_2. \end{cases} \tag{1.28}$$

Для спрощення записів надалі будемо розглядати одну систему з сукупності (1.28), опустивши індекси j і N_t. Властивості систем і метод їхнього розв'язування ідентичні для всіх систем з сукупності (1.28).

Зведемо отриману систему до систем інтегральних рівнянь на одиничній сфері ∂B. Позначимо

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_1(q_1(\xi)),\ \varphi_2(\xi) = \varphi_2(q_2(\xi)), \quad \xi\in\partial B,$$

$$(A\mu)(\xi) = \int_{\partial B} \mu(\eta)\overline{A}(\xi,\eta)ds_\eta, \quad \overline{A}(\xi,\eta) = \frac{\partial\Phi(q_1(\xi),q_1(\eta))}{\partial\nu_1(q_1(\eta))}J_{q_1}(\eta); \tag{1.29}$$

$$(B\mu)(\xi) = \int_{\partial B} \mu(\eta)\overline{B}(\xi,\eta)ds_\eta, \quad \overline{B}(\xi,\eta) = \frac{\partial\Phi(q_1(\xi),q_2(\eta))}{\partial\nu_2(q_2(\eta))}J_{q_2}(\eta); \tag{1.30}$$

$$(K\mu)(\xi) = \int_{\partial B} \mu(\eta)\overline{K}(\xi,\eta)ds_\eta, \quad \overline{K}(\xi,\eta) = \frac{\partial\Phi(q_2(\xi),q_1(\eta))}{\partial\nu_1(q_1(\eta))}J_{q_1}(\eta); \tag{1.31}$$

$$(L\mu)(\xi) = \int_{\partial B} \mu(\eta)\overline{L}(\xi,\eta)ds_\eta, \quad \overline{L}(\xi,\eta) = \frac{\partial\Phi(q_2(\xi),q_2(\eta))}{\partial\nu_2(q_2(\eta))}J_{q_2}(\eta); \tag{1.32}$$

$$F_1(\xi) = F_1(q_1(x)), \quad F_2(\xi) = F_2(q_2(x)).$$

Тут $J_{q_1}(\eta)$ і $J_{q_2}(\eta)$ – якобіани переходу від ∂B до Γ_1 і Γ_2 в точці η. Обчислення якобіанів детальніше описано нижче.

З урахуванням зроблених позначень отримаємо систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\varphi_1(\xi)+(A\varphi_1)(\xi)+(B\varphi_2)(\xi)=F_1(\xi),\ \xi\in\partial B; \\ -\frac{1}{2}\varphi_2(\xi)+(K\varphi_1)(\xi)+(L\varphi_2)(\xi)=F_2(\xi),\ \xi\in\partial B. \end{cases} \tag{1.33}$$

Для наближеного розв'язування системи (1.33) використаємо метод типу Нистрьома.

Будемо застосовувати апроксимаційні оператори для операторів A, B, K, L на підставі кубатурних формул для апроксимації інтегралів на одиничній сфері [23, 94].

На одиничній сфері ∂B для заданого параметра дискретизації N виберемо вузли кубатурних формул так:

$$s_{ij}=p\left(s_i^{(2)},s_j^{(1)}\right);\quad i\in S_1,\quad j=S_2;\quad S_1=\{1,\ldots,N\};\quad S_2=\{0,\ldots,2N-1\};$$

$$s_i^{(1)}=\frac{\pi i}{N},\quad s_j^{(2)}=\frac{\pi j}{N}-\frac{\pi}{2N}.$$

Для апроксимації інтегралів з неперервною підінтегральною функцією застосуємо формули

$$\int_{\partial B} f(\eta)ds_\eta \approx Q_1^{(N)}(f)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f\left(s_{ij}\right)\omega_i^{(1)}; \tag{1.34}$$

$$\omega_i^{(1)}=\frac{2\pi}{N^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\frac{\cos\left\{(2i-1)\frac{\pi n}{2N}\right\}}{1-4n^2}\right]. \tag{1.35}$$

Наведена кубатурна формула є формулою без насичення точності й у випадку аналітичності $f(\eta)$ в області $\partial B=\partial B\setminus\{n_t,-n_\tau\},\ n_\tau=(0,0,1)^T$ має експоненціальну точність [94]:

$$\left|\int_{\partial B} f(\eta)ds_\eta - Q_1^{(N)}(f)\right| \le C_3 e^{-C_4 N}.$$

На підставі формули (1.34) оператори B і K апроксимуємо за допомогою таких операторів:

$$(B_N\mu)(\xi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\mu(s_{ij})\overline{B}(\xi, s_{ij})\omega_i^{(1)}; \tag{1.36}$$

$$(K_N\mu)(\xi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\mu(s_{ij})\overline{K}(\xi, s_{ij})\omega_i^{(1)}. \tag{1.37}$$

Для слабкосингулярних інтегралів з особливістю порядку $1/|\xi-\eta|$ використаємо таку кубатурну формулу:

$$\int_{\partial B}\frac{f(\xi,\eta)}{|\xi-\eta|}ds_\eta \approx Q_2(\xi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(n_\tau, s_{ij})\omega_{ij}^{(2)}(\xi); \tag{1.38}$$

$$\omega_{ij}^{(2)}(\xi) = \sum_{c=1}^{N}\sum_{d=0}^{2N-1} l_{cd}\left(T_\xi^{-1}s_{ij}\right)\omega_i^{(3)}; \tag{1.39}$$

$$\omega_i^{(3)} = \frac{2\pi}{N^2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos\left\{(2i-1)\frac{\pi n}{2N}\right\}\right]. \tag{1.40}$$

У співвідношенні (1.39) $T_\xi : \partial B \to \partial B$ – деяке лінійне ортогональне перетворення таке, що $T_\xi\xi = (0,0,1)^T$. Як перетворення T_ξ будемо використовувати комбінацію двох поворотів уздовж осей сферичних координат. Нехай сферичні координати точки ξ дорівнюють (s_ξ, t_ξ). Тоді

$$T_\xi = D_s(s_\xi)\circ D_t(t_\xi); \tag{1.41}$$

$$D_s(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}; \quad D_t(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функції $l_{cd}(s,t)$ визначені так:

$$l_{cd}(s,t) = l_c^{(2)}(s)l_d^{(1)}(t) + l_{\tilde{c}}^{(2)}(s)l_{\tilde{d}}^{(1)}(t); \tag{1.42}$$

$$\tilde{c} = 2N - c + 1, \quad \tilde{d} = \mathrm{mod}_{2N}(d + N - 1) + 1;$$

$$l_i^{(k)}(s)=\frac{1}{2N}\sum_{m=-N}^{N}{}'\cos\left\{m\left(s-s_i^{(k)}\right)\right\},\quad i\in S_k,\quad k=1,2.$$

Як і (1.34), кубатурна формула (1.38) є формулою без насичення точності й у випадку аналітичності $f(\xi,\eta)$ на $\partial B\times\partial B$, $\xi\neq\eta$ має експоненціальну точність:

$$\max_{\xi\in\partial B}\left|\int_{\partial B}\frac{f(\xi,\eta)}{|\xi-\eta|}ds_\eta-Q_2(\xi)\right|\le C_5e^{-C_6N}.$$

На підставі формули (1.38) оператори A і L апроксимуємо за допомогою таких операторів:

$$(A_N\mu)(\xi)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\mu(s_{ij})\widetilde{A}(n_\tau,s_{ij})\omega_{ij}^{(2)}(\xi);\tag{1.43}$$

$$(L_N\mu)(\xi)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\mu(s_{ij})\widetilde{L}(n_\tau,s_{ij})\omega_{ij}^{(2)}(\xi);\tag{1.44}$$

$$\widetilde{A}(\xi,\eta)=\overline{A}(\xi,\eta)|\xi-\eta|,\quad \widetilde{L}(\xi,\eta)=\widetilde{L}(\xi,\eta)|\xi-\eta|.$$

Отже, для системи інтегральних рівнянь (1.33) отримаємо систему апроксимаційних рівнянь

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_1(\xi)+(A_N\widetilde{\varphi}_1)(\xi)+(B_N\widetilde{\varphi}_2)(\xi)=F_1(\xi),\ \xi\in\partial B;\\ -\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_2(\xi)+(K_N\widetilde{\varphi}_1)(\xi)+(L_N\widetilde{\varphi}_2)(\xi)=F_2(\xi),\ \xi\in\partial B.\end{cases}\tag{1.45}$$

Задовольняючи рівняння системи (1.45) у вузлах кубатурних формул s_{ij}, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення наближених значень густин $\varphi_{ij}^{(1)}\approx\widetilde{\varphi}_1(s_{ij})$, $\varphi_{ij}^{(2)}\approx\widetilde{\varphi}_2(s_{ij})$

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\varphi_{ij}^{(1)}+A_{ij}^{(N)}\varphi^{(1)}+B_{ij}^{(N)}\varphi^{(2)}=F_{ij}^{(1)},\ i\in S_1,j\in S_2;\\ -\frac{1}{2}\varphi_{mn}^{(1)}+K_{mn}^{(N)}\varphi^{(1)}+L_{mn}^{(N)}\varphi^{(2)}=F_{mn}^{(2)},\ m\in S_1,n\in S_2,\end{cases}\tag{1.46}$$

де

$$A_{ij}^{(N)}\varphi^{(1)}=\sum_{c=1}^{N}\sum_{d=0}^{2N-1}\varphi_{cd}^{(1)}\widetilde{A}(n_\tau,s_{cd})\omega_{cd}^{(2)}(s_{ij});$$

$$B_{ij}^{(N)}\varphi^{(2)} = \sum_{c=1}^{N}\sum_{d=0}^{2N-1}\varphi_{cd}^{(2)}\overline{B}\left(s_{ij}, s_{cd}\right)\omega_i^{(1)};$$

$$K_{ij}^{(N)}\varphi^{(2)} = \sum_{c=1}^{N}\sum_{d=0}^{2N-1}\varphi_{cd}^{(2)}\overline{K}\left(s_{ij}, s_{cd}\right)\omega_i^{(1)};$$

$$L_{ij}^{(N)}\varphi^{(1)} = \sum_{c=1}^{N}\sum_{d=0}^{2N-1}\varphi_{cd}^{(1)}\widetilde{L}\left(n_\tau, s_{cd}\right)\omega_{cd}^{(2)}\left(s_{ij}\right);$$

$$F_{ij}^{(1)} = F_1\left(s_{ij}\right), \quad F_{ij}^{(2)} = F_2\left(s_{ij}\right).$$

Розв'яжемо систему (1.46), на підставі співвідношень (1.22) і (1.34) наближений розв'язок $U_N(x)$ визначимо за допомогою такого співвідношення

$$U_N(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\left\{\varphi_{ij}^{(1)}\frac{\partial\Phi\left(x, q_1\left(s_{ij}\right)\right)}{\partial\nu_1\left(s_{ij}\right)}J_{q_1}\left(s_{ij}\right) + \varphi_{ij}^{(2)}\frac{\partial\Phi\left(x, q_2\left(s_{ij}\right)\right)}{\partial\nu_2\left(s_{ij}\right)}J_{q_2}\left(s_{ij}\right)\right\}\omega_i^{(1)}. \quad (1.47)$$

Нехай $U_{j,N}^{(N_t)}(x) \approx U_j^{(N_t)}(x)$ – наближені розв'язки задач сукупності (1.18) – (1.20). Тоді з формули (1.15) отримаємо співвідношення для знаходження наближеного розв'язку вихідної задачі (1.1) – (1.4) для певних x і t

$$u_{N_t,N}(x,t) = \sum_{j=-N_t}^{N_t}\gamma_j^{(N_t)}e^{ts_j^{(N_t)}}U_{j,N}^{(N_t)}(x). \quad (1.48)$$

Зазначимо, що матриця системи (1.46) має розмірність $4N^2$ та є цілковито заповненою. З наведених співвідношень легко побачити, що обчислення елементів матриці, а особливо частин $A_{ij}^{(N)}$ і $L_{ij}^{(N)}$ потребує значних обчислювальних затрат – $O\left(N^6\right)$ операцій. Тому актуальним є питання оптимізації процесу формування елементів матриці системи. Ефективним підходом у цьому разі є кешування даних – обчислення проміжних результатів та їхнє використання в потрібних випадках без повторного обчислення. Найкритичніше в системі (1.46) кешування значень ваг кубатурних формул $\omega_{cd}^{(2)}\left(s_{ij}\right)$ та $\omega_i^{(1)}$, які можна обчислити один раз. У такому випадку обчислювальні затрати на формування матриці системи становитимуть $O\left(N^3\right)$ операцій. Оскільки для наближеного знаходження розв'язку вихідної задачі

необхідно розв'язати $2N_t+1$ стаціонарних задач, то таке зменшення порядку операцій відчутно прискорює процес обчислень. Також додатково можна кешувати значення однакових частин функцій $\dfrac{\partial\Phi_j(x,y)}{\partial\nu_l(y)}$ у вузлових точках, хоча ефект від цього менший, ніж у випадку кешування ваг кубатурних формул.

1.1.4 Числові експерименти

У процесі обчислення елементів матриць систем необхідно обчислювати одиничні вектори зовнішніх нормалей ν_1 і ν_2 до поверхонь Γ_1 і Γ_2, а також якобіани переходу між ∂B до Γ_1 і Γ_2.

Якщо функції q_i задані як

$$q_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix} x^{(k)}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \\ y^{(k)}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \\ z^{(k)}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \end{bmatrix},$$

то одиничні нормалі $\nu_1(\eta)$ і $\nu_2(\eta)$ обчислюємо за формулами [47]

$$G^{(k)}=\begin{bmatrix} \left(y_1^{(k)}z_2^{(k)}-y_2^{(k)}z_1^{(k)}\right)\eta_3+\left(y_3^{(k)}z_1^{(k)}-y_1^{(k)}z_3^{(k)}\right)\eta_2+\left(y_2^{(k)}z_3^{(k)}-y_3^{(k)}z_2^{(k)}\right)\eta_1 \\ \left(z_1^{(k)}x_2^{(k)}-z_2^{(k)}x_1^{(k)}\right)\eta_3+\left(z_3^{(k)}x_1^{(k)}-z_1^{(k)}x_3^{(k)}\right)\eta_2+\left(z_2^{(k)}x_3^{(k)}-z_3^{(k)}x_2^{(k)}\right)\eta_1 \\ \left(x_1^{(k)}y_2^{(k)}-x_2^{(k)}y_1^{(k)}\right)\eta_3+\left(x_3^{(k)}y_1^{(k)}-x_1^{(k)}y_3^{(k)}\right)\eta_2+\left(x_2^{(k)}y_3^{(k)}-x_3^{(k)}y_2^{(k)}\right)\eta_1 \end{bmatrix};$$

$$x_i^{(k)}(\eta)=\frac{\partial x^{(k)}(\eta)}{\partial\eta_i};\quad y_i^{(k)}(\eta)=\frac{\partial y^{(k)}(\eta)}{\partial\eta_i};\quad z_i^{(k)}(\eta)=\frac{\partial z^{k}(\eta)}{\partial\eta_i};$$

$$\nu_1(\eta)=\frac{G^{(1)}}{\left|G^{(1)}\right|};\quad \nu_2(\eta)=-\frac{G^{(2)}}{\left|G^{(2)}\right|}.$$

Якобіани $J_{q_k}(\eta)$ обчислюємо за формулою

$$J_{q_k}(\eta)=\sqrt{\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & y_3^{(k)}\\ z_1^{(k)} & z_2^{(k)} & z_3^{(k)}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & x_3^{(k)}\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ z_1^{(k)} & z_2^{(k)} & z_3^{(k)}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & x_3^{(k)}\\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & y_3^{(k)}\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}^2}\ . \qquad (1.49)$$

Якщо функції q_i задані як

$$q_k(s,t)=\begin{bmatrix}x^{(k)}(s,t)\\ y^{(k)}(s,t)\\ z^{(k)}(s,t)\end{bmatrix},$$

то $\nu_1(s,t)$ і $\nu_2(s,t)$ обчислюємо за формулами

$$\nu_1(s,t)=\frac{\dfrac{\partial q_1(s,t)}{\partial s}\times\dfrac{\partial q_1(s,t)}{\partial t}}{\left|\dfrac{\partial q_1(s,t)}{\partial s}\times\dfrac{\partial q_1(s,t)}{\partial t}\right|};\quad \nu_2(s,t)=-\frac{\dfrac{\partial q_2(s,t)}{\partial s}\times\dfrac{\partial q_2(s,t)}{\partial t}}{\left|\dfrac{\partial q_2(s,t)}{\partial s}\times\dfrac{\partial q_2(s,t)}{\partial t}\right|}, \qquad (1.50)$$

а якобіани $J_{q_k}(s,t)$ – за формулою

$$J_{q_k}(s,t)=\frac{\left|\dfrac{\partial q_k(s,t)}{\partial s}\times\dfrac{\partial q_k(s,t)}{\partial t}\right|}{\sin s}. \qquad (1.51)$$

Якщо граничні умови вихідної задачі (1.1) – (1.4) такі, що неможливо в аналітичному вигляді знайти пряме перетворення Лапласа (1.6) для формування граничних умов задачі (1.8) – (1.10), то одним з можливих варіантів є апроксимація прямого перетворення Лапласа.

У [8] наведено спосіб побудови *sinc*-квадратури для апроксимації інтегралів з областю інтегрування $(0,\infty)$, який дає змогу отримати таку квадратурну формулу:

$$\int_0^\infty F(z)dz\approx h\sum_{k=-N}^{N}F(kh),\quad h=\ln N/N,\quad F(z)=F\left(e^z\right)e^z. \qquad (1.52)$$

Також з’ясовано, що у випадку аналітичності функції F похибка апроксимації (1.52) має порядок $O\left(e^{-cN/\ln N}\right)$.

На підставі (1.52) отримуємо квадратурну формулу для апоксимації інтеграла (1.6)

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \approx h \sum_{k=-N}^{N} f(kh), \quad f(t) = e^{-pe^t} f\left(e^t\right)e^t. \tag{1.53}$$

За допомогою формули (1.53) можна обчислити значення граничних функцій $F_i(x,p)$ в умовах (1.9), (1.10) для потрібних значень x і p.

Оскільки інтеграл (1.6) збіжний при $\mathrm{Re}(p) > 0$, то формула (1.53) дає змогу обчислити $F_i(x,p)$ тільки при $\mathrm{Re}(p) > 0$. У разі застосування апроксимації оберненого перетворення Лапласа ця вимога зумовлює потребу підбирання параметрів контуру $\gamma(\omega)$ та N_t так, щоб $\mathrm{Re}\left(s_j^{(N_t)}\right) > 0$, $j = -N_t, \ldots, N_t$.

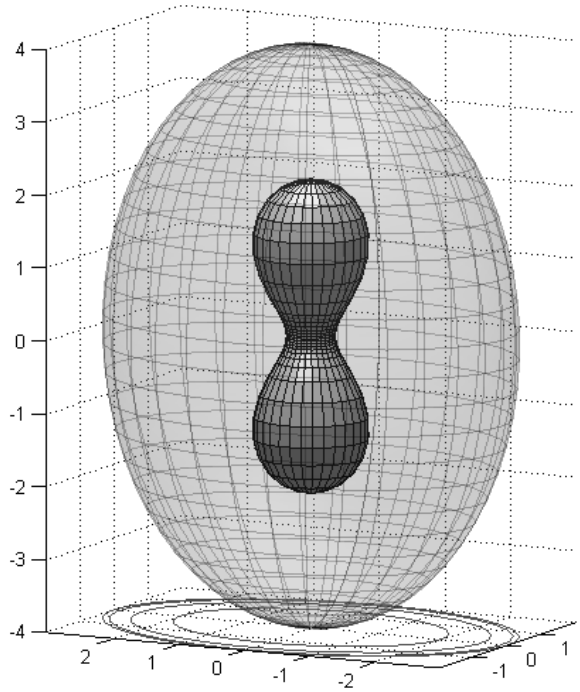


Рисунок 1.3 – Область D_2

Для числових експериментів будемо розглядати дві області – область D_1, зображену на рис. 1.3 та область D_2, границі якої Γ_1 і Γ_2 задамо так [94]:

$$q_1(s,t)=\left[\cos 2s+\sqrt{1.1-\sin^2 2s}\right]^{1/2}\begin{bmatrix}\sin(s)\cos(t)\\ \sin(s)\sin(t)\\ \cos(s)\end{bmatrix};$$

$$q_2(s,t)=\begin{bmatrix}2\sin(s)\cos(t)\\ 3\sin(s)\sin(t)\\ 4\cos(s)\end{bmatrix}.$$

Область D_2 зображено на рис. 1.3.

Приклад 1.1 У цьому прикладі перевіримо квадратурні формули (1.15) і (1.53) для апроксимації оберненого та прямого перетворення Лапласа, відповідно.

Як оригінал виберемо фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

$$G(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},\quad x,y\in R^3,\quad x\neq y,\quad t>0,$$

для якого зображенням буде фундаментальний розв’язок рівняння Гельмгольца:

$$\int_0^\infty e^{-pt}G(x,y,t)dt=G(x,y,p)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\tilde{q}|x-y|}}{|x-y|}.$$

За відомим p значення $\tilde{q}$ обчислимо, як у формулі (1.21).

Для фіксованих значень x, y та різних p порівняємо значення, отримані за допомогою квадратурної формули (1.53), застосованої до $G(x,y,t)$, з точним значенням перетворення Лапласа $G(x,y,p)$. В табл. 1.1 наведено значення абсолютної похибки формули (1.53), $(x,y)=(1;1)$.

Таблиця 1.1 – Похибка квадратурної формули для апроксимації прямого перетворення Лапласа

N_t	$p=1$	$p=0.5+2i$	$p=1-3i$
8	$1{,}634\cdot10^{-1}$	$4{,}653\cdot10^{-1}$	$4{,}760\cdot10^{-1}$
16	$4{,}585\cdot10^{-2}$	$2{,}427\cdot10^{-2}$	$6{,}519\cdot10^{-2}$
32	$5{,}265\cdot10^{-5}$	$4{,}590\cdot10^{-5}$	$6{,}535\cdot10^{-5}$
64	$6{,}346\cdot10^{-10}$	$8{,}446\cdot10^{-10}$	$5{,}975\cdot10^{-10}$

Для фіксованих значень x, y та різних t порівняємо значення, отримані за допомогою квадратурної формули (1.15), застосованої до $G(x,y,p)$, з точним значенням оберненого перетворення Лапласа $G(x,y,t)$. В табл. 1.2 наведено значення абсолютної похибки формули (1.15), $(x,y)=(0.5;\,2)$.

Таблиця 1.2 – Похибка квадратурної формули для апроксимації оберненого перетворення Лапласа

N_t	$t=0.2$	$t=1$	$t=5$
8	$2{,}435\cdot10^{-1}$	$6{,}348\cdot10^{-1}$	$4{,}736\cdot10^{-1}$
16	$6{,}425\cdot10^{-2}$	$6{,}493\cdot10^{-2}$	$3{,}759\cdot10^{-2}$
32	$1{,}384\cdot10^{-4}$	$2{,}854\cdot10^{-4}$	$7{,}264\cdot10^{-4}$
64	$8{,}746\cdot10^{-9}$	$2{,}967\cdot10^{-9}$	$4{,}902\cdot10^{-8}$

В обох випадках отримані результати підтверджують очікувану експоненціальну точність.

Приклад 1.2 Розглянемо вихідну задачу (1.1) – (1.4) з граничними умовами

$$f_1(x,t)=G(x,\tilde{y},t),\quad x\in\Gamma_1,\quad \tilde{y}\notin D;$$

$$f_2(x,t)=G(x,\tilde{y},t),\quad x\in\Gamma_2,\quad \tilde{y}\notin D.$$

У такому випадку точний розв’язок задачі $u(x,t)=G(x,\tilde{y},t)$, $x\in D$. У табл.1.3 наведено значення абсолютної похибки $\left|u_{N_t,N}(x,t)-u(x,t)\right|$ в різні моменти часу t в деякій точці $x\in D$.

Таблиця 1.3 – $\left|u_{N_t,N}(x,t)-u(x,t)\right|$

t	N, N_t	$D_1,\ x=(0,0,-1)^T$	$D_2,\ x=(0,2,0)^T$
0,2	8	$4{,}564\cdot10^{-1}$	$5{,}673\cdot10^{-1}$
	16	$3{,}562\cdot10^{-4}$	$3{,}904\cdot10^{-4}$
	32	$6{,}105\cdot10^{-8}$	$2{,}118\cdot10^{-8}$
1	8	$4{,}827\cdot10^{-1}$	$2{,}038\cdot10^{-1}$
	16	$3{,}985\cdot10^{-4}$	$8{,}345\cdot10^{-4}$
	32	$3{,}487\cdot10^{-8}$	$2{,}983\cdot10^{-8}$
5	8	$3{,}947\cdot10^{-1}$	$1{,}208\cdot10^{-1}$
	16	$9{,}834\cdot10^{-4}$	$2{,}402\cdot10^{-4}$
	32	$2{,}348\cdot10^{-8}$	$3{,}843\cdot10^{-8}$

З табл.1.3 бачимо, що експоненціальна точність дискретизації за часовою та просторовою змінними дає змогу отримати експоненціальну точність наближеного обчислення розв’язку вихідної задачі. Зазначимо, що в даному прикладі значення граничних функцій (1.9), (1.10) відомі точно.

Приклад 1.3 Розглянемо вихідну задачу (1.1) – (1.4) з такими граничними умовами:

$$f_1(x,t)=0,\quad x\in\Gamma_1,\quad \tilde{y}\notin D;\qquad\qquad f_2(x,t)=t^2e^{-t},\quad x\in\Gamma_2,\quad \tilde{y}\notin D.$$

У табл. 1.4 наведено значення наближеного розв’язку $u_{N_t,N}(x,t)$ в різні моменти часу t в деякій точці $x\in D$.

Таблиця 1.4 – $u_{N_t,N}(x,t)$

t	N, N_t	$D_1, x=(0,0,-1)^T$	$D_2, x=(0,2,0)^T$
0,2	8	0,0131784	0,0197291
	16	0,0126163	0,0188304
	32	0,0126125	0,0188273
1	8	0,2804715	0,3282537
	16	0,2626826	0,3028132
	32	0,2626492	0,3027833
5	8	0,3147810	0,2824509
	16	0,2881902	0,2503895
	32	0,2881694	0,2503622

Отримані результати підтверджують очікуваний порядок точності.

Отже, в даному пункті розглянуто один з підходів до наближеного розв’язування початково-крайової задачі теплопровідності. Зроблено припущення, що область є двозв’язною, а границі області дифеоморфні одиничній сфері. Для напівдискретизації за часовою змінною використано перетворення Лапласа, для наближеного розв’язування стаціонарних задач – метод граничних інтегральних рівнянь. Числові результати засвідчили очікуваний порядок точності, а також високу ефективність методу у випадку, коли в явному вигляді можна отримати зображення граничних умов вихідної задачі. Цікавою для подальшого дослідження є задача побудови апроксимацій прямого та оберненого перетворення Лапласа, які дадуть змогу виконувати ефективну напівдискретизацію задач за часовою змінною для ширших класів граничних умов.

1.2 Чисельне розв’язування однієї осесиметричної еволюційної задачі лінійного слошингу

1.2.1 Постановка задачі

Більшість нестаціонарних задач у прикладних застосуваннях полягає у знаходженні функції u, яка задовольняє певне диференціальне рівняння з частковими похідними (або систему рівнянь) з параболічним або гіперболічним операторами та відповідні граничні і початкові умови в обмеженій або необмеженій області $\Omega \in R^n$, $n = 2,3$. Проте, існують також інші класи нестаціонарних задач, у яких розв’язок шукають тільки на границі $\partial\Omega$. До таких задач належать еволюційні задачі з операторним коефіцієнтом, які виникають під час розв'язування задач слошингу [13].

У даному пункті розглядається еволюційна задача другого порядку з операторним коефіцієнтом на поверхні області з ребром у R^3. Оператор Діріхле - Неймана (операторний коефіцієнт задачі) визначається за допомогою мішаної граничної задачі Діріхле – Неймана для рівняння Гельмгольца. Для часової дискретизації початкової задачі використовується перетворення Лагерра, завдяки якому вона зводиться до послідовності операторних рівнянь. Для подальшого розв'язування застосовується метод граничних інтегральних рівнянь, який дає змогу записати операторні рівняння у інтегральному вигляді. Далі, зважаючи на осесиметричність області, до розв'язування отримується послідовність одновимірних інтегральних рівнянь другого роду, які містять дві особливості: особливість у густині при підході до кутової точки і логарифмічну особливість у ядрі. Повна дискретизація задачі здійснюється з використанням тригонометричних квадратур [74].

Чисельне розв'язування еволюційних задач на границі розглядається у [13, 52, 66]. У [52] для чисельного розв'язування абстрактної еволюційної задачі другого порядку з операторним коефіцієнтом на гладкій замкненій кривій використовується комбінація перетворення Лагерра і методу інтегральних рівнянь. Аналогічний підхід застосовано у [13] для знаходження розв'язку еволюційної задачі з операторним коефіцієнтом другого порядку на частині поверхні осесиметричної області з ребром. Перетворення Келі та метод інтегральних рівнянь для розв'язування такої ж задачі описані у [66].

Сформулюємо задачу. Нехай $\Omega \subset R^3$ – обмежена однозв'язна область з границею $\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де $\Gamma_i \in C^2, i = 1,2$, $\Gamma = \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$. Необхідно знайти функцію $u = \Gamma_1 \times [0,\infty) \to R$, яка задовольняє еволюційне рівняння другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,\infty) \tag{1.54}$$

та початкові умови

$$u\big|_{t=0} = \omega_1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{1.55}$$

Тут ω_1, ω_2, f – задані функції, а оператор A визначається як

$$Av = \frac{\partial \psi}{\partial \upsilon} \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.56}$$

де ψ – розв'язок граничної задачі Діріхле - Неймана для рівняння Гельмгольца

$$\Delta\psi - \delta^2\psi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.57}$$

$$\psi = v \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \upsilon} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{1.59}$$

де $\delta \geq 0$ – задана константа, υ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\Gamma_i, i = 1,2$.

Оператор A називають оператором Діріхле – Неймана або оператором Пуанкаре - Стєклова. Питання існування і єдиності розв'язку еволюційної задачі (1.54), (1.55) розглянуто у [65, 79]. Авторами було показано, що для $T > 0$, $\omega_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $\omega_1 \in L^2(\Gamma_1)$ і $f \in L^2(\Gamma_1 \times (0,T))$ задача (1.54), (1.55) має єдиний розв'язок у відповідному анізотропному просторі Соболєва $u \in L^\infty(0,T; H^{1/2}(\Gamma_1)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_1))$.

1.2.2 Інтегральні оператори для граничної задачі

Розглянемо такі інтегральні оператори:

$$\left(S_{ij}^k \psi\right)(x) = \int_{\Gamma_j} \psi(y) \Phi^k(x,y) \mathrm{d}s(y), \quad x \in \Gamma_i, \quad i,j,k = 1,2, \tag{1.60}$$

де

$$\Phi^1(x,y) = \frac{e^{-\delta|x-y|}}{2\pi|x-y|}$$

- фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца,

$$\Phi^2(x,y)=\frac{\partial\Phi^1(x,y)}{\partial\upsilon(x)}.$$

Після подання розв'язку задачі (1.57) – (1.59) у вигляді потенціалу простого шару функцію v можна записати як

$$v(x)=\sum_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{1}\mu_j\right)(x),\quad x\in\Gamma_1, \tag{1.61}$$

де μ_i - невідома густина на $\Gamma_i\,(i=1,2)$.

Припустимо, що граничні поверхні $\Gamma_i\,(i=1,2)$ утворені обертанням деяких кривих $L_i\,(i=1,2)$ відповідно, які задані параметрично, навколо осі Ox_3 (рис.1.4).

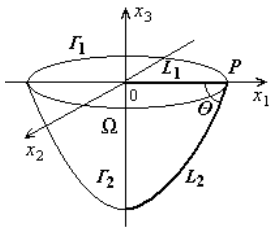


Рисунок 1.4 – Вигляд області

У цьому випадку доцільно ввести циліндричну систему координат (r,z,φ).

Нехай $L_i:=\{x_i(\xi)=(r_i(\xi),\,z_i(\xi)),\,(i-1)\pi\le\xi\le i\pi\}$ з $r_i(\xi)\ge 0$ і $|x_i'(\xi)|>0$ для довільного $\xi\in[(i-1)\pi,\,i\pi]$, $i=1,2$. Тоді Γ_i можна подати параметрично у вигляді $\Gamma_i:=\{\,x_i(\xi,\varphi)=(r_i(\xi)\cos\varphi,r_i(\xi)\sin\varphi,z_i(\xi)),\,0\le\varphi\le 2\pi,\,(i-1)\pi\le\xi\le i\pi\}$, $i=1,2$. У результаті отримаємо такі параметризовані оператори:

$$\left(S_{ij}^{k}\psi\right)(\xi)=\int_{(j-1)\pi}^{j\pi}\psi(\tau)\tilde{\Phi}^k(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \xi\in[(i-1)\pi,i\pi],\quad i,j,k=1,2. \tag{1.62}$$

Тут

$$\tilde{\Phi}^k(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi}Q(\tau)\Phi^k(\xi,\tau),$$

де

$$\Phi^1(\xi,\tau)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\delta R(\xi,\tau,\varphi)}}{R(\xi,\tau,\varphi)}d\varphi, \tag{1.63}$$

$$\Phi^2(\xi,\tau)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\upsilon(\xi)}\frac{e^{-\delta R(\xi,\tau,\varphi)}}{R(\xi,\tau,\varphi)}d\varphi, \tag{1.64}$$

$$Q(\tau)=r(\tau)\sqrt{[r'(\tau)]^2+[z'(\tau)]^2}, \quad \upsilon(\xi)$$

- одиничний вектор зовнішньої нормалі в точці $x(\xi)$

$$R(\xi,\tau,\varphi)=\left([r(\xi)]^2+[r(\tau)]^2-2r(\xi)r(\tau)\cos(\varphi)+[z(\xi)-z(\tau)]^2\right)^{1/2},$$

$r(\xi)=r_i(\xi)$, $z(\xi)=z_i(\xi)$, при $\xi\in[(i-1)\pi, i\pi]$, $i=1,2$.

Примітка: тут і надалі з метою зменшення кількості позначень використовуються ті самі позначення для оригінальних і модифікованих операторів.

Після параметризації функція u запишеться

$$v(\xi)=v(x(\xi))=\sum_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^1\mu_j\right)(\xi), \quad \xi\in[0,\pi]. \tag{1.65}$$

Відомо [62], що густини μ_i у (1.61) мають наступну апріорну поведінку при підході до кутової точки P (див. рис. 1.4)

$$\mu_i=O\left(|x|^{\lambda}\right), \quad x\to P, \quad \lambda=\min\left\{\frac{\pi}{2\theta},\frac{\pi}{2(2\pi-\theta)}\right\}-1, \tag{1.66}$$

де θ - кут між L_1 і L_2.

Для послаблення зазначеної особливості, аналогічно до [13], зробимо спеціальну заміну змінних для $\xi,\tau\in[(i-1)\pi,i\pi]$, $i=1,2$:

$$\xi=\gamma_i(s), \quad \tau=\gamma_i(\sigma), \quad s,\sigma\in[0,2\pi], \tag{1.67}$$

яка має такі властивості: $\gamma_i\in C^{q-1}[0,2\pi]$; $\gamma_i^{(l)}(0)=\gamma_i^{(l)}(\pi)=\gamma_i^{(l)}(2\pi)=0$, $l=1,..,q-1$, $q\geq 2$; $\gamma_i(s+2\pi)=\gamma_i(s)$.

Таким чином, функції γ_i $(i=1,2)$ – парні та 2π- періодичні, і, очевидно, що ці властивості поширюються на підінтегральні функції у визначених нами операторах, що дає нам змогу переписати їх як

$$\left(S_{ij}^{k}\psi\right)(s)=\int_{0}^{2\pi}\psi(\sigma)\widetilde{\Phi}_{ij}^{k}(s,\sigma)\mathrm{d}\sigma,\quad s\in[0,2\pi],\quad i,j,k=1,2, \tag{1.68}$$

де $\widetilde{\Phi}_{ij}^{k}(s,\sigma)=\widetilde{\Phi}^{k}\left(\gamma_i(s),\gamma_j(\sigma)\right)$. Тоді функція v набуде вигляду

$$\widetilde{v}(s)=v(\gamma_1(s))=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{1}\varphi_j\right)(s),\quad s\in[0,2\pi], \tag{1.69}$$

де $\varphi_j(s)=\mu_j\left(\gamma_j(s)\right)\gamma_j'(s)$.

1.2.3 Фундаментальний розв'язок та його нормальна похідна для осесиметричного випадку

Мета цього розділу, аналогічно до [51], визначити вигляд фундаментального розв'язку Φ^1 та його нормальної похідної Φ^2 з урахуванням осьової симетрії.

З (1.63) через розвинення експоненти у ряд Тейлора маємо

$$\Phi^1(\xi,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m I_m(\xi,\tau), \tag{1.70}$$

де

$$a_m=\frac{(-\delta)^m}{m!}\quad \text{і}\quad I_m(\xi,\tau)=\int_{0}^{2\pi}\left[R(\xi,\tau,\varphi)\right]^{m-1}\mathrm{d}\varphi.$$

У [76] з'ясовано, що функції I_m задовольняють наступні рекурентні співвідношення:

$$I_{m+2}=pI_m-qJ_m,\quad (m+3)J_{m+2}=(m+1)\left(pJ_m-qI_m\right), \tag{1.71}$$

де $m\in N\cup\{0\}$. Тут

$$J_m(\xi,\tau)=\int_{0}^{2\pi}\cos(\varphi)\left[R(\xi,\tau,\varphi)\right]^{m-1}\mathrm{d}\varphi,\quad p(\xi,\tau)=\left[r(\xi)\right]^2+\left[r(\tau)\right]^2+\left[z(\xi)-z(\tau)\right]^2$$

і $q(\xi,\tau)=2r(\xi)r(\tau)$. Враховуючи вигляд функцій I_m та J_m, будемо розрізняти випадки парних і непарних індексів. За непарних m обчислення виконують за

формулами (1.71) з очевидними початковими значеннями $I_1 = 2\pi$ та $J_1 = 0$. При $m = 0$

$$I_0 = \frac{4}{(p+q)^{1/2}} K(k) \quad \text{і} \quad J_0 = \frac{4}{q(p+q)^{1/2}} \left[pK(k) - (p+q)E(k) \right],$$

де $k^2 = \dfrac{2q}{p+q}$, K та E - повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно [1]. Отже, за парних значень індексу m справджуються співвідношення

$$I_m = I_m^K K(k) + I_m^E E(k), \quad J_m = J_m^K K(k) + J_m^E E(k),$$

де функції I_m^E, I_m^K, J_m^E, J_m^K задовольняють рекурентні співвідношення (1.71) зі стартовими значеннями

$$I_0^E = 0, \quad I_0^K = \frac{4}{(p+q)^{1/2}}, \quad J_0^E = -\frac{4}{q}(p+q)^{1/2}, \quad J_0^K = \frac{4p}{q(p+q)^{1/2}}.$$

Таким чином, для фундаментального розв'язку (1.63) ми отримали подання

$$\Phi^1 = V_1 K(k) + V_2 E(k) + V_3, \tag{1.72}$$

де

$$V_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} I_{2k}^K, \quad V_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} I_{2k}^E, \quad V_3 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} I_{2k+1}.$$

У випадку Φ^2 з (1.64) маємо

$$\Phi^2(\xi,\tau) = \frac{\partial \Phi^1(\xi,\tau)}{\partial r(\xi)} \upsilon_1(\xi) + \frac{\partial \Phi^1(\xi,\tau)}{\partial z(\xi)} \upsilon_2(\xi), \tag{1.73}$$

де υ_i $(i = 1,2)$ - i-та компонента нормалі

$$\upsilon(\xi) = \left(\frac{z'(\xi)}{|x'(\xi)|}; -\frac{r'(\xi)}{|x'(\xi)|} \right)$$

в точці $x(\xi)$. Для спрощення подальших записів уведемо позначення $r = r(\xi)$, $z = z(\xi)$, $\bar{r} = r(\tau)$, $\bar{z} = z(\tau)$. Після певних перетворень часткова похідна по r може бути подана у вигляді

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial r} = R_1 K(k) + R_2 E(k) + R_3, \tag{1.74}$$

де

$$R_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\left(C_{2m}^{1K} + C_{2m}^{2K}\right), \quad R_2 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\left(C_{2m}^{1E} + C_{2m}^{2E}\right), \quad R_3 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} C_{2m+1}^{3},$$

причому

$$C_{2m}^{1K} = I_{2m}^{E} \frac{k^2(r+\bar{r}) - 2\bar{r}}{k^2(p+q)}, \quad C_{2m}^{2K} = I_{2m}^{K} + I_{2m}^{K} \frac{k^2(r+\bar{r}) - 2\bar{r}}{k^2(p+q)},$$

$$C_{2m}^{1E} = I_{2m}^{E} + I_{2m}^{E} \frac{2\bar{r} - k^2(r+\bar{r})}{k^2(p+q)}, \quad C_{2m}^{2E} = I_{2m}^{K} \frac{2\bar{r} - k^2(r+\bar{r})}{k^2(1-k^2)(p+q)}, \quad C_{2m+1}^{3} = I_{2m+1}.$$

Тут через I_m, I_m^K, I_m^E позначено часткові похідні по r функцій I_m, I_m^K, I_m^E, відповідно. Легко показати, що функції I_m, I_m^K, I_m^E задовольняють такі рекурентні співвідношення

$$I_{m+2} = 2rI_m + pI_m - 2rJ_m - qJ_m,$$

$$(m+3)J_{m+2} = (m-1)\left(2rJ_m + pJ_m - 2\bar{r}I_m - qI_m\right) \tag{1.75}$$

зі стартовими значеннями

$$I_1 = 0, \quad J_1 = 0, \quad I_0^K = -\frac{4(r+\bar{r})}{(p+q)^{3/2}},$$

$$J_0^K = -\frac{8(p+q)(rq-\bar{r}p) - 4pq(r+\bar{r})}{q^2(p+q)^{3/2}}, \quad I_0^E = 0, \quad J_0^E = -\frac{4\left(q(\bar{r}-r) + 2p\bar{r}\right)}{q^2(p+q)^{1/2}}.$$

Часткова похідна фундаментального роз’язку по z також може бути подана через повні еліптичні інтеграли:

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial z} = Z_1 K(k) + Z_2 E(k) + Z_3. \tag{1.76}$$

Тут

$$Z_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\left(D_{2m}^{1K} + D_{2m}^{2K}\right), \quad Z_2 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\left(D_{2m}^{1E} + D_{2m}^{2E}\right), \quad Z_3 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} D_{2m+1}^{3},$$

де

$$D_{2m}^{1K} = I_{2m}^{E}\frac{z-\bar{z}}{p+q}, \quad D_{2m}^{2K} = \widetilde{I}_{2m}^{K} + I_{2m}^{K}\frac{z-\bar{z}}{p+q},$$

$$D_{2m}^{1E} = \widetilde{I}_{2m}^{E} + I_{2m}^{E}\frac{z-\bar{z}}{p+q}, \quad D_{2m}^{2E} = I_{2m}^{K}\frac{\bar{z}-z}{\left(1-k^2\right)(p+q)}, \quad D_{2m+1}^{3} = \widetilde{I}_{2m+1}.$$

Через $\widetilde{I}_m, \widetilde{I}_m^K, \widetilde{I}_m^E$ позначено часткові похідні по z функцій I_m, I_m^K, I_m^E, відповідно, які задовольняють такі рекурентні співвідношення

$$\widetilde{I}_{m+2} = 2(z-\bar{z})I_m + p\widetilde{I}_m - q\widetilde{J}_m,$$

$$(m+3)\widetilde{J}_{m+2} = (m-1)\left(2(z-\bar{z})J_m + p\widetilde{J}_m - q\widetilde{I}_m\right) \tag{1.77}$$

зі стартовими значеннями

$$\widetilde{I}_1 = 0, \widetilde{J}_1 = 0, \ \widetilde{I}_0^K = -\frac{4(z+\bar{z})}{(p+q)^{3/2}},$$

$$\widetilde{J}_0^K = -\frac{4(z-\bar{z})(2q+p)}{q^2(p+q)^{3/2}}, \ \widetilde{I}_0^E = 0, \ \widetilde{J}_0^E = -\frac{4(z-\bar{z})}{q(p+q)^{1/2}}.$$

Отже,

$$\Phi^2 = (R_1\upsilon_1 + Z_1\upsilon_2)K(k) + (R_2\upsilon_1 + Z_2\upsilon_2)E(k) + R_3\upsilon_1 + Z_3\upsilon_2. \tag{1.78}$$

З урахуванням (1.72) і (1.78) функції $\widetilde{\Phi}^n\ (n=1,2)$ набудуть вигляду

$$\widetilde{\Phi}^n = H^{1n}K(k) + H^{2n}E(k) + H^{3n}, \tag{1.79}$$

де

$$H^{i1} = \frac{1}{2\pi}QV_i, \quad H^{i2} = \frac{1}{2\pi}Q(R_i\upsilon_1 + Z_i\upsilon_2), \quad i=\overline{1,3}, \quad Q = Q(\tau),$$

причому

$$H^{22} = \frac{1}{2\pi}Q\left\{\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}\left[C_{2m}^{1E}\upsilon_1 + D_{2m}^{1E}\upsilon_2\right] + \sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}I_{2m}^{K}\frac{z'z'^2 - rr'z'' + z'r'^2 + rr''z'}{r|x'|^3}\right.$$

для $\xi = \tau$.

Для еліптичних інтегралів справедливими є наступні співвідношення [61]

$$K(k) = K_1(\eta)\ln\frac{1}{\eta} + K_2(\eta) \quad \text{і} \quad E(k) = E_1(\eta)\ln\frac{1}{\eta} + E_2(\eta), \tag{1.80}$$

де $\eta = 1 - k^2$, K_l, E_l, $l = 1,2$ – функції, наведені у вигляді степеневих рядів. Оскільки ці ряди для деяких значень аргументу є повільно збіжними, то доцільно скористатись побудованими для цих функцій (див. [61]) високоточними чебишевськими апроксимаціями за допомогою багаточленів

$$K_l(\eta) \approx \sum_{m=0}^{NK} a_{ml}\eta^m, \quad E_l(\eta) \approx \sum_{m=0}^{NE} b_{ml}\eta^m, \tag{1.81}$$

де a_{ml}, b_{ml} – відомі коефіцієнти. Зазначимо, зокрема, що при $NK = NE = 10$ максимальна абсолютна похибка обчислень за формулами (1.80) з використанням (1.81) має порядок 10^{-18}. Остаточно для $\widetilde{\Phi}^k$ отримуємо таке подання:

$$\widetilde{\Phi}^k = N^{1k}\ln\frac{1}{\eta} + N^{2k}, \quad k = 1,2, \tag{1.82}$$

де $N^{lk} = H^{1k}K_l(\eta) + H^{2k}E_l(\eta) + \delta_{l2}H^{3k}$, $l,k = 1,2$; δ_{ik} - символ Кронекера.

1.2.4 Дискретизація інтегральних операторів

Зазначимо, що оператори (1.67) містять логарифмічну особливість при $i = j$ та $s = \sigma$, оскільки

$$\frac{1}{\overline{\eta}_{ij}(s,\sigma)} = \frac{\overline{p}_{ij}(s,\sigma) + \overline{q}_{ij}(s,\sigma)}{\left|\overline{x}_i(s) - \overline{x}_j(\sigma)\right|^2}.$$

Тут $\overline{g}_{ij}(s,\sigma) = g(\gamma_i(s), \gamma_j(\sigma))$, $g = \eta, p, q$; $\overline{x}_i(s) = x(\gamma_i(s))$.

Виконаємо таке перетворення:

$$\ln\frac{\overline{p}_{ii}(s,\sigma) + \overline{q}_{ii}(s,\sigma)}{\left|\overline{x}_i(s) - \overline{x}_i(\sigma)\right|^2} = -\ln 4(\cos(s) - \cos(\sigma))^2 + b_i(s,\sigma), \tag{1.83}$$

де

$$b_i(s,\sigma) = 2\ln\frac{2\left|\cos(s) - \cos(\sigma)\right|\left[\overline{p}_{ii}(s,\sigma) + \overline{q}_{ii}(s,\sigma)\right]^{1/2}}{\left|\overline{x}_i(s) - \overline{x}_i(\sigma)\right|}$$

$$b_i(s,s)=2\ln\frac{4|\sin(s)|\bar{r}_i(s)}{|\bar{x}_i'(s)|}.$$

Наголосимо, що функція b не визначена у чотирьох кутах і центрі квадрата $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ і це буде враховано у подальшому.

Оскільки всі функції в операторах (1.68) є парними для $s\in[0,2\pi]$, то виконується рівність

$$\int_0^{2\pi}\mu(\sigma)\ln\left[4(\cos(s)-\cos(\sigma))^2\right]\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{2\pi}\mu(\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

завдяки якій оператори $S_{ii}^k\,(i,k=1,2)$ набудуть вигляду $S_{ii}^k=C_i^k+B_i^k$, де

$$\left(C_i^k\varphi\right)(s)=\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)L_i^{1k}(s,\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma,\quad s\in[0,2\pi],\tag{1.84}$$

$$\left(B_i^k\varphi\right)(s)=\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)L_i^{2k}(s,\sigma)\mathrm{d}\sigma,\quad s\in[0,2\pi].\tag{1.85}$$

Тут

$$L_i^{1k}(s,\sigma)=-2N_{ii}^{2k}(\gamma_i(s),\gamma_i(\sigma)),$$

$$L_i^{2k}(s,\sigma)=N_{ii}^{1k}(\gamma_i(s),\gamma_i(\sigma))\,b_i(s,\sigma)+N_{ii}^{2k}(\gamma_i(s),\gamma_i(\sigma)).$$

Для апроксимації операторів $S_{ii}^k\,(i,k=1,2)$ на розбитті $s_k^l=kh^l$, $h^l=\dfrac{\pi}{M_l}$, $k=0,\ldots,2M_l-1$, $M_l\in\mathrm{H}$, $l=1,2$ скористаємося тригонометричними квадратурами [74]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\mathrm{d}s\approx\frac{1}{2M_l}\sum_{j=0}^{2M_l-1}f\left(s_j^l\right),\tag{1.86}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\ln\left(4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)\mathrm{d}\sigma\approx\sum_{j=0}^{2M_l-1}f\left(s_j^l\right)R_j^l(s),\tag{1.87}$$

де

$$R_j^l(s)=-\frac{1}{M_l}\left[\sum_{m=1}^{M_l-1}\frac{1}{m}\cos m\left(s-s_j^l\right)+\frac{1}{M_l}\cos M_l\left(s-s_j^l\right)\right].$$

Враховуючи парність підінтегральних функції, отримаємо

$$\left(S_{ij}^{kM_j}\vec{\psi}_{M_j}\right)(s)=\frac{\pi}{M_j}\sum_{p=1}^{M_j-1}\psi_{M_j}^{p}\,\widetilde{\Phi}_{ij}^{k}\left(s,s_p^j\right) \tag{1.88}$$

для $i,j,k=1,2,\ i\neq j$, $s\in[0,2\pi]$,

$$\left(S_{ii}^{kM_i}\vec{\psi}_{M_i}\right)(s)=\left(B_i^{kM_i}\vec{\psi}_{M_i}\right)(s)+\left(C_i^{kM_i}\vec{\psi}_{M_i}\right)(s), \tag{1.89}$$

$$\left(B_i^{kM_i}\vec{\psi}_{M_i}\right)(s)=\frac{\pi}{M_i}\sum_{p=1}^{M_i-1}\psi_{M_i}^{p}L_i^{2k}\left(s,s_p^i\right), \tag{1.90}$$

$$\left(C_i^{kM_i}\vec{\psi}_{M_i}\right)(s)=2\pi\sum_{p=1}^{M_i-1}\psi_{M_i}^{p}L_i^{1k}\left(s,s_p^i\right)\left\{R_p^i(s)+R_{2M_i-p}^i(s)\right\} \tag{1.91}$$

для $i,k=1,2$, $s\in[0,2\pi]$, де $\vec{\psi}_M=\left\{\psi_M^p\right\}_{p=1}^{M-1}$ - вектор. Після застосування колокації у вузлах квадратурних формул та помноження на γ_i' отримаємо наступні дискретизовані оператори:

$$\left(S_{ij}^{kM_j}\right)\left(\vec{\psi}_{M_i}\right)=\frac{\pi}{M_j}\left\{\gamma_i'\left(s_l^i\right)\sum_{p=1}^{M_j-1}\psi_{M_i}^{p}\widetilde{\Phi}_{ij}^{k}\left(s_l^i,s_p^j\right)\right\}_{l=1}^{M_i} \tag{1.92}$$

для $l=0,...,2M_i-1$, $i,j,k=1,2,\ i\neq j$,

$$\left(S_{ii}^{kM_i}\right)\left(\vec{\psi}_{M_i}\right)=\left(B_i^{kM_i}+C_i^{kM_i}\right)\left(\psi_{M_i}\right)\quad\text{для}\quad i,k=1,2, \tag{1.93}$$

$$\left(B_i^{kM_i}\right)\left(\vec{\psi}_{M_i}\right)=\frac{\pi}{M_i}\left\{\gamma_i'\left(s_l^i\right)\sum_{p=1}^{M_i-1}\psi_{M_i}^{p}L_i^{2k}\left(s_l^i,s_p^i\right)\right\}_{l=1}^{M_i} \tag{1.94}$$

для $l=0,...,2M_i-1$, $i,k=1,2$,

$$\left(C_i^{kM_i}\right)\left(\vec{\psi}_{M_i}\right)=2\pi\left\{\gamma_i'\left(s_l^i\right)\sum_{p=1}^{M_i-1}\psi_{M_i}^{p}\left[L_i^{1k}\left(s_l^i,s_p^i\right)\left(R_p^i\left(s_l^i\right)+R_{2M_i-p}^i\left(s_l^i\right)\right)\right]\right\}_{l=1}^{M_i} \tag{1.95}$$

для $l=0,...,2M_i-1$, $i,k=1,2$.

1.2.5 Чисельне розв'язування нестаціонарної задачі

Для дискретизації задачі (1.54), (1.55) за часом застосуємо перетворення Лагерра, тобто будемо шукати її розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) L_n(\kappa t), \tag{1.96}$$

де L_n - поліноми Лагерра, $\kappa > 0$ і

$$u_n(x) = \int_0^{\infty} u(x,t) \exp(-\kappa t) L_n(\kappa t)\, \mathrm{d}t. \tag{1.97}$$

Теорема 1.1 Розвинення (1.96) є розв'язком задачі (1.54), (1.55) тоді і тільки тоді, якщо коефіцієнти u_n задовольняють послідовність операторних рівнянь

$$\left(\kappa^2 I + A\right) u_n = F_n - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \tag{1.98}$$

для $n = 0,1,...$ з $F_n = f_n + \omega_2 + \kappa(n+1)\omega_1$ і $\beta_n = \kappa^2(n+1)$. Тут f_n - коефіцієнти Фур'є – Лагерра для функції f.

Подаючи розв'язок задачі (1.57) – (1.59) у вигляді потенціалу простого шару і зважаючи на його властивості при підході до границі, отримуємо наступне інтегральне подання для оператора A:

$$(Av)(x) = \mu_1(x) + \sum_{j=1}^{2} \left(S_{1j}^2 \mu_j\right)(x), \quad x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma, \tag{1.99}$$

завдяки чому послідовність операторних рівнянь (1.98) можна звести до послідовності інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \mu_{1,n}(x)+\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{k}\mu_{j,n}\right)(x)= \\ \qquad\qquad =F_n(x)+\sum\limits_{m=0}^{n-1}\beta_{n-m}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{1}\mu_{j,m}\right)(x),\ x\in\Gamma_1\setminus\Gamma, \\ \mu_{2,n}(x)+\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{2j}^{2}\mu_{j,n}\right)(x)=0,\ \ x\in\Gamma_2\setminus\Gamma, \end{cases} \tag{1.100}$$

де $n=0,\,1,\ldots$.

Після врахування осесиметричності задачі, параметризації та виділення логарифмічної особливості (див. деталі у попередніх розділах) послідовність систем набуде вигляду

$$\begin{cases} \varphi_{1,n}(s)+\gamma_1'(s)\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{k}\varphi_{j,n}\right)(s)= \\ \qquad\qquad =G_n(s)+\gamma_1'(s)\sum\limits_{m=0}^{n-1}\beta_{n-m}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{1}\varphi_{j,m}\right)(s),\ s\in[0,2\pi], \\ \varphi_{2,n}(x)+\gamma_2'(s)\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{2j}^{2}\varphi_{j,n}\right)(s)=0,\ \ s\in[0,2\pi], \end{cases} \tag{1.101}$$

де $\varphi_{n,j}(s)=\mu_{n,j}(\gamma_j(s))\gamma_j'(s)$, $\ G_n(s)=2F_n(x(\gamma_1(s)))\gamma_1'(s)$, $\ n=0,1,\ldots$

Позначимо через $H_e^p[0,2\pi],\ p\geq 0$ простір Соболєва парних, 2π-періодичних функцій. Наведена нижче теорема обґрунтовує існування та єдиність розв'язків послідовності систем (1.100) (доведення див. у [13]).

Теорема 1.2 Нехай $q\geq 3$. Тоді для будь-яких функцій $\omega_i, f\in H_e^0[0,2\pi]$ існують єдині розв'язки послідовності систем (1.100) $\varphi_{i,n}\in H_e^0[0,2\pi],\ i=1,2$.

Отже, з урахуванням отриманих апроксимацій та дискретизації операторів, для знаходження наближених значень шуканих густин на заданому розбитті маємо таку послідовність систем лінійних алгебраїчний рівнянь:

$$\begin{pmatrix} I+\sum\limits_{k=1}^{2}S_{11}^{kM_1} & \sum\limits_{k=1}^{2}S_{12}^{kM_2} \\ S_{21}^{2M_1} & I+S_{22}^{2M_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_{1,n}^{M_1} \\ \vec{\varphi}_{2,n}^{M_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{G}_n+\sum\limits_{m=0}^{n-1}\beta_{n-m}\sum\limits_{j=1}^{2}\left(S_{1j}^{1M_j}\right)\left(\vec{\varphi}_{j,m}^{M_j}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.102}$$

де $\varphi_{j,n}^{p} \approx \varphi_{j,n}\left(s_p^j\right)$, $\vec{G}_n = \left\{G_n\left(s_p^1\right)\right\}_{l=1}^{M_1-1}$.

Зазначимо, що під час обчислення елементів матриці системи (1.101) значення ядра (1.84) у точках його невизначеності не використовуються.

Аналіз збіжності та оцінку похибки пропонованого методу можна виконати аналогічно як це зроблено у [63] для дискретного методу колокації. Внаслідок узагальнення результатів з [63] на наш випадок має місце наступна теорема.

Теорема 1.3 Нехай кут граничної кривої L дорівнює $(1-\rho)\pi$, де $0<|\rho|<1$ і нехай $\omega_i, f \in H^{p+5/2}(L)$ для $p \in N$, $q \geq 3$. Тоді для $q > (p+1/2)(1+|\rho|)$ справджується оцінка похибки

$$\left\| \varphi_{i,n} - \widetilde{\varphi}_{i,n} \right\|_{H_e^0[0,2\pi]} \leq C M^{-p},$$

де $\varphi_{i,n}$ – точні розв'язки, а $\widetilde{\varphi}_{i,n}$ – наближені, отримані в наслідок використання тригонометричних квадратур (1.86), (1.87), $M = \min\{M_1, M_2\}$, $C > 0$, $i = 1,2$.

Після знаходження густин, наближене значення функцій u_n шукаємо за формулою

$$\widetilde{u}_n^M(s) = \sum_{j=1}^{2} \left(S_{1j}^{1M_j} \vec{\varphi}_{j,n}^{M_j} \right)(s), \; s \in [0,2\pi]. \tag{1.103}$$

Наближений розв'язок еволюційної задачі (1.54), (1.55) обчислюємо за формулою

$$u_N^M(x_1(s),t) = \kappa \sum_{n=0}^{N} \widetilde{u}_n^M(s) L_n(\kappa t). \tag{1.104}$$

1.2.6 Чисельні експерименти

Приклад 1.4 Мішана задача Робіна - Неймана для рівняння Гельмгольца. Розглянемо наступну мішану задачу для рівняння Гельмгольца

$$\Delta w - \delta w = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.105}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial w}{\partial \upsilon} + \beta_1 w = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.106}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial w}{\partial \upsilon} + \beta_2 w = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{1.107}$$

При $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$ і $f_2 = 0$ задача (1.105) – (1.107) відповідає першій системі послідовності (1.99).

Нехай гранична поверхня утворена обертанням кривих (рис. 1.5) $L_1 := \{ x_1(\xi) = (\xi/\pi, 0), 0 \le \xi \le \pi \}$, $L_2 := \{ x_2(\xi) = (\sin(\xi/2), \cos(\xi/2)), \pi \le \xi \le 2\pi \}$.

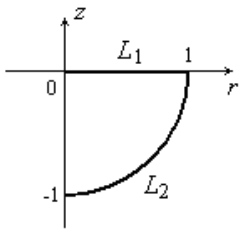


Рисунок 1.5 – Вигляд області для прикладу 1.2.

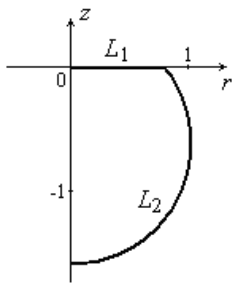


Рисунок 1.6 – Вигляд області для прикладу 1.3.

Нехай $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1$. В ролі граничних функцій виберемо звуження фундаментального розв'язку рівняння Гельмгольца з урахуванням осьової симетрії:

$$f_i(x) = \Phi^1(\tilde{x}, x) + \Phi^2(\tilde{x}, x), x \in \Gamma_i, i = 1,2, \quad \text{де} \quad \tilde{x} \notin \Omega.$$

Очевидно, що в цьому випадку точний розв'язок задачі (1.105) – (1.107) має вигляд $w_{точ}(x) = \Phi^1(\tilde{x}, x), x \in \Omega$. У табл. 1.5 наведено значення H^0- похибки для точного розв'язку $w_{точ}$ та наближеного розв'язку w_M

$$\varepsilon_M = \left(\frac{\pi}{M} \sum_{k=1}^{M-1} \left[w_{точ}\left(x_1\left(s_k^1\right)\right) - w_M\left(x_1\left(s_k^1\right)\right) \right]^2 \left| x_1'\left(s_k^1\right) \right| \right)^{1/2} \tag{1.108}$$

і порядок збіжності

$$ord_M = \frac{\ln \varepsilon_M - \ln \varepsilon_{M/2}}{\ln 2}.$$

Тут $\delta = 2$, $\tilde{x} = (2, -2)$ і $M_1 = M_2 = M$.

Таблиця 1.5 – Похибка та порядок збіжності для прикладу 1.2

M	$q=3$, ε_M	ord_M	$q=4$, ε_M	ord_M	$q=5$, ε_M	ord_M
8	1.04×10^{-3}		3.77×10^{-3}		6.94×10^{-3}	
		2.0		2.2		2.5
16	2.61×10^{-5}		8.41×10^{-5}		1.25×10^{-3}	
		2.2		2.6		3.2
32	5.52×10^{-6}		1.43×10^{-5}		1.39×10^{-5}	
		2.1		2.6		3.3
64	1.23×10^{-6}		2.35×10^{-6}		1.41×10^{-6}	
		2.0		2.6		3.3
128	3.04×10^{-7}		3.81×10^{-7}		1.43×10^{-7}	

Отримані результати демонструють покращення порядку збіжності зі збільшенням параметра q. Зазначимо, що згідно з теоремою 1.7 очікуваний порядок збіжності становить 1.5, 2.2, 2.8, відповідно, для $q = 3, 4, 5$.

Приклад 1.5 Еволюційна задача (з відомим точним розв'язком). Нехай гранична поверхня утворена обертанням кривих (рис. 1.6)

$$L_1 := \left\{ x_1(\xi) = \left(\xi/\sqrt{2}\pi,\ 0\right),\ 0 \le \xi \le \pi \right\},$$

$$L_2 := \left\{ x_2(\xi) = \left(-\cos(3\xi/4), \sin(3\xi/4) - 1/\sqrt{2}\right),\ \pi \le \xi \le 2\pi \right\}.$$

Припустимо, що $\delta = 0$, $f(x,t) = e^{-t}$ і початкові функції $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$. У цьому випадку задача (1.54), (1.55) має точний розв'язок $u_{точ}(x,t) = e^{-t}$. Для нашого алгоритму використано такий розклад у ряд Фур'є – Лагерра

$$e^{-t} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\kappa+1)^{n+1}} L_n(\kappa t).$$

У табл. 1.6 наведено значення H^0-похибки для точного розв'язку $u_{точ}$ та наближеного розв'язку u_M

$$\varepsilon_M = h_1 h \sum_{i=0}^{K} a_i \sum_{j=1}^{M-1} \left[u_N^M \left(x_1\left(s_k^1\right), t_i \right) - u_{точ}(t_i) \right]^2 \left| x_1'\left(s_j^1\right) \right|, \qquad (1.109)$$

де $t_i = ih_1$, $h_1 = T/K$, $K \in N$, $a_0 = a_K = 0.5$ і $a_i = 1$ для $i = 1,\ldots,K-1$. Тут $M_1 = M_2 = M$, $T = 2$, $K = 20$, $q = 5$.

Таблиця 1.6 – Похибка та порядок збіжності для прикладу 1.3

M	$N=10$	$N=20$	$N=30$
16	4.50×10^{-5}	4.51×10^{-5}	4.47×10^{-5}
32	4.21×10^{-6}	3.87×10^{-6}	3.87×10^{-6}
64	1.77×10^{-6}	2.39×10^{-7}	2.41×10^{-7}

Приклад 1.6 Еволюційна задача. Нехай $\delta = 2$, $f(x_1(s),t) = 0$, $\omega_0(s) = 0$, $\omega_1(s) = \exp(-s^2)$ для $s \in [0,\pi]$. Зазначимо, що розглядається область така сама, як у прикладі 1.5. Табл. 1.7 демонструє чисельні результати еволюційної задачі (1.54), (1.55) для різних параметрів дискретизації. Тут $\kappa = 2$, $M_1 = M_2 = M$.

Таблиця 1.7 – Чисельні результати для прикладу 1.4

t	M	$N=10$	$N=20$	$N=30$
0.0	32	0.00313711	0.00141936	0.00023991
	64	0.00313716	0.00141933	0.00023992
	128	0.00313717	0.00141933	0.00023992
0.5	32	0.05181480	0.04962505	0.04993699
	64	0.05181484	0.04962508	0.04993700
	128	0.05181484	0.04962508	0.04993700
1.0	32	0.10205366	0.10521644	0.10400706
	64	0.10205360	0.10521637	0.10400700
	128	0.10205359	0.10521637	0.10400700
1.5	32	0.06904344	0.07223750	0.07412881
	64	0.06904320	0.07223737	0.07412866
	128	0.06904318	0.07223736	0.07412865
2.0	32	−0.27856648	−0.04493650	−0.04667500
	64	−0.27856579	−0.04493689	−0.04667512
	128	−0.27856576	−0.04493687	−0.04667512

Отже, в даному пункті розглянуто чисельне розв’язування однієї еволюційної задачі другого порядку з операторним коефіцієнтом на поверхні осесиметричної області з ребром. За допомогою перетворення Лагерра у відповідність початковій задачі поставлено послідовність операторних рівнянь на поверхні. Знаходження розв'язку у вигляді потенціалу простого шару і врахування осьової симетрії дало змогу звести операторні рівняння до послідовності систем одновимірних інтегральних рівнянь другого роду, ядра яких виражаються через повні еліптичні інтеграли першого та другого роду. Далі завдяки поданню повних еліптичних інтегралів у вигляді степеневих рядів до розв’язування отримано послідовність систем інтегральних рівнянь другого роду з логарифмічною особливістю в ядрах. Апріорі відомо, що густини інтегральних рівнянь мають особливість при підході до кутових точок. Для послаблення цієї особливості виконано спеціальну заміну змінних. Логарифмічну особливість у ядрах враховано через використання відповідних квадратурних формул. Повну дискретизацію системи інтегральних рівнянь виконано з використанням тригонометричних квадратур. Чисельні експерименти підтверджують очікувану збіжність дискретизації за простором та швидку збіжність ряду Фур’є – Лагерра.

2 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

В цьому розділі розглядається обернена задача теорії потенціалу, яка полягає у реконструкції обмеженого включення у частково-необмеженій двовимірній області. Для розв'язування задачі розроблено гібридний метод, який ґрунтується на методі Ньютона та інтегральних рівняннях. Для знаходження початкового наближення запропоновано ефективні алгоритми оцінки розмірів і місцезнаходження включення.

2.1 Гібридний метод для випадку частково необмежених областей

2.1.1 Вступ

У неруйнівному тестуванні важливим є питання вивчення внутрішньої структури об'єкту за відомими вимірами на доступній частині його границі. Такого роду задачі особливо цікаві у випадках необмежених областей. Математичне моделювання методів теплового та електростатичного зображення у неруйнівному тестуванні приводить до обернених граничних задач для рівняння Лапласа. У цих випадках включення або внутрішні тріщини знаходяться за перевизначеними даними Коші на доступній частині границі.

Для спрощення наших викладок припустимо, що $D_1 \subset \mathbf{R}^2$ є частково-необмежена область з границею Γ і D_0 – обмежена однозв'язна область в $\mathbf{R}^2$ з границею $\Gamma_0 \in C^2$ такою, що $\overline{D}_0 \subset D_1$. Крім того, позначимо $D := D_1 \setminus \overline{D}_0$.

Для заданої обмеженої неперервної функції f на Γ розглядається задача

Діріхле для обмеженої функції $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, що задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \ \ в \ \ D \tag{2.1}$$

і граничні умови

$$u = 0 \ \ на \ \Gamma_0 \tag{2.2}$$

$$u = f \ \ на \ \Gamma. \tag{2.3}$$

Існування та єдиність класичного або слабкого розв'язків для прямої граничної задачі (2.1)-(2.3) є встановлені, наприклад в [72]. Припустимо, що функція f є достатньо гладкою для забезпечення існування нормальної похідної u на Γ.

Розглянемо тепер обернену задачу: визначити границю Γ_0 за відомою нормальною похідною

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \ на \ \Sigma \tag{2.4}$$

в припущенні, що $f \neq 0$. Тут ν – зовнішня одинична нормаль до Γ, $\Sigma \subset \Gamma$ – непуста підмножина і φ задана (виміряна) функція.

Питання єдиності реконструкції невідомої граничної кривої Γ_0 за відомими даними Коші на Σ досліджено в наступній теоремі.

Теорема 2.1 Нехай Γ_0 та $\widetilde{\Gamma}_0$ дві замкнені криві, що містяться в частково-необмеженій області D_1. Позначимо через u і $\widetilde{u}$ розв’язки задачі Діріхле (2.1)-(2.3) для внутрішніх кривих Γ_0 і $\widetilde{\Gamma}_0$ відповідно. Припустимо, що $f \neq 0$ і

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \ на \ \Sigma \subset \Gamma.$$

Тоді $\Gamma_0 = \widetilde{\Gamma}_0$.

Доведення. Доведення теореми є аналогічним до випадку обмежених областей див [71] і ґрунтується на теоремі єдиності Гольмгрена, принципу максимуму для рівняння Лапласа і аналітичності розв'язку.

Розглянемо наступні випадки частково-необмежених областей:

$$D_1^s := \{x \in R^2 : x_1 \in R,\ 0 < x_2 < a,\ a > 0\}, \tag{2.5}$$

$$D_1^{hs} := \{x \in R^2 : x_1 > 0,\ 0 < x_2 < a,\ a > 0\}, \tag{2.6}$$

$$D_1^{hp} := \{x \in R^2 : x_2 > 0\}, \tag{2.7}$$

$$D_1^q := \{x \in R^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}. \tag{2.8}$$

2.1.2 Метод функції Гріна для розв'язування прямої задачі

Спеціальні властивості області D визначають наш чисельний метод для розв'язування прямої задачі (2.1)-(2.3). Оскільки D необмежена область, найбільш ефективний чисельний метод – застосування непрямого методу граничних інтегральних рівнянь. Використовуючи подання розв'язку у вигляді потенціалу простого шару з функцією Гріна G для області D_1, ми можемо записати розв'язок прямої задачі у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) G(x,y) ds(y) - \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y),\ x \in D, \tag{2.9}$$

з невідомою густиною φ на Γ_0. Тут коефіцієнти $\omega_\pi = 2\pi$ у випадку області (2.5) та $\omega_\pi = 4\pi$ у випадку областей (2.6)-(2.8)

Функція Гріна для рівняння Лапласа у частково-необмеженій області D_1 може бути подана у вигляді

$$G(x,y) = -\ln|x-y|^2 + g(x,y),$$

де g гармонічна та регулярна функція на D_1 така, що G задовольняє однорідну граничну умову (2.2) по відношенню до x. Для частково-необмежених областей (2.5)-(2.8), функція g має вигляд (див. [82])

$$g_s(x,y) := \ln \frac{\{ch[\pi(x_1 - y_1)/a] - \cos[\pi(x_2 + y_2)/a]\}|x-y|^2}{ch[\pi(x_1 - y_1)/a] - \cos[\pi(x_2 - y_2)/a]},\ x \neq y,$$

$$g_{hs}(x,y) := g_s(x,y) + \ln \frac{ch[\pi(x_1 + y_1)/a] - \cos[\pi(x_2 - y_2)/a]}{ch[\pi(x_1 + y_1)/a] - \cos[\pi(x_2 + y_2)/a]},\ x \neq y,$$

$$g_{hp}(x,y) := \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2\right],$$

$$g_q(x,y) := \ln\frac{\left[(x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]\left[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2\right]}{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2},$$

відповідно. Тут $ch\,x$:=(exp(x)+exp(–x))/2 – функція гіперболічного косинуса. Зауважимо, що поведінка функції Гріна на нескінченності для частково-необмежених областей забезпечує обмеженість розв'язку у формі (2.9).

Згідно класичних результатів про неперервність потенціалу простого шару та властивостей функції Гріна, задача (2.1)-(2.3) зведеться до інтегрального рівняння першого роду

$$\frac{1}{\omega_\pi}\int_{\Gamma_0}\varphi(y)G(x,y)ds(y)=\frac{1}{\omega_\pi}\int_{\Gamma}f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}ds(y),\ x\in\Gamma_0, \qquad (2.10)$$

Теорема 2.2 Для будь-якої заданої обмеженої кусково-неперервної функції f, інтегральне рівняння (2.10) має єдиний розв'язок $\varphi\in H^{-1/2}(\Gamma_0)$.

Доведення: Ця теорема – поширення класичних результатів з [72] для інтегральних рівнянь першого роду теорії потенціалів у просторах Соболєва на випадок частково-необмежених областей. Обмеження для граничної функції f та поведінка нормальної похідної функції Гріна у частково-необмежених областях на нескінченності гарантує існування інтегралу, розташованого справа у (2.10).

Вважатимемо, що гранична крива Γ_0 задається параметрично

$$\Gamma_0 := \{x(t)=(x_1(t),x_2(t)) : 0\le t\le 2\pi\},$$

де x: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ є C^2 та 2π періодична для $|x'(t)|>0$ при всіх t. Зведемо (2.10) до параметричної форми

$$\frac{1}{\omega_\pi}\int_0^{2\pi}\mu(t)\left[-\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)+L(t,\tau)\right]d\tau=\omega(\tau), \qquad (2.11)$$

з 2π періодичним ядром

$$L(t,\tau) := G(x(t),x(\tau))+\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\ \text{для}\ t\ne\tau,$$

правою частиною

$$\omega(t) := \frac{1}{\omega_\pi} \int_\Gamma f(y) \frac{\partial G(x(t), y)}{\partial \nu(y)} ds(y), tx \in [0, 2\pi]$$

і густиною $\mu(t) := \varphi(x(t)) |x'(t)|$.

Зауважимо, що ядро L має такий діагональний вираз

$$L^s(t,t) = \ln \frac{2a^2 \{1 - \cos[(2\pi/a)x_2(t)]\}}{\pi^2 e |x'(t)|^2},$$

$$L^{hs}(t,t) = L^s(t,t) + \ln \frac{ch[(2\pi/a)x_1(t)] - 1}{ch[(2\pi/a)x_1(t)] - ch[(2\pi/a)x_2(t)]},$$

$$L^{hp}(t,t) = \ln \frac{1}{e|x'(t)|^2} + g_{hp}(x(t), x(t)),$$

$$L^q(t,t) = \ln \frac{1}{e|x'(t)|^2} + g_q(x(t), x(t))$$

для областей (2.5)-(2.8) відповідно. Права частина може бути записана у вигляді

$$\omega(t) := \frac{1}{\omega_\pi} \begin{cases} \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_l^s(\tau) H_l^s(t,\tau) d\tau \ \text{для } D_1^s, \\ \sum_{l=1}^{2} \int_{0}^{\infty} f_l^{hs}(\tau) H_l^{hs}(t,\tau) d\tau + \int_0^a f_3^{hs}(\tau) H_3^{hs}(t,\tau) d\tau \text{для } D_1^{hs}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f^{hp}(\tau) H^{hp}(t,\tau) d\tau \ \text{для } D_1^{hp}, \\ \sum_{l=1}^{2} \int_{0}^{\infty} f_l^q(\tau) H_l^q(t,\tau) d\tau \ \text{для } D_1^q, \end{cases} \tag{2.12}$$

Тут функції $H_l^s, H_l^q, l = 1,2,$ $H_l^{hs}, l = 1,2,3,$ і H^{hp} одержані параметризацією нормальної похідної функції Гріна у відповідності до границі Г для областей (2.5)-(2.8). Вони є гладкими функціями та $f_l^s, f_l^q, l = 1,2,$ $f_l^{hs}, l = 1,2,3,$ і f^{hp} представляють задані граничні функції.

Наприклад, у випадку півсмуги ядра H_l^{hs}, $l = 1,2,3,$ у (2.12) матимуть вигляд

$$H_1^{hs}(t,\tau) := \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_2(t)]}{ch[(\pi/a)(x_1(t)+\tau)] - \cos[(\pi/a)x_2(t)]} -$$

$$- \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_2(t)]}{ch[(\pi/a)(x_1(t)-\tau)] - \cos[(\pi/a)x_2(t)]},$$

$$H_2^{hs}(t,\tau) := \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_2(t)]}{ch[(\pi/a)(x_1(t)+\tau)] + \cos[(\pi/a)x_2(t)]} -$$

$$- \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_2(t)]}{ch[(\pi/a)(x_1(t)-\tau)] + \cos[(\pi/a)x_2(t)]},$$

$$H_3^{hs}(t,\tau) := \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_1(t)]}{ch[(\pi/a)x_1(t)] - \cos[(\pi/a)(x_2(t)+\tau)]} -$$

$$- \frac{(2\pi/a)\sin[(\pi/a)x_1(t)]}{ch[(\pi/a)x_1(t)] - \cos[(\pi/a)(x_2(t)-\tau)]}.$$

Тут *sh x*: =(exp(*x*) – exp(–*x*))/2 – функція синуса гіперболічного.

Для повної дискретизації інтегрального рівняння першого роду (2.11) з логарифмічною особливістю ми застосуємо метод колокації разом з кватурними правилами [55, 72], які базуються на тригонометричній інтерполяції. Для цього виберемо рівновіддалену сітку

$$t_i := i\pi/M,\ i = 0,...,2M-1,\ M \in N \tag{2.13}$$

і скористаємося такими квадратурними формулами

$$\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j) \tag{2.14}$$

та

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f(t_j) \tag{2.15}$$

з ваговими функціями

$$R_j(t) := -\frac{1}{2M}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos m(t-t_j) + \frac{\cos(t-t_j)}{M}\right\}.$$

Ці квадратурні формули одержані заміною функції f її інтерполяційним многочленом та інтегруванням [72]. У випадку аналітичної періодичної функції f ми одержимо експоненціальну збіжність.

Для чисельних обрахунків інтегралів (2.12), спершу перетворимо інтеграли на інтервалах $(0, \infty)$ та $(0, a)$ до інтегралів над **R**. Для цього ми застосуємо заміни

$$\int_0^\infty f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^\infty f(e^\tau)e^\tau d\tau \tag{2.16}$$

і

$$\int_0^a f(\tau)d\tau = a\int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{a}{e^{-\tau}+1}\right)\frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}d\tau \tag{2.17}$$

Після цього можливе застосування квадратурної формули

$$\int_{-\infty}^\infty f(\tau)d\tau \approx \sum_{i=-M_1}^{M_1} f(ih_\infty),\ M_1 \in N,\ h_\infty = \frac{c}{\sqrt{M_1}}, \tag{2.18}$$

Ця формула отримана заміною f на sinc апроксимацією, див. [90] і подальшого точного інтегрування. У випадку аналітичних функцій f, які задовольняють умову $f(t)=O(e^{-c|t|})$ при $|t| \to \infty$, де c деяка додатна константа, квадратура (2.18) матиме експоненціальну збіжність. У випадку заміни (2.17), якщо функція f задовольняє умову $|f(z)| < c|z|^\alpha |a-z|^\beta, z \in (0,a)$ для деяких додатних констант c, α, і β, ми одержимо експоненціальну збіжність.

Таким чином, після використання формул (2.14) та (2.15) у інтегральному рівнянні (2.11) та квадратури (2.18) для обчислення інтегралів, розташованих справа (2.12), та застосування методу колокації отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\frac{2\pi}{\omega_\pi}\sum_{j=0}^{2M-1}\mu_i'\left\{R_j(t_i) + \frac{1}{2M}L(t_i,t_j)\right\} = \tilde{\omega}_i(t_i),\ i = 0,\ldots,2M-1, \tag{2.19}$$

де $\tilde{\mu}_i \approx \mu(t_j)$ і $\tilde{\omega}$ – апроксимація (2.12).

Збіжність та аналіз похибки пропонованої чисельної схеми описані у [55] для випадку простору Гьольдера та у [72] у випадку простору Соболєва. Цей аналіз показує залежність швидкості збіжності від гладкості граничної кривої Γ_0, а це означає, що запропонований метод належить до алгоритмів без «насичення точності».

Остаточно, для розв'язку прямої граничної задачі (2.1)-(2.3), ми матимемо апроксимацію

$$\widetilde{u}(x) = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \cdot \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} \widetilde{\mu}_i G(x, x(t_j)) - \widetilde{\omega}_D(x),\ x \in D, \tag{2.20}$$

де $\widetilde{\omega}_D$ обчислюється аналогічно до (2.12).

2.1.3 Обчислення нормальних похідних на границях

Для чисельної реалізації оберненої задачі, нам необхідні наближення нормальної похідної розв'язків задач (2.9)-(2.11) на границях Γ_0 та Γ. З співвідношень для стрибків нормальної похідної потенціалу простого шару та потенціалу подвійного шару отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x,y) ds(y) - \\ - \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} ds(y),\ x \in \Gamma_0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x,y) ds(y) - \\ - \frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} ds(y),\ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Після безпосередніх обчислень першої та другої нормальної похідних функції Гріна G на границі включення Γ_0 і на границі Γ відповідної області,

параметризації та чисельного інтегрування, як у випадку інтегрального рівняння (2.10), ми одержимо наближення для потоків (2.21) і (2.22).

2.1.4 Гібридний метод для оберненої задачі

Обернена задача (2.1)-(2.4) визначає нелінійний оператор A, який відображає границю Γ_0 для даних Діріхле u на Γ_0 для фіксованого Γ та заданих даних Коші f та φ. Таким чином, обернена задача може бути записана у формі нелінійного рівняння

$$A(\Gamma_0) = 0. \tag{2.23}$$

Припустимо, що гранична крива Γ_0 задана параметрично $\Gamma_0 = \{x(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$, де $\mathbf{x}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ – 2π-періодична функція.

Для лінеаризації відображення A, спочатку ми покажемо його диференційованість та знайдемо подання похідної Фреше для A.

Теорема 2.3 Оператор $A : C^2[0, 2\pi] \to C[0,\ 2\pi]$ диференційований за Фреше, і його похідна задається

$$A'(x)h = \langle grad\ u \circ x, h \rangle,$$

де $h \in C^2$ невеликі збурення у $\mathbf{R}^2$ і $\langle \cdot,\cdot \rangle$ задає скалярний добуток на $\mathbf{R}^2$.

Доведення. Аналогічно до [86, 103], ми використовуємо означення похідної Фреше. Нехай h достатньо мале, щоб забезпечити належність кривої $\Gamma_{0,h} = \{x(t)+h(t),\ t \in [0,\ 2\pi]\}$, області D_1. Застосовуючи формулу Тейлора,

$$u(x+h)(t) = u(x(t)) + \langle gradu(x(t)), h(t) \rangle + O(|h|^2),\ t \in [0,2\pi]$$

одержимо

$$A(x+h) - A(x) = u \circ (x+h) - u \circ x = \langle gradu(x(t)), h(t) \rangle + O(|h|^2)$$

Відповідно, ми отримаємо

$$\|A(x+h) - A(x) - A'(x)h\| = O(\|h\|_{C^2}),\ \|h\|_{C^2} \to 0$$

Твердження теореми випливає з означення похідної Фреше.

Ми розглядаємо випадок зіркових границь, тобто

$$\Gamma_0 = \{x(t) = (r(t) + d_1, r(t)\sin t + d_2) : 0 \le t \le 2\pi\} \tag{2.24}$$

з центром (d_1, d_2) та невідомою радіальною функцією $r \in C^2[0,\ 2\pi]$.

В результаті нелінійне рівняння (2.23) матиме наступну параметричну форму

$$A(r)=0 \tag{2.25}$$

Застосування методу Ньютона до (2.25) приводить до лінійного рівняння

$$A'(r)q + A(r)=0 \tag{2.26}$$

з фіксованою функцією r, невідомою поправкою q та похідною Фреше A' оператора A. Застосовуючи результати теореми 2.3, оператор A' може бути представлений як

$$A'(r)q = \frac{\partial u}{\partial \theta} q$$

з похідною $\partial u / \partial\theta$ у радіальному напрямку. Необхідно розв'язати лінійне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} q = -u \text{ на } \Gamma_0 \tag{2.27}$$

для поправки q на кожній ітерації Ньютона.

Опишемо алгоритм гібридного методу детально.

Для заданої радіальної функції r розв'язуємо методом квадратур інтегральне рівняння першого роду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega_\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x,y) ds(y) = \\ &= \phi(x) + \frac{1}{\omega_\pi} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y),\ x \in \Sigma. \end{aligned} \tag{2.28}$$

з невідомою густиною φ. У [53] було показано, що нормальна похідна потенціалу простого шару визначає оператор з $L^2(\Gamma_0)$ у $L^2(\Gamma)$, який є ін'єктивним та має щільний ранг. Таким чином, можливе застосування регуляризації Тихонова для інтегрального рівняння (2.28).

Зіставляючи формулу (2.28) з дослідженнями, які ми провели у п. 2.1.3, одержимо систему лінійних рівнянь

$$\frac{2\pi}{\omega_\pi}\cdot\frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1}\tilde{\mu}_j\frac{\partial G(x(t_i),x(t_j))}{\partial\nu(x(t_i))}=F(t_i), \qquad (2.29)$$

де F відома права частина, t_i, i = 0,... , M, $M \in \mathbf{N}$ – точки рівновіддаленого поділу на $\sum$ з розміром кроку $h=\left|\sum\right|/M$, $M>0$, і t_j = 0, ..., 2M-1 – вузли тригонометричної інтерполяції (2.13).

Оскільки $M>>2M-1$ і через некоректність перевизначеної системи (2.29), застосуємо метод найменших квадратів з регуляризацією Тихонова з деяким заданим регуляризаційним параметром $\alpha>0$.

Подання у вигляді потенціалу (2.9) застосовуємо для знаходження функції u на Γ_0, беручи до уваги те, що ядро $G(x(t),x(\tau))$ має логарифмічну особливість при $t\to\tau$. Для чисельної апроксимації u на Γ_0 ми одержимо

$$\tilde{u}(x(t_i))=\frac{2\pi}{\omega_\pi}\sum_{j=0}^{2M-1}\tilde{\mu}_i\left\{-R_j(t_i)+\frac{1}{2M}L(t_i,t_j)\right\}-\tilde{\omega}(t_i),\ x(t_i)\in\Gamma_0,\ i=0,...,2M-1,$$

Похідну $\partial u/\partial\theta$ обчислюємо за допомогою співвідношення

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\theta}=\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\langle\theta,\nu\rangle+\frac{\partial u(x)}{\partial\vartheta}\langle\theta,\vartheta\rangle,\ x\in\Gamma_0 \qquad (2.30)$$

де ϑ – одиничний тангенціальний вектор. Тут апроксимація $\partial u(x)/\partial v$ на Γ_0 обчислюється за формулою (2.21), а тангенціальна похідна $\partial u(x)/\partial v$ – через тригонометричну інтерполяцію

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\vartheta}(x(t))=\frac{1}{|x'(t)|}\sum_{i=0}^{2M-1}\tilde{u}(t_i)l_i'(t),$$

де l_i, i=0, ..., 2M-1 – тригонометричні базисні функції Лагранжа [72].

Ми можемо обчислити наближення $\partial\tilde{u}/\partial\theta(s_k)$ у точках s_k = *(cos* t_k*, sin* t_k*), k* = 0, ... ,2M-1 використовуючи формулу (2.30).

Для чисельного розв’язування лінійного рівняння (2.27) застосовується метод колокацій. Апроксимуємо функцію q

$$\widetilde{q} = \sum_{k=1}^{K} a_k q_k$$

з невідомими коефіцієнтами a_k та заданими базисними функціями q_k і розв'язуємо лінійну систему

$$\sum_{k=1}^{K} a_k \frac{\partial \widetilde{u}(x(t_i))}{\partial \theta(s_i)} q_k(t_i) = -\widetilde{u}(x(t_i)),\ i = 0,...,2M-1. \qquad (2.31)$$

Оскільки $M >> 2M-1$ і через некоректність перевизначеної системи, (2.31) розв'язується методом найменших квадратів з регуляризацією Тихонова. Таким чином, ми мінімізуємо нев'язку зі штрафом

$$F(a_1,...,a_K) = \lambda \sum_{k=1}^{K} (1+k^2)^l a_k^2 + \sum_{i=0}^{2M-1} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \frac{\partial \widetilde{u}(x(t_i))}{\partial \theta} q_k(t_i) + \widetilde{u}(x(t_i)) \right|^2$$

з певним регуляризаційним параметром $\alpha > 0$ та деяким індексом Соболєва *l*. Мінімізація F по відношенню до $a_1,...,a_k$ еквівалентна розв'язку нормальних рівнянь.

2.2 Алгоритми оцінки розмірів і місцезнаходження обмеженого включення у частково-необмеженій області

2.2.1 Нелінійні оператори та їхні властивості для оберненої задачі

Введемо множину

$$\widetilde{X} := \{ f \in C^2(S^1; R^2) \mid f : S^1 \to f(S^1) \subset D_2 \}$$

допустимих внутрішніх кривих, де S^1 означає одиничне коло в R^2 і $\Gamma_1 = f(S^1)$, $f \in \widetilde{X}$. Крім того, позначимо $\widetilde{Y}_1 := L^2(\Sigma), \widetilde{Y}_2 := C(\Gamma_1)$.

Означення 2.1 Визначимо наступні нелінійні оператори, пов'язані з нашою оберненою граничною задачею (2.1)-(2.3):

а). Відображення $F_1 : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}_1, \Gamma_1 \to \frac{\partial г}{\partial м} \Big/_{\Sigma}$, яке відображає внутрішню криву $\Gamma_1 \in \widetilde{\mathrm{X}}$ в потік $\frac{\partial u}{\partial v} \in \widetilde{Y}_1$ для фіксованих даних Коші.

б). Відображення $F_2 : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}_2, \Gamma_1 \to \mathrm{u} \Big/_{\Gamma_1}$, що відображає внутрішню криву $\Gamma_1 \in \widetilde{\mathrm{X}}$ в дані Діріхле $u \in \widetilde{Y}_2$ на Γ_1 для фіксованих Γ_2 і даних Коші f та g.

Означення 2.2 Нехай похідна по області $\Gamma_1 \in \widetilde{X}$ в напрямку $a \in C^2(\Gamma_1; R^2)$ і $\Gamma_1^{\varepsilon} := \{x + \varepsilon a(x) : x \in \Gamma_1\} \in \widetilde{X}, \varepsilon > 0.$ визначається як границя

$$F'(\Gamma_1; a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[F(\Gamma_1^{\varepsilon}) - F(\Gamma_1) \right].$$

В [58] показано існування і лінійність похідної по області оператора для оберненої задачі рівняння теплопровідності. Розглядаючи рівняння Лапласа як стаціонарний випадок рівняння теплопровідності, відразу отримаємо такий результат.

Теорема 2.4 Нехай $\Gamma_1 \in \widetilde{X}$ та $a \in C^2(\Gamma_1; \mathrm{R}^2)$ задані. Тоді похідна по області $F_1'(\Gamma_1; \mathrm{a})$ існує і має вигляд

$$F_1'(\Gamma_1; a) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} |_{\Sigma} \in \widetilde{Y}_1,$$

де гранична функція ϑ розв'язує пряму граничну задачу

$$\Delta \vartheta = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{2.32}$$

$$\vartheta = - < a, \nu > \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \quad \text{і} \quad \vartheta = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \tag{2.33}$$

Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в R^2.

Теорема 2.5 Нехай $\psi \in \widetilde{Y}_1$. Тоді спряжений оператор $F_1'(\Gamma_1; \mathrm{a})^* : \widetilde{Y}_1 \to C^2(\Gamma_1; \mathrm{R}^2)$ має вигляд

$$F_1'(\Gamma_1; a)^* \psi = \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} |_{\Gamma_1},$$

де функція u є розв'язком прямої задачі (2.32)-(2.33) і обмежена функція w є розв'язком наступної прямої задачі

$$\Delta w = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{2.34}$$

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \quad \text{і} \quad w = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{2.35}$$

Отже, знаходження похідної по області $F_1'(\Gamma_1;\mathrm{a})$ і її спряженого оператора $F_1'(\Gamma_1;\mathrm{a})^*$ зводиться до розв'язування відповідних прямих граничних задач (2.32)-(2.33) та (2.34)-(2.35).

Означення 2.3 Нехай $\Gamma_1 \in \widetilde{\mathrm{X}}, \mathrm{a} \in \mathrm{C}^2(\Gamma_1;\mathrm{R}^2)$ і $\Gamma_1^a := \{\mathrm{x} + \mathrm{a}(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \Gamma_1\} \in \widetilde{X}$. похідна Фреше оператора F визначається наступним чином

$$F'(\Gamma_1;a) = \lim_{\|a\| \to 0} \frac{\| F(\Gamma_1^a) - F(\Gamma_1) \|}{\| a \|}.$$

Зауважимо, що похідна за областю оператора в означенні 2.1 є відомою у диференціальній геометрії як похідна типу Лі. Вона є також похідною Фреше з точки зору нелінійного аналізу.

Теорема 2.6 Оператор $F_2 : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ є диференційованим за Фреше і його похідна має вигляд $F_2'(\Gamma_1;a) =< grad\ u(\Gamma_1), a >$.

Таким чином, використовуючи нелінійні оператори F_1 та $F2$, обернена гранична задача (2.1)-(2.3) може бути записана у вигляді нелінійного операторного рівняння

$$F_1(\Gamma_1) = g$$

з заданим потоком $g \in \widetilde{Y}_1$, або у вигляді іншого нелінійного операторного рівняння

$$F_2(\Gamma_1) = 0 \tag{2.36}$$

Відповідно до припущень про параметричне представлення кривої Γ_1, обидва ці рівняння можуть бути подані у параметричній формі (2.37)

$$\Gamma_1 := \{x(s) = [x_1(s) = r(s)\cos s + d_1,\ x_2(s) = r(s)\sin s + d_2],\ 0 < s < 2\pi\} \in \widetilde{X} \tag{2.37}$$

(d_1, d_2) – центр, і радіус $r \in H^3[0,2\pi] \in C^2[0,2\pi]$, $r > 0$, і спряжений оператор $\widetilde{\mathrm{F}}_1'(r;a)^*$ можна записати у вигляді

$$\left(\widetilde{F}_1'(r)^*\right)\psi(s) = r(s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)\frac{\partial w}{\partial \nu}(s), \quad s \in [0,2\pi].$$

Тут функція z є параметричною формою потоку g і r – шукана радіальна функція.

Відповідно, нелінійне рівняння (2.36) може бути подане у такому записі

$$\widetilde{F}_2(r) = 0 \tag{2.38}$$

Для розв'язування отриманих нелінійних некоректних операторних рівнянь (2.37), (2.38), розглянемо методи з регуляризацією для отримання прийнятної апроксимації внутрішньої границі.

2.2.2 Ітераційні схеми реконструкції границі

Метод Ландвебера. Цей чисельний метод застосовується до нелінійного операторного рівняння (2.37) і визначається формулою

$$r_{k+1}^{\delta} = r_k^{\delta} + \mu \widetilde{F}_1'(r_k^{\delta})^*(z^{\delta} - \widetilde{F}_1(r_k^{\delta})), \quad k = 0, 1, 2..., \tag{2.39}$$

де μ – деякий додатній параметр, δ – рівень похибки вхідних даних.

На кожному ітераційному кроці необхідно розв'язати дві прямі граничні задачі. Для цього використаємо метод граничних інтегральних рівнянь з використанням техніки функції Гріна (див. п. 2.2.1).

Регуляризаційні властивості методу Ландвебера полягають у вчасній зупинці ітераційного процесу. Іншими словами, лише прийнятний індекс зупинки k_* ітерації r_{k*}^{δ} приводить до стійкої апроксимації розв'язку r_*. Рекомендується використовувати для зупинки ітерації Ландвебера принцип нев'язки.

$$\| z^{\delta} - \widetilde{F}_1(r_{k*}^{\delta}) \| \le \tau\delta < \| z^{\delta} - \widetilde{F}_1(r_k^{\delta}) \|$$

для достатньо малого $\tau > 0$.

Метод Ньютона. Інший підхід для розв'язування нелінійного операторного рівняння (2.37) полягає у лінеаризації методу Ньютона. Після лінеаризації ми отримаємо на кожному ітераційному кроці таке апроксимаційне лінійне рівняння відносно корекції $h \in C^2[0,2\pi]$

$$r_{k+1}^{\delta} = r_k^{\delta} + h; \quad \widetilde{F}_1(r_k^{\delta}) + \widetilde{F}_1'(r_k^{\delta}; h) = z, \quad k = 0, 1, 2... \tag{2.40}$$

Через некоректність отриманого лінійного рівняння необхідно застосувати регуляризацію, наприклад регуляризацію Тихонова, з деяким параметром регуляризації.

Гібридний метод. Детально описаний в підрозділі 2.1.

2.2.3 Знаходження початкового наближення

Для застосування однієї з описаних ітераційних схем потрібно мати добре початкове наближення для внутрішньої границі. Зважаючи на частково-необмеженість області D_2, знаходження цього початкового наближення є одним з найважливіших питань застосування методів з властивістю глобальної збіжності. Для цього пропонуємо два алгоритми: визначення місця знаходження і оцінку розмірів для внутрішнього включення. Пропоновані алгоритми використовують прості явні формули, які ґрунтуються на потенціалі простого шару. Тобто, основною перевагою цих алгоритмів є їхня простота.

Алгоритм визначення місцезнаходження (метод кіл). Розглядається функціонал

$$H(x, \varphi, f) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x, y) f(y) - \Phi(x, y) \varphi(y) \right) ds(y), \quad x \in R^2 / \overline{D}_2,$$

де $\Phi(x, y) = -\ln|x - y|$. Вибираються дві точки $z_l \in R^2 \setminus \overline{D}_2$, $l = 1,2$ і знаходяться

$$r_{l_z} := \frac{\int_{\Sigma} g(y)ds(y)}{H(z_l, f, g)}, \quad l = 1, 2$$

Будуються два кола з центрами в z_l і радіусами в $r_l, l = 1,2$. Точка $P(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2)$ перетину цих кіл належить області D_1.

Алгоритм оцінки розмірів. Розглядається додаткова гранична задача

$$\Delta\vartheta = 0 \quad \text{в} \quad \widetilde{D},$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{на} \quad B_r \quad \text{і} \quad \vartheta = f \quad \text{на} \quad \Gamma_2,$$

де B_r – коло радіуса r з центром у точці P, знайденій за допомогою алгоритму визначення місцезнаходження.

Ця гранична задача може бути розв'язана методом інтегральних рівнянь з використанням техніки функції Гріна (див п. 2.1).

Знаходиться потік

$$\varphi_r := \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\Big|_{\Sigma}.$$

Обчислюється

$$T(r) = \int_{\Sigma} (\varphi(y) - \varphi_r(y)) f(y) ds(y)$$

для $r \in [R_0, R_1]$ та знаходиться значення r_0: $T(r_0) = \min_{r \in [R_0, R_1]} T(r)$.

Оскільки $|B_{r_0}| \approx |D_1|$, то коло B_{r_0} є добрим початковим наближенням для чисельних методів, написаних вище.

2.2.4 Чисельні експерименти

У наших чисельних експериментах ми досліджуємо можливість виконання пошуку початкових значень у двох випадках. Спершу, використовуючи штучні дані, тобто, створюючи потік $g = \partial u / \partial \nu$, розв'язавши пряму граничну задачу з

відомою внутрішньою радіальною функцією, ми досліджуємо якість одержаних результатів. У другому випадку ми знаходимо початкове значення з неточними вхідними даними. Тут випадкові поточкові помилки додаються до значень g з відношенням, заданим у L^2 нормах.

Випадок даних без похибки. Розглянемо випадок обмежених включень верхньої півплощини. Обмежені включення матимуть границю, яка задається параметрично

$$\Gamma_1 := \{x(t) = \sqrt{\cos^2 t + 0.25\sin^2 t}(\cos t + d_1, \sin t + d_2), 0 \le t \le 2\pi\}$$

з $d_1 = 5$ та $d_2 = 2$, $f = 1$ – гранична функція на Γ_2. Потік розв'язку $\partial u / \partial v$ на Γ_2 методом граничного інтегрального рівняння з використанням методу функції Гріна.

У алгоритмі визначення місцезнаходження ми знаходимо значення радіусів кіл: $r_1 = 8.3$ і $r_2 = 3.1$. Пізніше ми одержимо наступне наближення для центра включень: $d_1 = 4.96$ та $d_2 = 1.91$.

Таблиця 2.1 – Результати без похибки даних

r	T(r)
0.1	2.3034
0.2	1.9079
0.3	1.5761
0.4	1.2663
0.5	0.9622
0.6	0.6541
0.7	0.3347
0.8	0.0027
0.9	0.3659
1.0	0.7634
1.1	1.2068
1.2	1.7115

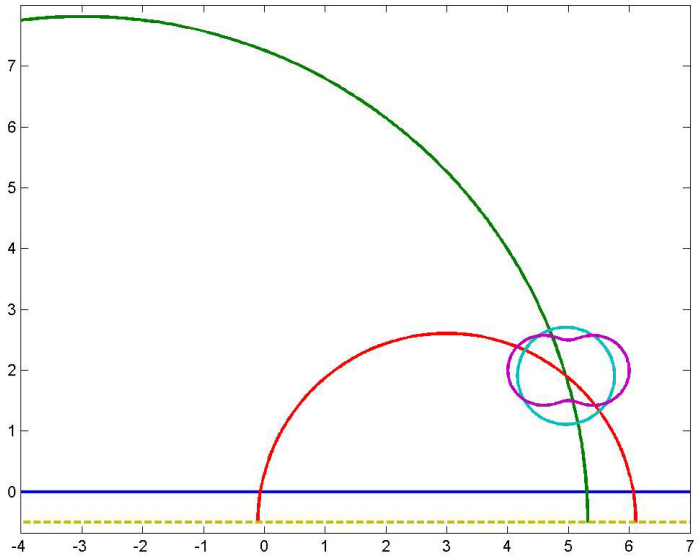


Рисунок 2.1 – Результати без похибки даних

Таблиця 2.2 – Результати з 3% похибкою даних

r	T(r)
0.1	2.4958
0.2	2.1202
0.3	1.8047
0.4	1.5094
0.5	1.2188
0.6	0.9237
0.7	0.6168
0.8	0.2914
0.9	0.0596
1.0	0.4453
1.1	0.8771
1.2	1.3711

Використовуючи алгоритм оцінки розміру, табулюємо значення функції $T(r)$ (див. табл. 2.1) та знаходимо мінімум $r_0 = 0.8$.

Результати обох алгоритмів зображені на рис. 2.1. Таким чином, ми побудували коло з центром (4.96, 1.91) та радіусом 0.8, яке є добрим початковим наближенням для включення.

Випадок даних з 3% похибкою. У цьому випадку ми перевіряємо наші алгоритми для неточних даних. Решта вхідних даних є у попередньому прикладі.

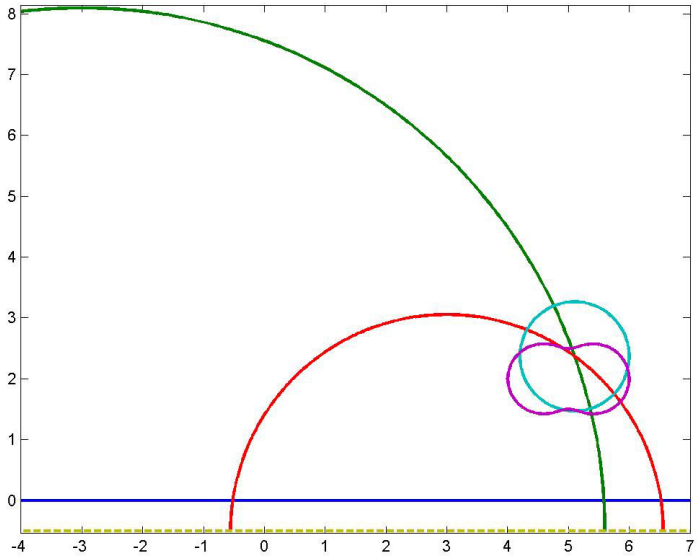


Рисунок 2.2 – Результати з 3% похибкою даних

Використовуючи алгоритм визначення місцезнаходження, ми знаходимо наступні значення радіусу кола: $r_1 = 8.59$ та $r_2 = 3.56$. В результаті ми одержимо наступні значення координат включення: $d_1 = 5.1$ та $d_2 = 2.37$.

Використовуючи алгоритм оцінки розміру, табулюємо значення функції $T(r)$ (див. табл. 2.2) та знаходимо мінімум $r_0 = 0.9$.

Результати обох алгоритмів у випадку 3% збурення даних представлені на рис. 2.2. Як ми можемо побачити, коло з центром (5.1, 2.37) та радіусом 0.9 є добрим початковим наближенням для нашого включення.

Таким чином, використовуючи знайдені наближення обмежених включень як початкові дані для одного з методів, який вказаний у п. 2.2.2, ми можемо відновити вигляд границі внутрішнього включення.

3 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ В $\mathbf{R}^3$ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ СКЛАДНИХ ОБЛАСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ГРІНА

У даному розділі, на основі методу інтегральних рівнянь, побудовано алгоритми наближеного розв'язування просторових стаціонарних задач теорії потенціалу. Для обчислення характеристик поля застосовано чисельно-аналітичний підхід. Значну увагу приділено проблемі наближеного обчислення як власних, так і невласних двовимірних інтегралів певного класу. Це пов'язано із необхідністю розв'язання відповідних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду та знаходження розв'язку задачі в цілому. Методику перевірено шляхом розв'язання практично важливих задач.

3.1 Формулювання проблеми

Розглянемо таку глобальну задачу. Нехай у $\mathbf{R}^3$ міститься n замкнених обмежених поверхонь Ляпунова Σ_k $(k=\overline{1,n})$, які не мають спільних точок. Введемо такі позначення: Ω_k^+ – область, обмежена Σ_k; $\Omega_k^- := \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_k^+$; $\overline{\Omega}_k^+ := \Omega_k^+ \bigcup \Sigma_k$; $\Omega^- := \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega}^+$, де $\Omega^+ := \bigcup_{k=1}^n \Omega_k^+$, $\overline{\Omega}^+ := \Omega^+ \bigcup \Sigma$, а $\Sigma := \bigcup_{k=1}^n \Sigma_k$; M, N, P і т. д. – точки в $\mathbf{R}^3$. Припустимо також, що в Ω^- міститься деяка сукупність кусково-гладких розімкнених поверхонь $S := \bigcup_{i=1}^m S_i$, що не мають спільних точок і обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини. Необхідно знайти функцію $u(P) \in H^1(\Omega_s^-, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\begin{gathered} \Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega_s^- := \Omega^- \setminus \overline{S}; \\ \gamma_0^- u(P) = g_0(P), \quad P \in \Sigma; \\ \delta^{\pm} u(P) = g_{\pm}(P), \quad P \in S; \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\lim_{|P|\to\infty} u(P)=0, \quad P\in\Omega_s^-,$$

де $\gamma_0^-: H^1(\Omega_s^-)\to H^{1/2}(\Sigma)$, $\delta^\pm: H^1(\Omega_s^-)\to H^{1/2}(S)$, – оператори сліду, $H^1(\Omega_s^-)=\left\{u \,\middle|\, u, |\nabla u|\in L_2(\Omega_s^-)\right\}$, $H^1(\Omega_s^-,\Delta)=\left\{u \,\middle|\, u\in H^1(\Omega_s^-), \Delta u\in L_2(\Omega_s^-)\right\}$ (див. рис. 3.1). Нехай $g_0\in H^{1/2}(\Sigma)$, $g_\pm\in H^{1/2}(S)$, – задані функції, причому $g_\pm$ – відоме значення шуканої функції на S відповідно з додатної та від'ємної сторони.

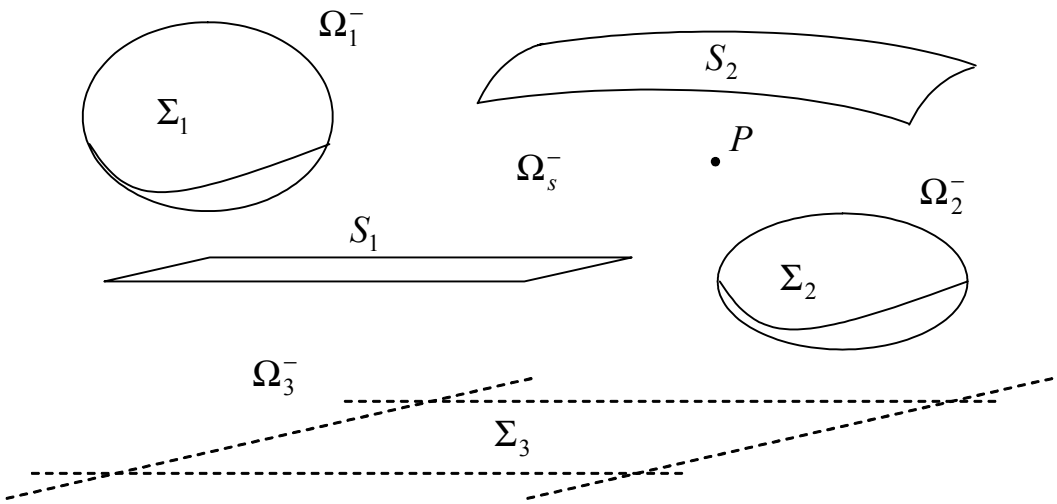


Рисунок 3.1 – Область пошуку розв'язку задачі

Таким чином, при формулюванні задачі (3.1) запроваджено узагальнене трактування її розв'язку, а також обумовлене використанням відповідного математичного апарату подання граничних умов [26, 29, 91].

Зауважимо також, що поділ усіх поверхонь на два типи є умовним і визначається контекстом моделювання описуваного фізичного явища. Так, один із типів поверхонь Σ або S взагалі може бути відсутній, а окремі поверхні Σ_k можуть бути необмеженими в просторі або виступати в ролі так званих канонічних. Однак, їх розміщення повинне передбачати існування необмеженої області Ω_s^-.

3.2 Метод Шварца декомпозиції складних областей для розв'язування зовнішньої задачі у суттєво просторовій постановці

Для побудови наближеного розв'язку задачі (3.1) використаємо метод Шварца в такій інтерпретації [32]. Зафіксуємо значення параметра $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Припустимо, що ми відносно легко можемо побудувати розв'язок задачі типу (3.1) в області Ω_k^- при заданих граничних умовах на Σ_k та $S^k := \bigcup_{i_k \in M_k} S_{i_k}$, де $M_k \subset M' := \{1, 2, ..., m\}$, причому $\bigcup_{k=1}^n M_k = M'$. Тоді на l-му ($l = 1, 2, ...$) кроці ітераційного процесу для кожного k знаходимо функцію $u_{lk}(P)$ із класу $H^1(\Omega_k^- \setminus \overline{S}^k, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta u_{lk}(P) = 0, \quad P \in \Omega_s^- \setminus \overline{S}^k;$$

$$\gamma_0^- u_{lk}(P) = -\sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} \gamma_0^- u_{l-1,j}(P), \quad P \in \Sigma_k; \tag{3.2}$$

$$\delta^{\pm} u_{lk}(P) = -\sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} \delta^{\pm} u_{l-1,j}(P), \quad P \in S^k;$$

$$\lim_{|P| \to \infty} u_{lk}(P) = 0, \quad P \in \Omega_k^-,$$

де функції $u_{0k}(P)$ є розв'язками задачі типу (3.1) з граничними умовами $g_0(P)$ і $g_{\pm}(P)$ на Σ_k та S^k, відповідно.

При такому способі побудови функції

$$\sum_{l=1}^{r} u_{lk}(P), \quad P \in \Omega_s^- \setminus \overline{S}^k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

задовольнятимуть граничні значення

$$\gamma_0^- \sum_{l=1}^{r} u_{lk}(P) = g_0^{(k)}(P) - \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} \gamma_0^- u_{lj}(P), \quad P \in \Sigma_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$\delta^{\pm}\sum_{l=1}^{r} u_{lk}(P) = g_{\pm}^{(k)}(P) - \sum_{l=1}^{r-1}\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \delta^{\pm} u_{lj}(P), \quad P\in S^k, \quad k=1,2,...,n.$$

Віднявши, відповідно, суми

$$\sum_{l=1}^{r-1} \gamma_0^- u_{lk}(P), \quad \text{та} \quad \sum_{l=1}^{r-1} \delta^{\pm} u_{lk}(P), \quad k=1,2,...,n,$$

матимемо

$$\sum_{l=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{n} \gamma_0^- u_{lj}(P) = g_0^{(k)}(P) - \gamma_0^- u_{rk}(P), \quad P\in \Sigma_k, \quad k=1,2,...,n,$$

$$\sum_{l=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{n} \delta^{\pm} u_{lj}(P) = g_{\pm}^{(k)}(P) - \delta^{\pm} u_{rk}(P), \quad P\in S^k, \quad k=1,2,...,n.$$

Отже, якщо при зростанні r всі функції u_{rk} $(k=\overline{1,n})$ рівномірно в $P\in \Omega_s^- \setminus \overline{S}^k$ збігатимуться до нуля, то ряд

$$u(P) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} u_{lj}(P), \quad P\in \Omega_s^-, \tag{3.3}$$

дає розв'язок задачі (3.1).

Дослідимо умови рівномірної збіжності ряду (3.3). Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок, коли задано лише дві поверхні Σ_1 та Σ_2.

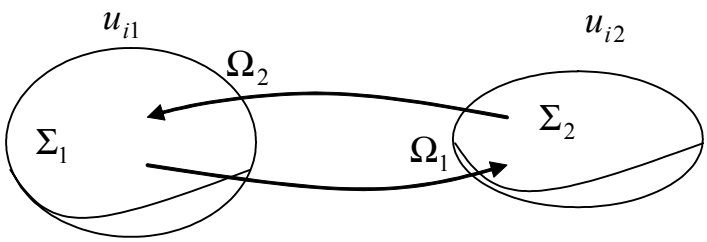


Рисунок 3.2 – Метод Шварца

Нехай, також, для областей Ω_1 та Ω_2 існують функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа, відповідно G_1 та G_2. Подамо члени ряду (3.3)

$$u(P) = \left[u_{01}(P) + u_{02}(P)\right] + \left[u_{11}(P) + u_{12}(P)\right] + \left[u_{21}(P) + u_{02}(P)\right] + ..., \quad P\in \Omega^-,$$

використовуючи функції Гріна:

$$u_{01}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(1)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} ,$$

$$u_{02}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(2)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} ,$$

$$u_{11}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[-\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(M_1, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(2)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right] \mathrm{d}S_{M_1} ,$$

$$u_{12}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[-\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(M_1, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(1)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right] \mathrm{d}S_{M_1} ,$$

$$u_{21}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_2)}{\partial n_{M_2}} \left\{ -\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(M_2, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[-\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(M_1, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(1)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right] \mathrm{d}S_{M_1} \right\} \mathrm{d}S_{M_2} ,$$

$$u_{22}(P) = -\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_2)}{\partial n_{M_2}} \left\{ -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(M_2, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[-\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(M_1, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(2)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right] \mathrm{d}S_{M_1} \right\} \mathrm{d}S_{M_2}$$

і т. д. Введемо такі позначення

$$\mu_1 = \max_{\Sigma_1} \left| g_0^{(1)} \right|, \quad \mu_2 = \max_{\Sigma_2} \left| g_0^{(2)} \right|.$$

Тоді

$$\max_{\Sigma_2} \left| u_{01} \right| \le \max_{\Sigma_2} \left| \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(1)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right| \le \mu_1 \max_{\Sigma_2} \left| \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} \mathrm{d}S_{M_0} \right|,$$

$$\max_{\Sigma_1} \left| u_{02} \right| \le \max_{\Sigma_1} \left| \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} g_0^{(2)}(M_0)\,\mathrm{d}S_{M_0} \right| \le \mu_2 \max_{\Sigma_1} \left| \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} \mathrm{d}S_{M_0} \right|.$$

Далі, використовуючи позначення

$$\alpha = \max_{\Sigma_2} \left| \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} \mathrm{d}S_{M_0} \right|,$$

$$\beta = \max_{\Sigma_1} \left| \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_0)}{\partial n_{M_0}} \mathrm{d}S_{M_0} \right|,$$

отримаємо

$$|u_{01}| \le \alpha\mu_1, \quad |u_{02}| \le \beta\mu_2 \quad \text{в} \quad \Omega^-.$$

Легко бачити, що

$$\max_{\Sigma_2} |u_{11}| \le \max_{\Sigma_2} \left| \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[\ \beta\mu_2 \ \right] dS_{M_1} \right| \le \alpha\beta\mu_2,$$

$$\max_{\Sigma_1} |u_{12}| \le \max_{\Sigma_1} \left| \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_1)}{\partial n_{M_1}} \left[\ \alpha\mu_1 \ \right] dS_{M_1} \right| \le \alpha\beta\mu_1.$$

Отже,

$$|u_{11}| \le \alpha\beta\mu_2, \quad |u_{12}| \le \alpha\beta\mu_1 \quad \text{в} \quad \Omega^-.$$

Аналогічним чином

$$\max_{\Sigma_2} |u_{21}| \le \max_{\Sigma_2} \left| \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial G_1(P, M_2)}{\partial n_{M_2}} \left\{ \ \alpha\beta\mu_1 \ \right\} dS_{M_2} \right| \le \alpha^2\beta\mu_1,$$

$$\max_{\Sigma_1} |u_{22}| \le \max_{\Sigma_1} \left| \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial G_2(P, M_2)}{\partial n_{M_2}} \left\{ \ \alpha\beta\mu_2 \ \right\} dS_{M_2} \right| \le \alpha\beta^2\mu_2,$$

звідки

$$|u_{21}| \le \alpha^2\beta\mu_1, \quad |u_{22}| \le \alpha\beta^2\mu_2 \quad \text{в} \quad \Omega^-$$

і т. д. Позначивши

$$\mu_1 = \max \left\{ \ \mu_1, \mu_2 \ \right\},$$

отримаємо, що ряд (3.3) мажорується таким числовим рядом:

$$\begin{aligned} &[\alpha\mu_1 + \beta\mu_2] + [\alpha\beta\mu_1 + \alpha\beta\mu_2] + [\alpha^2\beta\mu_1 + \alpha\beta^2\mu_2] + [\alpha^2\beta^2\mu_1 + \alpha^2\beta^2\mu_2] + \ldots \le \\ &\le \mu \cdot [(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta + \alpha\beta \cdot (\alpha+\beta) + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) + 2\alpha^3\beta^3 + \ldots] = \\ &= \mu \cdot [(\alpha+\beta)(1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \ldots) + 2\alpha\beta \cdot (1 + \alpha\beta + + \alpha^2\beta^2 + \ldots)] = \qquad (3.4) \\ &= \mu \cdot (\alpha + 2\alpha\beta + \beta) \cdot (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \ldots). \end{aligned}$$

Якщо

$$0 < \alpha\beta \le q < 1,$$

то числовий ряд (3.4) збігається до значення

$$\frac{\mu \cdot (\alpha + 2\alpha\beta + \beta)}{1 - \alpha\beta},$$

а, отже, ряд (3.3) збігається рівномірно.

Якщо виконується умова

$$\varepsilon = \max\left\{ \alpha, \beta \right\} < 1,$$

то ряд (3.3) також можна оцінити таким числовим

$$2\mu \cdot [\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \ldots].$$

Відзначимо, що швидкість збіжності даного ряду суттєво залежить від геометрії області Ω_s^- [32, 64].

3.3 Типове інтегральне рівняння

При моделюванні окремих фізичних явищ у суттєво просторовій постановці за наявності розімкнених граничних поверхонь особливо ефективним виявився метод граничних інтегральних рівнянь. Подання розв'язків у інтегральному вигляді дозволяє процедуру знаходження невідомих величин у певній, часто необмеженій, області в $\mathbf{R}^3$ замінити відшуканням деяких характеристик досліджуваного явища, розподілених лише по границі, із подальшим відтворенням розв'язків у довільній точці області. Тому в обчислювальній математиці актуальними є проблеми створення нових та вдосконалення існуючих методів наближеного розв'язування інтегральних рівнянь. Здебільшого в $\mathbf{R}^3$ останні є двовимірними і ускладнені наявністю особливостями в ядрах. Не зменшуючи загальності, розглянемо типові проблеми, які виникають при дослідження та реалізації відповідних наближених схем.

Розглянемо найпростіший випадок, коли задана лише одна поверхня Σ або S. Тоді, якщо існує розв'язок $u(P)$ задачі (3.1), то його можна шукати у вигляді

$$u(P)=\iint\limits_S K(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M-u_0(P),\quad P\in\Omega_s^-,$$

де

$$u_0(P)=\iint\limits_S \frac{\partial K(P,M)}{\partial n_M}\left[d(M)\right]\mathrm{d}S_M,\quad \left[d\right]=d_--d_+\in H_{00}^{1/2}(S),$$

$K(P,M):=1/\operatorname{dist}(P,M)$ – фундаментальний розв'язок оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$, а $\tau\in H^{-1/2}(S)$ – густина розподілу зарядів на S, яка є розв'язком інтегрального рівняння (ІР) Фредгольма першого роду

$$K\tau\equiv\iint\limits_S K(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M=q(P),\quad P\in S, \tag{3.5}$$

причому

$$q(P):=\frac{1}{2}\left(d_-(P)+d_+(P)\right)+u_0(P),\quad P\in S.$$

Як відомо [31, 91], якщо S – замкнена, обмежена, регулярна поверхня в $\mathbf{R}^3$, то $A:H^t(S)\to H^{t+1}(S)$ – ізоморфізм для довільного $t\in\mathbf{R}^1$. Припустимо, що $t=0$. Покладаючи $H^0(S)=L_2(S)$, можна записати

$$m_1\|\tau\|_{H^0(S)}\le\|K\tau\|_{H^1(S)}\le m_2\|\tau\|_{H^0(S)}, \tag{3.6}$$

де константи m_1 і m_2 $(0<m_1\le m_2)$ не залежать від τ. У випадку, якщо ж S – незамкнена ліпшицева поверхня в $\mathbf{R}^3$, то K – ізоморфізм із $H_{00}^{-1/2}(S)$ в $H^{1/2}(S)$, причому

$$m_1\|\tau\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}\le\|K\tau\|_{H^{1/2}(S)}\le m_2\|\tau\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}. \tag{3.7}$$

Відзначимо, що нерівності (3.6) і (3.7) виражають розв'язність (3.5).

Нехай у прямокутній системі координат $0XYZ$ поверхня S задана за допомогою параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x=x(\alpha,\beta),\\ y=y(\alpha,\beta),\\ z=z(\alpha,\beta),\quad -1\le\alpha,\beta\le 1.\end{cases}$$

Тоді, враховуючи параметризацію S,

$$\begin{cases} P = \{x(\alpha,\beta),\, y(\alpha,\beta),\, z(\alpha,\beta)\}, \\ M = \{x(\alpha_0,\beta_0),\, y(\alpha_0,\beta_0),\, z(\alpha_0,\beta_0)\}, \quad (\alpha,\beta),\, (\alpha_0,\beta_0) \in \Delta = [-1,1] \times [-1,1], \end{cases}$$

інтегральне рівняння (3.5) набуде вигляду

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{J(\alpha,\beta)}{R(\alpha,\beta;\,\alpha_0,\beta_0)} \cdot \frac{\tau(\alpha,\beta)}{\Omega(\alpha,\beta)}\, d\alpha\, d\beta = f(\alpha_0,\beta_0), \tag{3.8}$$

де

$$R(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0) = \Big\{[x(\alpha,\beta) - x(\alpha_0,\beta_0)]^2 + \\ + [y(\alpha,\beta) - y(\alpha_0,\beta_0)]^2 + [z(\alpha,\beta) - z(\alpha_0,\beta_0)]^2\Big\}^{1/2},$$

$$J(\alpha,\beta) = \Big(E(\alpha,\beta)\cdot G(\alpha,\beta) - F^2(\alpha,\beta)\Big)^{1/2}, \quad E(\alpha,\beta) = (x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2,$$

$$G(\alpha,\beta) = (x'_\beta)^2 + (y'_\beta)^2 + (z'_\beta)^2, \quad F(\alpha,\beta) = x'_\alpha x'_\beta + y'_\alpha y'_\beta + z'_\alpha z'_\beta.$$

Функція $\Omega(\alpha,\beta)$ запроваджується для врахування сингулярної поведінки шуканого розв'язку поблизу контуру ∂S розімкненої поверхні S:

$$\Omega(\alpha,\beta) = \frac{[(1-\lambda\alpha)(1-\mu\beta)]^{1/2}}{(1-\lambda\alpha)^{\gamma} + (1-\mu\beta)^{\gamma}},$$

де $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$, а γ – деяка фізична константа. Якщо ж S – замкнена поверхня, то приймаємо $\Omega(\alpha,\beta) \equiv 1$.

3.4 Чисельно-аналітична схема

При побудові та дослідженні наближених схем для (3.8) використовуємо ідеологію, започатковану в [26]. У її основі так званий принцип еквівалентності, апроксимація відповідних функціональних просторів та інтегрального оператора із застосуванням певних операторів звуження та продовження [28, 35].

Для наближеного розв'язання ІР (3.8) застосовуємо метод колокації із апроксимацією $\tau(\alpha,\beta)$ кусково-поліноміальними базисними функціями. В

результаті одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої містить коефіцієнти, що є лінійними комбінаціями деяких двовимірних як власних, так і невласних інтегралів. У загальному випадку названі інтеграли містять вагові функції, які відображають сингулярну поведінку згаданої вище густини розподілу зарядів вздовж контуру сукупної розімкненої поверхні S. При цьому використання універсальних кубатурних формул високого порядку точності суттєво збільшує загальний час розв'язання задачі.

Вихід із такої ситуації можна шукати шляхом побудови та аналізу нових спеціальних кубатурних формул із вагами. Однак, одержати помітні результати тут можна лише при певних обмеженнях на форму поверхонь S_i $(i=\overline{1,m})$ та враховуючи їх взаємне розташування. У випадку ж нескладних геометричних форм поверхонь S_i $(i=\overline{1,m})$ можна аналітично обчислити вище згадані інтеграли. При цьому, незважаючи на відносну складність одержаних формул, вдалося разом із уникненням похибки чисельного інтегрування досягнути багатократного зменшення часу розв'язання задачі в цілому. На нашу думку, такий підхід до проблеми є продуктивним, оскільки дає можливість, з одного боку, ефективно розв'язувати певний клас задач у суттєво просторовій постановці, а з другого, створити деякий математичний апарат для побудови загальної методики обчислення двовимірних невласних інтегралів з вагами.

У випадку, якщо S_i $(i=\overline{1,m})$ представляють собою чотирикутні пластинки у вигляді паралелограмів, то при використання методу колокації до розв'язування рівняння (3.8) виникає проблема ефективного обчислення інтегралів вигляду

$$I(m,n):=\iint\limits_{\Delta}\frac{x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(\alpha x-x_0)^2+(\beta y-y_0)^2+\delta^2}},\quad m,n=0,1,2,\ldots, \tag{3.9}$$

де $\Delta:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,-1\le x,y\le 1\right\}$, $a,b>0$, $\delta\ge 0$. Якщо $|x_0/\alpha|\le 1$, $|y_0/\beta|\le 1$ і $\delta=0$, то інтеграл (3.9) буде невласним. Згідно з критерієм порівняння,

існування інтегралу $I(0,0)$ обумовлює існування $I(m,n)$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left| x^m \cdot y^n \right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(\alpha x - x_0)^2 + (\beta y - y_0)^2}} \le \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(\alpha x - x_0)^2 + (\beta y - y_0)^2}}.$$

В той же час існування $I(0,0)$ випливає із леми [19, 37], згідно з якої інтеграл

$$\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \cdots\cdots \int \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^t}$$

збігається при умові t менше розмірності простору і розбігається у протилежному випадку.

Розглянемо проблему обчислення інтегралу (3.9) в загальному випадку, коли $|m|+|n|>0$, $\delta \ge 0$. Згідно теореми Фубіні, допустимим є перехід від подвійного інтегралу до повторного, причому порядок інтегрування на остаточний результат не впливає, що можна показати безпосереднім обчисленням відповідних повторних. Враховуючи цю обставину, розглянемо задачу обчислення одного класу неозначених одновимірних інтегралів та застосуємо отримані результати до побудови рекурентного співвідношення, яке визначатиме (3.9). Покажемо, що має місце формула

$$\int \frac{y^n \mathrm{d}y}{S_x^\delta(y)} = P_{n-1}(y) S_x^\delta(y) + \gamma \int \frac{\mathrm{d}y}{S_x^\delta(y)} \quad (\delta \ge 0,\ n \ge 1). \tag{3.10}$$

Тут $S_x^\delta(y) := \sqrt{x^2+y^2+\delta^2}$, x – деякий фіксований параметр, γ – константа, значення якої у загальному випадку може залежати від x, $P_{n-1}(y)$ – многочлен степені не вище, ніж $n-1$: $P_{n-1}(y) := \sum_{i=1}^{n-1} p_i y^i$. Якщо припустити існування такого $P_{n-1}(y)$, то провівши диференціювання (3.10) по y, одержимо

$$\frac{y^n}{S_x^\delta(y)} = P'_{n-1}(y) S_x^\delta(y) + \frac{y P_{n-1}(y) + \gamma}{S_x^\delta(y)},$$

звідки

$$y^n = P'_{n-1}(y) \cdot \left[S_x^\delta(y)\right]^2 + y P_{n-1}(y) + \gamma.$$

Отже, справа та зліва ми маємо многочлен степені n. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях y, отримаємо лінійну систему порядку $n+1$ відносно невідомих $p_0, p_1, ..., p_{n-1}, \gamma$:

$$p_{n-1} + (n-1)p_{n-1} = 1,$$

$$p_{n-2} + (n-2)p_{n-2} = 0,$$

$$p_{n-3} + (n-1)(x^2+\delta^2)p_{n-1} + (n-3)p_{n-3} = 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$p_{n-2-i} + (n-i)(x^2+\delta^2)p_{n-i} + (n-2-i)p_{n-2-i} = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \; n \ge 3,$$

$$p_0 + 2(x^2+\delta^2)p_2 = 0, \quad \gamma + (x^2+\delta^2)p_1 = 0.$$

З перших двох рівнянь безпосередньо визначаємо: $p_{n-1} = 1/n$, $p_{n-2} = 0$. Підставляючи одержані величини в наступні рівняння, отримаємо для $n \ge 3$ рекурентне співвідношення

$$p_{n-2-i} = -\frac{n-i}{n-1-i}(x^2+\delta^2)p_{n-i}, \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$p_0 = -2(x^2+\delta^2)p_2, \quad \gamma = -(x^2+\delta^2)p_1.$$

Таким чином, для довільного $n \ge 1$ існує єдине подання (3.10), де коефіцієнти многочлена $P_{n-1}(y)$ обчислюють за формулами

$$p_{n-1} = 1/n, \quad p_{n-2} \equiv 0,$$

$$p_{n-2-i} = (-1)^{\alpha} \frac{(n-1-(1+(-1)^i)/2)!! \cdot (n-3-i)!!}{(n-2-(1+(-1)^i)/2)!! \cdot (n-2-i)!!} \times$$

$$\times (x^2+\delta^2)^q p_{n-1-(1+(-1)^i)/2}, \quad i = \overline{1, n-3}, \quad n \ge 4, \tag{3.11}$$

$$p_0 = (-1)^r \frac{(n-1-(1+(-1)^{n-2})/2)!!}{(n-2-(1+(-1)^{n-2})/2)!!} (x^2+\delta^2)^r p_{n-1-(1+(-1)^{n-2})/2},$$

$$\alpha = (-1)^s \frac{(n-1-(1+(-1)^{n-1})/2)!!}{(n-2-(1+(-1)^{n-1})/2)!!} (x^2+\delta^2)^s p_{n-1-(1+(-1)^{n-1})/2},$$

причому

$$q=\left[\frac{i+1}{2}\right]\quad (i=\overline{1,n-3},\ n\ge 4),\quad r=\left[\frac{n-1}{2}\right],\quad s=\left[\frac{n}{2}\right],\quad n\ge 1.$$

Зокрема, у випадку $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$, матимемо

$$p_{2k}=1/(2k+1),\quad p_{2k-1}\equiv 0,$$

$$p_{2k-2i}=(-1)^i\frac{(2k)!!\cdot(2k-1-2i)!!}{(2k+1)!!\cdot(2k-2i)!!}(x^2+\delta^2)^i,$$

$$p_{2k-1-2i}\equiv 0,\quad i=\overline{1,k-1},\quad k\ge 2, \tag{3.12}$$

$$p_0=(-1)^k\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}(x^2+\delta^2)^k,$$

$$\gamma\equiv 0,$$

а для $n=2k$, $k=1,2,\ldots$, із (3.11) отримаємо

$$p_{2k-1}=1/(2k),\quad p_{2k-2}\equiv 0,$$

$$p_{2k-1-2i}=(-1)^i\frac{(2k-1)!!\cdot(2k-2-2i)!!}{(2k)!!\cdot(2k-1-2i)!!}(x^2+\delta^2)^i,$$

$$p_{2k-2-2i}\equiv 0,\quad i=\overline{1,k-1},\quad k\ge 2, \tag{3.13}$$

$$p_0\equiv 0,$$

$$\gamma=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(x^2+\delta^2)^k.$$

Виконавши заміну змінних, яка відповідає перенесенню центру системи координат у точку $(x_0/\alpha,\ y_0/\beta)$, отримаємо представлення (3.9) у вигляді суми інтегралів вигляду

$$J(m,n)=\int_a^b\int_c^d\frac{x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}, \tag{3.14}$$

де $a<b$, $c<d$, $\delta\ge 0$. Наведемо алгоритм обчислення (3.14) при різних співвідношеннях між m і n.

А) Нехай $m=0$ і $n=2k+1$ (або $m=2k+1$ і $n=0$), $k=0,1,2,...$ Тоді, згідно із співвідношенням (3.10) та представленням коефіцієнтів (3.12), отримаємо

$$J(0,2k+1)=\int_a^b\int_c^d \frac{y^{2k+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(P_{2k}(y)S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x,$$

тобто, в даному випадку проблема звелася до обчислення одновимірних табличних інтегралів.

Б) Нехай $m=0$ і $n=2k$ (або $m=2k$ і $n=0$), $k=0,1,2,...$ Тоді на основі (3.10) та (3.13), матимемо

$$J(0,2k)=\int_a^b\int_c^d \frac{y^{2k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(P_{2k-1}(y)S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x+$$

$$+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_a^b\int_c^d \frac{(x^2+\delta^2)^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(P_{2k-1}(y)S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x+$$

$$+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\delta^{2(k-i)}\int_a^b\int_c^d\frac{x^{2i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_a^b\int_c^d\frac{x^{2k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}.$$

Аналогічним чином знаходимо інтеграл типу $J(2k,0)$. Отже,

$$J(0,2k)=\int_a^b\int_c^d \frac{y^{2k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\frac{((2k)!!)^2}{((2k)!!)^2-((2k-1)!!)^2}\left(\int_a^b\left(P_{2k-1}(y)S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x+\right.$$

$$+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\int_c^d\left(P_{2k-1}(x)S_x^y(\delta)\Big|_a^b\right)\mathrm{d}y+\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\delta^{2(k-i)}\int_a^b\int_c^d\frac{x^{2i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}\right)+ \quad (3.15)$$

$$\left.+\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\delta^{2(k-i)}\int_a^b\int_c^d\frac{y^{2i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}\right).$$

Формула (3.15) представляє собою рекурентне співвідношення для обчислення вказаного класу інтегралів (3.14).

В) Нехай $m>0$ – довільне значення, а $n=2k+1$ – непарне (або навпаки). В цьому випадку, аналогічно до пункту А), проблема зводиться до обчислення одновимірних інтегралів. Дійсно, згідно (3.10) та (3.12), матимемо

$$J(m,2k+1)=\int_a^b\int_c^d \frac{x^m y^{2k+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(P_{2k}(y)x^m S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x. \qquad (3.16)$$

Г) Припустимо тепер, що обидва показники є парними, тобто $m=2l$, $n=2k$, $k,l=0,1,2,...$ Тоді, на основі (3.10) та (3.13), можна записати

$$J(2l,2k)=\int_a^b\int_c^d \frac{x^{2l} y^{2k}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(P_{2k-1}(y)x^{2l} S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x+$$

$$+(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\delta^{2(k-i)}\int_a^b\int_c^d\frac{x^{2(l+i)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}.$$

Таким чином, проблема звелася до обчислення одновимірного інтегралу та інтегралів вигляду (3.15).

Запишемо вигляд інтегралів (3.14) для деяких конкретних показників m і n.

1) Нехай $m=1$ і $n=0$ (або $m=0$ і $n=1$). Тоді

$$J(1,0)=\int_a^b\int_c^d\frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_c^d\left(S_x^y(\delta)\Big|_a^b\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\Big(d\left(S_b^d(\delta)-S_a^d(\delta)\right)-c\left(S_b^c(\delta)-S_a^c(\delta)\right)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\left((b^2+\delta^2)\ln\left|\frac{d+S_b^d(\delta)}{c+S_b^c(\delta)}\right|-(a^2+\delta^2)\ln\left|\frac{d+S_a^d(\delta)}{c+S_a^c(\delta)}\right|\right).$$

Аналогічним чином знаходимо $J(0,1)$.

2) Нехай $m=2$ і $n=0$ (або $m=0$ і $n=2$). Тоді

$$J(2,0)=\int_a^b\int_c^d\frac{x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\frac{4}{3}\left(\int_c^d\left(\frac{1}{2}xS_x^y(\delta)\Big|_a^b\right)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{1}{2}yS_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x-\frac{\delta^2}{4}\int_a^b\int_c^d\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\Big(b\left(dS_b^d(\delta)-cS_b^c(\delta)\right)-a\left(dS_a^d(\delta)-cS_a^c(\delta)\right)+$$

$$+2\left(b(b^2+\delta^2)\ln\left|\frac{d+S_b^d(\delta)}{c+S_b^c(\delta)}\right|-a(a^2+\delta^2)\ln\left|\frac{d+S_a^d(\delta)}{c+S_a^c(\delta)}\right|\right)-$$

$$-\left(d(a^2+\delta^2)\ln\left|\frac{b+S_b^d(\delta)}{a+S_a^d(\delta)}\right|-c(c^2+\delta^2)\ln\left|\frac{b+S_b^c(\delta)}{a+S_a^c(\delta)}\right|\right)-$$

$$-\frac{\delta^2}{2}(b-a)(d-c)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(S_{\frac{d-c}{2}v+\frac{d+c}{2}}^{\frac{b-a}{2}u+\frac{b+a}{2}}(\delta)\right)^{-1}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Bigg),$$

де в останньому доданку виконано заміну змінних

$$x=\frac{1}{2}(b+a)+\frac{1}{2}(b-a)u\,,$$
$$y=\frac{1}{2}(d+c)+\frac{1}{2}(d-c)v$$

із врахуванням якобіану

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{4}(b-a)(d-c)\,.$$

Подібним чином обчислюється інтеграл $J(0,2)$.

3) Розглянемо випадок $m=1$ і $n=1$. Легко бачити, що

$$J(1,1)=\int_a^b\int_c^d\frac{xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(xS_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left(S_b^d(\delta)\right)^3-\left(S_a^d(\delta)\right)^3-\left(\left(S_b^c(\delta)\right)^3-\left(S_a^c(\delta)\right)^3\right)\right).$$

4) Припустимо, що $m=3$ і $n=0$ (або $m=0$ і $n=3$). Тоді

$$J(3,0)=\int_a^b\int_c^d\frac{x^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\frac{1}{3}\int_c^d\left(\left(x^2-2(y^2+\delta^2)\right)S_x^y(\delta)\Big|_a^b\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{12}\Bigg(d\left((b^2-2d^2-5\delta^2)S_b^d(\delta)-(a^2-2d^2-5\delta^2)S_a^d(\delta)\right)-$$

$$-c\left((b^2-2c^2-5\delta^2)S_b^c(\delta)-(a^2-2c^2-5\delta^2)S_a^c(\delta)\right)+$$

$$+3\left((b^4-\delta^4)\ln\left|\frac{d+S_b^d(\delta)}{c+S_b^c(\delta)}\right|-(a^4-\delta^4)\ln\left|\frac{d+S_a^d(\delta)}{c+S_a^c(\delta)}\right|\right)\Bigg).$$

За допомогою подібної формули, з точністю до симетрії у поданні меж інтегрування, обчислюємо інтеграл $J(0,3)$.

5) Розглянемо випадок, коли $m=2$ і $n=1$ (або $m=1$ і $n=2$). Використовуючи алгоритм (3.16), матимемо

$$J(2,1)=\int_a^b\int_c^d \frac{x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\frac{1}{3}\int_a^b\left(x^2 S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{8}\Bigg(b\Big((d^2+2b^2+\delta^2)S_b^d(\delta)-(c^2+2b^2+\delta^2)S_b^c(\delta)\Big)-$$

$$-a\Big((d^2+2a^2+\delta^2)S_a^d(\delta)-(c^2+2a^2+\delta^2)S_a^c(\delta)\Big)-$$

$$-\left((d^2+\delta^2)^2\ln\left|\frac{b+S_b^d(\delta)}{a+S_a^d(\delta)}\right|-(c^2+\delta^2)^2\ln\left|\frac{b+S_b^c(\delta)}{a+S_a^c(\delta)}\right|\right)\Bigg).$$

Інтеграл $J(1,2)$ обчислюється аналогічно.

6) Нехай $m=3$ і $n=1$ (або $m=1$ і $n=3$). В цьому випадку формулою (3.16) можна скористатися як по змінній x, так і по змінній y. Проте, виходячи з технічних міркувань, бажано отримати многочлен $P_k(t)$ ($k=0,2$, $t\in\{x,y\}$) якомога нижчого порядку. Тому, переходити до повторного інтегралу потрібно так, щоб першим обчислити інтеграл по змінній, порядок многочлена за якою є меншим. Враховуючи сказане, знайдемо інтеграл $J(3,1)$

$$J(3,1)=\int_a^b\int_c^d \frac{x^3 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=\int_a^b\left(x^3 S_x^y(\delta)\Big|_c^d\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{15}\Bigg((3b^2-2d^2-2\delta^2)\left(S_b^d(\delta)\right)^3-(3a^2-2d^2-2\delta^2)\left(S_a^d(\delta)\right)^3-$$

$$-(3b^2-2c^2-2\delta^2)\left(S_b^c(\delta)\right)^3+(3a^2-2c^2-2\delta^2)\left(S_a^c(\delta)\right)^3\Bigg).$$

Для інтегралу $J(1,3)$ отримаємо подібну формулу.

7) Вкажемо також вигляд інтегралу $J(0,0)$.

$$J(0,0)=\int_a^b\int_c^d \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S_x^y(\delta)}=$$

$$=b\ln\left|\frac{d+S_b^d(\delta)}{c+S_b^c(\delta)}\right|-a\ln\left|\frac{d+S_a^d(\delta)}{c+S_a^c(\delta)}\right|+d\ln\left|\frac{b+S_b^d(\delta)}{a+S_a^d(\delta)}\right|-c\ln\left|\frac{b+S_b^c(\delta)}{a+S_a^c(\delta)}\right|+$$

$$+2\delta\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\delta}\left(b+d+S_b^d(\delta)\right)-\operatorname{arctg}\frac{1}{\delta}\left(a+d+S_a^d(\delta)\right)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{1}{\delta}\left(b+c+S_b^c(\delta)\right)+\operatorname{arctg}\frac{1}{\delta}\left(a+c+S_a^c(\delta)\right)\right).$$

Повернемося до питання обчислення інтегралу (3.9) у випадку $|m|+|n|>0$. Виконаємо в ньому заміну змінних, яка відповідає переносу центру системи координат у особливу точку. В результаті отримаємо

$$I(m,n)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_{\beta y-y_0}^{\alpha x-x_0}(\delta)}=\alpha^{-(m+1)}\beta^{-(n+1)}\int_a^b\int_c^d\frac{(u+x_0)^m(v+y_0)^n\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{S_u^v(\delta)}=$$

$$=\alpha^{-(m+1)}\beta^{-(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_m^i C_n^j x_0^{m-i}y_0^{n-j}\int_a^b\int_c^d\frac{u^i v^j\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{S_u^v(\delta)},$$

де

$$\begin{cases}u=\alpha x-x_0\,,\\ v=\beta y-y_0\,,\end{cases}$$

$$a=-\alpha-x_0,\ b=\alpha-x_0,\ c=-\beta-y_0,\ d=\beta-y_0,\ |m|+|n|>0,$$

якобіан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\alpha\beta},$$

а C_k^l – коефіцієнти біному Ньютона. Таким чином, проблема визначення інтегралу (3.9) звелася до обчислення інтегралів вигляду (3.14).

Розглянемо деякі конкретні випадки значень показників m і n, які найчастіше зустрічаються на практиці.

1) Нехай $m=1$ і $n=0$ (аналогічно при $m=0$ і $n=1$). Тоді

$$I(1,0)=\alpha^{-2}\beta^{-1}\left(J(1,0)+\alpha\beta x_0 I(0,0)\right).$$

2) Нехай $m=2$ і $n=0$ (аналогічно у випадку $m=0$ і $n=2$). Матимемо

$$I(2,0)=\alpha^{-3}\beta^{-1}\left(J(2,0)+2x_0J(1,0)+\alpha\beta x_0^2 I(0,0)\right).$$

3) У випадку $m=1$ і $n=1$ отримаємо таке представлення інтегралу $I(1,1)$:

$$I(1,1)=\alpha^{-2}\beta^{-2}\left(J(1,1)+y_0J(1,0)+x_0J(0,1)+\alpha\beta x_0y_0I(0,0)\right).$$

4) Припустимо, що $m=3$ і $n=0$ (аналогічно при $m=0$ і $n=2$). Тоді

$$I(3,0)=\alpha^{-4}\beta^{-1}\left(J(3,0)+3x_0J(2,0)+3x_0^2J(1,0)+\alpha\beta x_0^3I(0,0)\right).$$

5) Нехай $m=2$ і $n=1$ (аналогічно у випадку $m=1$ і $n=2$). Тоді

$$I(2,1)=\alpha^{-3}\beta^{-2}\Big(J(2,1)+y_0J(2,0)+2x_0J(1,1)+$$

$$+2x_0y_0J(1,0)+x_0^2J(0,1)+\alpha\beta x_0^2y_0I(0,0)\Big).$$

6) На завершення розглянемо випадок $m=3$ і $n=1$ (аналогічно при $m=1$ і $n=3$). Матимемо

$$I(3,1)=\alpha^{-4}\beta^{-2}\Big(J(3,1)+y_0J(3,0)+3x_0J(2,1)+3x_0y_0J(2,0)+$$

$$+3x_0^2J(1,1)+3x_0^2y_0J(1,0)+x_0^3J(0,1)+\alpha\beta x_0^3y_0I(0,0)\Big).$$

Зауважимо, що при виборі певних тривіальних значень параметрів приведені формули співпадають із відомими в літературі [7].

У випадку наявності більш екзотичних, з точки зору практики, поверхонь S_i ($i=\overline{1,m}$) необхідно обчислювати складніші інтеграли, ніж (3.9). Однак, досить часто їх можна звести до вказаних вище. Зокрема, розглянемо проблему обчислення інтегралу [9]

$$I=\iint\limits_{\Delta}[A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (3.17)$$

де $(x_0,y_0)\in\Delta$, A,B,C – дійсні числа, $A+C>0$, $AC-B^2>0$. Алгоритм обчислення базується на формулі

$$\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{ay+b}^{py+q}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}x=(y_0-c)K(c)+(d-y_0)K(d)+$$
$$+\frac{q-x_0+py_0}{(1+p^2)^{1/2}}L(p,q)+\frac{x_0-b-ay_0}{(1+a^2)^{1/2}}L(a,b). \qquad (3.18)$$

Тут $c\le y_0\le d$, $ay_0+b\le x_0\le py_0+q$;

$$K(t)=\ln\frac{q-x_0+pt+[(q-x_0+pt)^2+(t-y_0)^2]^{1/2}}{q-x_0+at+[(q-x_0+at)^2+(t-y_0)^2]^{1/2}},$$

$$L(s,t)=\ln\frac{d-y_0+t\,(s-x_0+td)+(1+t^2)^{1/2}[(s-x_0+td)^2+(d-y_0)^2]^{1/2}}{c-y_0+t\,(s-x_0+tc)+(1+t^2)^{1/2}[(s-x_0+tc)^2+(c-y_0)^2]^{1/2}}.$$

Інтеграл (3.17) можна подати у вигляді лінійної комбінації інтегралів типу (3.18). З цією метою квадратична форма $A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2$ зводиться до канонічного вигляду шляхом перенесення центру основної системи координат в особливу точку та повороту останньої на деякий кут $\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{A-C}{2B}\right)$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ (див рис. 3.3).

$$\begin{cases} x=x_0+x_1'\cos\varphi-y_1'\sin\varphi, \\ y=y_0+x_1'\sin\varphi+y_1'\cos\varphi. \end{cases}$$

Звідси отримаємо

$$I=\iint\limits_D[A'(x_1')^2+B'(y_1')^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}y_1',$$

$$A'=\frac{1}{2}[A+C+\operatorname{sign}B\,(4B^2+(A-C)^2)^{1/2}],$$

$$B'=\frac{1}{2}[A+C-\operatorname{sign}B\,(4B^2+(A-C)^2)^{1/2}].$$

Повертаючись по заміні в точку O, одержимо

$$I=\iint\limits_D[A'(x'-x_0')^2+C'(y'-y_0')^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y',$$

причому

$$\begin{cases} x_1'=x'-x_0', \\ y_1'=y'-y_0', \end{cases}$$

а (x_0',y_0') – координати особливої точки в системі $X'0Y'$:

$$\begin{cases} x_0'=x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi, \\ y_0'=-x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi. \end{cases}$$

Після розтягу (стиску)

$$\begin{cases} x_1' = (A')^{-1/2}\tilde{x}\,, \\ y_1' = (C')^{-1/2}\tilde{y}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_0 = (A')^{1/2}(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi)\,, \\ \tilde{y}_0 = (C')^{1/2}(-x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi)\,, \end{cases}$$

остаточно маємо інтеграл

$$I = (AC - B^2)^{-1/2}\iint\limits_{\tilde{D}} [(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,.$$

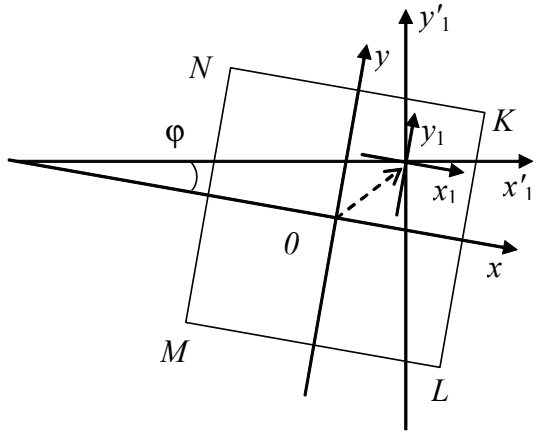


Рисунок 3.3 – Перетворення області інтегрування

Зауважимо, що координати точок K, L, M, N в системі $\tilde{X}0\tilde{Y}$ є такими

$$K = \left((A')^{1/2}(\cos\varphi + \sin\varphi), (C')^{1/2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right),$$

$$L = \left((A')^{1/2}(\sin\varphi - \cos\varphi), (C')^{1/2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right),$$

$$M = \left((A')^{1/2}(-\cos\varphi - \sin\varphi), (C')^{1/2}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right),$$

$$N = \left((A')^{1/2}(\cos\varphi - \sin\varphi), (C')^{1/2}(-\cos\varphi - \sin\varphi)\right),$$

а інтегрування по області $\tilde{D}$ відбувається в залежності від величини кута: $\varphi < \pi/4$, $\varphi = \pi/4$, $\varphi > \pi/4$.

3.5 Схема з використанням функції Гріна

З метою висвітлення ефективної методики розв’язання (3.1) розглянемо таке логічне спрощення загального формулювання нашої проблеми. Нехай задано лише одну поверхню Σ, і вона є такою, що в Ω^- існує відповідна

функція Гріна оператора Лапласа – $G(P,M)$. При електростатичній інтерпретації задачі (3.1), яку, власне, ми і використовуємо, вважаємо також, що $g_+(P) = g_-(P) = g(P) \equiv \text{const}$ ($P \in S$). Тоді розв'язок (3.1) можна подати у вигляді

$$u(P) = u_1(P) + u_2(P) = \\ = \iint_S G(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M - \iint_\Sigma \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M} g_0(M)\,\mathrm{d}S_m, \quad P \in \Omega_s^-, \tag{3.19}$$

де $\tau(M)$ класу $H^{-1/2}(S)$ одержується в результаті розв'язання відповідного інтегрального рівняння першого роду з ядром $G(P,M)$ і відомою правою частиною

$$\iint_S G(P,M)\tau(M)\,\mathrm{d}S_M = g(P) + \iint_\Sigma \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_M} g_0(M)\,\mathrm{d}S_m, \quad P \in S. \tag{3.20}$$

При наближеному розв'язуванні глобальної задачі виникає низка проблем суто обчислювального характеру [10, 11, 64]. Не зменшуючи загальності, проілюструємо шляхи ефективного вирішення таких проблем на прикладі розв'язання однієї конкретної задачі.

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля електронно-оптичної системи, яку моделюють двома геометричними об'єктами: площиною $z = c \equiv \text{const}$ (Σ) та сферою S радіуса R з центром у початку координат (див. рис. 3.4).

Для розв'язання відповідної зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа із заданими граничними значеннями потенціалу на Σ та S можна скористатися методом інтегральних рівнянь. Однак, тоді виникає необхідність визначати невідомі величини на площині $z = c$. Тому доцільним є застосування апарату функцій Гріна тим більше, що функція точкового джерела першої граничної задачі для рівняння Лапласа існує як для сфери, так і для вказаної площини. Очевидно, що використання функції Гріна для області зовні сфери не дає суттєвого ефекту, оскільки і надалі необхідно визначати густину розподілу

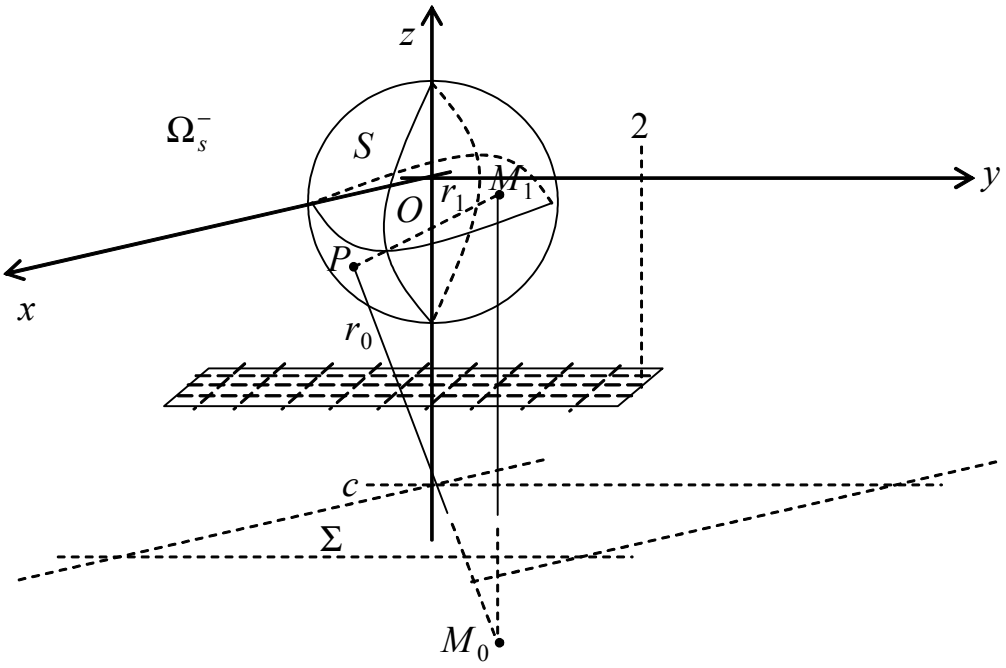


Рисунок 3.4 – Задача про сферу та півпростір

зарядів у безмежній області. В той же час застосування функції Гріна для півпростору дозволить знаходити невідомі величини лише на сфері радіуса R. Отже, враховуючи попередні міркування, а також конкретне подання функції Гріна для півпростору, отримуємо аналогічне до (3.20) інтегральне рівняння першого роду для визначення невідомої густини розподілу зарядів $\tau(P)$ на сфері S

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right)\tau(P)\,\mathrm{d}S_P = g(M_1)-u_1(M_1), \quad M_1 \in S, \tag{3.21}$$

де $g(M_1)$ – граничне значення потенціалу на S; $P=(x,y,z)$, $M_1=(x_1,y_1,z_1)$; M_0 – точка, спряжена до M_1 відносно площини $z=c$;

$$r_1 = \left|\overrightarrow{M_1P}\right| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\ ;$$

$$r_0 = \left|\overrightarrow{M_0P}\right| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1-2c)^2}\ ;$$

$$u_1(M_1) = \frac{z_1-c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_0(x,y,c)}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z_1-c)^2}\right)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{3.22}$$

У результаті параметризації (3.21)

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

$$P = (x, y, z) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta),$$

$$M_1 = (x_1, y_1, z_1) = (R\sin\theta_1\cos\varphi_1, R\sin\theta_1\sin\varphi_1, R\cos\theta_1)$$

отримуємо таке інтегральне рівняння

$$\frac{R}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\sin^2\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\right)^{-1/2}-\right.$$

$$-\left(\cos^2\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right)+\right. \qquad (3.23)$$

$$\left.\left.+\frac{c^2}{R^2}-2\frac{c}{R}\cos\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\right)^{-1/2}\right]\sin\theta\,\tau(\varphi,\theta)\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= g(R,\varphi_1,\theta_1) - u_1(R,\varphi_1,\theta_1), \quad 0 \le \varphi_1 \le 2\pi, \quad 0 \le \theta_1 \le \pi.$$

Рівняння (3.23) належить до класу двовимірних інтегральних рівнянь першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Його наближене розв’язування здійснюється методом колокації із апроксимацією шуканої густини $\tau(\varphi,\theta)$ кусково-постійними, білінійними або біквадратичними базисними функціями. При цьому особливість ядра враховується шляхом застосування процедури «послаблення» особливості. Розв’язок задачі на пластині $(x, y) \in [-2, 2]\times[-2, 2]$ при $z = -1{,}5$, $c = -2$ та $R = 1$ представлений на рис. 3.5.

Звернемо увагу на проблему обчисленню інтегралу (3.22). В силу властивостей підінтегральної функції у (3.22) інтегрування по необмеженій області $D_\infty := (-\infty, +\infty)\times(-\infty, +\infty)$ можна чисельно змоделювати послідовним інтегруванням по обмеженим областям $D_i := [-a_i, a_i]^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$, де $a_{i+1} > a_i$. Позначимо через $I_{a,n}$ – обчислене по деякій квадратурній формулі значення інтеграла (3.22) з розбиттям області $[-a, a]\times[-a, a]$ на $n\times n$ комірок. Вважатимемо, що точність ε_0 обчислення значення інтеграла досягнена, якщо

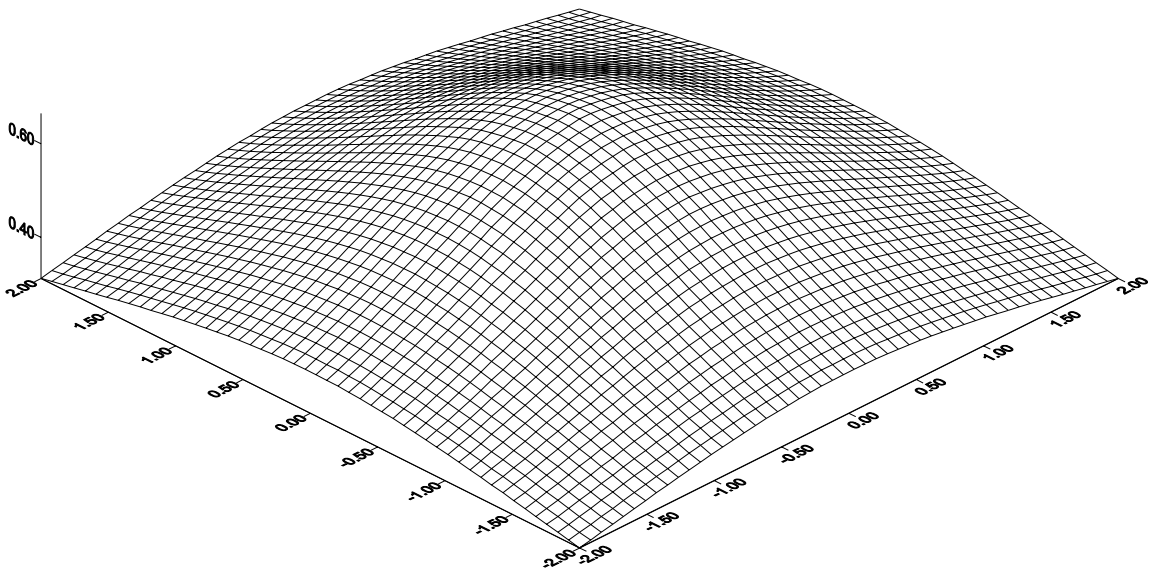


Рисунок 3.5 – Поверхня значень розв’язку

має місце нерівність

$$\left| I_{a,n} - I_{a,2n} \right| < \varepsilon_0 . \tag{3.24}$$

Далі, подвоїмо значення параметра a та повторимо всі обчислення знову. Якщо для деякого ε_1 буде виконуватися умова

$$\left| I_{a,n} - I_{2a,2n} \right| < \varepsilon_1 , \tag{3.25}$$

то вважатимемо, що інтеграл (3.22) обчислений з гарантованою точністю. Відзначимо, що константи ε_0 і ε_1 не можуть бути довільними. Не можна вимагати виконання умови (3.25), якщо ε_1 є одного порядку з ε_0, оскільки похибки заокруглень можуть знівелювати досягнуту точність (3.24) і, отже, умова (3.25) ніколи не буде виконана. Необхідно вимагати, принаймні, щоб константа ε_1 на порядок переважала ε_0:

$$\varepsilon_0 \le 10^{-1} \varepsilon_1 . \tag{3.26}$$

В таблиці 3.1 та відповідно на рис. 3.6 представлені отримані значення u_1 у випадку, коли $u\big|_{\Sigma} = g_0 \equiv 1$ та $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ і $\varepsilon_1 = 10^{-3}$.

Таблиця 3.1 – Значення u_1 при $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ і $\varepsilon_1 = 10^{-2}$

x	y	z	u_1
– 2,0	– 2,0	– 1,5	0,99514805514
– 1,6	– 1,6	– 1,5	0,99376092092
– 1,2	– 1,2	– 1,5	0,97023006092
– 0,8	– 0,8	– 1,5	0,98951245081
– 0,4	– 0,4	– 1,5	0,98910413423
0,0	0,0	– 1,5	0,98554131046
0,4	0,4	– 1,5	0,98910413422
0,8	0,8	– 1,5	0,98951245082
1,2	1,2	– 1,5	0,97023006091
1,6	1,6	– 1,5	0,99376092092
2,0	2,0	– 1,5	0,99514805514

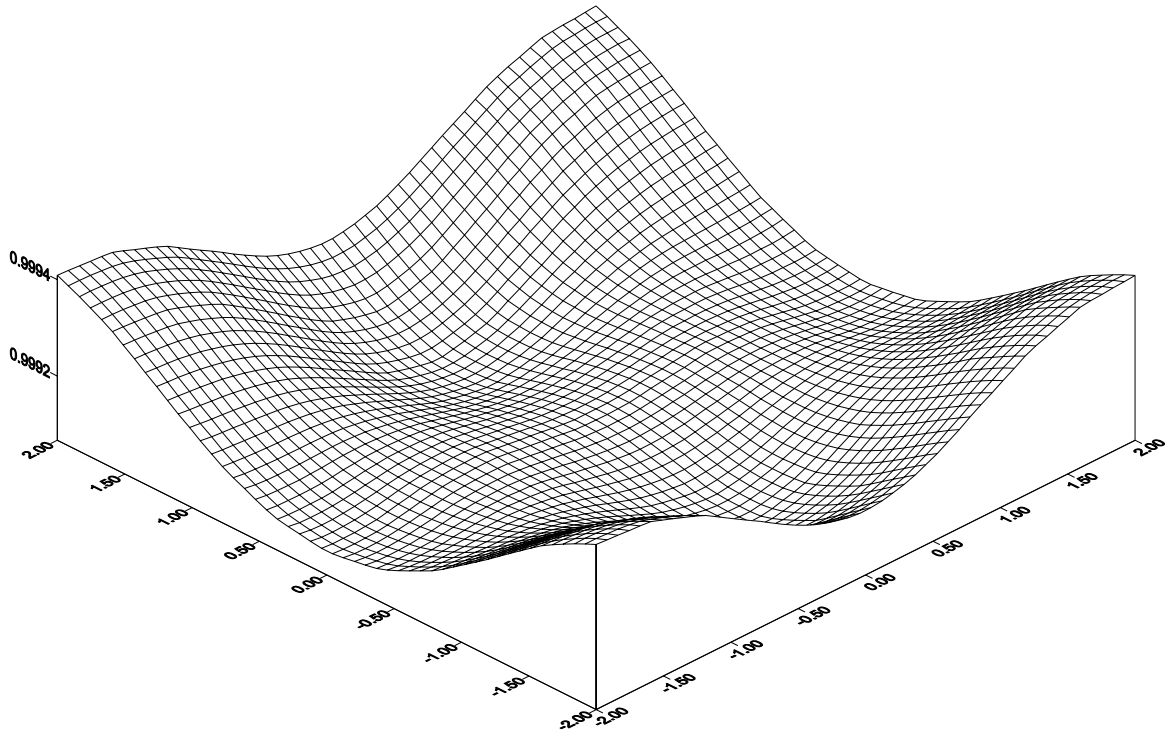


Рисунок 3.6 – Поверхня значень u_1 для випадку $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ і $\varepsilon_1 = 10^{-3}$

Зауважимо, що при невиконанні умови (3.26) збіжність інтегралу (3.22) може бути порушена. Зокрема, в таблиці 3.2 і на рис. 3.7 представлена величина похибки при обчисленні інтегралу в точці $M_1 = (-2, -2, -1{,}5)$. Значення констант точності становили $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 10^{-3}$. При цьому похибка (3.25) спочатку

зменшувалася, а потім почала зростати. Це пояснюється тим, що точність $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ в (3.25) була недосяжною, оскільки інтеграли в (3.24) обчислювалися з такою ж точністю $\varepsilon_0 = 10^{-3}$. Це призвело до того, що в певний момент значно зросла похибка накоплення, і інтеграл (3.22) почав розбігатися.

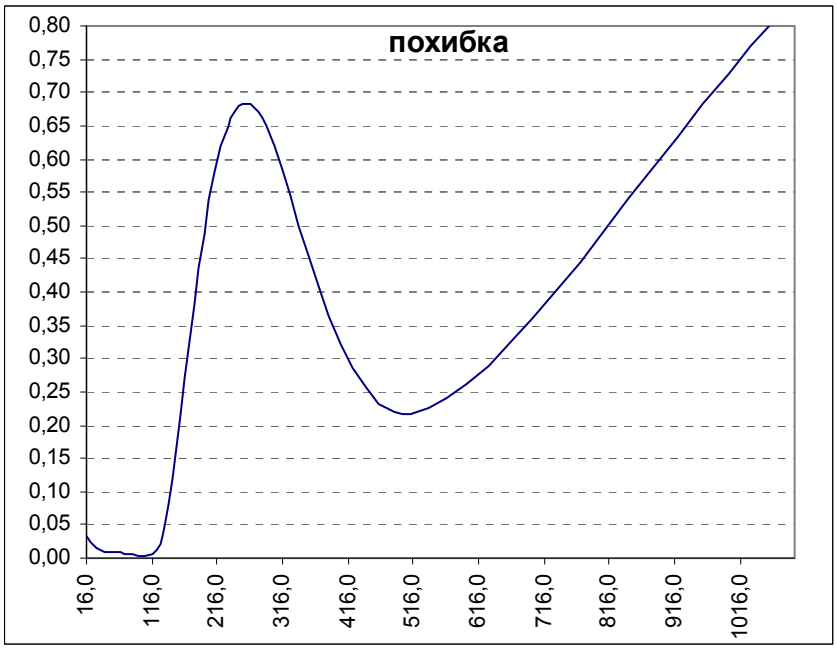


Рисунок 3.7 – Поведінка похибки при порушенні умови (3.26)

Таблиця 3.2 – Значення похибки у випадку $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 10^{-3}$

a	$\left\| I_{a,n} - I_{2a,2n} \right\|$
16,0000	0,0322287437340
32,0000	0,0145967270020
64,0000	0,0091126994003
128,000	0,0212786897250
256,000	0,6829244836100
512,000	0,2153699479700
1024,00	0,4611945354600
2048,00	2,1781355787000
4096,00	9,1239156630000
8192,00	36,659165768000
16384,0	146,71231746000
32768,0	586,88631338000
65536,0	2347,5636767000

Отже, на кожному кроці запровадженої ітераційної процедури необхідно узгоджувати значення a_i з вибором кроку кубатурної формули, що застосовується для наближеного обчислення відповідного інтегралу по обмеженій області D_i.

Для перевірки достовірності отриманих результатів розв'язували поставлену проблему методом декомпозиції областей Шварца. В даному випадку така можливість є, оскільки розв'язки окремих задач лише для сфери або площини легко подаються за допомогою відповідних функцій Гріна, що відомі в літературі [33]. При цьому, оскільки остаточний розв'язок задачі розрахунку електростатичного поля, створеного зарядженою площиною та сферою, подається у вигляді функціонального ряду, допускається покращення збіжності останнього [17, 18].

3.6 Дослідження наближеної схеми розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Не зменшуючи загальності, обмежимося випадком однієї зарядженої поверхні S. Відповідне інтегральне рівняння має вигляд

$$K\sigma = -\gamma_0^{\pm} V\sigma = \widetilde{g}\,, \quad K : H_{00}^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S),$$

або

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\, dS_y = \widetilde{g}(x),\ \widetilde{g}(x) = g(x) + \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\rho(y)}{|x-y|}\, dy\,, \quad x \in \Omega\,, \qquad (3.27)$$

де $g(x)$ – граничне значення потенціалу на S. Інтегральне рівняння (3.27) розв'язуватимемо за методом колокації.

Оскільки оператор K – додатно визначений [30], то, за теоремою Банаха [35], відповідний обернений оператор K^{-1} обмежений і справджуються нерівності

$$m\|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le \|K\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \le M\|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}, \tag{3.28}$$

де $0 < m \le M$ – сталі, які не залежать від σ. Оскільки оператор $V : H_{00}^{-1/2}(S) \to \mathrm{Ker}[\gamma_0]_\Delta$ – ізоморфізм [30], то в просторі $H_{00}^{-1/2}(S)$ визначимо еквівалентну норму, таку що

$$\|\sigma\|^2_{H_{00}^{-1/2}(S)} = \|V\sigma\|^2_\Delta = \||\nabla V\sigma|\|^2_{L_2(\Omega)} =< \sigma, K\sigma >, \tag{3.29}$$

та скалярний добуток $(\sigma,\nu)_{H_{00}^{-1/2}(S)} = (\nabla V\sigma, \nabla V\nu)_{L_2(\Omega)} =< \sigma, K\nu >=< K\sigma, \nu >$.

Для відшукання наближеного розв'язку рівняння (3.27) виконаємо таку його дискретизацію. Розіб'ємо поверхню S на елементарні поверхні S_i, $S = \bigcup_{i=1}^{\tilde{n}} S_i$, так щоб $\mathrm{mes}\, S_i = \tilde{n}^{-1}\,\mathrm{mes}\, S$, $h_i = \mathrm{diam}\, S_i \le h$, де $h = \max\limits_{1\le i\le \tilde{n}} h_i$ – досить мале число.

Зафіксуємо на S множину точок $X_{\tilde{n}} = \{x_i\}_{i=1}^{\tilde{n}}$, $x_i \in S_i$. Далі, розглянемо систему функцій $\{R_i\}_{i=1}^{\tilde{n}}$, $R_i(y) = |x_i - y|^{-1}$, $x_i \in X_{\tilde{n}}$. Припустимо, що точки множини $X_{\tilde{n}}$ вибрано так, що система функцій $\{R_i\}_{i=1}^{\tilde{n}}$ лінійно незалежна. Визначимо на $L^\infty(S)$ сукупність лінійних неперервних функціоналів

$$e_m(\varphi) = \int_S \frac{\varphi(y)}{|x_m - y|} dS_y,\ \varphi \in L^\infty(S),\ x_m \in X_{\tilde{n}},\ m = 1, 2, ..., \tilde{n}.$$

Позначимо через $\mathrm{Ker}(e_m)$ нульовий підпростір функціоналу e_m в $L^\infty(S)$

$$\mathrm{Ker}(e_m) = \{\psi \in L^\infty(S) : e_m(\psi) = 0\},$$

і покладемо $\mathrm{Ker}\, E_{\tilde{n}} = \bigcap_{m=1}^{\tilde{n}} \mathrm{Ker}(e_m)$.

Нехай

$$\{\varphi^{(i,j)}(x)\}_{j=1}^{+\infty},\ i = 1, 2, ..., \tilde{n}, \tag{3.30}$$

– повна, ортонормована система "функцій" в $H_{00}^{-1/2}(S)$, $\mathrm{supp}\,\{\varphi^{(i,j)}(x)\} \subset S_i$,

$\varphi^{(i,j)}(x) \in L^{\infty}(S)$. Розглянемо в $H_{00}^{-1/2}(S)$ систему кусково-сталих функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\tilde{n}}$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \, x \in S_i, \\ 0, \, x \notin S_i, \end{cases} \tag{3.31}$$

лінійну оболонку якої позначимо $U_{\tilde{n}}$.

Визначимо оператор звуження $r_{\tilde{n}}$ з $H_{00}^{-1/2}(S)$ у дискретний простір $V_{\tilde{n}} \subset \mathrm{R}^{\tilde{n}}$

$$r_{\tilde{n}}\sigma = \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} = (\sigma_{\tilde{n}}^{(1)}, \sigma_{\tilde{n}}^{(2)}, ..., \sigma_{\tilde{n}}^{(\tilde{n})}), \;\; (r_{\tilde{n}}\sigma)_i = \sigma_{\tilde{n}}^{(i)} = \sigma(y_i), \; i = 1, 2, ..., \tilde{n}, \tag{3.32}$$

та оператор продовження $p_{\tilde{n}}$

$$p_{\tilde{n}}\tilde{\sigma}_{\tilde{n}} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sigma_{\tilde{n}}^{(i)} \varphi_i(y), \tag{3.33}$$

який є ізоморфізмом з $V_{\tilde{n}}$ в $U_{\tilde{n}}$. Покажемо, що $p_{\tilde{n}}$ є оптимальним в сенсі відповідного означення оптимальності [28] (Оператор $p_{\tilde{n}}$ називають оптимальним оператором продовження щодо оператора звуження $r_{\tilde{n}}$ в U, якщо $r_{\tilde{n}} p_{\tilde{n}} = 1, \| v_{\tilde{n}} \|_{V_{\tilde{n}}} = \| p_{\tilde{n}} v_{\tilde{n}} \|_U \le \| v \|_U, \forall v \in U : r_{\tilde{n}} v = v_{\tilde{n}}$).

Справді,

$$(r_{\tilde{n}} p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}})_j = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sigma_{\tilde{n}}^{(i)} \varphi_i(y_j) = \sigma_{\tilde{n}}^{(j)}$$

в силу ортонормованості системи (3.31), тобто оператор звуження $r_{\tilde{n}}$ є лівим оберненим до ізоморфізму $p_{\tilde{n}}$.

Визначимо норму в дискретному просторі $V_{\tilde{n}}$ за формулою

$$\| \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{V_{\tilde{n}}} = \| p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{H_{00}^{-1/2}(S)}. \tag{3.34}$$

Оскільки $p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma$ це $\tilde{n}$-частинна сума розвинення в ряд Фур'є функції $\sigma(x) \in H_{00}^{-1/2}(S)$ за повною ортонормованою системою функцій, то з нерівності Бесселя випливає, що

$$\| \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{V_{\tilde{n}}} \le \| \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)},$$

а з рівності Парсеваля – умова апроксимації

$$\lim_{\tilde{n}\to+\infty}\left\|\sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}}\sigma\right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} = 0.$$

Отже, довели таке твердження.

Лема 3.1 Оператор $p_{\tilde{n}}$ – оптимальний оператор продовження щодо оператора звуження $r_{\tilde{n}}$ в $H_{00}^{-1/2}(S)$, і породжувані цим оператором апроксимації $(V_{\tilde{n}}, p_{\tilde{n}}, r_{\tilde{n}})$ простору $H_{00}^{-1/2}(S)$ збігаються.

Визначимо оператор звуження $\tilde{s}_{\tilde{n}}$ для будь-якої функції $\tilde{g}(x)$ з $H^{1/2}(S)$ у дискретний простір $\Phi_{\tilde{n}} \subset \mathrm{R}^{\tilde{n}}$ за формулою

$$(\tilde{s}_{\tilde{n}}\tilde{g})_i = \tilde{g}(\tilde{x}_i),$$

де

$$\tilde{x}_i \in \left\{\tilde{x} \in \delta(x_i) : \left|\tilde{g}(\tilde{x})\right| = \min_{x\in\delta(x_i)}\left|\tilde{g}(x)\right|\right\},$$

$$\delta(x_i)=\{x\in S_i : |x-x_i|<\delta\},\ \delta<<h,\ \textit{зокрема},\ \rho(x,\delta(x_i))>0, \forall x\in X_{\tilde{n}}, x\neq x_i.$$

Сформуємо систему лінійних рівнянь (СЛР) для розв’язування (3.27) за методом колокації

$$K_{\tilde{n}}\tilde{\sigma}_{\tilde{n}} = \tilde{g}_{\tilde{n}},$$

де оператор (матриця) $K_{\tilde{n}}$ та права частина $\tilde{g}_{\tilde{n}}$ визначаються так:

$$K_{\tilde{n}} = \tilde{s}_{\tilde{n}} K p_{\tilde{n}},\ K_{\tilde{n}} \in L(V_{\tilde{n}}, \Phi_{\tilde{n}}),\ \tilde{g}_{\tilde{n}} = \tilde{s}_{\tilde{n}}\tilde{g}.$$

Виродженість матриці $K_{\tilde{n}}$ еквівалентна лінійній залежності її рядків чи стовпців, тобто існуванню таких наборів $\alpha_{\tilde{n}} = (\alpha_{\tilde{n}}^{(1)}, \alpha_{\tilde{n}}^{(2)}, ..., \alpha_{\tilde{n}}^{(\tilde{n})})$ чи $\beta_{\tilde{n}} = (\beta_{\tilde{n}}^{(1)}, \beta_{\tilde{n}}^{(2)}, ..., \beta_{\tilde{n}}^{(\tilde{n})})$, $\alpha_{\tilde{n}}, \beta_{\tilde{n}} \in \mathrm{R}^{\tilde{n}}$, $\sum_{i=1}^{\tilde{n}}[\alpha_{\tilde{n}}^{(i)}]^2 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\tilde{n}}[\beta_{\tilde{n}}^{(i)}]^2 \geq 0$, що

$$\int_S \left(\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \alpha_{\tilde{n}}^{(i)} \varphi_i(y)\right) R_j(y)\, dS_y = 0,\ j = 1, 2, ..., \tilde{n}, \tag{3.35}$$

або

$$\int_S \varphi_i(y)\left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \beta_{\tilde{n}}^{(j)} R_j(y)\right) \mathrm{d}S_y = 0,\ i = 1, 2, ..., \tilde{n}.$$

З (3.35) одержимо достатні умови оборотності матриці $K_{\tilde{n}}$.

Лема 3.2 Нехай для апроксимації рівняння (3.27) обрано систему лінійно незалежних функцій (3.30) і визначено множину точок колокації (тобто визначено сукупність $\operatorname{Ker} E_{\tilde{n}}$). Тоді, якщо

$$\operatorname{Ker} E_{\tilde{n}} \bigcap U_{\tilde{n}} = 0, \tag{3.36}$$

то $\left|\det K_{\tilde{n}}\right| > 0$.

Очевидно, що система кусково-сталих функцій (3.31) задовольняє (3.36). Справді,

$$e_m(\varphi_i) = \int_S \varphi_i(y) R_m(y)\, \mathrm{d}S_y = \int_{S_i} R_m(y)\, dS_y = \int_{S_i} \frac{1}{\left|x_m - y\right|}\, \mathrm{d}S_y \neq 0,\ i = 1, 2, ..., \tilde{n},$$

тому $\operatorname{Ker}(e_m) = 0$, і $\operatorname{Ker} E_{\tilde{n}} \bigcap U_{\tilde{n}} = 0$.

Визначимо оператор продовження $q_{\tilde{n}}$ з $\Phi_{\tilde{n}} \subset \mathrm{R}^{\tilde{n}}$ в $F_{\tilde{n}} = KU_{\tilde{n}} \subset H^{1/2}(S)$ за формулою

$$q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} = Kp_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}},\ \bar{g}_{\tilde{n}} \in \Phi_{\tilde{n}}. \tag{3.37}$$

Оцінимо норму елемента $q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}}$. Враховуючи праву нерівність в (3.28), одержимо

$$\left\| q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} \right\|_{H^{1/2}(S)} \leq M \left\| p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}.$$

Далі, з властивості оптимальності оператора $p_{\tilde{n}}$ та лівої нерівності в (3.28), матимемо

$$\left\| q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} \right\|_{H^{1/2}(S)} \leq m^{-1} M \left\| K\sigma \right\|_{H^{1/2}(S)}, \text{ якщо } \bar{g}_{\tilde{n}} = \tilde{s}_{\tilde{n}} \tilde{g}.$$

Замінивши оператор звуження $\tilde{s}_{\tilde{n}}$ оператором $s_{\tilde{n}} = m^{-1} M \tilde{s}_{\tilde{n}}$, одержимо оцінку

$$\left\| q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} \right\|_{H^{1/2}(S)} \leq \left\| \tilde{g} \right\|_{H^{1/2}(S)},$$

якщо $\bar{g}_{\tilde{n}} = s_{\tilde{n}} \tilde{g}$.

Зазначимо, що система колокаційних рівнянь за такої заміни оператора звуження свого вигляду не змінює.

Оператор $s_{\tilde{n}}$ є лівим оберненим для $q_{\tilde{n}}$. Справді, враховуючи результат леми 3.2, одержимо

$$s_{\tilde{n}} q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} = s_{\tilde{n}} K p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} = \tilde{g}_{\tilde{n}}.$$

Наділимо дискретний простір $\Phi_{\tilde{n}}$ нормою

$$\| \bar{g}_{\tilde{n}} \|_{\Phi_{\tilde{n}}} = \| q_{\tilde{n}} \bar{g}_{\tilde{n}} \|_{H^{1/2}(S)}. \tag{3.38}$$

Очевидно, що для $\forall \sigma_{\tilde{n}} \in U_{\tilde{n}} \subset H_{00}^{-1/2}(S)$ справджується оцінка, подібна до (3.28)

$$m \| \sigma_{\tilde{n}} \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le \| K \sigma_{\tilde{n}} \|_{H^{1/2}(S)} \le M \| \sigma_{\tilde{n}} \|_{H_{00}^{-1/2}(S)}.$$

Враховуючи ізоморфність просторів $V_{\tilde{n}}$ та $U_{\tilde{n}}$ і розглядаючи $\sigma_{\tilde{n}}$ як образ деякого елемента $\tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \in V_{\tilde{n}}$, $\sigma_{\tilde{n}} = p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}}$, спираючися на (3.37) та означення дискретних норм (3.34) і (3.38), одержимо

$$m \| \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{V_{\tilde{n}}} \le \| K_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{\Phi_{\tilde{n}}} \le M \| \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{V_{\tilde{n}}}. \tag{3.39}$$

Отже, довели таке твердження.

Лема 3.3 Оператор $q_{\tilde{n}}$ – оптимальний оператор продовження щодо оператора звуження $s_{\tilde{n}}$ в $H^{1/2}(S)$, а оператор (матриця) $K_{\tilde{n}}$ здійснює ізоморфізм з $V_{\tilde{n}}$ в $\Phi_{\tilde{n}}$ та є стійким в сенсі (3.39) за будь-яких $\tilde{n}$ та $\tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \in V_{\tilde{n}}$.

Теорема 3.1 (збіжність наближеної схеми). Наближений розв'язок рівняння (3.27) за будь-якої правої частини $\tilde{g} \in H^{1/2}(S)$, одержаний за методом колокації, за апроксимації невідомої густини потенціалу лінійною комбінацією кусково-сталих "функцій" системи (3.31), збігається до його точного розв'язку, і справджується оцінка похибки

$$\| \sigma - p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le 3h(1 + m^{-1} M) \| \nabla \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)}. \tag{3.40}$$

Доведення. Твердження теореми випливає з загальної теореми збіжності проекційних схем [26, 28], лем 3.1 та 3.3. Залишилося одержати оцінку (3.40).

Спершу покажемо, що для $\forall \sigma \in H_{00}^{-1/2}(S)$ справджується

$$\| \sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le 3h \| \nabla \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)}.$$

Справді, з (3.32), (3.33), тобто вигляду операторів $r_{\tilde{n}}$ та $p_{\tilde{n}}$, на підставі $\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \varphi_i(x) = 1$, для будь-якого $y \in S_i \subset S$, $i = 1, 2, ..., \tilde{n}$, одержимо

$$\left|(\sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma)(y)\right| = \left|\sigma(y) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sigma(x_i)\varphi_i(y)\right| \le \sup_{x \in S_i} \left|\sigma(y) - \sigma(x)\right| \le \sup_{|y-z|<h} \left|\sigma(y) - \sigma(z)\right|.$$

Поділимо цю нерівність на $|x - y|$ і проінтегруємо за y по S

$$\int_S \frac{\left|\sigma(y) - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma(y)\right|}{|x - y|} dS_y \le \int_S \sup_{|y-z|<h} \frac{\left|\sigma(y) - \sigma(z)\right|}{|x - y|} dS_y .$$

Розвинемо функцію $\sigma(z)$ в ряд Тейлора за значеннями в точці y до членів першого порядку:

$$\sigma(z) = \sigma(y) + \left((z - y), \nabla_z \sigma(y)\right) + O(|z - y|^2),$$

де ∇_z – градієнт за змінною z. Далі,

$$\left[V(\sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma)\right](x) \le \frac{h}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_2} + \frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_3} \right\} \frac{1}{|x - y|} dS_y \le 3h\left[V(A(y))\right](x),$$

$$A(y) = \max\left\{ \left|\frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_1}\right|, \left|\frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_2}\right|, \left|\frac{\partial \sigma(y)}{\partial z_3}\right| \right\}.$$

Диференціюючи останню нерівність за x та інтегруючи по Ω квадрат модуля одержаного виразу, дістанемо

$$\int_\Omega \left|\nabla_x \left[V(\sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma)\right](x)\right|^2 dx \le 9h^2 \int_\Omega \left|\nabla_x \left[V(A(y))\right](x)\right|^2 dx,$$

або

$$\left\| V(\sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma) \right\|_\Delta^2 \le 9h^2 \left\| V(A(y)) \right\|_\Delta^2 \le 9h^2 \left\| V(\nabla \sigma) \right\|_\Delta^2 .$$

Зазначимо, що операція диференціювання $\nabla_x(\cdot)$ коректна, бо диференціювали одну й ту саму функцію $|x - y|^{-1}$ з обох боків нерівності. Норму вектор-функції $V(\nabla\sigma)$ обчислюють як суму норм складових функції.

В силу еквівалентності норм (3.29)

$$\left\| \sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le 3h \left\| \nabla \sigma \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} .$$

За теоремою про оцінку похибки проекційної схеми [26, 28] одержимо

$$\left\| \sigma - p_{\tilde{n}} \tilde{\sigma}_{\tilde{n}} \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le (1 + m^{-1} M) \left\| \sigma - p_{\tilde{n}} r_{\tilde{n}} \sigma \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \le 3h(1 + m^{-1} M) \left\| \nabla \sigma \right\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}.$$

Теорему доведено. Отже обґрунтовано наближену схему методу колокації розв’язування двовимірного інтегрального рівняння, яке виникає під час відшукання потенціалу самоузгодженого поля [15].

4 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай F – нелінійний оператор, визначений в опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння

$$F(x) = 0 \tag{4.1}$$

часто застосовують відомий ітераційний метод Ньютона [16, 27, 34] та його численні модифікації, які мають в ітераційних формулах похідні першого, а то й вищих порядків. Широко використовують ітераційно-різницеві методи. Перевагою цих методів є те, що в їхніх ітераційних формулах використовують тільки значення нелінійного оператора і не потрібно аналітично заданих похідних. Тому їх можна використати і для тих задач, для яких нелегко або й неможливо отримати похідні аналітично. Найпростішим методом такого типу є метод хорд. Дослідженню цього методу присвячено багато праць [14, 27, 34, 41, 85]. Метод хорд збігається до розв'язку зі швидкістю з порядком 1.618.... В. А. Курчатов запропонував метод лінійної інтерполяції і визначив його квадратичну швидкість збіжності. Обидва методи мають в ітераційних формулах значення оператора з двох попередніх ітерацій і, відповідно, потребують двох початкових наближень. Ф.А. Потра [83] досліджував різницевий метод з порядком збіжності 1.839..., у якому використовують значення оператора з трьох попередніх ітерацій, а, отже, потрібне задання трьох початкових наближень. У працях [41, 43, 87, 88] досліджено різницевий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, який також потребує двох початкових наближень. Усі згадані методи автори досліджували з різних підходів. Ми вивчили ці методи з єдиного погляду [34, 36, 40, 43] за схемою Ф.А. Потра [83], причому за слабших вимог до гладкості нелінійного оператора рівняння. Це дало нам змогу порівняти всі згадані методи за швидкістю збіжності та за областю збіжності (радіусом збіжності). Водночас числові експерименти свідчать, що нема універсального методу розв'язування нелінійних задач. Тому потреба у

побудові нових, ефективніших у певному сенсі методів (зокрема, за кількістю обчислень, за кількістю ітерацій) не зникає. Нижче запропоновано нові методи для розв'язування нелінійних рівнянь і на низці відомих тестових задач виконано числове дослідження цих методів та відомих методів аналогічного класу. Також проведено глибше дослідження деяких відомих ітераційних методів як для нелінійних операторних рівнянь, так і для нелінійних задач про найменші квадрати.

4.1 Про ітераційні методи в умовах неперервності за Гьольдером поділених різниць другого порядку

У цьому параграфі проведено дослідження двох ітераційних методів ньютонівського типу, які використовують апроксимацію похідної Фреше від нелінійного оператора поділеними різницями або їх лінійною комбінацією. При цьому вивчено локальну та напівлокальну збіжність методів в слабких умовах неперервності за Гьольдером поділених різниць другого порядку. Встановлено залежність порядку збіжності методів від константи Гьольдера. Наведено числовий приклад.

Для розв'язування нелінійного операторного рівняння (4.1) розглядатимемо такі ітераційно-різницеві методи: метод Курчатова [20]

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\right]^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots , \tag{4.2}$$

і метод, розглянутий в [83]

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})\right]^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{4.3}$$

Тут $F(\cdot,\cdot)$ – поділена різниця першого порядку від оператора F. Зауважимо, що метод (4.2) вимагає два початкові наближення x_0, x_{-1}, а метод (4.3) – три початкові наближення x_0, x_{-1}, x_{-2}.

Наведемо означення поділених різниць першого та другого порядків від

оператора F.

Лінійний оператор з X в Y, позначуваний $F(x, y)$, називається поділеною різницею від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y) \tag{4.4}$$

У випадку $x = y$ будемо вважати $F(x,x) = F'(x)$, де F' – похідна Фреше нелінійного оператора F.

Поділеною різницею другого порядку від F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \tag{4.5}$$

4.1.1 Локальна збіжність методів

Теорема 4.1 (про локальну збіжність методу (4.2)). Нехай $F : D \subset X \to Y$ – нелінійний оператор, де X ,Y – банахові простори. Припустимо, що рівняння (4.1) має розв'язок x_* в області D, для якого існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$. Нехай поділені різниці $F(x, y)$ та $F(x, y, z)$ визначені на множині $V = \{x : \|x - x_*\| \le 3r_*\} \subset D$ і задовольняють наступні умови:

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\big(F(x, y) - F(u, v)\big)\right\| \le p_*\big(\|x - u\| + \|y - v\|\big), \tag{4.6}$$

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\big(F(u, x, y) - F(v, x, y)\big)\right\| \le q_*\|u - v\|^p, \quad p \in (0, 1]. \tag{4.7}$$

Тоді для x_0, $x_{-1} \in U = \{x : \|x - x_*\| \le r_*\}$, де r_* є розв'язком рівняння

$$2^{p+2} q_* r^{p+1} + 3p_* r - 1 = 0,$$

ітераційний процес (4.2) є коректно визначеним і послідовність $\{x_n\}_{n \ge 0}$, яка належить U, збігається до x_* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le \frac{p_*\|x_n - x_*\| + q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}{1 - 2p_*\|x_n - x_*\| - q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}\|x_n - x_*\|. \tag{4.8}$$

Доведення. Уведемо позначення: $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$. Очевидно, якщо x_n, $x_{n-1} \in U$, то $2x_n - x_{n-1}, x_{n-1} \in V$. Тоді A_n є оборотний і виконується нерівність

$$\left\| A_n^{-1} F'(x_*) \right\| \le \frac{1}{1 - 2p_* \|x_n - x_*\| - q_* \|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}. \tag{4.9}$$

Дійсно, з використанням формул (4.6) і (4.7), отримаємо

$$\left\| I - F'(x_*)^{-1} A_n \right\| = \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_*, x_*) - F(x_n, x_*) + F(x_n, x_*) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) \right) \right\| \le$$

$$p_* \|x_n - x_*\| + \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) \right) \right\| \le$$

$$2p_* \|x_n - x_*\| + \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) \right) \right\| \le$$

$$2p_* \|x_n - x_*\| + \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \right) (x_n - x_{n-1}) \right\| \le$$

$$2p_* \|x_n - x_*\| + q_* \|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}.$$

З означення r_* маємо

$$2p_* r_* + 2^{p+1} q_* r_*^{p+1} = 1 - p_* r_* - 2^{p+1} q_* r_*^{p+1} < 1. \tag{4.10}$$

Скориставшись теоремою Банаха, отримаємо формулу (4.9). Оскільки A_n є оборотний, то можна записати

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_*\| &= \left\| x_n - x_* - A_n^{-1} \left(F(x_n) - F(x_*) \right) \right\| = \\ &= \left\| - A_n^{-1} \left(F(x_n, x_*) - A_n \right) (x_n - x_*) \right\| \le \\ &\le \left\| A_n^{-1} F'(x_*) \right\| \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_*) - A_n \right) \right\| \|x_n - x_*\|. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Згідно з умовами теореми маємо

$$\left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_*) - A_n \right) \right\| = \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_*) - F(x_n, x_n) + \right. \right.$$

$$\left. \left. F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) \right) \right\| \le$$

$$\le p_* \|x_n - x_*\| + \left\| F'(x_*)^{-1} \left(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \right) (x_n - x_{n-1}) \right\| \le$$

$$\le p_* \|x_n - x_*\| + q_* \|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}.$$

З (4.9), (4.11) видно, що виконується (4.8). З (4.8) і (4.10) отримуємо

$$\|x_{n+1} - x_*\| < \|x_n - x_*\| < r_*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тому ітераційний процес є добре визначений і послідовність, яку він породжує, належить U. З останньої нерівності і оцінки (4.8) отримуємо

$$\lim_{x \to 0} \|x_n - x_*\| = 0.$$

Теорему доведено.

Наслідок 4.1 Порядок збіжності методу (4.2) дорівнює єдиному додатному кореню рівняння $m^2 - m - (p+1) = 0$:

$$m_K = \frac{1 + \sqrt{4p+5}}{2}.$$

З оцінки (4.8) випливає, що існують така невід'ємна константа C і натуральне N, для яких виконується умова

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le C\|x_{n-1} - x_*\|^{p+1}\|x_n - x_*\|, \quad n \ge N.$$

А з цієї нерівності отримуємо рівняння для визначення порядку збіжності методу.

Теорема 4.2 (про локальну збіжність методу (4.3)). Нехай $F : D \subset X \to Y$ – нелінійний оператор, де X ,Y – банахові простори. Припустимо, що рівняння (4.1) має розв'язок x_* в області D, для якого існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$. Нехай F має поділену різницю першого порядку, яка задовольняє умову Ліпшиця (4.6) та поділену різницю другого порядку, що задовольняє умову Гьольдера. (4.7). Тоді для довільних x_0, x_{-1}, $x_{-2} \in U = \{x : \|x - x_*\| \le r_*\} \subset D$, де r_* є розв'язком рівняння

$$2^{p+1} q_* r^{p+1} + 3p_* r - 1 = 0,$$

ітераційний процес (4.3) є коректно визначеним і послідовність $\{x_n\}_{n \ge 0}$, яка належить U, збігається до x_* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le$$
$$\le \frac{p_*\|x_n-x_*\|+q_*\left(\|x_n-x_*\|+\|x_{n-2}-x_*\|\right)^p\|x_{n-1}-x_*\|}{1-2p_*\|x_n-x_*\|-q_*\left(\|x_n-x_*\|+\|x_{n-2}-x_*\|\right)^p\|x_{n-1}-x_*\|}\|x_n-x_*\|. \qquad (4.12)$$

Доведення проводиться аналогічно як у теоремі 4.1.

Наслідок 4.2 Порядок збіжності ітераційного процесу (4.3) є коренем рівняння $m^3-m^2-m-p=0$.

З оцінки (4.12) маємо, що існують $C\ge 0$ і натуральне N такі, що виконується нерівність

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le C\|x_n-x_*\|\,\|x_{n-1}-x_*\|\|x_{n-2}-x_*\|^p, \quad n\ge N.$$

Звідси отримуємо рівняння, корінь $m_П$ якого є порядком збіжності методу (4.3).

Для порівняння у таблиці 4.1 покажемо залежність порядку збіжності розглянутих методів від параметра p.

Таблиця 4.1 – Залежність порядку збіжності методів (4.2) і (4.3) від p

p	$m_К$	$m_П$
0.0010	1.6184	1.6183
0.0625	1.6456	1.6350
0.1250	1.6726	1.6513
0.2500	1.7247	1.6826
0.5000	1.8228	1.7399
0.7500	1.9142	1.7917
1.0000	2	1.8392

Зауважимо, що у випадку $p=1$ отримані результати співпадають з наведеними у працях [43, 83].

4.1.2 Напівлокальна збіжність методів

Теорема 4.3 (про напівлокальну збіжність методу (4.2)). Нехай $F:D\subset X\to Y$ – нелінійний оператор, де X, Y – банахові простори, $F(x,y)$ і

$F(x, y, z)$ – відповідно перша та друга поділені різниці від F на множині $V_0 = \{x : \|x - x_0\| \le 3r_0\} \subset D$. Припустимо, що лінійний оператор

$$A_0 = F(2x_0 - x_{-1}, x_{-1}),$$

де $x_0, x_{-1} \in U_0 = \{x : \|x - x_0\| \le r_0\}$, є оборотний і існують невід'ємні числа a, c такі, що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \quad \left\|A_0^{-1} F(x_0)\right\| \le c. \tag{4.13}$$

Нехай виконуються умови

$$\left\|A_0^{-1}\big(F(x, y) - F(u, v)\big)\right\| \le p_0\big(\|x - u\| + \|y - v\|\big), \tag{4.14}$$

$$\left\|A_0^{-1}\big(F(u, x, y) - F(v, x, y)\big)\right\| \le q_0 \|u - v\|^p, \quad p \in (0, 1]. \tag{4.15}$$

Невід'ємне число r_0 задовольняє умови

$$r_0 \ge \frac{c}{1 - \gamma}, \quad r_0 < \frac{1 - 2q_0 a^{p+1} - p_0 c}{2p_0}, \tag{4.16}$$

де

$$\gamma = \frac{p_0 c + q_0 a^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0 r_0}$$

і $0 \le \gamma < 1$. Дійсна послідовність $\{t_n\}_{n \ge -1}$, визначена як

$$t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \quad t_1 = r_0 - c \tag{4.17}$$

і для $k \ge 0$

$$t_{k+1} - t_{k+2} = \frac{p_0(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-1} - t_k)^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_{k+1})}\big(t_k - t_{k+1}\big) = B_{k+2}\big(t_k - t_{k+1}\big), \tag{4.18}$$

невід'ємна, спадна і збігається до деякого $t_* \in R$, так що

$$r_0 - \frac{c}{1 - \gamma} \le t_* < t_{-1}.$$

Тоді ітераційний процес (4.2) добре визначений і збігається до розв'язку $x_* \in U_0$ рівняння (4.1). Крім того, справедливі наступні оцінки:

$$\|x_n - x_*\| \le t_n - t_* \tag{4.19}$$

і для $n \geq 1$

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-2} - t_{n-1})^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - p_0[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)]}(t_{n-1} - t_n). \tag{4.20}$$

Доведення. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що для всіх $n \geq 0$ виконується

$$\begin{aligned} &t_{n+1} \geq t_{n+2} \geq r_0 - c\left(1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n+1}\right) \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0, \quad B_{n+2} \leq \gamma; \\ &t_{n+1} - t_{n+2} < t_n - t_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Використовуючи (4.18), для $k = 0$ ми маємо $t_2 \leq t_1$, $t_2 \geq r_0 - c(1+\gamma) \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0$, $B_2 \leq \gamma$ і $t_1 - t_2 < t_0 - t_1$, тобто виконується (4.21) при $n = 0$. Припустимо, що нерівності (4.21) справедливі для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Доведемо, що вони справджуються для $k = n$. Враховуючи (4.18), отримуємо $t_{k+1} \geq t_{k+2}$, і за припущенням індукції маємо

$$B_{k+2} = \frac{p_0(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-1} - t_k)^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_{k+1})} \leq \frac{p_0(t_{k-1} - t_k) + q_0(t_{k-2} - t_{k-1})^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_k)} = B_{k+1} \leq \gamma,$$

а також $t_{k+1} - t_{k+2} < t_k - t_{k+1}$. Отже, з (18) і з припущення індукції одержуємо

$$t_{k+2} \geq r_0 - c\left(1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{k+1}\right) = r_0 - c\frac{1 - \gamma^{k+2}}{1-\gamma} \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0.$$

Доведемо за індукцією, що ітераційний процес (4.2) є добре визначений і що

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq t_n - t_{n+1}. \tag{4.22}$$

Використовуючи (4.2), (4.13), (4.17) ми отримаємо, що (4.22) справедлива для $n = -1, 0$. Нехай $k \in N$ і припустимо, що (4.22) виконується для всіх $n \leq k$. Нехай $A_{k+1} = F(2x_{k+1} - x_k, x_{k+1})$. Тоді з (4.14) і (4.15) маємо

$$\left\|I - A_0^{-1} A_{k+1}\right\| = \left\|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\right\| = \left\|A_0^{-1}\left(F(2x_0 - x_{-1}, x_{-1}) - F(2x_{k+1} - x_k, x_k)\right)\right\| \leq$$

$$q_0\|x_0 - x_{-1}\|^{p+1} + p_0\left(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_{k+1}\|\right) \leq q_0 a^{p+1} + 2p_0(t_0 - t_{k+1}) < 1$$

при даному виборі r_0. За теоремою Банаха A_{k+1} є оборотний і

$$\left\|A_{k+1}^{-1}A_0\right\| \le \left(1 - q_0 a^{p+1} - p_0\left(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_{k+1}\|\right)\right)^{-1}. \qquad (4.23)$$

Зокрема, ми довели, що (4.2) добре визначений для $n = k+1$. Також маємо

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| = \left\|A_{k+1}^{-1}F(x_{k+1})\right\| = \left\|A_{k+1}^{-1}\left(F(x_{k+1}) - F(x_k) - A_k(x_{k+1} - x_k)\right)\right\| \le$$

$$\left\|A_{k+1}^{-1}A_0\right\|\left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1}, x_k) - A_k\right)\right\|\|x_{k+1} - x_k\|.$$

Використовуючи (4.14) і (4.15) отримаємо

$$\left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1}, x_k) - A_k\right)\right\| \le p_0\|x_{k+1} - x_k\| + q_0\|x_k - x_{k-1}\|^{p+1}. \qquad (4.24)$$

З останніх трьох оцінок випливає

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le \frac{p_0\|x_{k+1} - x_k\| + q_0\|x_k - x_{k-1}\|^{p+1}}{1 - q_0 a^{p+1} - p_0\left(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_{k+1}\|\right)}\|x_{k+1} - x_k\| \qquad (4.25)$$

З (4.22) і (4.18) отримуємо $\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le t_{k+1} - t_{k+2}$. Отже, ми довели, що ітераційний процес (4.2) добре визначений і оцінка (4.22) справедлива для всіх n. Тому

$$\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k, \quad -1 \le n \le k. \qquad (4.26)$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною в банаховому просторі X і збігається до деякого $x_* \in X$. Спрямовуючи k до нескінченності в (4.26), отримаємо (4.19). Елемент $x_* \in X$ є коренем рівняння (4.1). Дійсно, з (4.2), (4.14), (4.15)

$$\left\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\right\| = \left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1}, x_k) - F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})\right)(x_{k+1} - x_k)\right\| \le$$

$$\le p_0\|x_{k+1} - x_k\|^2 + q_0\|x_k - x_{k-1}\|^{p+1}\|x_{k+1} - x_k\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

тобто $F(x_*) = 0$.

Покажемо тепер справедливість (4.20). Використовуючи (4.14) і (4.15), знаходимо

$$\left\|I - A_0^{-1}F(x_n, x_*)\right\| \le q_0 a^{p+1} + p_0\left(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_*\|\right) \le$$

$$\le q_0 a^{p+1} + p_0\left[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)\right] < 1$$

при даному виборі r_0. За теоремою Банаха $F(x_n, x_*)$ оборотний і

$$\left\|F(x_n, x_*)^{-1} A_0\right\| \le \left(1 - q_0 a^{p+1} - p_0\left(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_*\|\right)\right)^{-1}. \qquad (4.27)$$

Використовуючи співвідношення

$$x_n - x_* = F(x_n, x_*)^{-1}\left(F(x_n) - F(x_*)\right) = \left(F(x_n, x_*)^{-1} A_0\right) A_0^{-1} F(x_n) \qquad (4.28)$$

та перейшовши до норм, одержимо оцінку (4.20). Теорему доведено.

Теорема 4.4 (про напівлокальну збіжність методу (4.3)). Нехай $F : D \subset X \to Y$ – нелінійний оператор, де X, Y – банахові простори. $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ відповідно перша та друга поділені різниці від F на D. Припустимо, що лінійний оператор

$$A_0 = F(x_0, x_{-2}) + F(x_{-1}, x_0) - F(x_{-2}, x_{-1}),$$

де $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in D$, є оборотний і існують невід'ємні числа a, b, c такі, що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \quad \|x_{-1} - x_{-2}\| \le b, \quad \left\|A_0^{-1} F(x_0)\right\| \le c. \qquad (4.29)$$

Нехай виконуються умови (4.14), (4.15). Невід'ємне число r_0 задовольняє умови

$$r_0 \ge \frac{c}{1-\gamma}, \quad r_0 < \frac{1 - 2q_0 a(a+b)^p - p_0 c}{2p_0}, \qquad (4.30)$$

де $\gamma = \dfrac{p_0 c + q_0 a(a+b)^p}{1 - q_0 a(a+b)^p - 2p_0 r_0}$ і $0 \le \gamma < 1$.

Дійсна послідовність $\{t_n\}_{n \ge -2}$, визначена як

$$t_{-2} = r_0 + a + b, \quad t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \quad t_1 = r_0 - c \qquad (4.31)$$

і для $k \ge 0$

$$t_{k+1} - t_{k+2} = \frac{p_0(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-2} - t_k)^p (t_{k-1} - t_k)}{1 - q_0 a(a+b)^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_{k+1})}\left(t_k - t_{k+1}\right), \qquad (4.32)$$

невід'ємна, спадна і збігається до деякого $t_* \in R$, так що $r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \le t_* < t_{-2}$.

Тоді ітераційний процес (4.3) добре визначений і збігається до розв'язку

$x_* \in U(x_0, r_0) = \{x : \|x - x_0\| \le r_0\}$ рівняння (4.1). Крім того, справедливі наступні оцінки:

$$\|x_n - x_*\| \le t_n - t_* \tag{4.33}$$

і для $n \ge 1$

$$\|x_n - x_*\| \le \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-3} - t_{n-1})^p (t_{n-2} - t_{n-1})}{1 - q_0 a(a+b)^p - p_0[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)]}(t_{n-1} - t_n). \tag{4.34}$$

Доведення аналогічне як у теоремі 4.3.

4.1.3 Єдиність розв'язку

Теорема 4.5 (про єдиність розв'язку для методу (4.2)). Нехай $F : D \subset X \to Y$ – нелінійний оператор, де X, Y – банахові простори, D – відкрита опукла підмножина. Припустимо, що гіпотези теореми 3 справджуються і виконується умова

$$r_0 < \frac{1 - 2q_0 a^{p+1}}{3p_0}. \tag{4.35}$$

Тоді ітераційний процес (4.2) добре визначений в $U(x_0, r_0)$ і збігається до єдиного розв'язку x_* рівняння (4.1).

Доведення. Існування розв'язку x_* рівняння (4.1) доведено в теоремі 4.3. Припустимо, що існує ще один розв'язок y_* цього рівняння в $U(x_0, r_0)$ з r_0, що задовольняє умови (4.16) і (4.35). Використовуючи (4.2), можемо записати

$$x_{n+1} - y_* = x_n - y_* - A_n^{-1} F(x_n) = A_n^{-1}\big(A_n(x_n - y_*) - F(x_n) + F(y_*)\big) =$$
$$A_n^{-1} A_0 A_0^{-1}\big(F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) - F(x_n, y_*)\big)(x_n - y_*).$$

Перейшовши до норми у цьому співвідношенні і використавши (4.14), (4.15), (4.22), (4.23), отримаємо

$$\|x_{n+1} - y_*\| \le \frac{q_0(t_{n-1} - t_n)^{p+1} + p_0\|x_n - y_*\|}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_n)}\|x_n - y_*\| \le \ldots \le \alpha^{n+1}\|x_0 - y_*\|,$$

де α – верхня границя дробу і $0<\alpha<1$ при даному виборі r_0. З нерівності маємо $y_* = \lim x_n = x_*$. Теорему доведено.

Теорема 4.6 (про єдиність розв'язку для методу (4.3)). Нехай $F: D \subset X \to Y$ – нелінійний оператор, де X, Y – банахові простори, D – відкрита опукла підмножина. Припустимо, що гіпотези теореми 4 справджуються і виконується умова

$$r_0 < \frac{1-2q_0 a(a+b)^p}{3p_0}. \tag{4.36}$$

Тоді ітераційний процес (4.3) добре визначений в $U(x_0, r_0)$ і збігається до єдиного розв'язку x_* рівняння (4.1).

Доведення аналогічне як у теоремі 4.5.

4.1.4 Чисельні експерименти

Приклад 4.1 Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} &x'' + x^{2+p} = 0, \quad p \in (0,1], \\ &x(0) = x(1) = 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Для того, щоб розв'язати цю задачу, введемо розбиття $t_i = ih, \quad i = 0,\ldots,n+1$, де $h = \dfrac{1}{n+1}$, і апроксимуємо другу похідну стандартним різницевим співвідношенням. У результаті до розв'язування отримаємо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - h^2 x_1^{2+p} = 0, \\ &-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} - h^2 x_i^{2+p} = 0, \quad i = 2,\ldots,n-1, \\ &-x_{n-1} + 2x_n - h^2 x_n^{2+p} = 0, \end{aligned} \tag{4.38}$$

яку запишемо у матрично-векторному вигляді $F(x) = Ax - H(x) = 0$, де

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad H(x)=h^2\begin{pmatrix} x_1^{2+p} \\ \vdots \\ x_i^{2+p} \\ \vdots \\ x_n^{2+p} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді $F'(x)=A-H(x)=A-h^2(2+p)diag\left\{x_1^{p+1},x_2^{p+1},\dots,x_n^{p+1})\right\}$.

Поділену різницю першого порядку визначаємо за формулою (4.18)

$$F(z,y)_{ij}=\frac{F(z_1,\dots,z_j,y_{j+1},\dots,y_n)-F(z_1,\dots,z_{j-1},y_j,\dots,y_n)}{z_j-y_j} \tag{4.39}$$

Тоді

$$F(z,y)=A-h^2\begin{pmatrix} \dfrac{z_1^{2+p}-y_1^{2+p}}{z_1-y_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{z_2^{2+p}-y_2^{2+p}}{z_2-y_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{z_n^{2+p}-y_n^{2+p}}{z_n-y_n} \end{pmatrix}.$$

При розв’язуванні цієї задачі початкове та додаткові наближення вибирались наступним чином: $x_0^{(i)}=5\sin(\pi t_i)$, $x_{-1}^{(i)}=x_0^{(i)}-10^{-4}$, $x_{-2}^{(i)}=x_0^{(i)}-2\cdot 10^{-4}$. Тут верхній індекс i $(i=1,2,\dots,n)$ вказує на i-ту компоненту відповідного вектора наближень. Обчислення проводились з точністю $\varepsilon=10^{-12}$. У випадку $n=9$ і $p=\dfrac{1}{2}$ розв’язок нелінійної крайової задачі (4.38) був знайдений за п’ять ітерацій обома методами. Нижче наведено початкове наближення і отриманий розв’язок:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}000000000000 \\ 1{,}545084971874 \\ 2{,}938926261462 \\ 4{,}045084971874 \\ 4{,}755282581475 \\ 5{,}000000000000 \\ 4{,}755282581475 \\ 4{,}045084971874 \\ 2{,}938926261462 \\ 1{,}545084971874 \\ 0{,}000000000000 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0{,}000000000000 \\ 1{,}452151195022 \\ 2{,}878890931592 \\ 4{,}165005508273 \\ 5{,}097090993740 \\ 5{,}442625226296 \\ 5{,}097090993740 \\ 4{,}165005508273 \\ 2{,}878890931592 \\ 1{,}452151195022 \\ 0{,}000000000000 \end{pmatrix}$$

Відзначимо, що гіпотези теорем з праць [20, 43, 83], на яких базується розв'язування рівняння $F(x) = 0$, для задачі (4.37) не виконуються.

4.2 Дво- та трикрокові ітераційні процеси для розв'язування нелінійних рівнянь

У цьому параграфі розглянуто нові модифікації ітераційно-різницевих методів для розв'язування нелінійних рівнянь. На багатьох тестових задачах виконано числове дослідження цих модифікацій і відомих базових методів та зроблено порівняння отриманих результатів.

4.2.1 Ітераційно-різницеві процеси

Розглянемо нелінійне операторне рівняння вигляду (4.1). Для його розв'язування розглянемо ітераційні процеси, які можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4.40}$$

Зокрема, в методі хорд

$$A_n = F(x_n, x_{n-1}). \tag{4.41}$$

Запропонований В. А. Курчатовим [20] метод містить

$$A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}). \tag{4.42}$$

У дослідженому Ф. А. Потра методі [83] A_n є лінійною комбінацією поділених різниць від F у вигляді

$$A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1}). \tag{4.43}$$

Як відомо [83], цей метод збігається локально з порядком збіжності 1.839....

У книзі Дж. Трауба [34] для одного нелінійного рівняння наведено ще один метод з порядком збіжності 1.839..., який легко узагальнити на випадок систем нелінійних рівнянь:

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(x_n, x_{n-1})^{-1} + F(x_{n-2}, x_n)^{-1} - F(x_{n-2}, x_{n-1})^{-1}\right]F(x_n),\ n = 0, 1, \ldots. \tag{4.44}$$

На відміну від методу (4.40), (4.43), в ітераційному процесі (4.44) використовують лінійну комбінацію трьох обернених операторів, що передбачає розв'язування на одній ітерації трьох лінійних систем, причому з різними матрицями.

У працях [5, 87, 93] досліджено метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - [F(x_n, y_n)]^{-1} F(x_{n+1}); \quad n = 0,1,..., \end{aligned} \tag{4.45}$$

де x_0 і y_0 – задані початкові значення. Його природно вважати двокроковою модифікацією саме методу хорд (4.40), (4.41), у якій замість значення x_{n-1} з попередньої ітерації беруть допоміжну точку y_n, обчислену подібним способом. У результаті порядок збіжності методу збільшився від $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ до $1+\sqrt{2} \approx 2{,}41$.

Аналогічно до (4.45) модифікуємо метод В.А. Курчатова (4.40), (4.42), який має вищий, ніж у методу хорд, квадратичний порядок збіжності. У цьому випадку пропонуємо два варіанти:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left[F(2x_n - y_n, y_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - \left[F(2x_n - y_n, y_n)\right]^{-1} F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,... \end{aligned} \tag{4.46}$$

та

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left[F(2y_n - x_n, x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - \left[F(2y_n - x_n, x_n)\right]^{-1} F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,.... \end{aligned} \tag{4.47}$$

У методі (4.47) використана симетрична апроксимація значення оператора $F'(x)$ в околі точки x_n, а в методі (4.47) – також симетрична апроксимація значення оператора $F'(x)$, але в околі точки y_n. У всіх трьох методах (4.45)–(4.47) на кожній ітерації потрібно розв’язувати по дві лінійні системи рівнянь, які мають спільну матрицю, або, інакше кажучи, одну систему з двома різними правими частинами. Отже, прямий хід методу Ґаусса чи методу відбиттів можна виконати один раз, і два рази зворотний хід. Проте у методі (4.47), як і в (4.45), на кожній ітерації треба обчислювати оператор $F(x)$ у двох нових точках, тоді як у методі (4.46) – у трьох нових точках.

Метод (4.40),(4.43) побудовано за допомогою трьох членів інтерполяційної формули Ньютона і з використанням інформації з трьох останніх ітерацій, тоді як метод хорд (4.40), (4.41) – за допомогою тільки двох членів цієї ж формули і, відповідно, він використовує два члени формули. У результаті порядок збіжності методу (4.40), (4.43) дорівнює 1.839… проти 1.618… для методу хорд.

На кожній ітерації методу (4.40),(4.43) треба обчислювати лінійний оператор, який є алгебричною сумою трьох поділених різниць, і розв’язувати лінійне операторне рівняння. Оскільки це потребує багато обчислень, то ми пропонуємо таку трикрокову модифікацію методу (4.40), (4.43):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_n^{-1} F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - A_n^{-1} F(x_{n+1}); \\ z_{n+1} &= y_{n+1} - A_n^{-1} F(y_{n+1}); \\ A_{n+1} &= F(z_{n+1}, y_{n+1}) + F(x_{n+1}, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0,1,.... \end{aligned} \tag{4.48}$$

У методі (4.48) на одній ітерації необхідно розв'язувати три системи лінійних рівнянь з однією і тією ж матрицею. Оскільки в разі розв'язування лінійних систем основний об'єм обчислень припадає на прямий хід методу Ґаусса (LU-розклад чи QR-розклад матриці), що становить $O(n^3)$ арифметичних операцій, а на зворотний хід (розв'язування двох систем з трикутною матрицею або однієї системи з трикутною матрицею та множення матриці на вектор) тільки $O(n^2)$ таких операцій, то обчислювальна вартість однієї ітерації (4.48) близька до вартості ітерації методу (4.40), (4.43).

Зазначимо, що метод хорд (4.40), (4.41), метод В.А. Курчатова (4.40), (4.42) та двокрокові методи (4.45)–(4.47) потребують двох початкових наближень x_0, x_{-1}, а методи (4.40), (4.43) та (4.44) – трьох початкових наближень x_0, x_{-1}, x_{-2}. Для роботи методу (4.48) потрібно задати початкові наближення x_0, A_0.

4.2.2 Числова апробація методів

Для виявлення реальних властивостей розглянутих вище методів виконано числовий експеримент. Методи протестовані на 13 системах нелінійних рівнянь. Їх реалізовано в Delphi. Для всіх методів використовували однакові критерії припинення обчислювального процесу. Поділену різницю першого порядку визначали за формулою (4.18)

$$F(z,y)_{ij} = \frac{F(z_1,\ldots,z_j,y_{j+1},\ldots,y_n) - F(z_1,\ldots,z_{j-1},y_j,\ldots,y_n)}{z_j - y_j}. \qquad (4.49)$$

Розв'язки задач шукали з точністю $\varepsilon = 10^{-12}$. Додаткові початкові наближення будували так:

$$x_{-1} = x_0 - 10^{-6};$$
$$x_{-2} = x_0 - 2\cdot 10^{-6}.$$

Наведемо низку тестових задач, які використано в числовому експерименті.

Приклад 4.2 Функція Розенброка [14, 81]

$$F_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2);$$
$$F_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2};$$
$$x_0 = (-1.2; 1; \ldots; -1.2; 1);$$
$$x^* = (1; 1; \ldots; 1; 1); \; n = 4; \; F = 0.$$

Приклад 4.3 Функція Ковалика та Осборна [14, 81]

$$F_i(x) = y_i - \frac{x_1(u_i^2 + u_i x_2)}{u_i^2 + u_i x_3 + x_4};$$
$$y = (0.1957; 0.1947; 0.1735; 0.1600);$$
$$u = (4.0000; 2.0000; 1.0000; 0.5000);$$
$$x_0 = (0.25; 0.39; 0.415; 0.39);$$
$$x^* = (0.1995; 0.2085; 0.2171; 0.2954); \; F = 0.$$

Приклад 4.4 Box-3D функція [14, 81]

$$F_i(x) = e^{-t_i x_1} - e^{-t_i x_2} - x_3(e^{-t_i} - e^{-10t_i});$$
$$t_i = 0.1i; \; x_0 = (0; 10; 20); \; x^* = (1; 10; 1); \; F = 0.$$

Приклад 4.5 Функція Вуда [14, 81]

$$F_1(x) = 10(x_2 - x_1^2);$$
$$F_2(x) = 1 - x_1;$$
$$F_3(x) = \sqrt{90}(x_4 - x_3^2);$$
$$F_4(x) = 1 - x_3;$$
$$x_0 = (-3; -1; -3; -1);$$
$$x^* = (1; 1; 1; 1); \; F = 0.$$

Приклад 4.6 Функція [14, 81]

$$F_1(x) = x_1 - 13 + x_2(x_2(5 - x_2) - 2);$$
$$F_2(x) = x_1 - 29 + x_2(x_2(x_2 + 1) - 14);$$
$$x_0 = (15; -2); \; x^* = (5; 4); \; F = 0.$$

Приклад 4.7 З необхідної умови мінімуму функції

$$\Phi(x) = x_1^2 + 100(x_1^2 - x_1 - x_2)^2$$

отримуємо таку систему нелінійних рівнянь

$$F_1(x) = 2x_1 + 200(x_1^2 - x_1 - x_2)(2x_1 - 1) = 0;\ F_2(x) = -200(x_1^2 - x_1 - x_2) = 0;$$
$$x_0 = (1;1);\ x^* = (0;0).$$

Приклад 4.8 «Погана» функція Пауелла [14, 81]

$$F_1(x) = 10^4 x_1 x_2 - 1;\ F_2(x) = e^{-x_1} + e^{-x_2} - 1.0001;$$
$$x_0 = (0;1);\ x^* = (1.098...10^{-5}; 9.106...);\ F = 0.$$

Приклад 4.9 Сингулярна функція Пауелла [14, 81]

$$F_1(x) = x_1 + 10x_2;\ F_2(x) = \sqrt{5}(x_3 - x_4);$$
$$F_3(x) = (x_2 - 2x_3)^2;\ F_4(x) = \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2;$$
$$x_0 = (3;-1;0;1);\ F = 0.$$

Приклад 4.10 Тригонометрична функція [14, 81]

$$F_i(x) = n - \sum_{j=1}^{n} \cos x_j + i(1 - \cos x_i) - \sin x_i;$$
$$x_0 = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; ...; \frac{1}{n});\ n = 4;\ F = 0.$$

Приклад 4.11 Функція скінченно-різницевої крайової задачі [14, 81]

$$F_i(x) = 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} + h^2(x_i + t_i + 1)^3/2;$$
$$h = 1/(n+1);\quad t_i = ih;\quad x_0 = x_{n+1} = 0;$$
$$x_0 = (\xi_i);\quad \xi_i = t_i(t_i - 1);\ F = 0.$$

Приклад 4.12 Тридіагональна функція Бройдена [14, 81]

$$F_i(x) = (3 - 2x_i)x_i - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1;\quad x_0 = x_{n+1} = 0;$$
$$x_0 = (-1;-1;...;-1);\ F = 0;\ n = 4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

Приклад 4.13 Об’єднана функція Бройдена [14, 81]

$$F_i(x) = x_i(2 + 5x_i^2) + 1 - \sum_{j \in J_i} x_j(1 + x_j);$$
$$J_i = \{j : j \neq i, \max(1, i - m_l) \le j \le \min(n, i + m_u)\};$$
$$m_l = 5;\quad m_u = 1;\ x_0 = (-1;-1;...;-1);\ F = 0;\ n = 4.$$

Приклад 4.14 Розглянемо крайову задачу

$$x'' + x^{2+p} = 0, \quad p \in (0,1]; \quad x(0) = x(1) = 0. \tag{4.50}$$

Різницевим аналогом цієї задачі є система нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - h^2 x_1^{2+p} = 0, \\ &-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} - h^2 x_i^{2+p} = 0, \quad i = 2,\ldots,n-1, \\ &-x_{n-1} + 2x_n - h^2 x_n^{2+p} = 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

яку запишемо у матрично-векторному вигляді $F(x) = Ax - H(x) = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}, \quad H(x) = h^2 \begin{pmatrix} x_1^{2+p} \\ \vdots \\ x_i^{2+p} \\ \vdots \\ x_n^{2+p} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поділену різницю першого порядку визначимо за формулою (4.49). Тоді

$$F(z,y) = A - h^2 \operatorname{diag}\left\{ \frac{z_1^{2+p} - y_1^{2+p}}{z_1 - y_1}, \frac{z_2^{2+p} - y_2^{2+p}}{z_2 - y_2}, \ldots, \frac{z_n^{2+p} - y_n^{2+p}}{z_n - y_n} \right\}.$$

Під час розв'язування цієї задачі початкове та додаткові наближення виберемо так: $x_0^{(i)} = 5\sin(\pi t_i)$, $x_{-1}^{(i)} = x_0^{(i)} - 10^{-4}$, $x_{-2}^{(i)} = x_0^{(i)} - 2 \cdot 10^{-4}$, $y_0^{(i)} = x_0^{(i)} + 10^{-4}$, $z_0^{(i)} = x_0^{(i)} + 2 \cdot 10^{-4}$ Тут верхній індекс i $(i = 1,2,\ldots,n)$ означає i-ту компоненту відповідного вектора наближень. Обчислення проводились з точністю $\varepsilon = 10^{-10}$.

Для порівняння швидкості збіжності описаних вище методів у таблицях 4.2–4.3 наведено кількість ітерацій, за які отримано розв'язки тестових прикладів. Знак «–» у таблицях означає, що розв'язок задачі даним методом не вдалось отримати.

Таблиця 4.2 – Порівняння одно- та двокрокових ітераційних процесів

Приклад	Ньютона	(4.40), (4.41)	(4.40), (4.42)	(4.45)	(4.46)	(4.47)
4.2	3	4	3	3	2	3
4.3	5	6	6	4	4	4

Продовження таблиці 4.2

Приклад	Ньютона	(4.40), (4.41)	(4.40), (4.42)	(4.45)	(4.46)	(4.47)
4.4	6	8	6	5	6	5
4.5	3	3	3	3	3	3
4.6	44	20	46	9	36	52
4.7	7	9	–	7	7	–
4.8	14	19	16	12	14	10
4.9	42	58	55	34	41	28
4.10	7	9	7	7	7	7
4.11	4	5	4	3	4	4
4.12	6	7	6	5	5	5
4.13	7	9	7	6	6	5
4.14	5	6	5	4	4	4

Таблиця 4.3 – Порівняння одно- та трикрокових ітераційних процесів

Приклад	Метод			
	Ньютона	(4.40), (4.43)	(4.44)	(4.48)
4.2	3	4	4	2
4.3	5	5	6	3
4.4	6	6	7	4
4.5	3	4	4	2
4.6	44	27	–	14
4.7	7	6	–	9
4.8	14	27	17	11
4.9	42	42	53	23
4.10	7	8	–	12
4.11	4	4	4	3
4.12	6	6	7	4
4.13	7	7	8	5
4.14	5	6	6	3

Нижче наведено початкове наближення й отриманий розв’язок нелінійної крайової задачі (4.50) у випадку $n = 9$ і $p = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}0000000000 \\ 1{,}54508497\ \ 18 \\ 2{,}93892626\ \ 14 \\ 4{,}04508497\ \ 18 \\ 4{,}75528258\ \ 14 \\ 5{,}00000000\ \ 00 \\ 4{,}75528258\ \ 14 \\ 4{,}04508497\ \ 18 \\ 2{,}93892626\ \ 14 \\ 1{,}54508497\ \ 18 \\ 0{,}00000000\ \ 00 \end{pmatrix}, \quad x^* \approx \begin{pmatrix} 0{,}0000000000 \\ 1{,}45215119\ \ 50 \\ 2{,}87889093\ \ 15 \\ 4{,}16500550\ \ 82 \\ 5{,}09709099\ \ 37 \\ 5{,}44262522\ \ 62 \\ 5{,}09709099\ \ 37 \\ 4{,}16500550\ \ 82 \\ 2{,}87889093\ \ 15 \\ 1{,}45215119\ \ 50 \\ 0{,}00000000\ \ 00 \end{pmatrix}.$$

Отже, на підставі виконаних розрахунків та порівняння отриманих результатів бачимо, що двокрокові методи (4.45) – (4.47) за кількістю ітерацій практично не відрізняються і швидше збігаються, ніж метод Ньютона та метод хорд (див. таблицю 4.2). З таблиці 4.3 видно, що для розв’язування нелінійних систем рівнянь метод (4.44) рекомендувати не можна, а натомість досить ефективним виявився трикроковий метод (4.48). Експерименти свідчать, що швидкість збіжності ітерацій для задачі 4.12 практично не залежить від розмірності нелінійної системи. Аналогічні висновки можна зробити і за результатами розв’язування задачі (4.50).

Наведені результати числових розрахунків дають змогу стверджувати, що швидкість збіжності ітераційного процесу (4.48) вище ніж $1+\sqrt{2}$.

4.3 Про різницевий метод з квадратичною збіжністю Курчатова для розв'язування нелінійних операторних рівнянь

4.3.1 Локальна збіжність методу Курчатова

Нехай задано нелінійне рівняння

$$F(x) = 0, \tag{4.52}$$

де F – нелінійний оператор, який визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y.

Для розв'язування (4.52) будемо досліджувати ітераційний метод Курчатова

$$x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_n, x_{n-1}))^{-1} F(x_n); n = 0,1...; \tag{4.53}$$

Теорема 4.7 Нехай F - нелінійний оператор, який визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що рівняння $F(x) = 0$ має розв'язок x^* у D і існує оборотна похідна Фреше $F'(x^*)$. Нехай F має в області $V = \{x : \|x - x^*\| < 3r^*\} \subseteq D$ поділені різниці першого та другого порядку, які задовольняють умови Ліпшиця:

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p^*(\|x-u\| + \|y-v\|), \tag{4.54}$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y) - F(v,x,y))\| \le q^*(\|u-v\|), \tag{4.55}$$

де

$$r^* = \frac{2}{3p^* + \sqrt{9p^* + 32q^*}} \tag{4.56}$$

Тоді для всіх $x_0, x_{-1} \subseteq U = \{x : \|x - x_*\| < r^*\}$ ітераційний процес (4.53) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$, яка належить U, збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{p^*\|x_n - x^*\| + q^*\|x_n - x_{n-1}\|^2}{1 - 2p^*\|x_n - x^*\| - q^*\|x_n - x_{n-1}\|^2}\|x_n - x^*\| \tag{4.57}$$

Доведення. Позначимо через A_n лінійний оператор

$$A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})_{\ n}\ .$$

Легко бачити, що якщо $x_n, x_{n-1} \subseteq U$, то $2x_n - x_{n-1}, x_{n-1} \subseteq V$. Тоді A_n є оборотний і виконується нерівність

$$\left\| I-(I-F^{/}(x^{*})^{-1}A_{n})^{-1}\right\| = \left\| A_{n}^{-1}F^{/}(x^{*})\right\| \leq$$
$$\leq \left(1-p_{*}(\left\| x_{n}-x^{*}\right\| + \left\| x_{n-1}-x^{*}\right\|) - q_{*}\left\| x_{n}-x_{n-1}\right\|^{2}\right)^{-1} \tag{4.58}$$

Дійсно, з формул (4.54) і (4.55) отримаємо

$$\left\| I-F^{/}(x^{*})^{-1}A_{n}\right\| =$$
$$\left\| F'(x^{*})^{-1}(F(x^{*},x^{*})-F(x_{n},x_{n})+F(x_{n},x_{n})-\right.$$
$$\left.-F(x_{n},x_{n-1})+F(x_{n},x_{n-1})-2F(2x_{n}\text{-}x_{n\text{-}1},x_{n\text{-}1}))\right\| \leq$$
$$2p_{*}\left\| x_{n}-x^{*}\right\| + \left\| F^{/}(x^{*})^{-1}(x_{n},x_{n-1},x_{n})-2F(2x_{n}-x_{n-1},x_{n-1},x_{n}))(x_{n}-x_{n-1})\right\| \leq$$
$$2p_{*}\left\| x_{n}-x*\right\| + q*\left\| x_{n}-x_{n-1}\right\|^{2}$$

З означення r^{*} маємо

$$2pr^{*}+4q^{*}r^{*}-4q^{*}r^{*2}<1. \tag{4.59}$$

Використовуючи теорему Банаха, ми отримуємо формулу (4.58). Далі можна записати

$$\left\| x_{n+1}-x^{*}\right\| = \left\| x_{n}-x^{*}-A_{n}^{-1}(F(x_{n})-F(x^{*}))\right\| \leq$$
$$\leq \left\| A_{n}^{-1}F'(x^{*})\right\| \left\| F'(x^{*})^{-1}(F(x_{n},x^{*})-A_{n}\right\| \left\| x_{n}-x^{*}\right\| \tag{4.60}$$

Згідно з умовами (4.54) і (4.55) теореми маємо

$$\left\| F'(x^{*})^{-1}(F(x_{n},x^{*})-A_{n}\right\| =$$
$$F'(x^{*})^{-1}(\ F(x^{*},x^{*})-F(x_{n},x_{n})+F(x_{n},x_{n})-$$
$$-F(x_{n},x_{n-1})+F(x_{n},x_{n-1})-2F(2x_{n}\text{-}x_{n\text{-}1},x_{n\text{-}1})\ ) \leq$$
$$\leq p_{*}\left\| x_{n}-x^{*}\right\| + \left\| F^{/}(x^{*})^{-1}(x_{n},x_{n-1},x_{n})-2F(2x_{n}-x_{n-1},x_{n-1},x_{n}))(x_{n}-x_{n-1})\right\| \leq$$
$$\leq p_{*}\left\| x_{n}-x*\right\| + q*\left\| x_{n}-x_{n-1}\right\|^{2}$$

З (4.58) і (4.60) видно, що виконується (4.57).

Далі, з (4.57) і (4.59) ми отримаємо

$$\left\| x_{n+1}-x^{*}\right\| < \left\| x_{n}-x^{*}\right\| < r^{*}, n=0,1,2...$$

Тому ітераційний процес є коректно визначений і послідовність, яку він породжує, належить U. З останньої нерівності і оцінки (4.57) отримуємо

$$\lim_{x\to 0}\left\|x-x^*\right\|=0.$$

Доведення завершене.

Наслідок 4.3 Порядок збіжності ітераційної процедури Курчатова квадратичний.

Доведення. Оскільки згідно (4.57) збіжність послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$ не вище квадратичної, то існують $C>0$ і $N>0$, що для всіх $n\geq N$ виконується нерівність

$$\left\|x_n-x_{n-1}\right\|^2\leq\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2\leq\left\|x_n-x^*\right\|.$$

З врахуванням цієї нерівності з (4.57) випливає квадратичний порядок збіжності послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$ до x^*.

4.3.2 Напівлокальна збіжність методу Курчатова

Теорема 4.8 Нехай F – нелінійний оператор, який визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай $F(\cdot,\cdot)$ і $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ поділені різниці першого і другого порядку від F на множині $V_0=\{x:\left\|x-x^*\leq r_0\right\|\}$.

Припустимо, що лінійний оператор $A_0=F(2x_0-x_{-1},x_{-1})$, де $x_0,x_{-1}\subseteq U_0=\{x:\left\|x-x_0\right\|\leq r_0\}$, є оборотний і задовольняє наступні умови Ліпшиця:

$$\left\|A_0^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\right\|\leq p_0(\left\|x-u\right\|+\left\|y-v\right\|), \tag{4.61}$$

$$\left\|A_0^{-1}(F(x,y,z)-F(u,y,z))\right\|\leq q_0\left\|x-u\right\|. \tag{4.62}$$

Визначимо два невід'ємні числа a і c, такі що

$$\left\|x_0-x_{-1}\right\|\leq a,\left\|A_0^{-1}F(x_0)\right\|\leq c. \tag{4.63}$$

Припустимо, що $2q_0a^2 \le 1$ і нехай

$$s = ((p_0 + q_0a)^2 + 3q_0(1 - q_0a^2))^{1/2},$$

де

$$r = \frac{1 - q_0a^2}{p_0 + q_0a + s}$$

та h – дійсний поліном $h(t) = -q_0t^3 - ((p_0 + q_0a)t^2 + (1 - q_0a^2))t$. Якщо задовольняється нерівність

$$c(1 - q_0a^2) \le h(r) = 1/3(p_0 + q_0a + 2s) * (\frac{1 - q_0a^2}{p_0 + q_0a + s})^2 \qquad (4.64)$$

і замкнена куля $V_0 \subset D$, де $r_0 \in (0, r]$ є коренем рівняння $h(t) = c(1 - 2q_0a)$, то ітераційний процес (4.53) і генерована ним послідовність $x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))^{-1}F(x_n), n = 0,1,...$ коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge0}$ збігається до розв'язку x^* рівняння (4.52). Більше того, справедлива нерівність

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le t_n, n = -1,0,1,..., \qquad (4.65)$$

де

$$t_0 = r_0, t_{-1} = r_0 + a, \qquad (4.66)$$

$$a_0 = p_0 + 3q_0r_0 + q_{0r_0} + 2a, b = 3q_0r_0 + 2a_0r_0 - q_0{a_0}^2 + 1, \qquad (4.67)$$

$$t_{n+1} = t\frac{a_0t_n + q_0(t_n - t_{n-1})^2 - 2q_0{t_n}^2}{b_0 + 2a_0t_n - q_0(t_n - t_{n-1})^2 + 3q_0{t_n}^2}, n = 0,1,2,... \qquad (4.68)$$

Доведення. Відзначимо, що послідовність $\{t_n\}_{n\ge0}$ отримується застосуванням ітераційної процедури (4.53) до дійсного полінома

$$f(t) = -q_0t^3 + a_0t^2 + b_0t$$

Легко бачити, що ця послідовність монотонно збігається до нуля. Також ми маємо

$$t_{n+1}-t_{n+2}=\frac{2(t_{n+1}-t_n)}{f(2t_{n+1}-t_n)-f(t_n)}f(f_{n+1})=$$
$$=\frac{\left[-q_0(t_{n+1}{}^2+t_{n+1}t_n-3t_n{}^2+2t_nt_{n-1})+a_0(t_{n+1}-t_n)\right](t_{n+1}-t_n)}{-q_0(4t_{n+1}{}^2-2t_{n+1}t_n+t_n{}^2)+2a_0t_{n+1}+b_0}=$$
$$=\frac{\left\{\left[a_0-q_0(2t_n+t_{n+1})\right](t_n-t_{n+1})+q_0(t_n-t_{n-1})^2\right\}(t_n-t_{n+1})}{1-q_0a^2-2p_0\left(t_0-t_{n+1}\right)-q_0\left[3\left(t_0-t_{n+1}\right)\left(3t_0+t_{n+1}\right)-(t_n-t_{n+1})^2\right]}\geq \tag{4.69}$$
$$\geq\frac{p_0(t_n-t_{n+1})+q_0(t_n-t_{n+1})^2}{1-2p_0\left(t_0-t_{n+1}\right)-q_0a^2}\left(t_n-t_{n+1}\right)$$

Доведемо за допомогою індукції, що ітераційний процес (4.53) є коректно визначений і що

$$\left\|x_n-x_{n-1}\right\|\leq t_n-t_{n+1} \tag{4.70}$$

Використовуючи (4.63), (4.64), (4.66) і той факт, що

$$t_0-t_{-1}=t_0\cdot\left(1-\frac{a_0t_0-q_0(t_0-t_{-1})^2-2q_0t_0{}^2}{b_0-2a_0t_0-q_0(t_0-t_{-1})^2-3q_0t_0{}^2}\right)=\frac{h(r_0)}{1-2q_0a^2}=c \tag{4.71}$$

ми доводимо, що (4.70) виконується для $n=-1,0$. Нехай k невід'ємне число і для всіх $n\leq k$ виконується (4.70). Якщо $A_{k+1}=F(2x_{k+1}-x_k,x_k)$, то відповідно до (4.61) і (4.62) маємо

$$\left\|I-A_0^{-1}A_{k+1}\right\|=\left\|A_0^{-1}(A_0+A_{k+1})\right\|=$$
$$=\left\|A_0^{-1}(F(2x_0-x_{-1},x_{-1})-F(x_0,x_{-1})+F(x_0,x_{-1})+F(x_0,x_0)-\right\|$$
$$-F(x_{k+1},x_0)+F(x_{k+1},x_0)-F(x_{k+1},x_k)+F(x_{k+1},x_k)-F(2x_{k+1}-x_k,x_k))=\|$$
$$=\left\|A_0^{-1}F((2x_0-x_{-1},x_{-1},x_0)-F(x_0,x_{-1},x_0))(x_0-x_{-1})-(F(x_0,x_0)-F(x_{k+1},x_0))\right.$$
$$\left.+(F(x_{k+1},x_0)-F(x_{k+1},x_k))+(F(x_{k+1},x_k)-F(2x_{k+1}-x_k,x_k)))\right\|$$
$$\leq q_0a^2+p_0(\left\|x_0-x_{k+1}\right\|+\left\|x_0-x_k\right\|+\left\|x_k-x_{k+1}\right\|)$$
$$\leq q_0a^2+2p_0(t_0-t_{k+1})<q_0a^2+2p_0t_0\leq q_0a^2+2p_0r\leq q_0a^2+2p_0\frac{1-q_0a^2}{-p_0}=1$$

За теоремою Банаха маємо, що A_{k+1} є оборотний і

$$\left\| A_{k+1}^{-1} A_0 \right\| \le \left(1 - q_0 a^2 - p_0 \left(\left\| x_0 - x_{k+1} \right\| + \left\| x_0 - x_k \right\| + \left\| x_k - x_{k+1} \right\| \right) \right)^{-1} \qquad (4.72)$$

Тепер доведемо, що ітераційний процес (4.53) є коректно визначений для $n = k+1$. Маємо

$$\left\| x_{k+1} - x_{k+2} \right\| = \left\| A_{k+1}^{-1} F(x_{k+1}) \right\| = \left\| A_{k+1}^{-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k) - A_k (x_{k+1} - x_k)) \right\| \le$$

$$\le \left\| A_{k+1}^{-1} A_0 \right\| \left\| A_0^{-1} (F(x_{k+1}, x_k) - A_k) \right\| \left\| x_k - x_{k+1} \right\|. \qquad (4.73)$$

Використовуючи формули (4.61) і (4.62), отримаємо

$$\left\| A_0^{-1} (F(x_{k+1}, x_k) - A_k) \right\| = \left\| A_0^{-1} (F(x_{k+1}, x_k) - F(x_k, x_k) + \right.$$

$$+ F(x_k, x_k) - F(x_k, x_{k-1}) + F(x_k, x_{k-1}) - F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1}, x_k) \times \qquad (4.74)$$

$$\left. \times (x_k - x_{k-1}) \right) \right\| \le p_0 \left\| x_k - x_{k-1} \right\| + q_0 \left\| x_{k-1} - x_k \right\|^2$$

З (4.72), (4.73) і (4.74) випливає, що

$$\left\| x_{k+1} - x_{k+2} \right\| \le \frac{(p_0 \left\| x_k - x_{k+1} \right\| + q_0 \left\| x_{k-1} - x_{k+1} \right\|^2) \left\| x_k - x_{k+1} \right\|}{1 - p_0 (\left\| x_0 - x_{k+1} \right\| + \left\| x_0 - x_k \right\| + \left\| x_k - x_{k+1} \right\|) - q_0 a^2}$$

Остаточно, використовуючи (4.69) і (4.70), ми отримаємо, що

$$\left\| x_{k+1} - x_{k+2} \right\| \le t_{k+1} - t_{k+2}$$

Тобто, ми довели, що ітераційний процес (4.53) є коректно визначений для кожного n. З цього випливає, що

$$\left\| x_k - x_{k+1} \right\| \le t_n - t_k, \quad -1 \le n \le k \qquad (4.75)$$

Дане твердження показує, що $\{x_n\}_{n \ge 0}$ є фундаментальною послідовністю, і в просторі X вона є збіжною. Нехай k прямує до нескінченності в формулі (4.75), тоді отримаємо (4.65). Легко бачити, що x^* є коренем рівняння (4.52), бо, згідно з (4.74), можна записати

$$\left\| A_0^{-1} F(x_{k+1}) \right\| = \left\| A_0^{-1} (F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1-x_k}) \right\| \le$$

$$\le p_0 \left\| x_k - x_{k+1} \right\|^2 + q_0 \left\| x_k - x_{k-1} \right\|^2 \left\| x_k - x_{k+1} \right\| \qquad (4.76)$$

Теорема доведена.

Наслідок 4.4 Порядок збіжності ітераційної процедури Курчатова квадратичний.

Доведення. Оскільки згідно (4.68) збіжність послідовності $\{t_n\}_{n\geq 0}$ до нуля не вище квадратичної, то існують $C \geq 0$ і $N \geq 0$, що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $(t_n - t_{n-1})^2 \leq t_{n-1}{}^2 \leq Ct_n$

З врахуванням цієї нерівності з (4.68) випливає квадратичний порядок збіжності послідовності $\{t_n\}_{n\geq 0}$, а згідно (4.65) і послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$.

Якщо відомі константи a, c, p_0, q_0, то ми можемо обчислити послідовність $\{t_n\}_{n\geq 0}$ перед отриманням послідовності $\{x_n\}_{n\geq 0}$ за ітераційним алгоритмом (4.53). З допомогою нерівності (4.65) дається апріорна оцінка похибки методу Курчатова. Нижче ми отримаємо апостеріорну оцінку похибки методу, яка точніша за апріорну.

Теорема 4.9 Нехай виконуються умови теореми 4.8. Позначимо

$$e_n = p_0 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + q_o \|x_{n-1} - x_{n-1}\|^2 \|x_{n-1} - x_n\|,$$

$$g_n = 1 - 2p_0 \|x_n - x_0\| - q_0 a^2$$

Тоді для $n = 1,2,3,...$ справедлива оцінка

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{2e_n}{g_n + (g_n - 4p_0 e_n)^{1/2}} \leq t_n$$

Таким чином, у цьому параграфі проведено дослідження локальної та напівлокальної збіжності методу Курчатова при доволі слабких умовах Ліпшиця для поділених різниць другого порядку. Встановлено квадратичний порядок збіжності методу, що є вище ніж у інших різницевих методів. Напівлокальну збіжність методу вперше доведено за допомогою теорії мажорант Канторовича. Отримано апріорну та апостеріорну оцінки похибки методу.

4.4 Про різницевий метод з надквадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати

У цьому параграфі досліджено ітераційно-різницевий метод розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати, який не потребує обчислення матриці похідних. Доведено теорему, яка обгрунтовує збіжність, та визначено швидкість збіжності розглянутого методу. Наведено результати числового експерименту.

4.4.1 Формулювання задачі

Нелінійна задача про найменші квадрати є частковим випадком безумовної оптимізації. З огляду на важливість та специфічну структуру ця задача становить самостійний інтерес для дослідження. Такі задачі найчастіше виникають у разі розв'язування перевизначених систем рівнянь, оцінювання параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, побудови нелінійних регресійних моделей, розв'язування інженерних проблем тощо. Ефективним методом розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати є метод Гауса – Ньютона [14] та його модифікації [3, 4, 89]. Часто на практиці маємо проблеми з обчисленням похідних. Наприклад, функцію отримуємо з експерименту, і не маємо аналітичного виразу для похідних, або похідну функції може задавати громіздка формула, і її обчислення є небажаним. У такому випадку доцільно використовувати ітераційно-різницеві методи, які не потребують обчислення матриці похідних і водночас не поступаються методу Гауса – Ньютона за швидкістю збіжності та близькі до нього за кількістю обчислень.

У праці [89] з єдиного погляду досліджено швидкість та радіус збіжності різницевих методів хорд, симетричної різницевої лінеаризації та методу з

порядком збіжності 1,839... За аналогічною схемою пропонуємо дослідження двокрокового різницевого методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$. Цей метод запропоновано і досліджено в [3]. Однак обґрунтування збіжності, наведене нижче, потребує слабших обмежень на функцію, зокрема не потрібне існування й обмеженість поділених різниць другого порядку, не припускаємо рівним нулю відхил у розв'язку.

Нелінійна задача про найменші квадрати має вигляд

$$\min_{x\in R^n} f(x) = \min_{x\in R^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \tag{4.77}$$

де $m \geq n,$ функція відхилу $F: R^n \to R^m$ – нелінійна по x.

Для знаходження розв'язку задачі (4.76) розглянемо різницеву модифікацію двокрокового методу Гауса – Ньютона [3]

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n); \\ y_{n+1} = x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \quad n = 0,1,... \end{gathered} \tag{4.78}$$

де $A_n = F(x_n, y_n)$ – поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ [36] в точках x_n, y_n; x_0, y_0 – задані початкові наближення.

4.4.2 Обгрунтування збіжності

Достатні умови і швидкість збіжності ітераційного процесу (4.78) визначені в такій теоремі.

Теорема 4.10 Нехай $F: R^n \to R^m$ – неперервно диференційована в області $D \subseteq R^n$. Припустимо, що задача (4.77) має розв'язок x_* у деякій області $\Omega(x_*, r_0) = \{x \in D : \| x - x_* \| < r_0\}$, де $r_0 = \max\{\| x_0 - x_* \|, \| y_0 - x_* \|\}$ та існує обернений оператор $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x_*)^T F'(x_*)]^{-1}$ і $\| (A_*^T A_*)^{-1} \| \leq B$. В області Ω функція F має поділену різницю першого порядку і

$$\| F(x,y) - F(u,v) \| \leq M(\| x - u \| + \| y - v \|).$$

Крім того,

$$\| F(x_*) \| \le \eta, \| F'(x_*) \| \le \alpha;$$
$$3BMr_0(\alpha + 2Mr_0) + 2MB\eta < 1;$$
$$q = \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0 + 2C_2) + 2C_2\} < 1,$$

де

$$C_1 = \frac{BM(\alpha + 2Mr_0)}{1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)};$$
$$C_2 = \frac{2BM\eta}{1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)}.$$

Тоді для $x_0, y_0 \in \Omega$ ітераційний процес (4.78) є коректно визначеним і генеровані ним послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}, n = 0,1,...,$ містяться у відкритій області Ω та збігаються до розв'язку x_*, причому справджуються оцінки:

$$\| x_{n+1} - x_* \| \le C_1 \| x_n - x_* \| \| y_n - x_* \| + C_2(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|); \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned} \| y_{n+1} - x_* \| \le C_1(\| x_{n+1} - x_n \| + \| y_n - x_* \|) \| x_{n+1} - x_* \| + \\ + C_2(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|); \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$r_{n+1} = \max\{\| x_{n+1} - x_* \|, \| y_{n+1} - x_* \|\} \le q r_n \le ... \le q^{n+1} r_0. \tag{4.81}$$

Доведення. Для довільної матриці $A \in R^{n \times m}$, яка має повний стовпцевий ранг, справджується тотожність

$$\| [I - (I - (F_*'^T F_*')^{-1} A^T A)]^{-1} \| = \| (A^T A)^{-1} F_*'^T F_*' \|. \tag{4.82}$$

Зробимо таку оцінку

$$\begin{aligned} &\| I - (F_*'^T F_*')^{-1} A^T A \| = \| (F_*'^T F_*')^{-1} (F_*'^T F_*' - A^T A) \| = \\ &= \| (F_*'^T F_*')^{-1} (F_*'^T (F_*' - A) + (F_*'^T - A^T)(A - F_*') + (F_*'^T - A^T) F_*') \| \le \\ &\le \| (F_*'^T F_*')^{-1} \| (\| F_*'^T \| \| F_*' - A \| + \\ &\qquad + \| F_*'^T - A^T \| \| A - F_*' \| + \| F_*'^T - A^T \| \| F_*' \|) \le \\ &\le B(\alpha \| F_*' - A \| + \| F_*'^T - A^T \| \| A - F_*' \| + \alpha \| F_*'^T - A^T \|). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Вважатимемо, що

$$\| A_n - A_* \| = \| F(x_n, y_n) - F(x_*, x_*) \| =$$

$$=\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)+F(x_n,x_*)-F(x_*,x_*)\|\le$$
$$\le\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)\|+\|F(x_n,x_*)-F(x_*,x_*)\|\le$$
$$\le M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)$$

і для евклідової норми [89] $\|F_*^{'}-A_n\|=\|F_*^{'T}-A_n^T\|$. Тоді з нерівності (4.83) з $A_n=F(x_n,y_n),\ A_*=F^{'}(x_*)=F(x_*,x_*)$ отримаємо

$$\|I-(F_*^{'T}F_*^{'})^{-1}A^TA\|\le B[2\alpha+M(\|y_n-x_*\|+ \\ +\|x_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|). \tag{4.84}$$

Оскільки згідно з умовою

$$4B(\alpha+Mr_0)Mr_0=1-3BMr_0(\alpha+2Mr_0)-2\eta MB<1,$$

то за теоремою Банаха з (4.82) і (4.84) маємо

$$\|(A_n^TA_n)^{-1}F_*^{'T}F_*^{'}\|\le\{1-B[2\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}^{-1}.$$

У підсумку отримаємо оцінки

$$\|x_{n+1}-x_*\|=\|x_n-x_*-(A_n^TA_n)^{-1}(A_n^TF(x_n)-A_*^TF(x_*))\|\le$$
$$\le\|-(A_n^TA_n)^{-1}F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*)\|\|(F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*))^{-1}[-A_n^T(A_n-$$
$$-F(x_n,x_*))(x_n-x_*)+(A_n^T-A_*^T)F(x_*)]\|,$$
$$\|y_{n+1}-x_*\|=\|x_{n+1}-x_*-(A_n^TA_n)^{-1}(A_n^TF(x_{n+1})-A_*^TF(x_*))\|\le$$
$$\le\|-(A_n^TA_n)^{-1}F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*)\|\|(F^{'T}(x_*)F^{'}(x_*))^{-1}[-A_n^T(A_n-$$
$$-F(x_{n+1},x_*))(x_{n+1}-x_*)+(A_n^T-A_*^T)F(x_*)]\|.$$

Звідси з урахуванням нерівності

$$\|A_n-F(x_n,x_*)\|=\|F(x_n,y_n)-F(x_n,x_*)\|\le M\|y_n-x_*\|,$$
$$\|A_n-F(x_{n+1},x_*)\|=\|F(x_n,y_n)-F(x_{n+1},x_*)\|\le M(\|x_n-x_{n+1}\|+\|y_n-x_*\|),$$
$$\|A_n\|\le\|A_*\|+\|A_n-A_*\|\le\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|),$$

отримаємо

$$\|x_{n+1}-x_*\|\le \\ B\{[\alpha+M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)]M\|x_n-x_*\|\|y_n-x_*\|+ \\ +\eta M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}/\{1-B[2\alpha+M(\|x_n-x_*\|+ \\ +\|y_n-x_*\|)]M(\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|)\}; \tag{4.85}$$

$$\begin{gathered}\| y_{n+1} - x_* \| \le \\ \le B\{[\alpha + M(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|)]M(\| x_n - x_{n+1} \| + \| y_n - x_* \|) \times \\ \times \| x_{n+1} - x_* \| + \eta M(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|)\} / \{1 - B[2\alpha + M(\| x_n - x_* \| + \\ + \| y_n - x_* \|)]M(\| x_n - x_* \| + \| y_n - x_* \|)\}.\end{gathered} \tag{4.86}$$

Тобто правильні оцінки (4.79), (4.80).

Використаємо умову $q < 1$ і нерівності (4.79),(4.80) при $n = 0$, маємо

$$\begin{gathered}r_1 = \max\{\| x_1 - x_* \|, \| y_1 - x_* \|\} \le \\ \le \max\{C_1 \| x_0 - x_* \| \| y_0 - x_* \| + C_2(\| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|); \\ C_1(\| x_1 - x_* \| + \| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|) \| x_1 - x_* \| + C_2(\| x_0 - x_* \| + \| y_0 - x_* \|)\} \le \\ \le \max\{C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0) + 2C_2 r_0\} = \\ = \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0 + 2C_2 + 2)(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0) + 2C_2\} r_0 = q r_0,\end{gathered}$$

тобто $x_1, y_1 \in \Omega$ і справджується нерівність (4.81).

Далі, за допомогою методу математичної індукції, легко довести, що $x_{n+1}, y_{n+1} \in \Omega$ і отримати оцінку (4.81) для довільного $n \ge 1$.

Як бачимо з оцінок (4.85) і (4.86), збіжність ітераційного процесу суттєво залежить від доданка, який містить величини η і M. Якщо $\eta = 0$, то маємо нелінійну задачу найменших квадратів з малим відхилом у розв'язку. У разі $M = 0$ функції відхилу лінійні. Для задач з малим відхилом у розв'язку (η – "мале") або слабко нелінійних задач (M – "мале") збіжність ітераційного процесу лінійна. У разі великих відхилів (η – велике) або для сильно нелінійних задач (M – "велике") ітераційний процес (4.78) може взагалі не збігатися.

Для задач з нульовою нев'язкою в розв'язку можна отримати кращі оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу (4.78).

Наслідок 4.5 Порядок збіжності ітераційного процесу (4.78) у випадку нульового відхилу дорівнює $1 + \sqrt{2}$.

Доведення. Введемо позначення $a_n = \| x_n - x_* \|, b_n = \| y_n - x_* \|, n = 0,1,\ldots$. Із нерівностей (4.85) і (4.86) отримаємо

$$a_{n+1} \le \frac{B[\alpha + M(a_n + b_n)]M}{1 - B[2\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_n + b_n)} a_n b_n;$$
$$b_{n+1} \le \frac{B[\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_{n+1} + a_n + b_n)}{1 - B[2\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_n + b_n)} a_{n+1}.$$

Приймемо

$$A = \frac{B[\alpha + M(a_n + b_n)]M}{1 - B[2\alpha + M(a_n + b_n)]M(a_n + b_n)}.$$

Тоді для достатньо великого $n \in N$ отримаємо

$$a_{n+1} \le A a_n b_n,$$
$$b_{n+1} \le A(a_{n+1} + a_n + b_n)a_{n+1} \le A(2a_n + b_n)a_{n+1} \le$$
$$\le A(2a_n + A(a_n + a_{n-1} + b_{n-1})a_n)a_{n+1} \le$$
$$\le A(2 + A(2a_0 + b_0))a_{n+1}a_n = Ba_{n+1}a_n,$$

звідки

$$a_{n+1} \le A a_n b_n \le A a_n B a_n a_{n-1} = C a_n^2 a_{n-1}.$$

На підставі попередньої нерівності можна записати рівняння для визначення порядку збіжності ітераційного процесу (4.78)

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Порядком збіжності буде єдиний додатний корінь $t_* = 1 + \sqrt{2}$ цього рівняння.

4.4.3 Результати числового експерименту

На низці тестових прикладів порівняємо швидкість збіжності методу (4.78) з методом Гауса – Ньютона та різницевим методом хорд. Ітераційні формули цих методів отримаємо з

$$x_{n+1} = x_n - \left(A_n^T A_n\right)^{-1} A_n^T F(x_n), n = 0,1,... \qquad (4.87)$$

Якщо в (4.87) A_n – матриця перших похідних функції $F(x_n)$, то маємо метод Гауса - Ньютона, якщо ж $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ – оператор поділених різниць першого порядку функції F в точках x_n і x_{n-1}, то маємо аналог методу хорд.

У разі практичної реалізації методу (4.78) на кожній ітерації потрібно розв'язувати дві системи лінійних рівнянь зі спільною матрицею і різними правими частинами.

Результати шукаємо з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$. Тестування проводили на наступних тестових функціях:

Приклад 4.15 Функція Розенброка [41]:

$$n = 8,\ m = 8;$$

$$F_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2),\ F_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1},\ i = 1,2,...,n/2.$$

$$x_* = (1;1;1;1;1;1;1;1),\quad x_0 = (-1.2;1;-1.2;1;-1.2;1;-1.2;1),\quad f(x_*) = 0;$$

Приклад 4.16 Функція Вуда [41]:

$$n = 4,\ m = 6;$$

$$F(x) = 0\ F_1(x) = 10\left(x_2 - x_1^2\right),\ F_2(x) = 1 - x_1,\ F_3(x) = (90)^{1/2}\left(x_4 - x_3^2\right),$$

$$F_4(x) = 1 - x_3,\ F_5(x) = (10)^{1/2}(x_4 + x_2 - 2),\ F_6(x) = (10)^{-1/2}(x_2 - x_4).$$

$$x_0 = (-3,-1,-3,-1);\ x_* = (1,1,1,1);\ f(x_*) = 0.$$

Приклад 4.17 Функція Box-3D [41]:

$$n = 3,\ m = 9;$$

$$F_i(x) = e^{-t_i x_1} - e^{-t_i x_2} - x_3\left(e^{-t_i} - e^{-10t_i}\right),$$

де $t_i = 0.1i$, $i = 1,...,9$;

$$x_0 = (0;10;20),\ x_* = (1;10;1),\ f(x_*) = 0.$$

Приклад 4.18 Сингулярна функція Пауелла [41]:

$$n = 4,\ m = 4;$$

$$F_1(x) = x_1 + 10x_2,\ F_2(x) = \sqrt{5}\,(x_3 - x_4),$$

$$F_3(x) = \left(x_2 - 2x_3^2\right),\ F_4(x) = (10)^{1/2}(x_1 - x_4)^2.$$

$$x_0 = (3;-1;0;1),\ x_* = (0;0;0),\ f(x_*) = 0.$$

Приклад 4.19 Функція Брауна [41]:

$$n = 4,\ m = 4;$$

$$F_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j - n - 1,\ i = 1,2,...,n-1,\ F_n(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j - 1.$$

$$x_0 = (0.5;0.5;0.5;0.5;0),$$

$$x_* = (0.868877;\ 0.868877;\ 0.868877;\ 1.524492),\quad f(x_*) = 0.$$

Приклад 4.20 Функція Ковалика і Осборна [41]:

$$n = 4,\ m = 11;$$

$$F_i(x) = y_i - \frac{x_1\left(u_i^2 + u_i x_2\right)}{\left(u_i^2 + u_i x_3 + x_4\right)},$$

де значення подані в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Вхідні дані

i	y_i	u_i	i	y_i	u_i
1	0.1957	4.0000	7	0.0456	0.1250
2	0.1947	2.0000	8	0.0342	0.1000
3	0.1735	1.0000	9	0.0323	0.0833
4	0.1600	0.5000	10	0.0235	0.0714
5	0.0844	0.2500	11	0.0246	0.0625
6	0.0627	0.1670			

$$x_0 = (0.25;0.39;0.415;0.39;),$$

$$x_* = (0.1928...;0.1912...;0.1230...;0.1360...),$$

$$f(x_*) = 3.07505...\times 10^{-4}.$$

Приклад 4.21 Розподіл Гнеденка – Вейбулла:

$$n = 2,\ m = 8;$$

$$F_i(x) = 1 - e^{-\left(\frac{t_i}{x_1}\right)^{x_2}} - y_i,$$

Таблиця 4.5 – Вхідні дані

i	t_i	y_i	i	t_i	y_i
1	0.1000	0.0050	5	1.2000	0.5132
2	0.5000	0.1175	6	1.7000	0.7643

Продовження таблиці 4.5

i	t_i	y_i	i	t_i	y_i
3	0.7000	0.2173	7	2.2000	0.9111
4	1.0000	0.3939	8	4.5000	0.99961

$$x_0 = (1;1);\ x_* = (1.4140;2.000);\ f(x_*) = 1.3833\times 10^{-7}.$$

Приклад 4.22 [ZAMM 73(1993) 7/8, T837-839]:

$$n = 4,\ m = 4;$$

$$F_i(x) = x_1 e^{t_i x_3} + x_2 e^{t_i x_4} - y_i,$$

$$t_i = (u_i - 425)/195,\ i = 1,...,7,$$

де значення подані в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Вхідні дані

i	1	2	3	4	5	6	7
u_i	230	295	360	425	490	555	620
y_i	64.0	66.0	69.5	74.0	80.8	91.0	103.5

$$x_0 = (25;\ 45;\ 1;\ 0),\quad x_* = (30.716958;43.423609;0.759299;-0.134355),$$

$$f(x_*) = 0.1423405.$$

У таблиці 4.7 наведено результати числового експерименту, зокрема ми порівнюємо досліджувані методи за кількістю ітерацій, зроблених для знаходження розв’язку з заданою точністю.

Таблиця 4.7 – Кількість ітерацій, за які отримано розв’язок тестових задач

Номер прикладу	Метод		
	Гауса – Ньютона	хорд	(4.78)
4.15	2	3	2
4.16	51	74	49
4.17	5	7	4
4.18	12	16	10
4.19	14	–	14

Продовження таблиці 4.7

Номер прикладу	Метод		
	Гауса – Ньютона	хорд	(4.78)
4.20	10	17	10
4.21	5	7	5
4.22	12	15	11

Отже, на підставі теоретичних досліджень, практичних розрахунків та порівняння отриманих результатів можна стверджувати, що двокроковий ітераційно-різницевий метод (4.78) збігається швидше ніж метод Гауса – Ньютона, та значно переважає метод хорд. Оскільки, як доведено, у випадку нульового відхилу метод має високий порядок збіжності $(1+\sqrt{2})$ та не потребує обчислення похідних, то розглянутий метод є ефективним методом розв’язування нелінійної задачі про найменші квадрати.

5 СТАБІЛІЗОВАНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

5.1 Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії-реакції

Часто в схемах методу скінченних елементів (МСЕ) ставлять за мету знайти наближений розв'язок абстрактної сингулярно збуреної варіаційної задачі вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано простір допустимих функцій } V, \\ \textit{білінійну форму } c(.,.): V \times V \to R \\ \textit{та білінійний функціонал } l: V \to R; \\ \textit{знайти } u \in V \textit{ такий, що} \\ c(u,v) = < l, v > \qquad \forall v \in V, \end{cases} \tag{5.1}$$

здатний якісно відтворити структури примежових і/або внутрішніх шарів точного розв'язку з розумними обчислювальними витратами. Серед поширених розробок МСЕ для розв'язання сингулярно збурених задач виділимо стабілізовані [110] та адаптивні схеми [105, 114].

Нижче розглянемо альтернативну схему, яку можна вважати деяким випадком методу експоненціального підправлення. Детальний аналіз різницевих схем експоненціального підправлення наведений в [104]. Застосування експоненціальної функцій для побудови простору апроксимацій методу скінченних елементів розглянуто в [109, 111], на підставі, цього підходу розвинуто побудову обчислювальних схем з використанням спеціальних квадратурних формул [107, 112], завдяки чому досягнуто високої точності апроксимації розв'язку задач з примежовим шаром.

Наша мета – побудова та аналіз обчислювальної схеми МСЕ на підставі кусково-експоненціальної апроксимацій, анонсованих у [106]. Наведені числові результати демонструють ефективність їхнього використання.

5.1.1 Модельна задача

Для того, щоб пояснити суть пропонованої нами схеми МСЕ в деталях, використаємо такий з такого приклад:

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x) \textit{ таку, що} \\ Lu := -\{\mu u'\}' + \beta u' + \sigma u = f \quad \textit{в } \Omega := (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Крайова задача (5.2) допускає варіаційне формулювання вигляду (5.1) з такими структурними елементами:

$$\begin{cases} V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ c(u,v) := \int_0^1 \mu u' v' dx + \int_0^1 \beta u' v dx + \int_0^1 \sigma u v dx, \\ < l, v > := \int_0^1 f v dx \qquad\qquad \forall u, v \in V. \end{cases} \tag{5.3}$$

Тут і далі припускаємо, що задані функції μ, β, σ, f настільки регулярні, що задача (5.1) є коректно сформульованою; точніше, ми припускаємо, що її складові задовольняють умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, і, як наслідок, її білінійна форма породжує *енергетичну норму*

$$\|v\|_V := \sqrt{c(u,v)} \; \forall \, v \in V, \tag{5.4}$$

еквівалентну напівнормі

$$|v|_V := \sqrt{\int_0^1 |v'|^2 \, dx} \quad \forall \, v \in V. \tag{5.5}$$

Щоб мати уявлення про особливості розв'язків крайової задачі (5.2), ми для часткового випадку

$$\mu = const > 0,\ \beta, f \in R,\ \sigma \equiv 0$$

наводимо її розв'язок

$$u(x) = \left[x - \frac{e^{\gamma x} - 1}{e^{\gamma} - 1} \right] \frac{f}{\beta}. \tag{5.6}$$

Тут стала

$$\gamma := \frac{\beta}{\mu} \tag{5.7}$$

відома як *критерій, або число, подібності Пекле*.

Характерною особливістю цього розв'язку є те, що в околі точки x=1 експоненціальна складова породжує так званий *примежовий шар*. Це поняття відображає той факт, що для великих значень параметра γ похідні такого розв'язку в околі точки x=1 можуть набувати дуже великих значень; справді,

$$u'(x) = \left[1 - \gamma \frac{e^{\gamma x}}{e^{\gamma} - 1} \right] \frac{f}{\beta} \approx O(\gamma), \quad u''(x) = -\gamma^2 \frac{e^{\gamma x}}{e^{\gamma} - 1} \frac{f}{\beta} \approx O(\gamma^2).$$

Власне ця особливість структури розв'язку задачі (5.2) в разі великих чисел Пекле робить непридатними для вжитку класичні схеми МСЕ. Детальний розгляд цієї проблеми викладено в [113].

5.1.2 Кусково-експоненціальні апроксимації МСЕ

Зафіксуємо натуральне $(N+1)$, поділимо відрізок $[0,1]$ на частини (скінченні елементи)[1] $K_{i+\frac{1}{2}} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+\frac{1}{2}} := x_{i+1} - x_i > 0,\ i = 0,...,N$. На кожному з них виберемо апроксимацію розв'язку варіаційної задачі (5.3) у вигляді лінійної комбінації

$$u(x) \approx u_{i+\frac{1}{2}}(a;x) := q_i\varphi_i(a;x) + q_{i+1}\varphi_{i+1}(a;x) \quad \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}},\ \ i = 0,...,N, \tag{5.8}$$

експоненціальних функцій вигляду

$$\begin{cases} \varphi_i(a;x) := -\dfrac{a^{\omega_i(x)} - a}{a-1}; \\ \varphi_{i+1}(a;x) := \dfrac{a^{\omega_i(x)} - 1}{a-1}, \end{cases} \tag{5.9}$$

де

$$\omega_i(x) := \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \qquad \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}], \tag{5.10}$$

і сталу $a>1$, яка в майбутньому буде відігравати роль параметра стабілізації [2]. Безпосередні обчислення встановлюють основні властивості розглядуваної апроксимації

Лема 5.1 (про інтерполяційність та лінійну незалежність експоненціальних

---

[1] Тут і далі дробовим індексом зазначаємо номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо, $x_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ – це центр ваги скінченного елемента $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$. Подібно, $g_{i+\frac{1}{2}} \equiv \{q(x)\}_{i+\frac{1}{2}} := q(x_{i+\frac{1}{2}})$.

[2] Легко побачити, що лінійна функція $t(x) := \omega_i(x)\ \ \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}}$ відображає відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ у відрізок $[0,1] \in R$. Тому цю функцію $t = t(x)$ далі можемо розглядати як нову ($\equiv$ локальну) *незалежну змінну* на скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$.

базисних функцій)

$$\begin{cases} \varphi_k(a;x_m) = \delta_{km}, \quad k,m = i,i+1, \\ \varphi_i(a;x) + \varphi_{i+1}(a;x) \equiv 1 \quad \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Лема 5.2 (про структуру експоненціальних апроксимацій)

Для величин, які характеризують середнє значення апроксимації $u_{i+\frac{1}{2}}(a;x)$ та швидкості її зміни на скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$ введемо позначення

$$\begin{cases} q_{i+\frac{1}{2}} := \dfrac{1}{2}(q_{i+1} + q_i); \\ \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} := \dfrac{(q_{i+1} - q_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Тоді апроксимації (5.8) можна надати наступного вигляду:

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}} &:= q_i\varphi_i(a;x) + q_{i+1}\varphi_{i+1}(a;x) = \\ &= \left\{q - \frac{1}{2}h\dot{q}\right\}_{i+\frac{1}{2}} \varphi_i(x) + \left\{q + \frac{1}{2}h\dot{q}\right\}_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{i+1}(a;x) = \\ &= q_{i+\frac{1}{2}} + \left[\varphi_{i+1}(a;x) - \frac{1}{2}\right]\{h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= q_i + \varphi_{i+1}(a;x)\{h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}, \qquad \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

На доповнення до цього,

$$\begin{cases} u'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\ln a}{a-1}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} a^{\omega_i(x)}; \\ u''_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{\ln^2 a}{a-1}\dfrac{1}{h}\{\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} a^{\omega_i(x)}, \qquad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}},\ i = 0,\dots,N. \end{cases} \tag{5.14}$$

Експоненціальні апроксимація (5.8) має на кожному скінченному елементі два вузли інтерполювання, що робить її в цьому аспекті подібною до структури кусково-лінійної апроксимації на тріангуляції $\mathrm{T}_h := \{K_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N}$; точніше,

істинним є таке твердження.

Наслідок 5.1 (про лінійну апроксимацію як граничний випадок експоненціальної):

$$\begin{cases} \lim\limits_{a\to 1}\varphi_i(a;x)=1-\omega_i(x),\ \lim\limits_{a\to 1}\varphi_{i+1}(a;x)=\omega_i(x); \\ \lim\limits_{a\to 1}u_{i+\frac{1}{2}}(a;x)=q_i[1-\omega_i(x)]+q_{i+1}\omega_i(x); \\ \lim\limits_{a\to 1}u'_{i+\frac{1}{2}}(a;x)=\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}; \\ \lim\limits_{a\to 1}u''_{i+\frac{1}{2}}(a;x)=0, \qquad \forall x\in K_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Іншими словами, будь-яку неперервну кусково-лінійна функцію, визначену на тріангуляції $\mathrm{T}_h := \{K_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N}$, точно можна відтворити відповідною кусково-експоненціальною функцією шляхом граничного переходу з $a\to 1$.

Доведення. Правдивість наведених тверджень встановлюється з (5.13) граничним переходом з використанням границі

$$\lim_{a\to 1}\frac{a-1}{\ln a}=1. \tag{5.16}$$

Врешті-решт, щоб завершити попередній аналіз експоненціальної апроксимації, врахуємо головні крайові умови варіаційної задачі (5.2). У результаті одержимо, що

$$q_0=0,\quad q_{N+1}=0, \tag{5.17}$$

і запишемо кусково-визначену апроксимацію $u_h(a;x)$ у такий спосіб:

$$\begin{aligned} u_h(a;x) &:= \sum_{i=0}^{N} u_{i+\frac{1}{2}}(a;x)= \\ &= \sum_{i=0}^{N}\{q_i\varphi_i(a;x)+q_{i+1}\varphi_{i+1}(a;x)\}= \\ &= \sum_{i=1}^{N} q_i\phi_i(a;x), \qquad \forall x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

В останній сумі явно записуємо апроксимацію МСЕ як лінійну комбінацію кусково визначених експоненціальних базисних функцій

$$\phi_n(a;x) := \begin{cases} 0 \quad \forall x \in [0, x_{n-1}]; \\ \dfrac{a^{\omega_{n-1}(x)} - 1}{a-1} \quad \forall x \in (x_{n-1}, x_n]; \\ -\dfrac{a^{\omega_n(x)} - a}{a-1} \quad \forall x \in (x_n, x_{n-1}]; \\ 0 \quad \forall x \in (x_{n+1}, 1], \end{cases} \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{5.19}$$

Будемо вважати, що власне ця система функцій формує базис вибраного нами простору апроксимацій $V_h \subset V$, одночасно засвідчуючи, що $\dim V_h = N$. Далі зосереджуємося на побудові та аналізі послідовності наближених розв'язків варіаційної задачі (5.1), що визначена такими задачами: *пов'язаний*

$$\begin{cases} \textit{задано тріангуляцію } \mathrm{T}_h = \{K\} \textit{ та пов'язаний з нею} \\ \textit{простір експоненціальних апроксимацій } V_h \subset V; \\ \textit{знайти розв'язок } u_h \in V_h \textit{ рівняння} \\ \qquad c(u,v) = \langle l, v \rangle \qquad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{5.20}$$

5.1.3 Допоміжні обчислення на скінченному елементі

Для виконання різноманітних обчислень на скінченних елементах нам будуть потрібні складові варіаційного рівняння вигляду

$$\begin{cases} c_{i+\frac{1}{2}}(u,v) := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\} dx, \\ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, v \rangle := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} fv\, dx, \qquad i = 0, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{5.21}$$

Щоб результати обчислень були наочними і допускали прозору фізичну інтерпретацію, будемо виконувати інтегрування в (5.21) наближено з

уживанням теореми про середнє в такий спосіб:

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u,v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\} dx =$$

$$= \mu(z_1)\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v'dx + \beta(z_2)\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v\,dx + \sigma(z_3)\int_{x_i}^{x_{i+1}} uv\,dx =$$

$$\cong \left\{ \mu \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v'dx + \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v\,dx + \sigma \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv\,dx \right\}_{i+\frac{1}{2}}; \qquad (5.22)$$

$$< l_{i+\frac{1}{2}}, v > := \int_{x_i}^{x_{i+1}} fv\,dx \cong$$

$$\cong \left\{ f \int_{x_i}^{x_{i+1}} v dx \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \qquad i = 0,\ldots,N-1,$$

де точки $z_n \in K_{i+\frac{1}{2}}, n = 1,2,3$.

Важливі застосування апроксимацій білінійної форми та лінійного функціонала варіаційної задачі (5.1) подає така пропозиція.

Пропозиція 5.1 (про енергетичну норму експоненціальної апроксимації) На поділі $\mathrm{T}_h := \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^{N}$ уведемо позначення

$$Pe_{i+\frac{1}{2}} := \left\{ \frac{h\beta}{\mu} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad Sh_{i+\frac{1}{2}} := \left\{ \frac{h\sigma}{\beta} \right\}_{i+\frac{1}{2}}$$

для сіткових критеріїв Пекле та Струхаля, відповідно. Припустимо, що обчислення білінійної форми та лінійного функціонала задачі (5.1) на апроксимаціях (5.18) виконують за допомогою наближень (5.22).

Тоді значення цих форм на кожному скінченному елементі тріангуляції обчислюють згідно з правилом

$$\begin{aligned}\left\| u_e \right\|^2_{i+\frac{1}{2}} &\equiv c_{i+\frac{1}{2}}(u_e,u_e) = \\ &= h_{i+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}\mu \frac{a+1}{a-1}\left[\ln a + \frac{1}{2} Pe\, Sh \left(\frac{2}{\ln a} - \frac{a+1}{a-1} \right) \right] \dot{q}^2 + \right. \\ &\qquad + \beta \left[1 + Sh \left(\frac{2}{\ln a} - \frac{a+1}{a-1} \right) \right] \dot{q} q + \\ &\qquad \left. + \sigma q^2 \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \qquad \forall K_{i+\frac{1}{2}} \subset \mathrm{T}_h \end{aligned} \tag{5.23}$$

та

$$< l_{i+\frac{1}{2}}, u_e > = \left(f, u_e \right)_{i+\frac{1}{2}} := \left\{ hf \left[q + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\ln a} - \frac{a+1}{a-1} \right) h\dot{q} \right] \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \qquad \forall K_{i+\frac{1}{2}} \subset \mathrm{T}_h . \tag{5.24}$$

Доведення. Формули (5.23) та (5.24) виводять безпосередніми обчисленнями після підстановки (5.13) у (5.22).

5.1.4 Система дискретних рівнянь МСЕ

Тепер знайдемо систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ, яка слугуватиме для обчислення коефіцієнтів розв’язку $u_h = u(a;x)$ в просторі експоненціальних апроксимацій V_h.

Пропозиція 5.2 (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-експоненціальним базисом)

Нехай вивчають коректно сформульовану варіаційну задачу (5.3),(5.4). На поділі $\mathrm{T}_h := \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^{N}$ побудуємо простір апроксимацій V_h, базис $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ якого становить кусково-визначені неперервні показникові функції вигляду (5.19). Припустимо також, що обчислення значень білінійної форми та лінійного функціонала (5.4) на функціях цього базису виконують за допомогою наближень (5.22). Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для

знаходження коефіцієнтів апроксимації (5.18) має таку будову:

$$\left(\frac{\mu}{h}\right)_{i-\frac{1}{2}}\left[-\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}-\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{a+1}{2\ln a}-\frac{a}{a-1}\right)\right]_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1}+$$

$$+\left\{\left(\frac{\mu}{h}\right)_{i-\frac{1}{2}}\left[\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}+\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{a-3}{2\ln a}+\frac{1}{a-1}\right)\right]_{i-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu}{h}\right)_{i+\frac{1}{2}}\left[\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}-\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{1-3a}{2\ln a}+\frac{a^2}{a-1}\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}\right\}q_i+$$

$$+\left(\frac{\mu}{h}\right)_{i+\frac{1}{2}}\left[-\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}+\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{a+1}{2\ln a}-\frac{a}{a-1}\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}=$$

$$=\left\{\left[hf\left(\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{a-1}\right)\right]_{i-\frac{1}{2}}+\left[hf\left(-\frac{1}{\ln a}+\frac{a}{a-1}\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}\right\},\qquad i=1,\dots,N,$$

де

$$q_0=0,\ q_{N+1}=0. \tag{5.25}$$

З погляду практики заслуговує на увагу частковий випадок розглядуваної задачі (5.2) зі сталими коефіцієнтами μ, β, σ та функцією f на рівномірному поділі відрізка.

Наслідок 5.2 (про рівняння МСЕ для задачі зі сталими коефіцієнтами на рівномірній сітці)

Нехай виконуються умови попереднього твердження, а також,

i) поділ $\mathrm{T}_h:=\left\{K_{i+\frac{1}{2}}\right\}_{i=0}^{N}$ рівномірний, тобто

$h_{i+\frac{1}{2}}:=x_{i+1}-x_i=h=\mathrm{const},\quad i=0,\dots,N;$

ii) коефіцієнти μ, β, σ та функція f задачі (5.2) є сталими на відрізку [0,1].

Тоді система лінійних алгебричних рівнянь (5.25) для знаходження

коефіцієнтів апроксимації (5.18) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{h}\left\{\left[-\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}-\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{a+1}{2\ln a}-\frac{a}{a-1}\right)\right]q_{i-1}+\right.\\
&+\left[\frac{a+1}{a-1}\ln a+\frac{1}{a-1}PeSh\left(-\frac{a+1}{\ln a}+\frac{a^2+1}{a-1}\right)\right]q_i+\\
&\left.+\left[-\frac{a+1}{2}\frac{\ln a}{a-1}+\frac{1}{2}Pe+\frac{1}{a-1}PeSh\left(\frac{a+1}{2\ln a}-\frac{a}{a-1}\right)\right]q_{i+1}\right\}=\\
&=hf, \qquad\qquad i=1,\ldots,N,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

або в іншій редакції

$$\begin{aligned}
&\mu\left[-\frac{a+1}{a-1}\frac{\ln a}{2}+\frac{PeSh}{a-1}\left(\frac{a+1}{2\ln a}-\frac{a}{a-1}\right)\right]\frac{q_{i+1}-2q_i+q_{i-1}}{h^2}+\\
&+\beta\frac{q_{i+1}-q_{i-1}}{2h}+\sigma q_i=f.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Останній запис системи лінійних алгебричних рівнянь методу скінченних елементів наочно відображає його відмінність від методу скінченних різниць, який безпосередньо замінює похідні вихідного диференціального рівняння крайової задачі (5.2) відповідними різницевими співвідношеннями з точністю до порядку $O\left(h^2\right)$.

5.1.5 Аналіз числових результатів

Приклад 5.1 Наведемо результати обчислень за описаною вище схемою для крайової задачі (5.2) з $\mu=1$, $\beta=1000$, $\sigma=1$, $f=1000$ на сітці $N=50$.

На рис. 5.1 зображено графіки наближеного розв’язку задачі (5.2), обчисленого з використанням класичних лінійних (пунктирна лінія) та експоненціальних (неперервна) апроксимацій МСЕ.

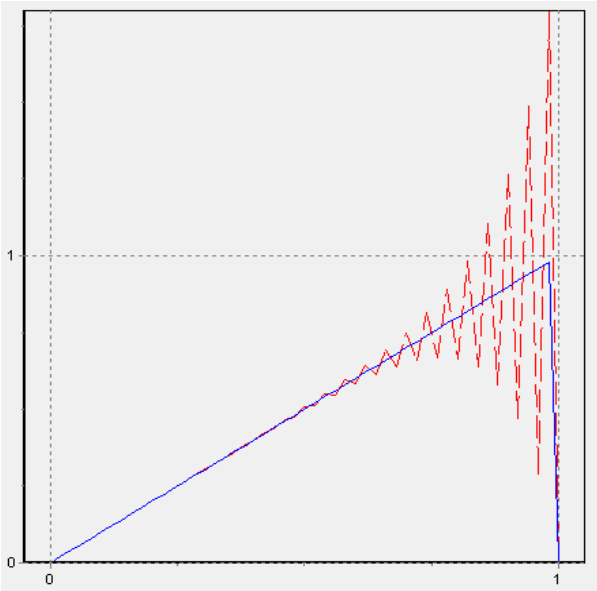


Рисунок 5.1 – Графіки апроксимацій МСЕ наближених розв’язків з $Pe = 1000$

Для випадку, коли відомо точний розв’язок, обчислення оцінок швидкості збіжності апроксимацій на сітці з кроком h будемо виконувати згідно з правилом

$$p_h = \log_2 \frac{\|u - v_h\|}{\|u - v_{h/2}\|}. \tag{5.28}$$

Якщо невідомий точний розв’язок задачі то апостеріорні оцінки швидкості збіжності обчислюватимемо за формулою

$$p_h = \log_2 \frac{\|v_{h/2} - v_h\|}{\|v_{h/2} - v_{h/4}\|}. \tag{5.29}$$

Тут через $\|.\|$ позначено норму у відповідному просторі; u – точний розв’язок задачі; v_h – апроксимація МСЕ, побудована на сітці з кроком h з використанням кусково-лінійних u_h або експоненціальних u_h^* апроксимацій.

Результати обчислення норм, похибок та швидкостей збіжності на послідовності рівномірно згущених сіток наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Апостеріорні оцінки похибки то швидкості збіжності в нормах $L^2(\Omega)$ та $H^1(\Omega)$

h	$\left\|u_h^*-u_{h/2}^*\right\|_{L^2(\Omega)}$	$\left\|u_h-u_{h/2}\right\|_{L^2(\Omega)}$	$\left\|u_h^*-u_{h/2}^*\right\|_{H^1(\Omega)}$	$\left\|u_h-u_{h/2}\right\|_{H^1(\Omega)}$
1/10	0,034991	2,328989	4,997629	56,379070
1/20	0,017316	0,543046	3,533813	27,245191
1/40	0,008476	0,215525	2,498758	18,956408
1/80	0,004042	0,099427	1,763482	18,633575
1/160	0,001748	0,041791	1,195639	12,748767
1/320	0,000600	0,013736	0,714128	7,865570
	$p_{1/80}=1{,}20$ $p_{1/320}=1{,}83$	$p_{1/80}=1{,}25$ $p_{1/320}=1{,}91$	$p_{1/80}=0{,}56$ $p_{1/320}=0{,}91$	$p_{1/80}=0{,}54$ $p_{1/320}=0{,}59$

З наведених результатів видно, що зі згущенням сітки порядки швидкостей збіжності експоненціальних апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин що передбачені теоретичним аналізом похибок. Наголосимо, що норми похибок наближеного розв'язку в просторі $H^1(\Omega)$ для лінійних апроксимацій приблизно на порядок вищі, ніж відповідні норми для експоненціальних. Крім цього, наближення, знайдене з використанням експоненціальних базисних функцій, не демонструє нефізичних осциляцій, що, відповідно, гарантує високу точність наближення у вузлах сітки, навіть коли крок h достатньо великий.

Приклад 5.2 Проаналізуємо результати застосування схеми (5.26) для знаходження розв'язку задач зі змінними коефіцієнтами. Розглянемо таку задачу [108]:

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u=u(x) \textit{ таку, що} \\ Lu := -\{\mu u'\}' + \left((1+2x)u\right)' = f \quad \textit{в } \Omega := (0,1); \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases}$$

де

$$f(x) = 6x^2 + 2x - 2\mu + 2d;$$
$$d = \frac{e^{-2/\mu}}{1 - e^{-2/\mu}};$$
$$\mu = 0.01,$$

тоді точний розв’язок задачі виражений аналітично:

$$u(x) = x^2 + d - (d+1)e^{\frac{x^2+x-2}{\mu}}.$$

На рис. 5.2 зображено графіки експоненціальної та лінійної апроксимацій, знайдених на сітці з кроком $h = 0,05$, а також графік точного розв’язку задачі.

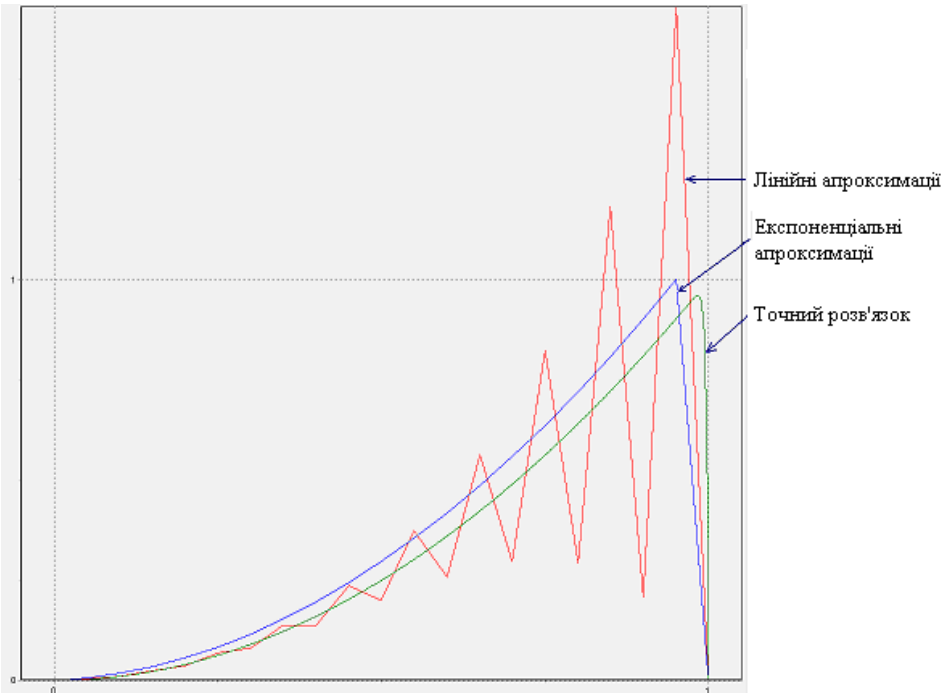


Рисунок 5.2 – Графіки апроксимацій і точного розв’язку

Приймемо $h = 0,1$ і, зменшуючи крок сітки вдвічі, знайдемо похибки апроксимацій на послідовності поділів T_h, $h = 0,1,\ 0,05,\ 0,025,\ 0,0125$ у нормах $L^2(\Omega)$ та $H^1(\Omega)$. Тоді можемо визначити оцінки порядків збіжності за формулою (5.28). В табл. 5.2 наведено результати цих обчислень.

Наявність точного розв’язку дає змогу детальніше проаналізувати обидві апроксимації. З наведених числових результатів знову можна зробити висновок, що застосування експоненціальних апроксимацій дає значно вищу точність наближень порівняно з лінійними, фактично за однакових обчислювальних зусиль.

Таблиця 5.2 – Норми похибок та оцінки швидкості збіжності в нормах $L^2(\Omega)$ і $H^1(\Omega)$

h	$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	$\|u-u_h^*\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u-u_h^*\|_{H^1(\Omega)}$
1/10	0,640654	4,628176	0,118451	2,556230
1/20	0,257937	3,720938	0,054511	1,217363
1/40	0,104435	4,162148	0,022120	0,524739
1/80	0,033356	3,676590	0,007325	0,189835
1/160	0,008334	1,992020	0,002039	0,056907
1/320	0,002122	0,594423	0,000526	0,015196
	$p_{1/10}=1{,}31$ $p_{1/40}=1{,}65$ $p_{1/160}=1{,}97$	$p_{1/10}=0{,}31$ $p_{1/40}=0{,}17$ $p_{1/160}=1{,}74$	$p_{1/10}=1{,}12$ $p_{1/40}=1{,}59$ $p_{1/160}=1{,}95$	$p_{1/10}=1{,}07$ $p_{1/40}=1{,}47$ $p_{1/160}=1{,}90$

5.2 Експоненціальна дискретизація задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Поряд із успіхами в розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь значно менше здобутків можна відзначити у розвитку схем для початково-крайових задач з рівняннями параболічного чи гіперболічного типів [116]. Конструювання схем інтегрування еволюційних задач є досить складною

проблемою, оскільки напівдискретизовані рівняння, як правило, належать до класу жорстких (або, в іншій термінології, сингулярно збурених) систем звичайних диференціальних рівнянь. Питання стійкості в цих набувають першочергової ваги. Детальний аналіз стосовно стійкості і збіжності експоненціальних схем дискретизації звичайних диференціальних рівнянь викладено в роботі [104]. З остатніми здобутками в цьому напрямку можна ознайомитися в працях [117-120].

Беручи цитовані праці за основу, ми пропонуємо тут однокрокові рекурентні схеми інтегрування задач Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Схеми будуємо з допомогою процедури Петрова-Гальоркіна із застосуванням експоненціальних наближень.

5.2.1 Інтегрування задачі Коші

Для наочності викладу ми обмежимося задачею Коші для звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} &u'(t)+\sigma u(t)=f(t) \qquad \forall t\in(0,T],\\ &u(0)=u_0, \end{aligned} \tag{5.30}$$

де $f(t)$ – відома функція, а $\sigma = const > 0$. Ми вибираємо рівняння задачі Коші дуже простим для того, щоб не загромаджувати (другорядними) деталями основні положення пропонованого нами способу її числового інтегрування. Нижче також будуть розглянуті деякі випадки рівнянь ускладненої структури.

Вважатимемо дані задачі Коші (5.30) такими, що гарантують існування її єдиного стійкого розв'язку $u = u(t)$.

Поділимо відрізок $[0,T]$ на частини $K_{m+1/2} = (t_m, t_{m+1})$, довжини $\Delta t_{m+1/2} = t_{m+1} - t_m > 0, m = \overline{0,N}$. Тут і далі дробовим індексом ми відзначаємо

номер інтервалу і певні його характеристики, скажімо, $t_{m+1/2} = \frac{1}{2}(t_{m+1} + t_m)$ – це центр ваги інтервалу $K_{m+1/2}$. Подібним чином, $g_{m+1/2} \equiv \{g(t)\}_{m+1/2} = g(t_{m+1/2})$. З метою спрощення записів ми припускаємо , що $\Delta t_{m+1/2} \equiv \Delta t = const > 0$.

Помножимо праву та ліву частини рівняння задачі (5.30) на тестову функцію $v(t) = e^{\sigma(t-t_m)}$ і проінтегруємо результат на проміжку (t_m, t_{m+1}). Після застосування тотожності

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma t}\{u'(t) + \sigma u(t)\}dt = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \{e^{\sigma t}u(t)\}' dt = e^{\sigma t_{m+1}}u(t_{m+1}) - e^{\sigma t_m}u(t_m) \qquad (5.31)$$

отримаємо правило послідовного визначення вузлових значень розв'язку задачі Коші

$$u(t_{m+1}) = e^{-\sigma\Delta t}\left[u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_m)} f(t)dt\right], \quad m = \overline{0, N-1}. \qquad (5.32)$$

Нарешті, після введення позначення

$$\lambda = \sigma\Delta t \qquad (5.33)$$

і заміни змінної $t = t(\tau) = t_m + \Delta t\tau \quad \forall\tau \in [0,1]$ під знаком інтеграла надамо рівнянню (5.32) зручного для обчислень вигляду

$$u(t_{m+1}) = e^{-\lambda}\left\{u(t_m) + \Delta t\int_0^1 e^{\lambda\tau} f(t_m + \Delta t\tau)d\tau\right\}, \quad \overline{m = 0, N-1}. \qquad (5.34)$$

Зауважимо, що проведені тут викладки є справедливі і для більш загального випадку, коли коефіцієнт σ є функцією з простору $L^1(0,T)$. Справді, якщо за тестову функцію вжитої нами процедури Петрова-Гальоркіна взяти

$$v(t) := \exp\left\{\int_{t_m}^{t} \sigma(\tau)d\tau\right\}, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}), \qquad (5.35)$$

то замість рівняння (5.32) одержимо

$$u(t_{m+1}) = e^{-\lambda(t_{m+1})}\left\{u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\lambda(t)} f(t)dt\right\}, \quad m = \overline{0, N-1}. \tag{5.36}$$

Тут функція $\lambda = \lambda(t)$ має таку кусково визначену структуру

$$\lambda(t) = \int_{t_m}^{t} \sigma(\tau)\, d\tau, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}), \; m = \overline{0, N-1}. \tag{5.37}$$

Отже, одержані нами проекційні рівняння (5.32) та (5.36) надають принципову можливість рекурентного покрокового обчислення точних значень розв'язку задачі Коші у вузлах вибраної сітки, за умови, що ми здатні точно обчислити інтеграли в їхніх правих частинах. Підсумуємо результати у вигляді такого твердження.

Лема 5.3 Розглянемо задачу Коші (5.30), в диференціальному рівнянні якої явно визначено структуру його молодшого члена з множником $\sigma = \sigma(t)$ і $\sigma \in L^1(0,T)$. Тоді проекційні рівняння (5.36) разом із означенням (5.37) подають правила послідовного обчислення точних значень шуканого розв'язку у вузлах поділу $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^{N}, t_{m+1} > t_m$.

5.2.2 Попередній аналіз однокрокових рекурентних схем

Лема дозволяє будувати схеми чисельного інтегрування задач Коші (5.30) в такий спосіб. Зафіксуємо певний поділ $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^{N}, t_{m+1} > t_m$, проміжку інтегрування і виберемо (наприклад, кусково визначені) апроксимації $f_{\Delta t}(t), \sigma_{\Delta t}(t)$ для функцій $f(t)$ та $\sigma(t)$. Підставивши їх до (5.36) і (5.37) одержимо однокрокову рекурентну схему відшукання апроксимації $u_{\Delta t}(t)$, вузлові значення якої задовольняють рівняння

$$u_{\Delta t}(t_{m+1}) = \exp\{-\lambda_{\Delta t}(t_{m+1})\}\left[u_{\Delta t}(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \exp\{\lambda_{\Delta t}(t)\} f_{\Delta t}(t)dt\right],$$
$$\lambda_{\Delta t}(t) := \int_{t_m}^{t} \sigma_{\Delta t}(\tau)d\tau, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}),\ m = \overline{0, N-1}, \tag{5.38}$$

Щойно окреслений клас однокрокових рекурентних схем будемо називати *експоненціальними ОРС (ЕОРС)*, підкреслюючи цим їхню визначальну характеристику.

Розглянемо простий приклад задачі із $\sigma = const$ і $f(t) \equiv 0$. Тоді схема (5.38) обчислює вузлові значення вигляду

$$u_{\Delta t}(t_{m+1}) = e^{-\sigma\Delta t} u_{\Delta t}(t_m) = e^{-\sigma\Delta t}\left[e^{-\sigma\Delta t} u(t_{m-1})\right] = \cdots$$
$$= e^{-\sigma(m+1)\Delta t} u(t_0) = u_0 e^{-\sigma t_{m+1}},\ m = \overline{0, N-1}. \tag{5.39}$$

Оскільки схема (5.38) побудована шляхом виділення повного диференціалу вихідного диференціального рівняння, то, як і слід було очікувати, значення точного розв'язку задачі Коші співпадають із розв'язком експоненціальної ОРС у вузлах вибраного нами поділу, $u(t_m) = u_{\Delta t}(t_m)$.

Водночас для задачі Коші розглянемо класичну ОРС Кранка-Ніколсона [121], яка будує кусково-лінійну апроксимацію $u_{\Delta t}(t)$ таку, що її вузлові значення $u_m = u_{\Delta t}(t_m)$ задовольняють рівняння

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t} + \sigma \frac{u_{m+1} + u_m}{2} = 0, \quad m = \overline{0, N-1}. \tag{5.40}$$

Звідси маємо

$$u_{m+1} = u_0 \left\{1 - \frac{2\sigma\Delta t}{2 + \sigma\Delta t}\right\}^{m+1}, \quad m = \overline{0, N-1}. \tag{5.41}$$

Легко переконатися, що

$$\lim_{\Delta t \to 0} u_{m+1} = u_0 \exp\{-\sigma t_{m+1}\}, \quad m = \overline{0, N-1}. \tag{5.42}$$

Хоча схема Кранка-Ніколсона дає точні результати лише у граничному випадку, можна довести, що її похибка характеризується оцінкою

$$|u(t_m)-u_m| \le \frac{T}{64\sigma}\|u\|_{C^3(0,T)}\Delta t^2, \quad m=\overline{0,N-1}, \tag{5.43}$$

яка, зокрема, показує, що дана схема досягає оптимальної швидкості збіжності.

5.2.3 ОРС з кусково постійною апроксимацією правої частини

Найпростіший із можливих випадків апроксимації правої частини у рівнянні задачі Коші (5.30) одержимо на основі кусково постійних розвинень Тейлора

$$f(t)=f(t_{m+1/2})+\mathcal{T}(\Delta t), \quad \forall t\in[t_m,t_{m+1}], \quad m=\overline{0,N-1}. \tag{5.44}$$

Нехтуючи величинами порядку $\mathcal{T}(\Delta t)$ у функції $f=f(t)$ під знаком інтеграла в проекційному рівнянні (5.32), ми апроксимуємо цей інтеграл таким чином

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_{m+1})}f(t)dt \cong f(t_{m+1/2})\int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_{m+1})}dt=\frac{1-e^{-\sigma\Delta t}}{\sigma}f(t_{m+1/2}). \tag{5.45}$$

У такий спосіб знайдемо експоненціальну однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування задачі Коші вигляду: задано $u_0\in\mathsf{R}$, знайти $u_{m+1}\in\mathsf{R}$ такі, що

$$u_{m+1}=e^{-\sigma\Delta t}u_m+\frac{1-e^{-\sigma\Delta t}}{\sigma}f(t_{m+1/2}), \quad m=\overline{0,N-1}. \tag{5.46}$$

5.2.3.1 Порівняння із відомими ОРС інтегрування задач Коші

Додамо і віднімемо u_m у лівій частині рівняння схеми (5.46) і після незначних перетворень подамо його у вигляді різницевої схеми

$$\frac{\sigma\Delta t}{2}\left[\frac{1+e^{-\sigma\Delta t}}{1-e^{-\sigma\Delta t}}\right]\dot{u}_{m+1/2}+\sigma u_{m+1/2}=f(t_{m+1/2}),\quad m=\overline{0,N-1}. \tag{5.47}$$

Тут і далі ми вживаємо позначення

$$u_{m+1/2}=\frac{1}{2}(u_{m+1}+u_m),\ \dot{u}_{m+1/2}=\frac{u_{m+1}-u_m}{\Delta t},\ \rho(\sigma\Delta t)=\frac{\sigma\Delta t}{2}\left[\frac{1+e^{-\sigma\Delta t}}{1-e^{-\sigma\Delta t}}\right]. \tag{5.48}$$

Враховуючи розвинення для експоненти в степеневий ряд

$$e^{-\sigma\Delta t}=1+(-\sigma\Delta t)+\frac{(-\sigma\Delta t)^2}{2!}+\frac{(-\sigma\Delta t)^3}{3!}+\ldots, \tag{5.49}$$

для множника біля $\dot{u}_{m+1/2}$ отримаємо

$$\rho(\sigma\Delta t)=\frac{1-\frac{1}{2}(\sigma\Delta t)+\frac{1}{4}(\sigma\Delta t)^2-\frac{1}{12}(\sigma\Delta t)^3+\cdots}{1-\frac{1}{2}(\sigma\Delta t)+\frac{1}{6}(\sigma\Delta t)^2-\frac{1}{24}(\sigma\Delta t)^3+\cdots}. \tag{5.50}$$

Аналіз співвідношення (5.50) свідчить, що $\rho(\sigma\Delta t)\to 1$, якщо $\Delta t\to 0$.

Зауважимо, що за умови $\sigma\to 0$ побудоване нами рівняння (5.47) набуде вигляду добре відомої покращеної схеми Ейлера [122]

$$\dot{u}_{m+1/2}=f(t_{m+1/2}),\quad m=0,\ldots,N-1. \tag{5.51}$$

5.2.3.2 Стійкість ОРС

Для відшукання достатніх умов стійкості помножимо рівняння (5.47) на $u_{m+1/2}$ і після нескладних алгебричних перетворень надамо йому вигляду

$$\rho\frac{1}{2\Delta t}\left[u_{m+1}^2-u_m^2\right]+\sigma u_{m+1/2}^2=f(t_{m+1/2})u_{m+1/2},\ m=\overline{0,N-1}. \tag{5.52}$$

З огляду на оцінку

$$f(t_{m+1/2})u_{m+1/2}\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma}f^2(t_{m+1/2})+\sigma u_{m+1/2}^2\right] \tag{5.53}$$

перейдемо від цих рівнянь до нерівностей вигляду

$$\rho\left[u_{m+1}^2-u_m^2\right]+\sigma\Delta t u_{m+1/2}^2\le\frac{\Delta t}{\sigma}f^2(t_{m+1/2}),\quad m=\overline{0,N-1}. \tag{5.54}$$

Додавши перші n+1 рівнянь, знаходимо бажану оцінку

$$\rho u_{n+1}^2+\sum_{m=0}^{n}\sigma u_{m+1/2}^2\Delta t\le\rho u_0^2+\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\sigma}f^2(t_{m+1/2})\Delta t,\quad n=\overline{0,N-1}, \tag{5.55}$$

яка показує, що виконання умови

$$\rho=\rho(\sigma\Delta t)=\frac{\sigma\Delta t}{2}\left[\frac{1+e^{-\sigma\Delta t}}{1-e^{-\sigma\Delta t}}\right]\ge 0 \tag{5.56}$$

гарантує стійкість однокрокової рекурентної схеми (5.46). За допущенням $\sigma>0$, тому умова (5.56) виконується незалежно від вибору величини кроку інтегрування, чим засвідчує безумовну стійкість розглядуваного способу інтегрування задачі Коші.

Запишемо також формули для верхніх меж біжучих вузлових та інтегральної характеристик знайденої апроксимації

$$\begin{cases}|u_{n+1}|\le\left\{u_0^2+\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\dfrac{1}{\sigma}f^2(t_{m+1/2})\Delta t\right\}^{\frac{1}{2}},\quad n=\overline{0,N-1};\\ \left\|u_{\Delta t}\right\|_0:=\left\{\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1}\sigma u_{m+1/2}^2\Delta t\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\rho u_0^2+\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1}\dfrac{1}{\sigma}f^2(t_{m+1/2})\Delta t\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{5.57}$$

5.2.3.3 Апріорні оцінки збіжності

Оцінимо похибку апроксимації

$$e_m:=u_m-u(t_m)m=\overline{0,N-1}. \tag{5.58}$$

Віднімаючи в обох частинах рівняння (5.47) належним чином вибрані лінійні комбінації значень точного розв'язку $u(t_m)$ та $u(t_{m+1})$, надамо цьому

рівнянню такого вигляду

$$\rho\dot{e}_{m+1/2} + \sigma e_{m+1/2} = R_{m+1/2}, \quad m = \overline{0, N-1}, \tag{5.59}$$

де

$$R_{m+1/2} = f(t_{m+1/2}) - \rho\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} - \sigma\frac{u(t_{m+1}) + u(t_m)}{2}. \tag{5.60}$$

Припустимо тепер, що для $u(t_{m+1})$ та $u(t_m)$ можна записати такі розвинення

$$\begin{cases} u(t_{m+1}) = \left\{ u + \frac{1}{1!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u' + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u'' + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u''' + \cdots \right\}_{m+1/2}, \\ u(t_m) = \left\{ u - \frac{1}{1!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u' + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u'' - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u''' + \cdots \right\}_{m+1/2}. \end{cases} \tag{5.61}$$

Звідси безпосередньо обчислюємо, що

$$\begin{cases} \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = \left\{ u' + \frac{1}{3}\frac{\Delta t^2}{8}u''' + \mathcal{O}[(\Delta t)^4] \right\}_{m+1/2}, \\ \frac{u(t_{m+1}) + u(t_m)}{2} = \left\{ u + \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{4}u'' + \mathcal{O}[(\Delta t)^4] \right\}_{m+1/2}. \end{cases} \tag{5.62}$$

З виразів (5.62) та (5.60) одержимо

$$\begin{aligned} R_{m+1/2} &= \{f - \rho u' - \sigma u\}_{m+1/2} + \\ &+ (1-\rho)u'(t_{m+1/2}) - \frac{\Delta t^2}{8}\left\{\frac{1}{2}\rho u''' + \frac{1}{2}\sigma u''\right\}_{m+1/2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4]. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Враховуючи рівняння задачі Коші і порядки малості його доданків, співвідношення (5.63) набуде вигляду

$$R_{m+1/2} \cong (1-\rho)u'(t_{m+1/2}) - \frac{\Delta t^2}{8}\left\{\frac{1}{2}\rho u''' + \frac{1}{2}\sigma u''\right\}_{m+1/2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4]. \tag{5.64}$$

З огляду на подання (5.50), маємо

$$1-\rho = 1-\frac{\sigma\Delta t}{2}\left[\frac{1+e^{-\sigma\Delta t}}{1-e^{-\sigma\Delta t}}\right] = -\frac{1}{12}\left(\sigma\Delta t\right)^2 \frac{1-\dfrac{\sigma\Delta t}{2}+\ldots}{1-\dfrac{\sigma\Delta t}{2}+\ldots} = \mathcal{O}[(\sigma\Delta t)^2]. \qquad (5.65)$$

Тепер, щоб одержати остаточні оцінки для похибки апроксимації, в рівнянні (5.55) достатньо замінити символи u і f на e і R відповідно.

Теорема 5.1 На поділі $\mathcal{O}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^{N}$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, $\Delta t = \max\limits_{0\le m\le N-1}\left(t_{m+1}-t_m\right) > 0$, експоненціальна однокрокова рекурентна схема (5.46) для задачі Коші (5.30) є:

- безумовно (від вибору величини Δt) стійкою в нормах (5.57);
- такою, що послідовність апроксимацій $u_{\Delta t} = \{u_m\}_{m=0}^{N}$ збігається до точних вузлових значень $\{u(t_m)\}_{m=0}^{N}$, до того ж, якщо $f \in C^3(0,T)$, то швидкість її збіжності характеризується оцінкою

$$\rho e_{n+1}^2 + \sum_{m=0}^{n}\sigma e_{m+1/2}^2 \Delta t \le \mathcal{O}\left\|u\right\|_{C^3(0,T)}^2 \sigma^2 \Delta t^4, \quad n = \overline{0, N-1}, \qquad (5.66)$$

де $\mathcal{O} = const > 0$.

5.2.4 Аналіз апроксимацій розв'язків модельних задач

Наведемо деякі результати обчислювального експерименту, мета якого полягає в підтвердженні передбаченого теорією характеру збіжності наближених розв'язків схеми ОРС та порівнянні апроксимації за побудованою схемою з апроксимаціями, знайденими за методом Кранка-Ніколсона.

За показники якості обчислених апроксимацій $u_{\Delta t}(t)$ було обрано такі характеристики:

- середнє значення похибки апроксимації у вузлах сітки

$$E_{\Delta t} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N} \left[u(t_m) - u_{\Delta t}(t_m) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

- значення середньоквадратичної норми похибки

$$\left\| e_{\Delta t} \right\|_0 = \left\{ \int_0^T \left[u(t) - u_{\Delta t}(t) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}};$$

- середнє значення лишку диференціального рівняння на знайденій апроксимації у центрах ваг елементів сітки

$$r_{\Delta t} := \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[u'_{\Delta t}(t_{m+1/2}) + \sigma u_{\Delta t}(t_{m+1/2}) - f[t_{m+1/2}, u_{\Delta t}(t_{m+1/2})] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

- значення середньоквадратичної норми лишку диференціального рівняння

$$R_{\Delta t} = \left\{ \int_0^T \left[u'_{\Delta t}(t) + \sigma u_{\Delta t}(t) - f[t, u_{\Delta t}(t)] \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Вхідні дані модельної задачі було обрано такими: $u_0 = 200$, $\sigma = 70$, $T = 0{,}55$,

$$f(t) = e^{20t} + 1 + 170t - 28t^2 - 112t^3.$$

Результати виконаних обчислень містять табл. 5.3, 5.4 і рис. 5.3 та 5.4, на яких порівняно графіки знайдених апроксимацій $u_{\Delta t}(t)$ (суцільна лінія) та точних розв'язків (пунктирна лінія) на грубих поділах проміжку інтегрування.

Основна властивість експоненціальної схеми – відсутність осциляцій її апроксимацій на перших кроках обчислень. Не зважаючи на сингулярну збуреність розглядуваної задачі Коші, її розв’язок отриманий на основі запропонованої схеми, у вузлових точках співпадає з точним розв’язком. Похибка наближення у вузлових значеннях експоненціальної ОРС в найгіршому випадку на порядок менша, за похибку схеми Кранка-Ніколсона. Як свідчать табличні дані, обидві схеми за цим показником мають другий порядок збіжності відносно величини кроку інтегрування. Отже, у випадку швидкоплинних реакцій апроксимації експоненціальної схеми мають помітні переваги над класичними щодо у точності вузлових значень і якості наближень.

Таблиця 5.3 – Оцінки похибок експоненціальної апроксимації

N	$E_{\Delta t}$	$\|e_{\Delta t}\|_0$	$r_{\Delta t}$	$R_{\Delta t}$
5	66.8786	32.9703	3029.73	3045.54
10	12.9579	14.5031	1370.63	1500.
20	2.4438	5.0412	469.70	744.98
40	0.5192	1.4268	132.02	370.08
80	0.1201	0.3697	34.14	184.56

Таблиця 5.4 – Оцінки похибок схеми Кранка-Ніколсона

N	$E_{\Delta t}$	$\|e_{\Delta t}\|_0$	$r_{\Delta t}$	$R_{\Delta t}$
5	66.1285	55.9947	5995.23	4272.88
10	22.8150	18.1812	1796.71	1723.74
20	5.8334	5.2094	473.75	773.50
40	1.3449	1.3666	120.10	373.45
80	0.3214	0.3463	30.13	184.97

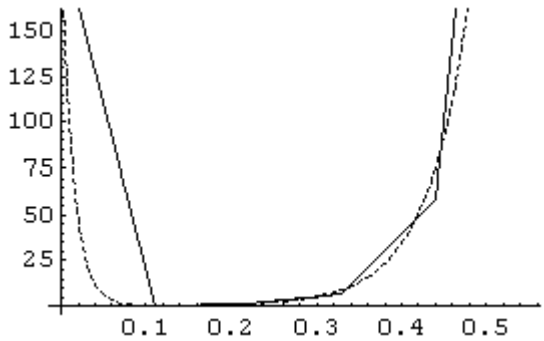


Рисунок 5.3 – Апроксимація отримана експоненціальною ОРС

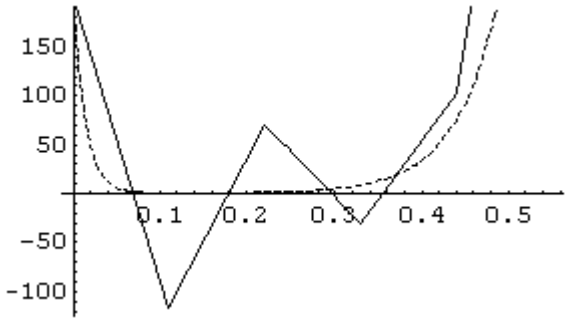


Рисунок 5.4 – Апроксимація отримана методом Кранка-Ніколсона

6 АДАПТИВНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

6.1 *h*-адаптивні схеми МСЕ для одновимірних крайових задач

Метод скінченних елементів (МСЕ) сьогодні є одним з найпоширеніших методів числового розв'язування крайових задач математичної фізики та механіки суцільного середовища [134, 136]. Його основи ґрунтуються на варіаційному формулюванні крайової задачі та дискретизації Рітца – Гальоркіна з використанням поліноміальних базисних функцій з локальними носіями, які врешті-решт приводять до рідко заповненої системи алгебричних рівнянь для відшукання значень розв'язку у вузлах вибраної сітки [136]. За останні десятиріччя фундамент методу зміцнений інструментарієм побудови ефективних апостеріорних оцінок похибок (АОП) знайдених апроксимацій [128–131, 133–136], який

- дає змогу локалізувати регіони області визначення шуканого розв'язку з підвищеним рівнем похибки, наприклад, примежові та внутрішні шари сингулярно збурених задач;
- створює можливості обчислювати наближені розв'язки крайових задач із наперед гарантованою точністю;
- дає надійні критерії для системи керування процесами місцевого згущення та/або розрідження сіток, вибору того чи іншого порядку поліноміальних базисних функцій тощо, забезпечуючи якщо не оптимальні, то раціональні умови використання комп'ютерних ресурсів у запланованих обчислювальних експериментах.

Огляд головних досягнень в побудові та застосування адаптивних схем МСЕ можна знайти в працях [127, 131, 132, 135], див. також [104, 124, 105].

Ми мали на меті побудувати АОП кусково-лінійних апроксимацій МСЕ

для розв'язків крайових задач з диференціальними рівняннями другого порядку. Властивості запропонованих АОП забезпечують можливості

- генерування сітки скінченних елементів, здатної у просторі кусково-лінійних апроксимацій відтворити структуру шуканого розв'язку з наперед заданою точністю;
- уточнення знайдених апроксимацій МСЕ в центрах ваг та розрахункових вузлах скінченних елементів на кожному кроці процесу розрідження – згущення сітки.

Ефективність розробленої схеми МСЕ проілюструємо числовими розв'язками сингулярно збурених крайових задач.

Основні результати цієї праці анонсовано в [123].

6.1.1 Формулювання крайової задачі

Розглянемо таку крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)\frac{du(x)}{dx} + \sigma(x)u(x) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega = (1,0) \tag{6.1}$$

і задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} u(0) = 0, \\ -\mu\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = \alpha\left[u(1) - \bar{u}\right]. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Тут $\mu = \mu(x), \beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ – задані функції; α, $\bar{u}$ – задані сталі з такими властивостями:

$$\alpha \geq 0,$$

$$\mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma(x) \geq 0 \tag{6.3}$$

майже скрізь в Ω,

$$\mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \tag{6.4}$$

Крайова задача (6.1), (6.2) має важливі застосування в екології, напівпровідниках, прогнозуванні епідемій тощо. З іншого боку, більшість реальних задач такого вигляду засвідчує, що вони є сингулярно збуреними, тобто містять малі коефіцієнти при старших похідних. Цю особливість структури задачі можна побачити [123, 104] після належної заміни незалежних змінних і введення знаних у механіці суцільного середовища критеріїв подібності Пекле і Струхаля

$$Pe := \frac{\|\beta\|_\infty \operatorname{diam} \Omega}{\mu_0}, \quad Sh := \frac{\|\sigma\|_\infty \operatorname{diam}^2 \Omega}{\mu_0} \equiv \frac{\|\sigma\|_\infty \operatorname{diam} \Omega}{\|\beta\|_\infty}.$$

Тоді після нескладних перетворень крайова задача (6.1), (6.2) набуде вигляду

$$\begin{cases} -\left(\mu_*(z)u'(z)\right)' + Pe\left[\beta_*(z)u'(z) + Sh\delta_*(z)u(z)\right] = f_*(z) \quad \forall z \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad -\mu_* u'\big|_{z=1} = \alpha_*\left[u(1) - \bar{u}\right], \end{cases}$$

де

$$\mu_*(z) := \frac{\mu(z)}{\mu_0}, \quad \beta_*(z) := \frac{\beta(z)}{\|\beta\|_\infty}, \quad \sigma_*(z) := \frac{\sigma(z)}{\|\sigma\|_\infty},$$

$$f_*(z) := \frac{\operatorname{diam}^2 \Omega}{\mu_0} f(z), \quad \alpha_* := \frac{\operatorname{diam} \Omega}{\mu_0} \alpha .$$

6.1.2 Варіаційне формулювання крайової задачі

Крайова задача (6.1), (6.2) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u \in V \textit{ таку, що} \\ c(u,v) = < l, v > \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{6.5}$$

з такими структурними елементами:

$$\begin{cases} V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}; \\ c(u,v) := \int\limits_0^1 \left(\mu\, u'v' + \beta\, u'v + \sigma\, uv\right) dx + \alpha\, u(1)v(1), \\ < l, v > := \int\limits_0^1 fv dx + \alpha\, \bar{u}v(1) \qquad \forall u, v \in V. \end{cases} \tag{6.6}$$

З огляду на теорему Лакса–Мільграма–Вишика можна переконатися, що варіаційна задача (6.5) коректно сформульована, якщо її дані задовольняють такі умови:

1) регулярності і знаковизначеності (6.3), (6.4);
2) $\sigma - \frac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (0,1), \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta(1) \geq 0.$ (6.7)

За цих умов *білінійна форма* $c(\,.\,,.\,) : V \times V \to R$ *варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій V норму (відому як енергетична норма задачі)*

$$|v|_V := \sqrt{c(v,v)} \qquad \forall v \in V. \tag{6.8}$$

Власне норму (6.8) ми будемо використовувати найчастіше.

6.1.3 Кусково-лінійні апроксимації

Зафіксуємо натуральне N і поділимо відрізок $[0,1]$ на скінченні елементи $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$ довжини $h_{i+\frac{1}{2}} := x_{i+1} - x_i$, $i = 0,..,N-1$ так, що $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо,

$x_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ – це центр ваги скінченного елемента $K_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$. На кожному з них виберемо лінійну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (6.5) у вигляді

$$u(x) \approx u_{i+\frac{1}{2}}(x) := q_i[1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)] + q_{i+1}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_i + h_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x)\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$= q_{i+\frac{1}{2}} + [\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}]h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}; \tag{6.9}$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) := \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad i = 0,...,N-1.$$

Тут ми скористалися позначеннями

$$\begin{cases} q_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(q_{i+1} + q_i); \\ \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(q_{i+1} - q_i) \end{cases} \tag{6.10}$$

для величин, які характеризують середнє значення апроксимації $u_h(x)$ та швидкості її зміни на скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$.

На доповнення до (6.9) зазначимо, що

$$u'(x) \approx u'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0,...,N-1. \tag{6.11}$$

Врешті-решт, враховуючи головні крайові умови варіаційної задачі, одержимо, що

$$q_0 = 0, \tag{6.12}$$

і запишемо кусково-лінійну апроксимацію $u_h(x)$ у такий спосіб

$$u_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ q_i\,[1-\omega_{i+\frac{1}{2}}(x)] + q_{i+1}\,\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \right\} = \\ = \sum_{n=1}^{N} q_n \varphi_n(x) \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{6.13}$$

В останній сумі ми явно виражаємо апроксимацію МСЕ як лінійну комбінацію кусково-визначених базисних функцій Куранта

$$\varphi_n := \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{n-1}]\,; \\ \omega_{n-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{n-1}, x_n]; \\ 1-\omega_{n+\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_n, x_{n+1}]; \\ 0, & x \in (x_{n+1}, 1]. \end{cases} \quad n = 1,\ldots,N \tag{6.14}$$

Власне ця система функцій і формує базис вибраного нами простору апроксимацій V_h, відображаючи, що $\dim V_h = N$.

6.1.4 Обчислення на скінченному елементі

Для виконання різноманітних обчислень на скінченних елементах нам потрібні складові варіаційного рівняння вигляду

$$\begin{cases} c_{i+\frac{1}{2}}(u,v) := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \{pu'v' + bu'v + \sigma uv\}dx + \alpha\, u(1)v(1)\delta_{N\ i+1}, \\ < l_{i+\frac{1}{2}}, v > := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} fvdx + \alpha\,\overline{u}\,\delta_{N\ i+1}, \qquad \mathrm{i} = 0,\ldots,\mathrm{N}\text{-}1 \ . \end{cases} \tag{6.15}$$

Щоб результати обчислень були наочними і допускали прозору інтерпретацію, виконуватимемо інтегрування в (6.15) наближено із використанням теореми про середнє в такий спосіб:

$$\begin{cases} c_{i+\frac{1}{2}}(u,v) := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\}dx + \alpha u(1)v(1)\delta_{N\ i+1} \cong \\ \qquad \cong \mu_{i+\frac{1}{2}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u'v'dx + \beta_{i+\frac{1}{2}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u'vdx + \sigma_{i+\frac{1}{2}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} uvdx + \alpha u(1)v(1)\delta_{N\ i+1}, \\ < l_{i+\frac{1}{2}}, v > := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} fvdx + \alpha u(1)\overline{u}\delta_{N\ i+1} \cong f_{i+\frac{1}{2}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} vdx + \alpha u(1)\overline{u}\delta_{N\ i+1}, i = 0\ ,..., N-1. \end{cases} \tag{6.16}$$

де

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} := \mu(x_{i+\frac{1}{2}}),\ \ \beta_{i+\frac{1}{2}} := \beta(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad \sigma_{i+\frac{1}{2}} := \sigma(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

Інтеграли, що залишилися, наприклад, у виразі (6.16) легко обчислити у випадку поліноміальних функцій u та v.

6.1.5 Дискретизовані рівняння

Тепер ми готові обчислити систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для відшукання коефіцієнтів його апроксимації (6.13).

Пропозиція 6.1 (про структуру рівнянь МСЕ)

Нехай апроксимацію розв’язку варіаційної задачі (6.5) шукаємо методом Гальоркіна у вигляді розвинення (6.13) за системою кусково-лінійних базисних функцій (6.14).

Тоді коефіцієнти $q_1, q_2, ..., q_N$ розвинення u_h обчислимо із системи лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$q_0 = 0, \tag{6.17}$$

$$\left\{\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(Sh-3\right)\right]\right\}_{i-\frac{1}{2}} q_{i-1} +$$

$$+\left\{\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(2Sh+3\right)\right]_{i-\frac{1}{2}}+\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(2Sh-3\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}\right\} q_i + \tag{6.18}$$

$$+\left\{\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(Sh+3\right)\right]\right\}_{i+\frac{1}{2}} q_{i+1} = \frac{1}{2}\left\{\left[hf\right]_{i-\frac{1}{2}}+\left[hf\right]_{i+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$i=1,\ldots,N-1,$$

$$\left\{\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(2Sh-3\right)\right]\right\}_{N-\frac{1}{2}} q_{N-1} +$$

$$+\left\{\frac{\mu}{h}\left[-1+\frac{1}{6}Pe\left(2Sh+3\right)\right]\right\}_{N-\frac{1}{2}} q_N + \alpha\, q_N = \frac{1}{2}\left[hf\right]_{N-\frac{1}{2}} \tag{6.19}$$

Тут використано позначення

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu}, \qquad Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu}$$

для локальних (сіткових) величин критеріїв подібності Пекле та Струхаля, відповідно.

Доведення. Підставимо лінійну комбінацію (6.13) в рівняння варіаційної задачі (6.5) і послідовно приймемо в ньому $v=\varphi_i$, $i=1,\ldots,N$. Після належних алгебричних обчислень із застосуванням наближень (6.16), (детальніше див. Шинкаренко–Голуб–Щербина [126]), отримаємо систему задекларованих лінійних алгебричних рівнянь.

Систему рівнянь вигляду (6.17)–(6.19) ми взяли за основу відшукання кусково-лінійних апроксимацій МСЕ на нерівномірних сітках.

6.1.6 Апостеріорний оцінювач похибок: Кусково-квадратична бабл-функція

Уведемо до розгляду бабл-функції вигляду

$$b(x) := 4[1-\omega_{i+\frac{1}{2}}(x)]\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,..., N. \tag{6.20}$$

З огляду на те, що

$$\begin{cases} (b,b)_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{8}{15} h_{i+\frac{1}{2}}, \\ (b',b')_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{3} h^{-1}_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, \dots, N \end{cases}$$

неважко переконатись, що

$$\begin{cases} c_{i+\frac{1}{2}}(b,b) = \{\dfrac{16}{3}\dfrac{\mu}{h} + \dfrac{8}{15}\sigma h\}_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{8}{15}\{\dfrac{\mu}{h}(10 + PeSh)\}_{i+\frac{1}{2}}, \\ < l_{i+\frac{1}{2}}, b >= \{hf\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0,...,N-1. \end{cases} \tag{6.21}$$

Будемо шукати наближення $\varepsilon_h \in E_h$ до істинної похибки апроксимації $e_h := u - u_h \in V \setminus V_h$ у вигляді лінійної комбінації (таке подання наближення до похибки засвідчує, що ми вибрали систему функцій $\{b_{i+\frac{1}{2}}(x)\}_{i=0}^{N-1}$ за базис підпростору E_h)

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) \tag{6.22}$$

з невідомими коефіцієнтами $\{\lambda_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N-1}$. Для їхнього знаходження скористаємося схемою Гальоркіна, яку застосуємо до задачі про похибку

$$\begin{cases} \text{задано } E_h \subset V \setminus V_h, \quad dim\, E_h = N, \\ \text{та апроксимацію Гальоркіна } u_h \in V_h; \\ \text{знайти похибку, } \varepsilon_h \in E_h \text{ таку, що} \\ c(\varepsilon_h, v) = <\rho(u_h, v), v> \quad \forall v \in E_h \end{cases} \tag{6.23}$$

Унаслідок природної ортогональності бабл-функцій, зумовленої тим, що $\operatorname{supp}\ b_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$, безпосередньо обчислюємо

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \varepsilon_h(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{<\rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b>}{c_{i+\frac{1}{2}}(b,b)}, \qquad i = 0, ..., N-1 \tag{6.24}$$

Нарешті, беручи до уваги (6.20) і те, що

$$<\rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b> = \frac{2}{3}\{h(f - \beta\dot{q} - \sigma q)\}_{i+\frac{1}{2}} + O(h^3), \tag{6.25}$$

наведемо остаточний вигляд знайденого наближення до похибки апроксимації Гальоркіна:

$$\begin{aligned} e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) &:= \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{<\rho_{i+\frac{1}{2}}(u_h), b>}{c_{i+\frac{1}{2}}(b,b)}\, b_{i+\frac{1}{2}}(x) = \\ &= \frac{5}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\frac{h^2}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) \qquad \forall x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) &= \frac{25}{16}\frac{8}{15}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\frac{h^2}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)}\right\}^2_{i+\frac{1}{2}} \left\{\frac{\mu}{h}(10 + PeSh)\right\}_{i+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\frac{h^3}{\mu}\frac{(f - \beta\,\dot{q} - \sigma\, q)^2}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Одержані тут результати сформулюємо у вигляді такого твердження

Пропозиція 6.2 (про кусково-квадратичний апостеріорний оцінювач похибки МСЕ)

Нехай $\mathrm{T}_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}$ – вибрана сітка скінченних елементів $K_{i+\frac{1}{2}} = \left[x_i, x_{i+1} \right]$, $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,...,N-1$, $h := \max h_{i+\frac{1}{2}}$, на якій для задачі (6.5) знайдено кусково-лінійну апроксимацію МСЕ вигляду

$$u_h(x) = q_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \quad \forall x \in K_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0,...,N-1. \tag{6.28}$$

Нехай на додаток до цього для оцінки якості знайденої апроксимації використовують оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x), \tag{6.29}$$

де

$$b(x) := 4[1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)]\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in \left[x_i, x_{i+1} \right] \quad i = 0,...,N-1.$$

Тоді будуть правильними такі рівності

(!) $$\lambda_{i+1} \equiv \varepsilon_h\left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \frac{5}{4} \left\{ \frac{h^2}{\mu} \frac{(f - \beta \dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}; \tag{6.30}$$

(!!) $$\left\| \varepsilon_h \right\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3}{\mu} \frac{(f - \beta\, \dot{q} - \sigma\, q)^2}{(10 + PeSh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \tag{6.31}$$

Тут використано позначення

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu}, \qquad Sh := \frac{h^2 \sigma}{\mu}$$

для локальних (сіткових) величин критеріїв подібності Пекле та Струхаля, відповідно.

Побудований апостеріорний оцінювач похибки формує інтелектуальну частину системи керування розподілом похибок апроксимацій МСЕ у процесі адаптування розрахункових сіток зі скінченних елементів.

6.1.7 Апостеріорний оцінювач похибок: кусково-лінійна бабл-функція

Подібні результати стосовно проектування апостеріорних оцінювачів похибок можна одержати, якщо на кожному скінченному елементі квадратичну бабл-функцію замінити кусково-лінійною. У цьому випадку одержимо такі результати.

Пропозиція 6.3 (про кусково-лінійний апостеріорний оцінювач похибки МСЕ)

Нехай $\mathrm{T}_h=\left\{K_{i+\frac{1}{2}}\right\}$ – вибрана сітка скінченних елементів $K_{i+\frac{1}{2}}=[x_i,x_{i+1}], h_{i+\frac{1}{2}}=x_{i+1}-x_i, i=0,\ldots,N-1, h:=\max h_{i+\frac{1}{2}}$ на якій для задачі (6.5) знайдено кусково-лінійну апроксимацію МСЕ вигляду

$$u_h(x)=q_{i+\frac{1}{2}}+h_{i+\frac{1}{2}}\,\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\right)\qquad \forall x\in K_{i+\frac{1}{2}},\quad i=0,\ldots,N-1. \tag{6.32}$$

Нехай на додаток до цього для оцінки якості апроксимації u_h використовують оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x)\approx\varepsilon_h(x):=\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_{i+\frac{1}{2}}b_{i+\frac{1}{2}}(x), \tag{6.33}$$

де

$$b(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i} \qquad \forall x \in \left[x_i, x_{i+\frac{1}{2}} \right],$$

$$b(x) := \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}} \qquad \forall x \in \left[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1} \right]. \qquad i = 0,\ldots,N-1$$

Тоді будуть правильними такі рівності

(!) $$\lambda_{i+1} \equiv \varepsilon_h\left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{2}\left\{ \frac{h^2}{\mu} \frac{\left[f - \sigma q - (\beta - \dot{\mu})\dot{q} \right]}{12 + Sh} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \tag{6.34}$$

(!!) $$\|\varepsilon_h\|_V^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \frac{3}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{ \frac{h^3}{\mu} \frac{[f - (\beta + \dot{\mu})\dot{q} - \sigma q]^2}{(12 + Sh)} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \tag{6.35}$$

Наведені результати побудови апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій МСЕ демонструють вдале використання потенційних можливостей його базисних функцій: для обчислення АОП ми знову застосовуємо систему кусково-лінійних функцій Куранта, але побудовану на вдвічі згущеній сітці. Ця властивість може бути особливо корисною у проектуванні адаптивних схем МСЕ для задач більшої вимірності, де ціна збереження однорідності обчислень незрівнянно вища порівняно з розглядуваним випадком. Стосовно використання можливостей АОП такого типу у двовимірних задачах див. [105].

6.1.8 Стратегія адаптування сітки

Виведені вище вирази для апостеріорних оцінювачів похибки на скінченному елементі ми використовували для побудови рекурсивного алгоритму адаптування розрахункової сітки в такий спосіб, щоб підсумкова апроксимація МСЕ була знайдена на кожному скінченному елементі з наперед гарантованою точністю.

Детальніше ми вибираємо за якість знайденої на сітці $T_h=\left\{K_{i+\frac{1}{2}}\right\}$ кусково-лінійної апроксимації u_h послідовність індикаторів

$$\eta_{i+\frac{1}{2}}=\frac{\left\|\varepsilon_h\right\|_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\left\|u_h\right\|^2_{j+\frac{1}{2}}+\left\|\varepsilon_h\right\|^2_{j+\frac{1}{2}}\right)}}100\% \\ =\frac{\sqrt{N}\left\|\varepsilon_h\right\|_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left\|u_h\right\|^2_V+\left\|\varepsilon_h\right\|^2_V}}100\%,\quad i=0,...,N-1. \tag{6.36}$$

Тут, зокрема,

$$\left\|u_h\right\|^2_{i+\frac{1}{2}}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[u_h^{'}(x)\right]^2dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\dot{q}^2_{i+\frac{1}{2}}dx=\left\{h\dot{q}^2\right\}_{i+\frac{1}{2}},\quad i=0,...,N-1. \tag{6.37}$$

Індикатори похибки (6.36) визначають, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв’язку на кожному скінченному елементі. Якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то цей скінченний елемент поділяють на два нові додаванням нового вузла сітки в його центр ваги. Коли ж індикатор похибки певного скінченного елемента не перевищує допустимого рівня, то такий елемент без змін входитиме до нової розрахункової сітки. Процес уточнення апроксимацій МСЕ завершується за умови, що під час перегляду біжучої сітки не відбулося поділу жодного з її скінченних елементів.

Отже, результатом нашої стратегії послідовного адаптування сіток і відповідного переформування та розв’язування систем рівнянь є апроксимація МСЕ знайдена на мінімально можливій сітці, що має рівномірний розподіл допустимих похибок між її елементами.

6.1.9 Аналіз числових результатів

Проілюструємо можливості запропонованої вище адаптивної схеми МСЕ результатами деяких обчислювальних експериментів. Усі обчислення виконано з застосуванням апостеріорного оцінювача похибки (6.31).

Приклад 6.1 За даних крайової задачі $\mu = 1$, $\beta = 100$, $\sigma = 0$, $f = 100$, $\alpha = 1000$, $\bar{u} = 0$ обирали початкову сітку – рівномірний поділ відрізка на $N_0 = 4$ скінченні елементи. Відшукували апроксимацію МСЕ з допустимим рівнем похибки $\eta = 10\%$. Точним розв'язком цієї крайової задачі є функція

$$u(x) = \frac{1001}{1100e^{100} - 1000} - \frac{1001}{1100e^{100} - 1000} e^{100x} + x,$$

графік якої на рис. 6.1 демонструє яскраво виражений примежовий шар в околі правого кінця своєї області визначення.

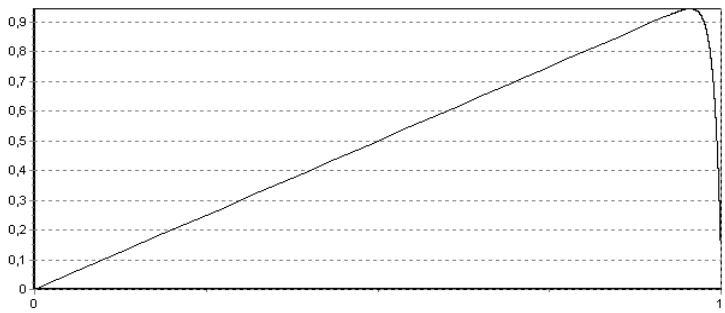


Рисунок 6.1 – Графік точного розв'язку. Примежовий шар в околі правого кінця відрізка, глобальне число Пекле $Pe_{gl} = 100$

Графік наближеного розв'язку, отриманий за дев'ять кроків адаптування сітки, показано на рис. 6.2. Після завершення цього рекурентного процесу можна зауважити, що кардинальне згущення сіток було локалізоване в околі примежового шару, оскільки саме там похибка апроксимацій МСЕ набувала найбільших значень. Загальний характер змін розрахункових сіток від кроку до кроку відображено на рис 6.3. Незважаючи на те, що в процесі адаптування

приріст загальної кількості скінченних елементів сповільнюється, H^1 – норма апостеріорного оцінювача похибки виразно демонструє квадратичну збіжність своїх значень до нуля (рис. 6.4). Цей факт засвідчує важливу властивість побудованого нами АОП – він здатний породжувати суперзбіжні послідовності кусково-лінійних апроксимацій МСЕ.

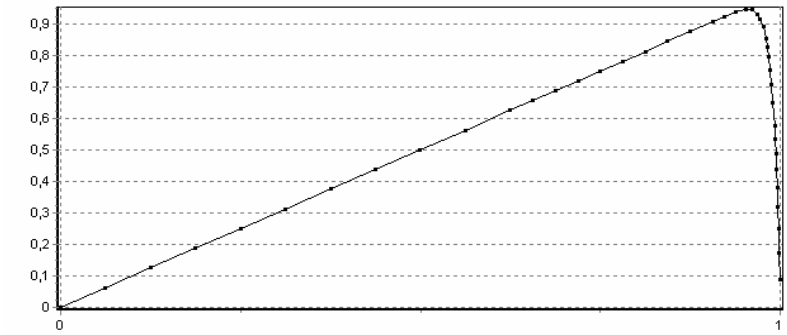


Рисунок 6.2 – Підсумкова апроксимація, обчислена за дев'ять кроків адаптування, починаючи із рівномірного поділу на чотири скінченні елементи, з η=10%. Крапками на графіку виділено значення апроксимації у вузлах остаточної сітки із 41-го елемента

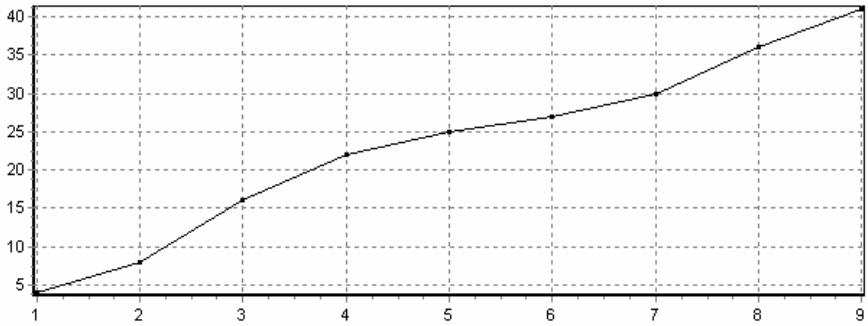


Рисунок 6.3 – Динаміка зростання кількості елементів сіток у процесі адаптування

Нарешті, розподіл значень індикаторів похибки на рис. 6.5 доводить, що в задачах з переважаючою конвекцією важко досягнути рівномірного розподілу

похибок між елементами сітки, оскільки їхній рівень у примежовому шарі на декілька порядків переважає похибки на решті елементів сітки. З іншого боку, цей розподіл похибки засвідчує, що знайдена нами сітка містить надлишок скінченних елементів поза околом примежового шару і, щоб стати оптимальною, повинна бути розріджена в певний спосіб саме в цьому регіоні.

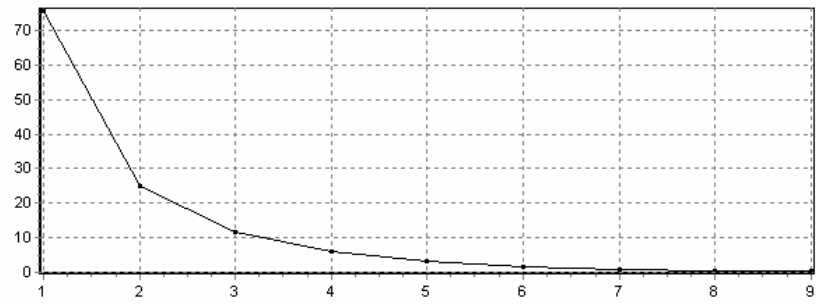


Рисунок 6.4 – Квадратичний характер покрокової збіжності норми апостерірного оцінювача похибки $\|\varepsilon_h\|_V$

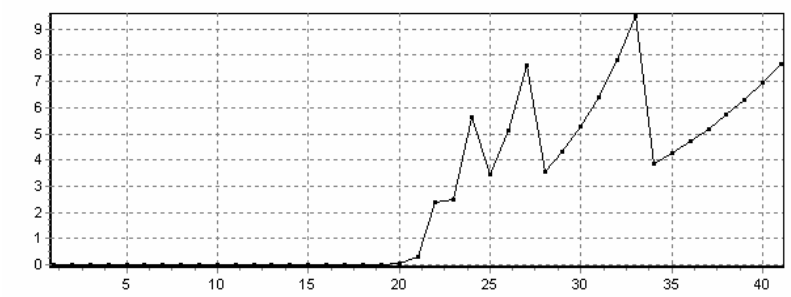


Рисунок 6.5 – Розподіл значень індикаторів якості підсумкової апроксимації між скінченними елементами остаточної сітки

Приклад 6.2 Щоб проаналізувати можливості побудованої $h-$адаптивної схеми МСЕ в задачах з переважаючими швидкостями реакцій, розглядали крайову задачу (6.1), (6.2) з такими даними μ=0.0025, β=0, σ=1, α=1000, $\bar{u}$=0,

$$f=\cos^2\pi x+0.005\pi^2\cos 2\pi x.$$

На рис. 6.6 зображено графік її точного розв’язку, який становить функція

$$u(x)=\cos^2\pi x\frac{\exp(-(1-x)/\sqrt{\mu})+\exp(-x/\sqrt{\mu})}{1+\exp(-1/\sqrt{\mu})}.$$

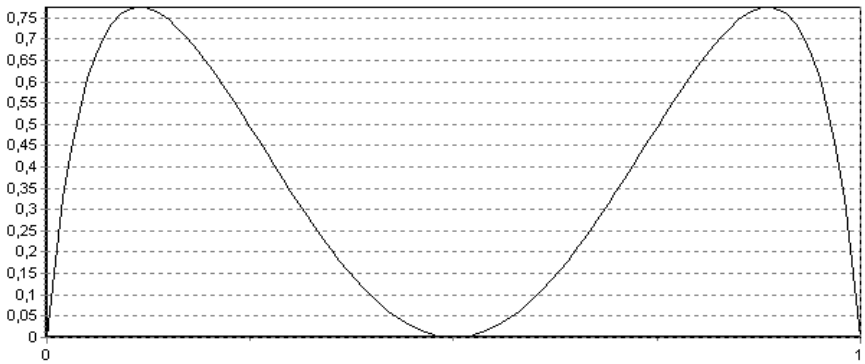


Рисунок 6.6 – Точний розв’язок крайової задачі. Глобальні числа Пекле $Pe_{gl}=0$ та Струхаля $Sh_{gl}=10^4$

На рис. 6.7 показано графік наближеного розв’язку, обчислений за шість кроків адаптування з допустимою похибкою $\eta=1\%$. Знову за стартову вибирали рівномірну сітку із чотирьох скінченних елементів. Рис. 6.8–6.10 зображають певні обчислювальні характерисуноктики процесу адаптування, серед яких треба назвати квадратичну швидкість збіжності знайдених апроксимацій МСЕ.

Якщо порівняти результати цього прикладу з попереднім, то можна побачити, що в розглядуваній задачі з великими швидкостями перебігу біохімічних реакцій запропонована $h-$адаптивна схема МСЕ за суттєво менших обчислювальних витрат відтворює структуру сингулярностей шуканого розв’язку навіть за десятиразового підвищення вимог до точності його апроксимації.

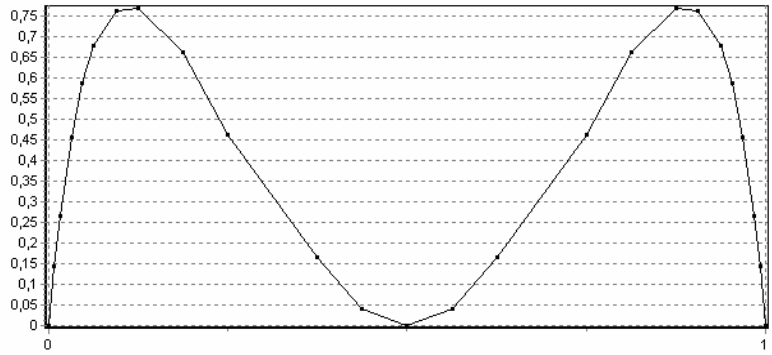


Рисунок 6.7 – Підсумкова апроксимація МСЕ з η=1%,N=24. Крапками показано її значення у вузлах знайденої сітки

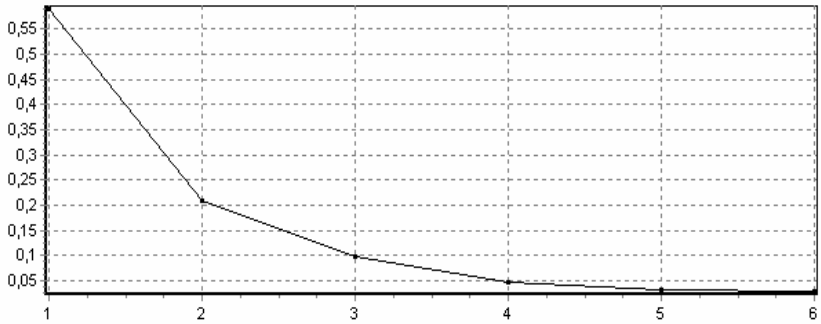


Рисунок 6.8 – Квадратичний характер збіжності норми апостерірного оцінювача похибки $\|\varepsilon_h\|_V$

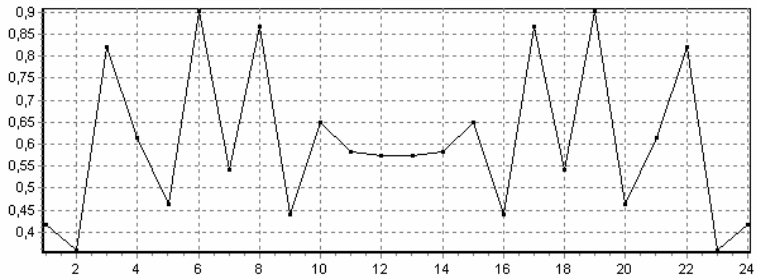


Рисунок 6.9 – Розподіл значень індикаторів якості підсумкової апроксимації поміж скінченними елементами остаточної сітки

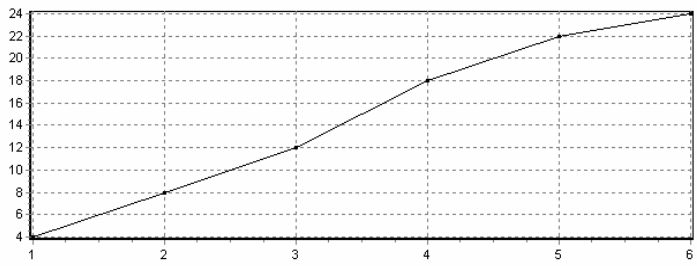


Рисунок 6.10 – Зміна кількості скінченних елементів сітки в процесі адаптування

6.2 *h*-адаптивні схеми МСЕ для двовимірних крайових задач

Розв’язування крайових задач для еліптичних рівнянь у частинних похідних за допомогою числових методів можна розглядати як певну технологію апроксимацій актуальної нескінченновимірної задачі деякою низкою скінченновимірних (дискретних) моделей. Якість одержаних апроксимацій у цьому разі суттєво залежить від вибору значень головних параметрів дискретизації – таких як густина і регулярність тріангуляції, порядок поліноміальних базисних функцій, стабілізувальні множники тощо. Одночасно з безпосереднім обчисленням наближеного розв’язку задачі можемо знайти і певні індикатори точності нашої дискретної моделі, подібні до локальних лишків вихідних рівнянь на скінченних елементах викорисуноктаного поділу. Як засвідчують досягнення останніх десятиліть [132], згадані лишки успішно слугують для створення надійних технологій дискретизації з викорисуноктанням концепції адаптивності та результатів теорії оптимального керування. Зокрема, власне цієї мети прагнуть досягнути *h*-адаптивні схеми методу скінченних елементів (МСЕ), які в межах заданої допустимої похибки намагаються відтворити стуктуру шуканого розв’язку завядки оптимізації скінченноелементної сітки, досягаючи рівномірного розподілу лишків між її елементами.

Цей підхід ініційований піонерськими працями Бабушки–Рейнболдта [141], розвинений далі Ладевезе–Леллоном [145], Бенком–Вейсером [142], Бабушкою–Мілллером [140] і Зенкевічем–Зу [146]. Праці Джонсона [144], а пізніше Беккера–Раннагера [143] доповнили h-адаптивні схеми можливостями уточнення вибіркових характерисуноктик наближень аналізом спряжених варіаційних задач. Огляд головних результатів цього напряму є в Верфюрца [135], Айнсворса–Одена [127], Зенкевіча–Тейлора [136] та ін. [131, 132].

Для ілюстрації підходу розглянемо крайову задачу з диференціальним оператором еліптичного типу L і вільним членом f, яку описує рівняння

$$Lu = f \tag{6.38}$$

або відповідне варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти } u \in V \textit{ такий що} \\ c(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{6.39}$$

Нехай дискретна модель цієї задачі залежить від параметра дискретизації $h > 0$ і має вигляд

$$L_h u_h = f_h, \tag{6.40}$$

або, відповідно,

$$\begin{cases} \textit{знайти } u_h \in V_h \subset V, \dim V_h < \infty, \textit{такий що} \\ c_h(u_h, v) = \langle l_h, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{6.41}$$

Наш аналіз похибки дискретизації $e := u - u_h$ засновано на дослідженні властивостей лишку вихідного рівняння

$$\rho(u_h) = f - Lu_h. \tag{6.42}$$

Зазначимо, що цю характеристику якості дискретної моделі ефективно обчислювати за знайденим наближеним розв’язком u_h у контексті МСЕ. З огляду на цю обставину на уважніше вивчення заслуговує варіаційна задача про

похибку апроксимацій МСЕ:

$$\begin{cases} \textit{задано лишок } \rho(u_h) \\ \textit{знайти похибку } e = u - u_h \textit{ таку що} \\ c(e,v) = \langle \rho(u_h), v \rangle := \langle l, v \rangle - c(u_h, v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{6.43}$$

У принципі можна дискретизувати також і задачу (6.43) та обчислити апроксимацію справжньої похибки e. Головне утруднення в реалізації полягає в тому, що вихідний простір апроксимацій V_h породжує лише тривіальний розв'язок $e^* = 0$. Тому для дискретизації задачі (6.43) потрібні скінченновимірні підпростори з доповнення ужитого простору апроксимацій

$$E := V \setminus V_h. \tag{6.44}$$

Ця умова ставить проблему проектування нової (відмінної від попередньої) числової схеми МСЕ, вартість обчислювальних витрат на яку повинні компенсувати додаткові можливості, більші, ніж лише оцінювання меж похибки. Наприклад, такою може бути здатність обчислення точкових значень похибки з наперед заданою точністю. Це завдання і є метою нашої праці.

6.2.1 Модельна задача

З метою наочності наших міркувань розглянемо крайову задачу для рівнянь конвекції–дифузії–реакції в обмеженій полігональній області $\Omega \subset R^2$ з однорідною умовою Діріхле на межі $\Gamma = \partial\Omega$, (деталі див. у [138]). Ця задача допускає варіаційне формулювання вигляду (6.39) з такими структурними елементами:

$$V \equiv H_0^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad v = 0 \textit{ на } \Gamma \right\}; \tag{6.45}$$

$$c(u,v) = \int_\Omega \left[\nabla v . (\mu \nabla u) + (\beta . \nabla u + \sigma u) v \right] dx; \tag{6.46}$$

$$\langle l,v\rangle \equiv (f,v)_{\Omega} := \int_{\Omega} fv dx \quad \forall u,v \in V . \tag{6.47}$$

Тут і далі ми вважаємо, що дані задачі (6.39) задовольняють умови теореми Лакса–Мільграма–Вишика, які гарантують існування єдиного розв'язку $u \in V$ задачі та обмеженість його норми в просторі Соболєва $H^1(\Omega)$ [138]. Принагідно зазначимо, що в цьому випадку білінійна форма $c(\cdot,\cdot): V \times V \to R$ породжує нову (енергетичну) норму

$$\|v\| := \sqrt{c(u,v)} \quad \forall v \in V , \tag{6.48}$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ простору $H^1(\Omega)$. З огляду на цей факт ми будемо систематично експлуатувати щойно введену норму (6.48).

6.2.2 Кусково-лінійні апроксимації

Виберемо довільний (можливо, досить грубий) поділ $\mathrm{T}_h = \{K\}$ області Ω на трикутні скінченні елементи K, $h_K := diam\, K$, $h := max\, h_K$. Взявши за простір апроксимації

$$V_h := \{v \in V \cap C(\Omega) : v|_K \in P_1(K) \quad \forall\, K \in \mathrm{T}_h\}, \tag{6.49}$$

шукатимемо розв'язок u_h дискретизованої задачі (6.41) у вигляді

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j \theta_j(x) \quad \forall x \in \Omega . \tag{6.50}$$

Тут $P_m(K)$ – простір усіх можливих поліномів з дійсними коефіцієнтами порядку $m \geq 0$, визначених на трикутнику $K \subset R^2$; N – кількість вершин A_j тріангуляції T_h, які не належать межі Γ, зокрема, $dim\, V_h = N$; $\theta_j(x)$ – відповідні вершинам A_j кусково-лінійні функції Куранта з властивостями

$$\theta_j\left(A_i\right) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{6.51}$$

$$\operatorname{supp}\theta_j := \left\{\overline{K} \in \mathrm{T}_h : A_i \in \overline{K}\right\}. \tag{6.52}$$

Такі функції на кожному трикутнику K зі свого носія описувані барицентричними координатами L_1, L_2, L_3 [138], які мають такі властивості:

$$\begin{cases} L_1\left(x,y\right) + L_2\left(x,y\right) + L_3\left(x,y\right) = 1 \quad \forall\left(x,y\right) \in K, \\ L_j\left(A_i\right) := \delta_{ij} \quad i,j = 1,2,3. \end{cases} \tag{6.53}$$

За цього вибору базису простору V_h коефіцієнти q_j лінійної комбінації (6.50) надають значення розв'язку МСЕ у внутрішніх вершинах тріангуляції T_h:

$$q_j \equiv u_h\left(A_j\right) \cong u\left(A_j\right), \quad j = 1,\ldots,N; \tag{6.54}$$

їх обчислюють розв'язуванням системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N} c\left(\theta_j,\theta_j\right) q_j = \left\langle l,\theta_i\right\rangle \quad i = 1,\ldots,N. \tag{6.55}$$

Оскільки задача (6.39) коректно сформульована, то ця властивість поширюється і на її дискретну модель (6.41), а отже, і на задачу (6.55).

Як тільки апроксимація $u_h\left(x\right) \in V_h$ знайдена, актуальним стає питання про її похибку

$$e := u - u_h \in E = V \setminus V_h. \tag{6.56}$$

Особливу увагу цьому приділяють у сингулярно збурених задачах, які виникають за умов домінування конвекції та/або біохімічних реакцій і спричиняють появу примежових та/або внутрішніх шарів у структурі їхніх розв'язків [106,138,139].

Нижче побудуємо апостеріорні оцінювачі похибки (6.56), обчислюючи їх

як наближені розв'язки задачі (6.42) у скінченновимірних підпросторах із простору E, наділених специфічною структурою базисів: вони і далі є кусково-лінійними функціями з локальними носіями, які визначають на допоміжних, густіших, тріангуляціях області Ω. Отже, ми намагаємось побудувати за класифікаєю Верфюрца [135] так звані ієрархічні апостеріорні оцінювачі похибок (АОП).

6.2.3 Простори апроксимацій для похибок

Щоб обійти труднощі відшукання похибки (6.56), ми побудуємо скінченновимірні підпростори E_h для наближеного розв'язування задачі (6.42), базиси яких наділені певними властивостями ортогональності, притаманні бабл-функціям.

Поряд із вжитою тріангуляцією T_h розглянемо нову, густішу тріангуляцію $\mathrm{T}_{\frac{h}{2}}$, утворену з кожного трикутника $K \in \mathrm{T}_h$ проведенням його медіан так, як показано на рис. 6.11 з трикутником $K := \Delta A_i A_j A_m$. Тут точка B_i – середина сторони l_i, яка лежить навпроти вершини A_i, C_K – центр ваги скінченного елемента K.

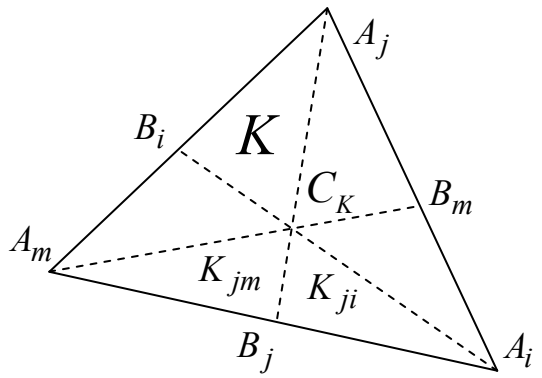


Рисунок 6.11 – Поділ трикутника тріангуляції

Тепер ми виділимо три види геометричних фігур, які використаємо нижче для побудови ієрархічного базису:

$$K_i := \Delta C_K A_j A_m ; \tag{6.57}$$

$$K_{ij} := \Delta C_K A_j B_i ; \tag{6.58}$$

$$K_{im} := \Delta C_K B_i A_m , \tag{6.59}$$

так що

$$K_i := K_{ij} \bigcup K_{im} ;$$

$$Q_i := K_{ji} \bigcup K_{mi} \equiv A_i B_m C_K B_j . \tag{6.60}$$

Решта потрібних трикутників і чотирикутників одержимо з (6.57)–(6.60) циклічним переставленням індексів i, j, m так що $i \to j \to m \to i$.

За допомогою введених складових (6.57)–(6.60) скінченного елемента $K \in \mathrm{T}_h$ ми можемо побудувати систему околів вузлів тріангуляції $\mathrm{T}_{\frac{h}{2}}$. Назвемо відкриту множину $\mathrm{O}(D)$ околом вузла D тріангуляції $\mathrm{T}_{\frac{h}{2}}$, якщо вона складається з об’єднання трикутників (6.57)–(6.59). Тоді

$$\mathrm{O}(C_K) := K \in T_h , \tag{6.61}$$

$$\mathrm{O}(B_i) := \left\{ K \in T_{\frac{h}{2}} : B_i \in \overline{K} \right\}, \tag{6.62}$$

$$\mathrm{O}(A_i) := \left\{ K \in T_{\frac{h}{2}} : A_i \in \overline{K} \right\} . \tag{6.63}$$

Тепер побудуємо нові кусково-лінійні базисні функції на $\mathrm{T}_{\frac{h}{2}}$, використовуючи барицентричні координати (6.53) трикутника K .

Лема 6.1 Нехай $C=\{C_K\}_{K\in T_h}$ – множина центрів ваг елементів тріангуляції T_h. Поставимо їй у відповідність систему кусково-лінійних функцій $\{b_K\}_{K\in T_h}$ у такий спосіб

$$\operatorname{supp} b_K := \mathrm{O}(C_K) \equiv K, \tag{6.64}$$

$$b_K := \begin{cases} 3L_i & на\ K_i \\ 3L_j & на\ K_j \\ 3L_m & на\ K_m \end{cases} \quad \forall K \in T_h, \tag{6.65}$$

і визначимо скінченновимірний підпростір E_h^c як лінійну оболонку сукупності цих функцій

$$E_h^C := \operatorname{span}\{b_K\}_{K\in T_h}, \tag{6.66}$$

тоді система $\{b_K\}_{K\in T_h}$ утворює ортогональний базис простору E_h^C.

Лема 6.2 Нехай $B=\{B_i\}$ множина центрів внутрішніх сторін l_i тріангуляції T_h. Поставимо їй у відповідність набір функцій $\{\beta_i\}$, визначений у такий спосіб:

$$\operatorname{supp} \beta_i := \mathrm{O}(B_i) \equiv \overline{K} \cup \overline{K'}, \tag{6.67}$$

$$\beta_i := \begin{cases} 2(L_j - L_i) & на\ K_{im} \subset K \\ 2(L_m - L_i) & на\ K_{ij} \subset K \end{cases} \quad \forall K \in T_h, \tag{6.68}$$

де трикутники $K, K' \in T_h$ такі, що $\overline{K} \cap \overline{K'} = l_i$. Введемо лінійну оболонку

$$E_h^B := \operatorname{span}\{\beta_i\}, \tag{6.69}$$

тоді система функцій $\{\beta_i\}_{K\in T_h}$ є ортогональним базисом підпростору E_h^B.

Лема 6.3 Нехай множина $A=\{A_i\}$ складена з набору внутрішніх вузлів тріангуляції T_h. Введемо лінійну оболонку

$$E_h^A := \operatorname{span}\{\pi_i\} \subset E, \tag{6.70}$$

де

$$\operatorname{supp} \pi_i := \mathrm{O}(A_i) \equiv \bigcup_{\substack{K \in T \\ A_i \in K}} \overline{Q_i}, \tag{6.71}$$

$$\pi_i := \begin{cases} L_i - L_j \quad на\ K_{im} \\ L_i - L_m \quad на\ K_{ji} \\ 0 \quad на\ K / K_i \end{cases} \quad \forall K \in T_h : A_i \in K. \tag{6.72}$$

Тоді система функцій $\pi = \{\pi_i\}$ утворює ортогональний базис простору E_h^A.

Доведення сформульованих лем очевидні з геометричних міркувань, які засвідчують, що перетини носіїв кожної пари функцій з систем $b = \{b_K\}$, $\beta = \{\beta_i\}$ та $\pi = \{\pi_i\}$ становлять порожні множини.

Як головний результат побудови отримаємо три скінченновимірні простори $E_h^C, E_h^B, E_h^A \subset E$, які можна використати для конструювання ієрархії просторів апроксимацій із E, зручних для наближеного розв'язування задачі про похибку (6.43) стандартними засобами МСЕ.

6.2.4 Алгоритм послідовного уточнення апроксимації

Нижче запропонуємо один із можливих алгоритмів, який використовує побудовані простори $E_h^C, E_h^B, E_h^A \subset E$ для підвищення точності знайденої апроксимації (6.50) в просторі V_h.

Крок 1. Припустимо, що апроксимація

$$u_K := u_h\big|_K = \sum q_i L_i \in P_1(K) \tag{6.73}$$

знайдена достатньо точно у вершинах $A = \{A_i\}$ сітки T_h. Тоді її суттєвого уточнення можна досягнути лише за умови поліпшення її структури всередині

елемента K. З цією метою розв'яжемо задачу про похибку (6.43) в просторі E_h^C:

$$\begin{cases} \textit{знайти } e^C \in E_h^C \textit{ таку що} \\ c\left(e^C, v\right) = \left\langle \rho\left(u_h\right), v \right\rangle \quad \forall v \in E_h^C. \end{cases} \tag{6.74}$$

З огляду на ортогональність базису $\{b_K\}_{K \in T_h}$ простору E_h^C розв'язування (6.74) поділяється на окремі задачі, кожна з яких згідно з методом Гальоркіна дає змогу легко обчислити розв'язок у вигляді

$$e_K^C(x) := e_K b_K(x), \tag{6.75}$$

де

$$e_K = \frac{\left\langle \rho\left(u_h\right), b_K \right\rangle}{c\left(b_K, b_K\right)} \qquad \forall K \in T_h. \tag{6.76}$$

Зазначимо, що згідно з побудовою функцій $\{b_K\}_{K \in T_h}$ знайдений коефіцієнт e_K дає наближене значення похибки e в центрі ваг трикутника K:

$$e_K = e_K^C\left(C_K\right) \approx e\left(C_K\right) \qquad \forall K \in T_h. \tag{6.77}$$

Тому можемо уточнити значення апроксимації u_h в цих вузлах згідно з правилом

$$u_h^*\left(C_K\right) := u_h\left(C_K\right) + e_K = \frac{1}{3}\sum q_i + e_K, \tag{6.78}$$

і одержати перше уточнення стандартної апроксимації МСЕ u_h в цілому

$$u_h^C(x) := \sum_{j=1}^{N} q_j \theta_j(x) + \sum_{K \in T_h} e_K b_K(x) \equiv u_h(x) + e_h^C(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{6.79}$$

Крок 2. Тепер повторимо процедуру кроку 1, попередньо замінивши в ній u_h та E_h^C на u_h^C та E_h^B, відповідно. В результаті знайдемо, що значення

оцінювача похибки $e^B(x)$ у центрі кожної внутрішньої сторони B_i можна обчислити за правилом

$$\varepsilon_i := e^B(B_i) = \frac{\left\langle \rho\left(u_h^C\right), \beta_i \right\rangle}{c(\beta_i, \beta_i)} \qquad \forall B_i \in B. \tag{6.80}$$

З огляду на лему 4.2, формула (6.80) потребує обчислень з використанням лише двох суміжних скінченних елементів, які утворюють носій $\operatorname{supp} \beta_i := \mathrm{O}(B_i)$. У цей спосіб досягають обчислювальної ефективності розглядуваного кроку, який приводить до уточнення значень апроксимації МСЕ в серединах сторін B_i за правилом

$$u^*(B_i) := \frac{u_K(A_j) + u_K(A_m)}{2} + \varepsilon_i \qquad \forall B_i \in B. \tag{6.81}$$

Отже, чергове уточнення кусково-лінійної апроксимації знаходять у вигляді

$$u_h^B(x) := u_h^C(x) + \sum_{B_i \in B} \varepsilon_i \beta_i(x) \equiv u_h^C(x) + e_h^B(x) \qquad \forall x \in \Omega. \tag{6.82}$$

Крок 3. Завершальний етап процедури полягає в уточненні значень апроксимації МСЕ у внутрішніх вершинах $A_i \in A$. У цьому випадку значення оцінювача похибок у заданих вершинах обчислюють у такий спосіб:

$$\rho_i := e^A(A_i) = \frac{\left\langle \rho\left(u_h^B\right), \pi_i \right\rangle}{c(\pi_i, \pi_i)} \qquad \forall A_i \in A. \tag{6.83}$$

Остаточним результатом алгоритму є уточнена апроксимація вигляду

$$u_h^A(x) := u_h^B(x) + \sum_{A_i \in A} \rho_i \pi_i(x) \equiv u_h^B(x) + e_h^A(x) \qquad \forall x \in \Omega. \tag{6.84}$$

Отже рекурсивно обчислювана ієрархія апостеріорних оцінювачів похибки $e_h^C \in E_h^C$, $e_h^B \in E_h^B$, $e_h^A \in E_h^A \subset E$ одночасно уточнює кусково-лінійну

апроксимацію МСЕ, тому

$$\left\|e_h^A\right\| \le \left\|e_h^B\right\| \le \left\|e_h^C\right\| \qquad \forall h > 0. \tag{6.85}$$

6.2.5 Числові результати

Нижче наведемо результати серії обчислювальних експерементів із уточненням кусково-лінійних наближень МСЕ, згідно з рекурсивним алгоритмом. Мета наших експерементів передбачала знайти відповіді на такі питання стосовно апроксимацій МСЕ:

1. Яка точність відтворення знайденими оцінювачами властивостей реальної похибки класичних апроксимацій МСЕ? Для цього вводимо кусково-лінійний інтерполянт точного розв'язку на вихідній тріангуляції вигляду

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^{3} u(A_i) L_i(x) \qquad \forall x \in K \quad \forall K \in T_h, \tag{6.86}$$

та аналізуємо його розбіжності з вихідною апроксимацією МСЕ

$$e_I(x) = u_I(x) - u_h(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(u(A_i) - u_h(x)\right) L_i(x) \qquad \forall x \in K. \tag{6.87}$$

Подібно введемо кусково-лінійний інтерполянт $u_I = u_I(x)$ точного розв'язку на згущеній тріангуляції $T_{\frac{h}{2}}$ та проаналізуємо його відмінності від кожної з уточнених апроксимацій

$$e_I^X(x) = u_I(x) - u_h^X(x) \quad \forall x \in K \quad \forall K \in T_{\frac{h}{2}}, \quad X = C, B, A, \tag{6.88}$$

які розглядаємо як кусково-лінійні функції на подрібленій тріангуляції $T_{\frac{h}{2}}$.

2. Яка швидкість збіжності до нуля кожної із послідовностей апостеріорних оцінювачів похибок $\left\{e_h^X\right\}$ за умови рівномірного згущення

розрахункових тріангуляцій?

3. Чи еквівалентні енергетичні норми оцінювачів $\left\| e_h^X \right\|$ нормам реальних похибок, а саме: чи існують додатні сталі α_X, β_X такі, що

$$\alpha_X \left\| u_I - u_h^X \right\| \le \left\| e_h^X \right\| \le \beta_X \left\| u_I - u_h^X \right\| \quad X = C, B, A? \tag{6.89}$$

Точніше, апріорні оцінки розв'язків варіаційних задач визначають існування таких сталих для верхніх меж, і головна складність теоретичного аналізу полягає у відшуканні сталих для нижніх меж. Якщо вони існують для побудованих оцінювачів, то за визначенням Верфюртца [135] такі оцінювачі є надійними.

6.2.5.1. Задача дифузії [127]

Нижче наведнено дані розв'язування задачі (6.39) з коефіцієнтами $\mu = 1$, $\beta = 0$, $\sigma = 0$, функцією $f(x,y) = 400\left(1 - x^2 - y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ та крайовими умовами, які показано на рис. 6.12. Точний розв'язок задачі має вигляд

$$u^*(x,y) = 100e^{-\left(x^2+y^2\right)}. \tag{6.90}$$

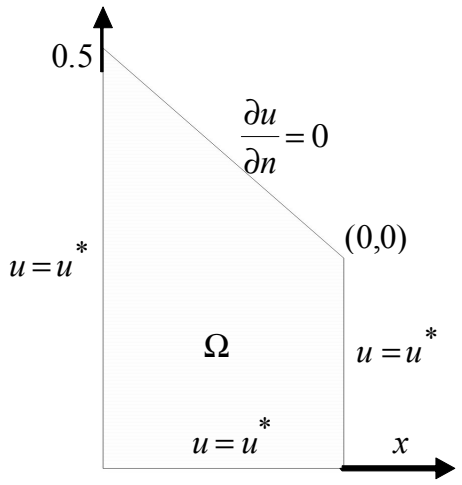


Рисунок 6.12 – Крайові умови задачі дифузії

Дані табл. 6.1 містять деякі кількісні характеристики числового експеременту, які дають відповіді на поставлені вище запитання і переконливо свідчать про надійність запропонованої ієрархії апостеріорних оцінювачів похибки в просторах $H^1(\Omega)$. Тут $N(T_h)$ – кількість вузлів поточного розбиття T_h.

Таблиця 6.1 – Збіжність H^1 – норм апостеріорних оцінювачів похибок та відмінностей апроксимацій МСЕ від інтерполянтів точного розв'язку

$N(T_h)$	$\|e_I\|_{H^1}$	$\|e_I^C\|_{H^1}$	$\|e_h^C\|_{H^1}$	$\|e_I^B\|_{H^1}$	$\|e_h^B\|_{H^1}$	$\|e_I^A\|_{H^1}$	$\|e_h^A\|_{H^1}$
12	9.439	9.173	4.270	8.354	7.166	7.424	2.362
35	4.699	4.578	2.160	3.844	3.292	2.755	1.712
117	2.346	2.286	1.083	1.845	1.565	1.083	0.962
425	1.172	1.143	0.542	0.906	0.760	0.464	0.502
1617	0.586	0.571	0.271	0.449	0.374	0.212	0.255

Справді, зі згущенням тріангуляцій усі норми розлядуваних функцій монотонно збігаються до нуля. Крім цього, ця збіжність близька до лінійної для розбіжностей та оцінювачів похибок. Перегляд розбіжностей на кожній фіксованій тріангуляції засвідчує, що кожен крок рекурентного уточнення апроксимацій МСЕ зменшує значення їхніх норм так, що в кінцевому підсумку ці значення на густіших сітках зменшуються більше ніж у двічі. Зазначимо тут про вирішальний внесок завершального кроку щодо уточнення значень апроксимації у вершинах біжучої сітки скінченних елементів, ефект проміжкового кроку алгоритму уточнення в цій ситуації виявляється незначно.

Натомість порівняння на фіксованій сітці значень послідовно обчислюваних оцінювачів не демонструє подібної монотонності і свідчить про суттєвість обчислень на другому кроці алгоритму уточнення. Завершальні ж значення

норм оцінювачів незначно менші від одержаних на першому кроці. Ці факти доводять стійкість побудованої ієрархії оцінювачів та процедури послідовного уточнення апроксимацій МСЕ.

Нарешті виокремимо поведінку оцінювача похибок у центрах ваги скінченних елементів e_h^C. Його обчислюють з найменшими витратами, він надає значення меж похибок, які вдвічі менші від відповідних значень норм розбіжності e_I^C. Поряд із цим, норми згаданих оцінювачів дуже добре узгоджуються з відповідними значеннями норм розбіжностей e_I та e_I^C, які обчислені на наступному згущенні сітки скінченних елементів. Ця обставина дає підстави стверджувати і про доцільність виконання першого кроку алгоритму уточнення апроксимацій МСЕ. З іншого боку, з огляду на нерівність (6.89) вона доводить існування сталих еквівалентності

$$\alpha_C \cong 0.5.$$

У табл. 6.2 для повноти аналізу наведено результати обчислень з використанням норми $L^2(\Omega)$. Вони, зокрема, свідчать про квадратичну збіжність у цій нормі апостеріорних оцінювачів похибок та уточнених апроксимацій МСЕ.

Таблиця 6.2 – Збіжність L^2– норм апостеріорних оцінювачів похибок та відмінностей апроксимацій МСЕ від інтерполянтів точного розв’язку

$N(T_h)$	$\|e_I\|_{L^2}$	$\|e_I^C\|_{L^2}$	$\|e_h^C\|_{L^2}$	$\|e_I^B\|_{L^2}$	$\|e_h^B\|_{L^2}$	$\|e_I^A\|_{L^2}$	$\|e_h^A\|_{L^2}$
12	0.902	0.793	0.1257	0.719	0.1788	0.784	0.1204
35	0.237	0.210	0.0318	0.197	0.0402	0.225	0.0436
117	0.060	0.053	0.0079	0.050	0.0094	0.059	0.0122
425	0.015	0.013	0.0019	0.012	0.0022	0.015	0.0032
1617	0.003	0.003	0.0004	0.003	0.0005	0.003	0.0008

На рис. 6.13, 6.14 відображено характеристику локальної поведінки ієрархії оцінювачів, а саме: розподіл величин норм $\left\| e_h^X \right\|_{H^1(K)}$ на скінченноелементній сітці з 4 225 вузлів та 8 192 трикутників. На підставі аналізу даних рисунків 6.13, 6.14 зазначимо, що побудовані оцінювачі відтворюють структуру норми ітерполянта точної похибки (див. рисунок 6.13а) та реагують на специфіку поведінки розв'язку в околі кутової точки (0,0).

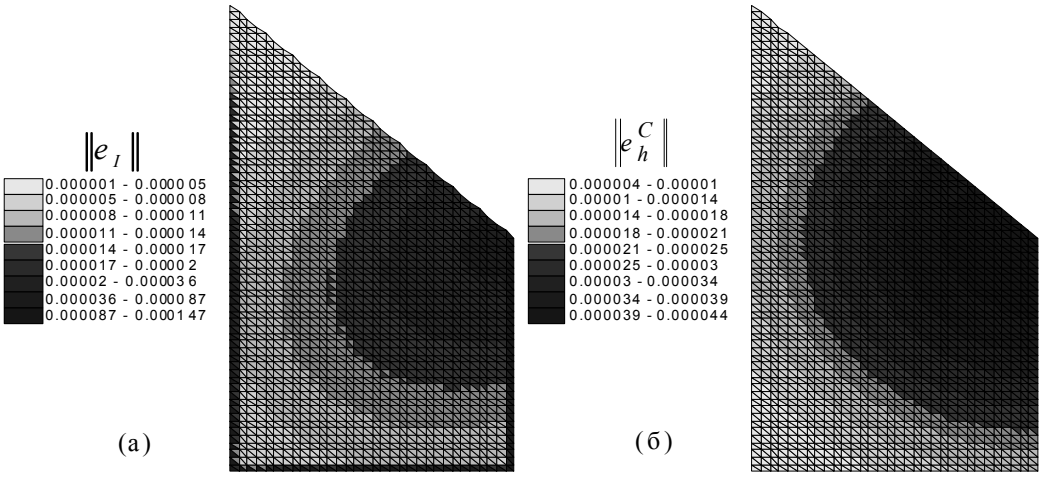


Рисунок 6.13 – Розподіл норм інтерполянта точної похибки (а) та дискретної похибки на першому (б) кроці алгоритму уточнення

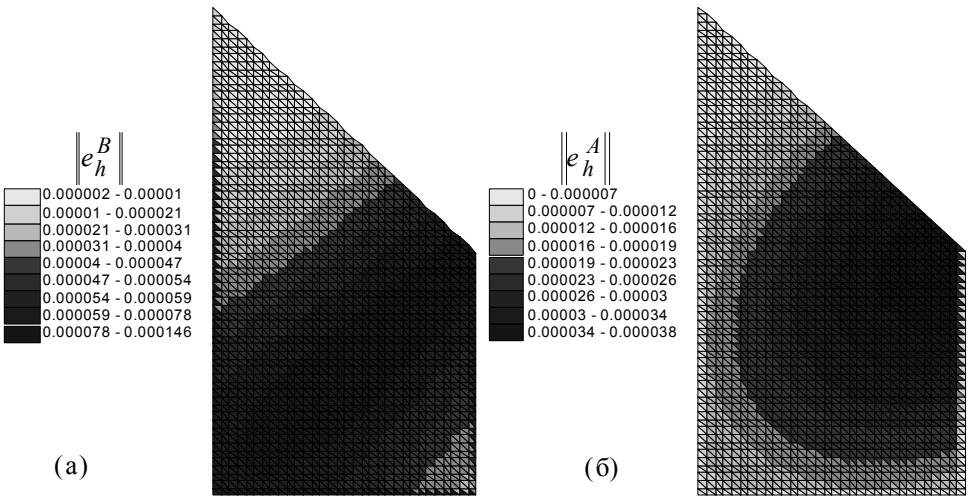


Рисунок 6.14 – Розподіл норм дискретних похибок на другому (а) та третьому (б) кроці алгоритму уточнення

7 ПОБУДОВА АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНЮВАЧІВ ПОХИБОК (АОП) АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

Побудова АОП стає необхідним елементом розробки сучасних чисельних методів розв'язування прикладних задач. Метою таких схем є не тільки знаходження наближеного розв'язку задачі, а і визначення величини відхилення знайденого наближення від фактичного розв'язку. У випадку відшукання розв'язку з допомогою МСЕ, побудований АОП слугує показником міри необхідності адаптації розрахункової сітки [136].

7.1 АОП апроксимацій МСЕ для задач про вимушені коливання п'єзоелектрика

Підрозділ присвячений розробці АОП для апроксимацій МСЕ знайдених при розв'язуванні одновимірних задач про вимушені коливання п'єзоелектричного стержня. Для відшукання АОП використовуються бабл-функції другого та четвертого порядків. Робота продовжує дослідження [124,148]. Побудова варіаційного формулювання задач та доведення коректності здійснюється з використанням [149,116].

У розв'язаних експериментальних задачах в якості моделі використовувався стержень виготовлений з п'єзокераміки PZT-4. Отримані результати анонсовано в [150].

7.1.1 Початково-крайова задача п'єзоелектрики

Нехай п'єзоелектрик займає обмежену зв'язну область Ω евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею Γ та одиничним вектором

зовнішньої нормалі $n=(n_1,\ldots,n_d)$, де $n_i=(n,x_i)$. Нехай $x=(x_1,\ldots,x_d)$ - точка області Ω і t - час, $t\in[0,T]$, $0<T<+\infty$.

Знайти вектор пружних зміщень $u=\{u_i(x,t)\}_{i=1}^{d}$ і електричний потенціал $p=p(x,t)$ такі, що задовольняють системи рівнянь еластодинаміки

$$\begin{cases} \rho\left(u_i''-f_i\right)-\sigma_{ij,j}=0, \\ \sigma_{ij}=c_{ijkm}e_{km}(u)+a_{ijkm}e_{km}(u')-e_{kij}E_k(p), \\ e_{ij}(u)=\dfrac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad в \qquad \Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{7.1}$$

електричного поля

$$\begin{cases} D'_{k,k}+J_{k,k}=0, \\ D_k=g_{km}E_m(p)+e_{kij}e_{ij}(u), \\ J_k=z_{km}E_m(p), \quad E_k(\rho)=-p_{,k} \quad в \qquad \Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{7.2}$$

початковим умовам

$$\begin{cases} u\,|_{t=0}=u_0, \qquad u'\,|_{t=0}=v_0, \\ p\,|_{t=0}=p_0 \qquad в \qquad \Omega. \end{cases} \tag{7.3}$$

та крайовим умовам

$$\begin{cases} u_i=0 \ \ на \ \ \Gamma_u\times[0,T], \\ \Gamma_u\subset\Gamma, \qquad mes \ \ (\Gamma_u)>0, \\ \sigma_{ij}n_j=\sigma_i \ \ на \ \ \Gamma_y, \qquad \Gamma_y=\Gamma\setminus\Gamma_u, \end{cases} \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} p=0 \quad на \quad \Gamma_p \times [0,T], \\ \Gamma_p \subset \Gamma, \qquad mes(\Gamma_p) > 0, \\ (D'_k + J_k) n_k = 0 \quad на \quad \Gamma_d \times [0,T], \\ \Gamma_d \subset \Gamma, \qquad \Gamma_d \cap \Gamma_p = \varnothing, \\ \int\limits_{\Gamma_e} (D'_k + J_k) n_k d\gamma = I \quad на \quad \Gamma_e \times [0,T], \\ \Gamma_e = \Gamma \setminus (\Gamma_d \cap \Gamma_p), \\ E_k(p) - n_k E_m(p) n_m = 0 \quad на \quad \Gamma_e \times [0,T], \\ p|_{t=0} = p_0 \quad в \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.5}$$

Тут $f_i = f_i(x)$ — вектор об'ємних сил, $\{\sigma_{ij}\}, \{\varepsilon_{ij}\}$ - тензори пружних напружень і деформації, $\{D_k\}, \{J_k\}$ і $\{E_k\}$ - вектори індукції, струму і напруженості електричного поля відповідно. Тензори $\{c_{ijkm}\}, \{a_{ijkm}\}$, $\{z_{ij}\}, \{g_{ij}\}, \{e_{kij}\}$ визначають модулі пружності, в'язкості, електропровідності, діелектричної проникності та п'єзоелектричності відповідно і задовольняють умови симетричності та еліптичності, $\rho = \rho(x) > 0$ — густина маси п'єзоелектрика [149].

7.1.2 Варіаційне формулювання задач п'єзоелектрики

Для наведеної початково-крайової задачі п'зоелектрики (7.1)-(7.5) сформулюємо відповідну варіаційну задачу [148]. Введемо простори допустимих функцій

$$V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega) \right]^n \mid v = 0 \quad на \quad \Gamma_u \right\},$$
$$Q = \left\{ \begin{matrix} q \in H^1(\Omega) \mid q = 0 \quad на \quad \Gamma_p, \\ E(q) - E_k(q) n_k = 0 \quad на \quad \Gamma_e \end{matrix} \right\}, \tag{7.6}$$

і покладемо $\Phi = V \times Q, \;\; G = L^2(\Omega), \; H = G^n$.

Використовуючи принцип віртуальних робіт сформулюємо варіаційну задачу п'єзоелектрики:

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad \psi_0=(u_0,p_0)\in V\times Q,\ v_0\in H,\ (l,r)\in L^2(0,T); \\ \textit{знайти} \quad \psi=(u,p)\in L^2(0,T;V\times Q), \quad \textit{таку, що} \\ m(u''(t),v)+a(u'(t),v)+c(u(t),v)-e(p(t),v)=\langle l(t),v\rangle, \quad \forall t\in(0,T] \\ g(p'(t),q)+e(q,u'(t))+z(p(t),q)=\langle r(t),q\rangle, \\ m(u'(0)-v_0,v)=0, \\ c(u(0)-u_0,v)=0 \ \ \forall v\in V, \\ g(p(0)-p_0,q)=0 \ \ \forall q\in Q. \end{cases} \tag{7.7}$$

Наведена варіаційна постановка (7.7) дає змогу сформулювати статичну задачу п'єзоелектрики та задачу про вимушені усталені коливання [149]. Запишемо статичну задачу

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad (l,r)\in V\times Q; \\ \textit{знайти} \quad \psi=(u,p)\in V\times Q \quad \textit{таку, що} \\ c(u,v)-e(p,v)=\langle l,v\rangle \qquad \forall v\in V, \\ g(p,q)+e(q,u)=\langle r,q\rangle \qquad \forall q\in Q, \\ \langle r,q\rangle=\int\limits_{\Omega}\rho_* q\,dx+\rho_e q\,|_{\Gamma_e} \qquad \forall q\in V, \end{cases} \tag{7.8}$$

де ρ_*, ρ_e - розподіл зарядів в області Ω і на електроді Γ_e відповідно.

Задача про вимушені усталені коливання формулюється наступним чином

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad l_*\in V',\ \ r_*\in Q',\ \ \omega=const>0 \\ \textit{знайти} \quad \psi=(u,p)\in V\times Q \quad \textit{таку, що} \\ -\omega^2 m(u,v)+i\omega a(u,v)+c(u,v)-e(p,v)=\langle l_*,v\rangle, \\ i\omega g(p,q)+i\omega e(q,u)+z(p(t),q)=\langle r_*,q\rangle, \quad \forall v\in V, \quad \forall q\in Q, \end{cases} \tag{7.9}$$

де $i=\sqrt{-1}$, l_*,r_* - амплітуди вимушених усталених навантажень $l_*=l_1+il_2$, $r_*=r_1+ir_2$ з частотою ω та

$$m(u,v)=\int_{\Omega}\rho u_i v_i dx, \qquad a(u,v)=\int_{\Omega} a_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,$$

$$z(p,q)=\int_{\Omega} z_{km}E_k(p)E_m(q)dx, \qquad c(u,v)=\int_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,$$

$$e(q,v)=\int_{\Omega} e_{kij}E_k(q)\varepsilon_{ij}(v)dx, \qquad g(p,q)=\int_{\Omega} g_{km}E_k(p)E_m(q)dx, \qquad (7.10)$$

$$\langle l,v\rangle=\int_{\Omega}\rho f_i v_i dx+\int_{\Gamma_\sigma}\sigma_i v_i dx, \qquad \langle r,q\rangle=\int_{\Omega}\rho_* q dx+\rho_e q|_{\Gamma_e}\ \forall(v,q)\in V\times Q,$$

$$\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad E_k(p)=-\frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

Деталі із варіаційною постановкою та фізичним змістом розглядуваної задачі можна знайти у [148, 149].

7.1.3 Побудова АОП для задач про вимушені коливання

Зважаючи на комплексність розв'язків u,p задачі про вимушені коливання [116], подамо їх у вигляді $u=u^1+iu^2$ і $p=p^1+ip^2$. Використавши введені позначення, виконаємо дискретизацію Гальоркіна для варіаційної задачі (7.9), отримаємо

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad \psi_h=\left(u_h^1,u_h^2,p_h^1,p_h^2\right)\ \textit{таку, що} \\ -\omega^2 m\left(u_h^1,v\right)-\omega a\left(u_h^2,v\right)+c\left(u_h^1,v\right)-e\left(p_h^1,v\right)=\langle l_1,v\rangle \\ -\omega^2 m\left(u_h^2,v\right)+\omega a\left(u_h^1,v\right)+c\left(u_h^2,v\right)-e\left(p_h^2,v\right)=\langle l_2,v\rangle \\ -\omega g\left(p_h^2,q\right)-\omega e\left(q,u_h^2\right)+z\left(p_h^1,q\right)=\langle r_1,q\rangle \\ \omega g\left(p_h^1,q\right)+\omega e\left(q,u_h^1\right)+z\left(p_h^2,q\right)=\langle r_2,q\rangle \\ \qquad \forall\, v\in V_h\subset V \quad \textit{та} \quad \forall\, q\in Q_h\subset Q. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Застосовуючи до дискретизованої задачі (7.11) міркування, використані для побудови АОП для стаціонарної задачі, отримаємо систему рівнянь для знаходження числових значень похибок для дійсних і уявних частин знайденої

апроксимації потенціалу і переміщення задачі про вимушені коливання

$$\begin{vmatrix} C-\omega^2 M & -\omega A & -E^T & 0 \\ \omega A & C-\omega^2 M & 0 & -E^T \\ 0 & -\omega E & Z & -\omega G \\ \omega E & 0 & \omega G & Z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_u^1 \\ \Lambda_u^2 \\ \lambda_p^1 \\ \lambda_p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} \tag{7.12}$$

де $e_h^{u_1} = \Lambda_u^1 b_K$, $e_h^{u_2} = \Lambda_u^2 b_K$, $e_h^{p_1} = \lambda_p^1 d_K$, $e_h^{p_2} = \lambda_p^2 d_K$, $\Lambda_u^1, \Lambda_u^2 \in R^d$, $\lambda_p^1, \lambda_p^2 \in R$ та

$$A = a(b_K, b_K)S \quad M = m(b_K, b_K)S \quad C = c(b_K, b_K)S$$
$$G = g(d_K, d_K) \quad Z = z(d_K, d_K) \quad E = e(d_K, b_K)I$$
$$L_1 = \langle l_1, b_K \rangle I^T + \omega^2 m(u_h^1, b_K) + \omega a(u_h^2, b_K) - c(u_h^1, b_K) + e(p_h^1, b_K) I^T$$
$$L_2 = \langle l_2, b_K \rangle I^T + \omega^2 m(u_h^2, b_K) - \omega a(u_h^1, b_K) - c(u_h^2, b_K) + e(p_h^2, b_K) I^T$$
$$R_1 = \langle r_1, d_K \rangle + \omega g(p_h^2, d_K) + \omega e(d_K, u_h^2) I - z(p_h^1, d_K)$$
$$R_2 = \langle r_2, d_K \rangle - \omega g(p_h^1, d_K) - \omega e(d_K, u_h^1) I - z(p_h^2, d_K)$$

S - одинична матриця, I - одиничний вектор.

7.1.4 Числові експерименти з одновимірними задачами

Розроблені чисельні схеми були застосовані до ряду одновимірних модельних задач п’єзоелектрики. В ролі п’єзоелектрика використовувався матеріал PZT-4 з наступними фізичними властивостями

Густина	$\rho = 7500$ кг/м^3
Модуль пружності	$c = 13{,}9 \cdot 10^8\ Н/м^2$
Модуль п’єзоелектрики	$e = 15{,}1$ К/м
Діелектрична проникливість	$g = 730$ Ф/м

У задачах про вимушені коливання ми нехтуємо в’язкістю і електричною провідністю п’єзоелектрика, вважаючи, що дисипація енергії процесу є незначною.

Для обчислення норм знайдених числових результатів використовувалися наступні формули

$$\|u\|_V = \sqrt{c(u,u)},\ \forall u \in V, \tag{7.13}$$

$$\|p\|_Q = \sqrt{g(p,p)}, \forall p \in Q. \tag{7.14}$$

Слід відзначити, що введені норми (7.13) і (7.14) визначають значення потенціальної енергії п'єзоелектрика $\Pi = \frac{1}{2}\left(\|u\|_V^2 + \|p\|_Q^2\right)$.

Відзначимо, що порядок швидкості збіжності похибок наближених розв'язків у деякому просторі H можна обчислити згідно формули

$$p_H(w) = \log_2\left(\|w_0\|_H - \|w_1\|_H\right) - \log_2\left(\|w_1\|_H - \|w_2\|_H\right) \tag{7.15}$$

У випадку задач про вимушені коливання додатково обчислювались згідно [124,136] наступні величини:

- модуль переміщення $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
- модуль потенціалу $|p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.
- швидкість переміщення $u'(t) = -\omega(u_1 \sin\omega t - u_2 \cos\omega t)$.
- кінетична енергія $K = \frac{1}{2} m\left(u'(t), u'(t)\right)$.
- $\varepsilon_H = \|e_H\|_S \|H\|_S^{-1}$ - відносна похибка величини H .

Побудову апостеріорного оцінювача похибок будемо здійснювати використовуючи бабл–функції другого порядку для лінійних апроксимацій і четвертого порядку для квадратичних. Перевагою використання бабл-функцій є можливість знаходження АОП на кожному скінченому елементі незалежно від інших елементів сітки, що позитивно впливає на використання наявних обчислювальних ресурсів. На наступних малюнках зображено вигляд використовуваних бабл–функцій

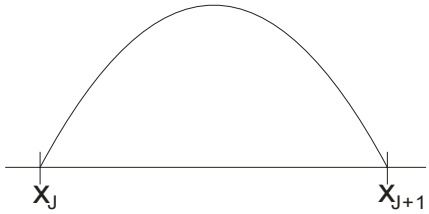


Рисунок 7.1 – Бабл-функція другого порядку

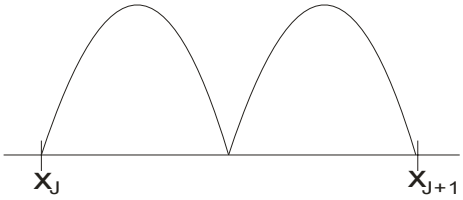


Рисунок 7.2 – Бабл-функція четвертого порядку

Якщо розглядати одновимірну задачу про вимушені коливання, то систему для знаходження невідомих похибок можна подати у такому матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} c-\omega^2 m & -\omega a & -e & 0 \\ \omega a & c-\omega^2 m & 0 & -e \\ 0 & -\omega e & z & -\omega g \\ \omega e & 0 & \omega g & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{e}_h^{u_1} \\ \overline{e}_h^{u_2} \\ \overline{e}_h^{p_1} \\ \overline{e}_h^{p_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{vmatrix} \tag{7.16}$$

де

$$a = a\left(b_K, b_K\right) \quad m = m\left(b_K, b_K\right) \quad c = c\left(b_K, b_K\right)$$
$$g = g\left(d_K, d_K\right) \quad z = z\left(d_K, d_K\right) \quad e = e\left(d_K, b_K\right)$$
$$l_1 = \left\langle l_1, b_K \right\rangle + \omega^2 m\left(u_h^1, b_K\right) + \omega a\left(u_h^2, b_K\right) - c\left(u_h^1, b_K\right) + e\left(p_h^1, b_K\right)$$
$$l_2 = \left\langle l_2, b_K \right\rangle + \omega^2 m\left(u_h^2, b_K\right) - \omega a\left(u_h^1, b_K\right) - c\left(u_h^2, b_K\right) + e\left(p_h^2, b_K\right)$$
$$r_1 = \left\langle r_1, d_K \right\rangle + \omega g\left(p_h^2, d_K\right) + \omega e\left(d_K, u_h^2\right) - z\left(p_h^1, d_K\right)$$
$$r_2 = \left\langle r_2, d_K \right\rangle - \omega g\left(p_h^1, d_K\right) - \omega e\left(d_K, u_h^1\right) - z\left(p_h^2, d_K\right)$$

Розв’язавши систему (7.16) отримаємо апостеріорні оцінки похибок знайдених апроксимації для дійсних та уявних частин переміщення та потенціалу відповідно $\overline{e}_h^{u_1}, \overline{e}_h^{p_1}, \overline{e}_h^{u_2}, \overline{e}_h^{p_2}$.

Розглянемо п’єзоелектричний стержень довжиною 1 м, який є закріплений і заземлений з лівої сторони, тобто $\Omega = [0,1]$, $u(0) = 0$, $p(0) = 0$. З правої сторони здійснюється навантаження розтягу по дійсній і уявній частинах згідно умови вимушених коливань ($l_* = 10^6$, $r_* = 0$). Частота коливань рівна $\omega = 5000$. Дослідження поведінки кінетичної і потенціальної енергії здійснювалося на протязі 0,00065 секунди (повного періоду коливання п’єзоелектрика).

Наступний малюнок демонструє коливання кінетичної, потенціальної та повної енергії в п’єзоелектричному стержні. Числові результати отримані з використанням квадратичних апроксимацій на 8 скінченних елементах для енергії, кількість кроків по часу рівна 100.

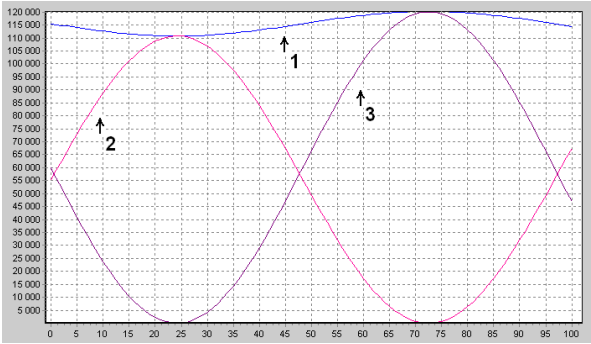


Рисунок 7.3 – Значення потенціальної 2, кінетичної 3 і повної 1 енергій

Отримані незначні коливання повної енергії (<5%) пояснюються певною обчислювальною неточністю проведених обрахунків.

Характер поведінки дійсної частини переміщення та його похибки можна проаналізувати з допомогою наступного малюнку. Результати для похибки отримані з використанням бабл-функцій четвертого порядку. Як і очікувалось, значення похибки є найбільшим в місці, де прикладається навантаження.

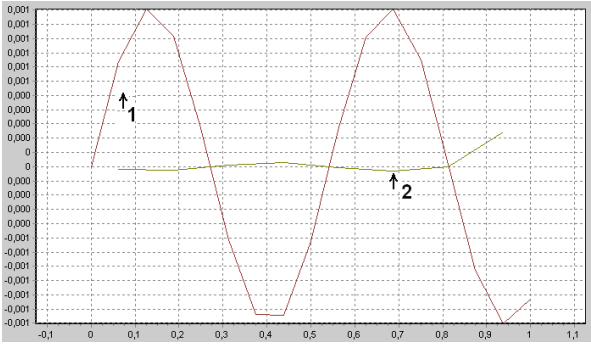


Рисунок 7.4 – Значення дійсної частини переміщень 1 і відповідна похибка 2

У таблиці 7.1 наведено результати для норм похибок та їхніх показників швидкості при розв'язуванні задачі з використанням лінійних та квадратичних апроксимацій з оцінювачами другого та четвертого порядку відповідно. Отримані чисельні результати повністю узгоджуються з теоретичними.

Проаналізувавши результати наведені у таблиці 7.1 і таблиці 7.2, приходимо до висновку, що використання квадратичних апроксимацій, як і у випадку стаціонарної задачі, є ефективнішим ніж використання лінійних на аналогічній розрахунковій сітці.

Таблиця 7.1 – Норми похибок та показники швидкості збіжності (задача про вимушені коливання)

		8	16	32	p
$u_h^1 \in P_1(K)$	$\left\|e^{u_1}\right\|_V$	440,418	104,145	39,3545	2,37
$u_h^2 \in P_1(K)$	$\left\|e^{u_2}\right\|_V$	440,381	104,150	39,3554	2,37
$p_h^1 \in P_1(K)$	$\left\|e^{p_1}\right\|_Q$	0,006601	0,001561	0,000589	2,35
$p_h^2 \in P_1(K)$	$\left\|e^{p_2}\right\|_Q$	0,006601	0,001561	0,000589	2,35
$u_h^1 \in P_2(K)$	$\left\|e^{u_1}\right\|_V$	48,5981	22,2872	14,5747	1,78

Продовження таблиці 7.1

		8	16	32	p
$u_h^2 \in P_2(K)$	$\left\|e^{u_2}\right\|_V$	48,5981	22,2871	14,5746	1,78
$p_h^1 \in P_2(K)$	$\left\|e^{p_1}\right\|_Q$	0,000728	0,000334	0,000218	1,75
$p_h^2 \in P_2(K)$	$\left\|e^{p_2}\right\|_Q$	0,000728	0,000334	0,000218	1,75

Таблиця 7.2 – Значення відносної похибки (задача про вимушені коливання)

		8	16	32
$u_h^1 \in P_1(K)$	ε_{u_1}	49,2%	21,0%	11,2%
$u_h^2 \in P_1(K)$	ε_{u_2}	49,2%	21,0%	11,2%
$p_h^1 \in P_1(K)$	ε_{p_1}	49,3%	21,1%	11,3%
$p_h^2 \in P_1(K)$	ε_{p_2}	49,3%	21,1%	11,3%
$u_h^1 \in P_2(K)$	ε_{u_1}	14,6%	6,9%	4,5%
$u_h^2 \in P_2(K)$	ε_{u_2}	14,6%	6,9%	4,5%
$p_h^1 \in P_2(K)$	ε_{p_1}	14,9%	7,0%	4,5%
$p_h^2 \in P_2(K)$	ε_{p_2}	14,9%	7,0%	4,5%

7.2 АОП апроксимацій МСЕ для задач дифузії-реакції-адвекції

Застосування класичних схем МСЕ для розв’язування сингулярно збуреної крайової задачі міграції домішок при великих числах Пекле і Струхаля характеризується нефізичним поводженням апроксимацій в околах примежових та внутрішніх шарів. Для подолання цих недоліків широко використовують адаптивні і стабілізовані схеми МСЕ, див. напр. [105,151,152]. Ці технології у властивий їм спосіб підвищують запас стійкості схем МСЕ, що

дозволяє знаходити апроксимації розв’язків покращеної якості, див. огляди в класичній монографії [113] та нещодавній тритомній енциклопедії [157].

Природну міру якості обчислених апроксимацій МСЕ становлять їхні похибки чи їх певні інтегральні і локальні характеристики, скажімо, певні норми. Оскільки у випадку сингулярно збурених задач апріорні оцінки похибок дають лише приблизне уявлення про реальне поводження наближених розв’язків, то відшукання належних апостеріорних оцінок похибок становить чи не єдиний надійний підхід до повноцінного аналізу числових схем. У цьому зв’язку методи побудови апроксимацій реальних похибок числових схем набувають зростаючої ваги в сучасних дослідженнях.

У підрозділі розглядається застосуванню МСЕ до розв’язування одновимірних та двовимірних задач дифузії–адвекції–реакції. Спочатку на прикладі схеми з білінійною апроксимацією розв’язку на прямокутному скінченному елементі будується апостеріорний оцінювач її похибки у вигляді біквадратичної бабл-функції так, що він подає наближення до значення шуканої похибки центрі ваги скінченного елемента. Далі ми описуємо процедуру використання цієї конструкції для уточнення апроксимацій у вузлах тріангуляції. В такий спосіб, фіксуючи вибраний поділ області визначення шуканого розв’язку на скінченні елементи, ми намагаємося усунути похибку забруднення у знайденій на цій сітці апроксимації МСЕ так, щоб за даних умов реалізувати потенційні можливості схеми МСЕ. Ключову роль при цьому відіграє надійність та обчислювальна ефективність апостеріорного оцінювача похибок (АОП). В нашому підході остання властивість досягається використанням поліквадратичних бабл-функцій.

Наочне підтвердження ефективності запропонованих схем продемонстровано низкою обчислювальних експериментів з використанням розробленого програмного забезпечення.

7.2.1 Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу з рівнянням дифузії-адвекції-реакції:

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u = u(x_1,\ldots,x_n) \ \textit{таку, що задовольняє} \\ -\nabla.(\mu\nabla u) + w.\nabla u + \sigma u = f \quad \textit{в} \quad \Omega \subset R^n \\ \textit{і крайовим умовам} \\ u = 0 \ \textit{на} \quad \Gamma_u \\ -\mu\dfrac{\partial u}{\partial n} = p \quad \textit{на} \quad \Gamma_p = \Gamma / \Gamma_u \end{cases} \tag{7.17}$$

де Ω — обмежена зв'язна область з неперервною за Ліпшицем межею $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ і $\overline{\Gamma_u} \cap \overline{\Gamma_p} = \varnothing$. Будемо припускати, що дані задачі (7.17) задовольняють таким гіпотезам регулярності та знаковизначеності

$$\mu, \sigma \in L^\infty(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega), \qquad w \in \left[L^\infty(\Omega)\right]^n, \tag{7.18}$$

$\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, $\sigma(x) \geq 0$ майже скрізь в Ω.

Відповідна (7.17) варіаційна задача має вигляд:

$$\begin{cases} \textit{знайти } u \in V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \ \textit{на } \Gamma_u \right\} \quad \textit{таку, що} \\ a(u,v) = \langle \mathrm{l}, \mathrm{v} \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{7.19}$$

де білінійна та лінійна форми визначаються в такий спосіб:

$$\begin{cases} a(u,v) = \int\limits_\Omega \{\mu\nabla u.\nabla v + vw.\nabla u + \sigma vu\} dx, \\ \langle l, v \rangle = \int\limits_\Omega fvdx - \int\limits_{\Gamma_p} vpd\gamma, \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \tag{7.20}$$

Використавши теорему Лакса–Мільграма–Вишика [156], за умов (7.18) можна показати що варіаційна задача (7.19) є коректно поставленою, тобто існує єдиний розв'язок $u \in V$, який неперервно залежить від її даних. При

цьому для білінійної форми задачі (7.19) виконується умова неперервності та V–еліптичності, а для лінійної форми – умова обмеженості.

7.2.2 Дискретизація Гальоркіна

Для відшукання наближених розв'язків варіаційної задачі (7.19) застосуємо схему дискретизації Гальоркіна. З цією метою у просторі допустимих функцій V виберемо послідовність скінченновимірних підпросторів $V_h \subset V$ таких, що виконується умова

$$\dim V_h = n(h) \to \infty, \ \textit{якщо}\ h \to 0.$$

Тоді для відшукання наближеного розв'язку варіаційної задачі (7.19) згідно схеми Гальоркіна розглядаються задачі

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad h = const > 0, \\ \textit{знайти} \quad u_h \in V_h : \quad a(u_h, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{7.21}$$

Якщо за базис простору V_h вибрати лінійно незалежні функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ з V, то розв'язок задачі (7.21) можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \qquad q_i \in R, \tag{7.22}$$

з невідомими коефіцієнтами $q_1, \ldots, q_n$.

Підставивши у рівняння задачі (7.20) замість функції v послідовно базисні функції простору V_h, а замість u_h – його розвинення (7.22), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь з вектором невідомих $q = (q_1, \ldots, q_n)$ вигляду

$$Aq = L. \tag{7.23}$$

Тут коефіцієнти матриці і правої частини обчислюються згідно правил

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{7.24}$$

$$l_j = \langle l, \varphi_j \rangle, \qquad j = 1,...,n. \tag{7.25}$$

Отже, метод Гальоркіна приводить варіаційну задачу (7.19) до системи лінійних алгебричних рівнянь (7.23). Розв'язавши цю систему, ми отримаємо наближений розв'язок $u_h \in V_h$ задачі (7.19) у вигляді (7.22), аналіз якого завжди, в тій та іншій мірі, приводить до дослідження властивостей його похибки $\varepsilon_h := u - u_h \in \mathrm{V}, \quad \forall h > 0$.

7.2.3 Класична схема МСЕ з білінійними апроксимаціями

Обмежимось нижче побудовою наближень e_h до реальної похибки $\varepsilon_h := u - u_h \in V$ для двовимірного випадку $n = 2$. Без змін запропоновані конструкції переносяться і на випадки $n \neq 2$.

Припустимо, що область Ω є прямокутником $\{(x_1, x_2) \in R^2 : a \le x_1 \le b, c \le x_2 \le d\}$, який покрито рівномірною сіткою τ_h конгруентних скінченних елементів $\Omega_{ij} := (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ $i = 0,\ldots,N_x,\ j = 0,\ldots,N_y$, де $x_i := ih_x,\ y_j := jh_y$, $h_x := (b-a)N_x^{-1}$, $h_y := (d-c)N_y^{-1}$. Кожен елемент Ω_{ij} зручно віднести до локальної системи координат (α, β) в такий спосіб, що, наприклад, $|\alpha| \le 1, |\beta| \le 1$, і початок координат помістити в центр ваги C_{ij} прямокутника Ω_{ij}; тоді

$$\Omega_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in R^2: \\ x(\alpha,\beta) = x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} h_x \alpha \quad \forall \alpha \in [-1,+1] \qquad y(\alpha,\beta) = y_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} h_y \beta \quad \forall \beta \in [-1,+1] \end{array} \right\}$$

Перехід до локальних координат (α, β) дозволяє виконувати в один і той же спосіб необхідні обчислення на кожному Ω_{ij}. Нижче ми описуємо випадки,

коли знайдена апроксимація u_h на Ω_{ij} є білінійною функцією вигляду:

$$u_h(\alpha,\beta) := \frac{1}{4}\left\{ u_{ij}(1-\alpha)(1-\beta) \quad + \quad u_{i+1j}\frac{1+\alpha}{2} \qquad \frac{1-\beta}{2} \quad + \right.$$
$$\left. u_{i+1j+1}(1-\alpha)(1+\beta) \; + u_{ij+1}\frac{1+\alpha}{2} \qquad \frac{1+\beta}{2} \right\}.$$

Обчислювальні аспекти реалізації схем такого і подібних ґатунків можна знайти, напр. в [136, 154].

7.2.4 Побудова апостеріорного оцінювача похибок

Для побудови апостеріорного оцінювача похибки e_h апроксимації $u_h \in V_h$ скористаємося методикою праці [105]. З цією метою на кожному скінченому елементі Ω_{ij} виберемо біквадратичну бабл-функцію b_{ij}, яка в локальних координатах набуває вигляду

$$b_{ij}(\alpha,\beta) \quad = \quad \left(1-\alpha^2\right)\left(1-\beta^2\right) \qquad \forall(\alpha,\beta) \quad \in \quad [-1,\ +1]^2 . \tag{7.26}$$

Зауважимо, що

$$\begin{cases} b_{ij} = 0 \qquad на \quad \partial\Omega_{ij} \\ b_{ij}\left(C_{ij}\right) = 1, \quad i = 0,\ldots,N_x - 1, \qquad j = 0,\ldots,N_y - 1_y \end{cases} . \tag{7.27}$$

Будемо шукати наближення e_h до похибки $\varepsilon_h := u - u_h$ у вигляді лінійної комбінації цих функцій

$$e_h := \sum_{i,j} \lambda_{ij} b_{ij} \tag{7.28}$$

з невідомими коефіцієнтами $\lambda_{ij} \in R$. Як наслідок відзначимо ключові властивості шуканої апроксимації (7.28) (апостеріорного оцінювача похибки):

- процедура Гальоркіна і природна ортогональність системи функцій $\{b_{ij}\}$ дозволяють обчислити коефіцієнти λ_{ij} в

$$\lambda_{ij} = \frac{\langle l, b_{ij} \rangle - a(u_h, b_{ij})}{a(b_{ij}, b_{ij})} \tag{7.29}$$

$$e_h(C_{ij}) = \lambda_{ij} \tag{7.30}$$

іншими словами коефіцієнти λ_{ij} розвинення (7.28) визначають значення АОП в центрах ваг C_{ij} скінченних елементів.

- функція

$$\overline{u}_h := u_h + e_h \tag{7.31}$$

є уточненою апроксимацією МСЕ, знайденою на вихідній тріангуляції τ_h; більше цього

$$\overline{u}_h(C_{ij}) := u_h(C_{ij}) + \lambda_{ij} \tag{7.32}$$

7.2.5 Уточнення вузлових значень апроксимацій МСЕ

Описану вище процедуру уточнення апроксимацій МСЕ можна застосувати не лише для уточнення її значень в центрах ваг C_{ij} скінченних елементів, але і її значень у вершинах (x_n, y_m) тріангуляції τ_h.

Дійсно, розглянемо конгруентний елементам тріангуляції τ_h прямокутник

$$Q_{nm} := \left\{ (x, y) \in Q: \quad x(\alpha) = x_n + \frac{1}{2} h_x \alpha, \quad y(\beta) = y_m + \frac{1}{2} h_y \beta \quad \forall |\alpha|, |\beta| \le 1 \right\}$$

з центром ваги $A_{nm} = (x_n, y_m)$. Його вершини творять центри ваг всіх елементів Ω_{ij}, що мають точку A_{nm} за вершину. Оскільки у вершинах такого віртуального

елемента Q_{nm} вже здійснено уточнення класичної апроксимації u_h згідно правила (7.32), то, повторивши процедуру уточнення п.5 для елемента Q_{nm}, ми знайдемо уточнені вузлові значення $\overline{u}_{nm}$ для всіх внутрішніх вузлів $\{A_{nm}\}$ сітки τ_h.

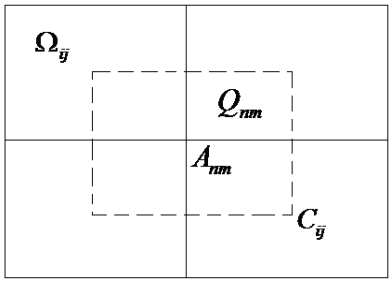


Рисунок 7.5 – Віртуальний скінчений елемент

7.2.6 Алгоритм ітераційного уточнення апроксимацій МСЕ

Цілком зрозуміло, що запропоновану вище процедуру точкового уточнення класичних апроксимацій МСЕ, у вершинах та центрах ваг елементів існуючої тріангуляції можна повторити без жодних змін стільки разів, скільки це необхідно. Критерієм зупинки таких обчислень може виступати, наприклад, наперед визначена кількість ітерацій або допустиме значення η розподілів відносної похибки

$$\eta_{ij} := \frac{\|e_h\|_{ij}}{\|u_h + e_h\|^*_{ij}} \cdot 100\%,\ i = 0,\ldots,N_x,\ j = 0,\ldots,N_y,$$

де

$$\|w\|_{ij} := \left[\int_{\Omega_{ij}} |\nabla w|^2\, dx\right]^{1/2}, \qquad \|w\|^*_{ij} := \left[N^{-1}\sum_{n,m}\|w\|^2_{nm}\right]^{1/2}.$$

Таким чином, алгоритм постпроцесорного ітераційного уточнення апроксимацій МСЕ містить наступні кроки.

1. Виходячи із знайденої апроксимації $u_h \in V_h$, обчислюємо апостеріорний оцінювач похибки e_h (7.28) з коефіцієнтами λ_{ij} згідно правила (7.29).

2. Уточнивши значення апроксимації u_h в центрах ваг C_{ij} елементів Ω_{ij} сітки τ_h згідно (7.32), повторюємо обчислення коефіцієнтів λ_{nm} для віртуальних скінченних елементів Q_{nm}, центрами ваг яких служать внутрішні вершини A_{nm} тріангуляції τ_h і уточняємо значення апроксимації u_h в цих точках $\overline{u}_h\left(A_{nm}\right) := u_{nm} + \lambda_{nm}$.

3. Використовуючи вибраний критерій зупинки процесу, визначаємо необхідність проведення наступної ітерації процедури уточнення.

7.2.7 *h*-адаптивна схема МСЕ

У випадку одновимірних задач здійснимо побудову класичної h-адаптивної схеми МСЕ, використовуючи побудований нами оцінювач похибок. Застосуємо її до розв’язування наступної крайової задачі. Знайти невідому функцію u, що задовольняє такі умови

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)+100 \quad \frac{du}{dx} \quad = \quad 100 \quad на \quad \Omega=[0;1],$$

та $u(0)=u(1)=0$. Для знаходження розв’язку з похибкою 10% класичний адаптивний алгоритм виконує 8 покращень сітки. Кількість згенерованих вузлів на останньому кроці адаптації рівна 40. Знайдені результати для розв’язку і похибки подані в таблиці 7.3.

Таблиця 7.3 – Характеристики розв’язку знайденого класичною *h*-адаптивною схемою МСЕ

Крок адаптації	Кількість СЕ	$\|u_h\|_V$	$\|e_h\|_V$
1	8	12,6579	91,6356
2	16	7,56169	27,5234
3	23	7,00017	12,7580
4	26	6,99999	6,37887
5	28	6,99999	3,18943
6	31	6,99999	1,59580
7	35	6,99999	0,80212
8	39	6,99999	0,41205

На наступному рисунку зображено графік знайденого наближеного розв’язку

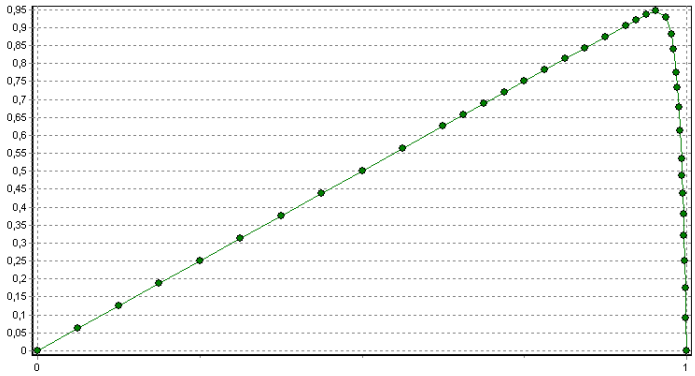


Рисунок 7.6 – Графіки наближеного розв’язку знайденого класичною *h*-адаптивною схемою МСЕ

Доповнимо класичну h-адаптивну схему МСЕ операцією пост процесорного уточнення. Отримаємо схему з такими кроками

1. Розв’язуємо задачу класичним МСЕ.
2. Проводимо один крок ітераційного уточнення.
3. Знаходимо апостеріорні оцінки похибок на скінченних елементах.

4. Якщо значення похибки перевищує допустиме і кількість кроків адаптації є менша за задану, то виконуємо покращення сітки на відповідних елементах і переходимо до кроку 1, інакше вважаємо, що знайдено задовільний розв'язок.

Розв'яжемо задану задачу використовуючи, побудовану схему. Отримані результати наведені в таблиці 7.4.

Таблиця 7.4 – Характеристики розв'язку знайденого класичною *h*-адаптивною схемою МСЕ

Крок адаптації	Кількість СЕ	$\|u_h\|_V$	$\|e_h\|_V$
1	8	12,6579	91,6356
2	15	7,56169	27,5234
3	21	6,99951	12,7568
4	22	6,99999	6,37887
5	24	6,99999	3,18979
6	27	6,99999	1,59796
7	31	6,99999	0,80475
8	34	6,99999	0,41469

З таблиці очевидно, що кількість вузлів зменшилася з 40 до 35.

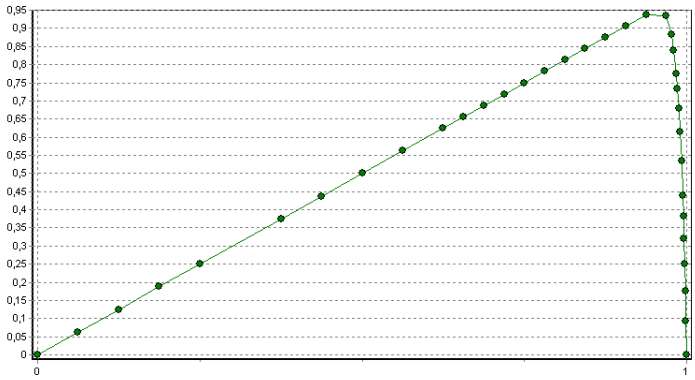


Рисунок 7.7 – Графіки наближеного розв'язку знайденого модифікованою *h*-адаптивною схемою МСЕ

7.2.8 Числові експерименти

Для задач, які описують процеси з домінуючим конвективним перенесення, часто використовують число Пекле, яке можна обчислити за формулою

$$Pe = \frac{diam\ \ \Omega \times \|w\|_{\infty}}{\mu_0}. \tag{7.33}$$

Наближені розв'язки задач з великими числами Пекле характеризуються нефізичними поведінкою в околі примежових шарів. Недоліки таких апроксимацій можуть бути усунені лише за умови, що сіткове число Пекле

$$Pe_h = \frac{h\|w\|_K}{\mu_0}, \tag{7.34}$$

де h – діаметр сітки скінчених елементів, є достатньо малим. Наприклад, добре відомо, що кусково-лінійні апроксимації класичної схеми МСЕ вірно відтворюють структуру шуканого розв'язку, коли $Pe_h \leq 1$.

Крім числа Пекле, у задачах з швидкоплинними хімічними реакціями, використовується число Фур'є

$$\frac{1}{Fu} = \frac{diam^2 \Omega \times \|\sigma\|_{\infty}}{\mu_0}, \tag{7.35}$$

велике значення якого теж сигналізує про наявність примежових і внутрішніх шарів розглядуваної задачі. Власне на таких сингулярно збурених задачах апробувалися можливості запропонованої вище схеми уточнення полілінійних апроксимацій МСЕ, а саме, ставилася мета дати відповіді на наступні запитання:

- чи запропоноване уточнення полілінійних апроксимацій підвищує порядок швидкості збіжності, значення яких надають апріорні оцінки збіжності схем МСЕ ?
- наскільки можна понизити рівень похибки за допомогою даного уточнення, наприклад, використовуючи норму

$$\|v\|_V = \sqrt{\sum_{K\in\tau_h}\int_K |\nabla v|^2\,dx} = \sqrt{\sum_K \|v\|_K^2} \quad \forall v\in V \ ? \tag{7.36}$$

Відзначимо, що порядок швидкості збіжності похибок наближених розв'язків у просторі H можна обчислити згідно формул

$$p_H(w) = \log_2\left(\|w_0\|_H - \|w_1\|_H\right) - \log_2\left(\|w_1\|_H - \|w_2\|_H\right), \tag{7.37}$$

де w_i - характеристики апроксимацій, знайдена на послідовності рівномірних сіток з кроком рівним $h\cdot 2^{-i}$, i=0,1,2.

- наскільки є надійним побудований апостеріорний оцінювач похибки ?

7.2.8.1 Одновимірні задачі міграції домішок

Розглянемо крайову задачу Діріхле з конвективним перенесенням

$$\begin{cases} -u'' + Peu' = Pe \quad в \quad \Omega = (0,1), \\ u(0) = \quad u(1) \quad = 0 \end{cases} . \tag{7.38}$$

Таблиця 7.5 містить значення відносних похибок $\varepsilon = \|e_h\|_V \|u_h\|_V^{-1}\cdot 100\%$ при зменшенні діаметру поділу у два рази.

Таблиця 7.5 – Характеристика апостеріорного оцінювача похибки для наближених розв'язків задачі (7.38) на послідовно згущуваних сітках

	Класична схема МСЕ		Схема МСЕ з уточненням	
Pe	10	20	10	20
4	80,7%	151%	62,8%	85,2%
8	40,3%	67,4%	37,4%	53,6%
16	20,2%	38%	19,8%	36,4%

Очевидно, що застосування процедури уточнення апроксимації зменшує

значення відносної похибки, особливо помітне на грубих сітках. Таблиця 7.6 надає уявлення про величину оцінюваних похибок та порядки швидкості збіжності.

Таблиця 7.6 – Характеристики норм похибок уточнених апроксимацій розв'язку задачі (7.38) на послідовно згущуваних сітках, та показники швидкості збіжності

	Pe = 10			Pe = 20		
h	1/4	1/8	1/16	1/4	1/8	1/16
$\lVert e_h \rVert_V$	1,61398	0,80687	0,40344	4,72101	2,02205	1,14108
$\lVert e_h \rVert_{L^2}$	0,12759	0,03189	0,00797	0,37322	0,09021	0,02255
$p_V(e)$	1			1,61		
$p_{L^2(\Omega)}(e)$	2			2,02		

Тут і далі $p_V(e)$, $p_{L^2(\Omega)}(e)$ - показники швидкості збіжності похибки апроксимації, обчислені в просторах $V = H^1(0,1)$ і $L_2 = L_2(0,1)$ відповідно. Результати, отримані в таблиці 7.6 свідчать про надійність запропонованих схем та їх узгодження з теоретичними результатами. Для задачі з числом Пекле рівним 20 ми отримали показник швидкості збіжності в просторі $V = H^1(0,1)$, який є дещо вищим за очікуваний згідно апріорних оцінок збіжності.

Слід відзначити особливості процедури уточнення, які можна побачити з таблиці 7.5. Знайдені норми уточнених розв'язків, при згущені поділу області прямують до значення, яке рівне значенню норми розв'язку знайденого без використання процедури уточнення. Норми $\lVert u_h^v \rVert_V$ прямують знизу до даного значення, а $\lVert u_h^c \rVert_V$ - зверху.

Таблиця 7.7 – Характеристики знайдених наближень до розв’язку задачі (7.38) на трьох послідовно згущуваних сітках

	Сітка	Pe_h	$\|u_h\|_V$	$\|u_h^v\|_V$	$\|u_h^c\|_V$	$\|\overline{u}_h\|_V$	N
$A = 10$	4	2,5	2,00038	1,71066	2,57030	2,00022	1
	8	1,25	2,00001	1,96426	2,15664	2,00011	1
	16	0,625	2,00007	1,99662	2,04036	2,00011	1
$A = 20$	4	5	3,11420	1,72252	3,29078	3,00039	7
	8	2,5	2,99999	2,61732	3,76939	2,99999	1
	16	1,25	2,99999	2,92514	3,13394	2,99999	1

Тут і далі $\|u_h\|_V$, $\|e_h\|_V$, $\|u_h^v\|_V$, $\|u_h^c\|_V$ – норми наближеного розв’язку, похибки, уточненого розв’язку, уточненого розв’язку (обчислена з використанням значення розв’язку у центрах ваг скінченних елементів) відповідно. Кількість ітерацій позначаємо через N, а через $\|\overline{u}_h\|_V$ – норму розв’язку знайденого з використанням квадратичних апроксимацій.

Наступний малюнок є візуальним підтвердженням ефективності використання процедури уточнення (уточнений розв’язок не містить осциляцій).

В одновимірних задачах можна чітко спостерігати дію апостеріорного оцінювача похибок і процедури уточнення розв’язку. При сіткових числах Пекле, які менші за певне критичне значення, оцінювач дає значення похибки, яке співрозмірне зі значенням наближеного розв’язку на скінченому елементі, в іншому випадку значення похибки стає на порядок більше за значення наближеного розв’язку, тому подальше уточнення призводить до погіршення

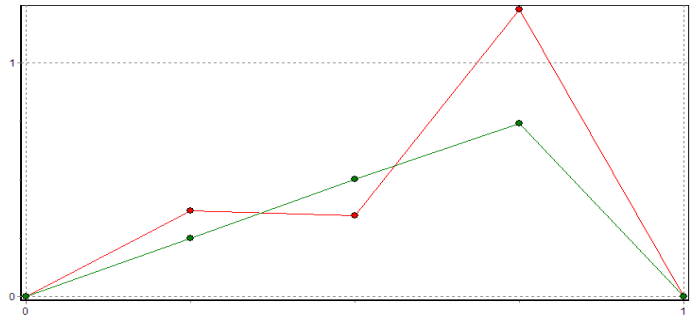


Рисунок 7.8 – Графіки наближених розв’язків задачі (7.38) (уточнений і неуточнений, *Pe*=20)

знайдених апроксимацій. Вирішенням цієї проблеми може бути модифікація оцінювача таким чином, щоб він нормалізував значення похибки в таких випадках.

7.2.8.2 Двовимірні задачі міграції домішок

1. Проаналізуємо розв’язок такої крайової задачі:

$$-\nabla.(\nabla u)+w.\nabla u \quad = A \quad в \quad \Omega=(0,1)^2 \ , \tag{7.39}$$

де $w=(A,A)$. Для задачі (7.39) число Пекле $Pe=A\sqrt{2}$. Як і у випадку одновимірних задач, для двовимірних задач застосовується однорідна умова Діріхле.

Розв’яжемо задачу (7.39) при числі A рівному 10, 20 використовуючи білінійні і квадратичні апроксимації. Отримані показники швидкості збіжності підтверджують теоретичні дані, що свідчить про надійність побудованого АОП.

Таблиця 7.8 – Характеристики норм похибок апроксимацій розв’язку задачі (7.39) на послідовно згущуваних сітках

	A = 10 (Pe = 14)			A = 20 (Pe = 28)		
h	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/8$	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/8$	$\sqrt{2}/16$

Продовження таблиці 7.8

	$A = 10$ ($Pe = 14$)			$A = 20$ ($Pe = 28$)		
$\|e_h\|_V$	0,77022	0,39960	0,20175	2,13702	1,11880	0,56902
$\|e_h\|_{L^2}$	0,04305	0,01116	0,00281	0,11946	0,03127	0,00795
$p_V(e)$	0,91			0,89		
$p_{L^2}(e)$	1,93			1,92		

Динаміка відносних похибок при зменшенні діаметру розбиття в два рази має наступний вигляд:

Таблиця 7.9 – Характеристики норм похибок уточнених апроксимацій розв’язку задачі (7.39) на послідовно згущуваних сітках, та показники швидкості збіжності

	Класична схема МСЕ		Схема МСЕ з уточненням	
A	10	20	10	20
4x4	55,4%	95,4%	48,5%	69%
8x8	28,1%	49,7%	27%	44,5%
16x16	14,1%	25,1%	14%	24,4%

Проведені експерименти показали, що застосовувати ітераційну процедуру уточнення можна при сіткових числах Пекле $Pe_h \le 10,5$. Використання уточнення з більшими сітковими числами Пекле $Pe_h > 10,5$ не принесло результатів. Осциляції уточненого розв’язку зростали. Застосування процедури уточнення розв’язку при сіткових числах Пекле $Pe_h > 10,5$ стає утрудненим через дію побудованого апостеріорного оцінювача похибки. У таких випадках оцінювач вказує на її наявність, але саме значення похибки є неточним. Це можна пояснити тим, що під час обчислення похибки ми використовуємо

розв'язок, який є далекий від оптимального. Обчислені значення норми уточненого розв'язку $\left\|u_h^v\right\|_V$ є дещо меншими за значення норми наближеного розв'язку. Частково це можна пояснити тим, що оцінювач похибки старається згладити наближений розв'язок в місцях високих градієнтів.

Таблиця 7.10 – Характеристики знайдених наближень до розв'язку задачі (7.39) на трьох послідовно згущуваних сітках

	сітка	Pe_h	$\left\|u_h\right\|_V$	$\left\|u_h^v\right\|_V$	$\left\|u_h^c\right\|_V$	$\left\|\overline{u}_h\right\|_V$	N
$A = 10$	4×4	3,5	1,38973	1,05379	1,58890	1,43088	1
	8×8	1,75	1,42219	1,29462	1,47727	1,43337	1
	16×16	0,9	1,43069	1,38566	1,44485	1,43354	1
$A = 20$	4×4	7	2,23981	1,12878	3,09574	2,25814	1
	8×8	3,5	2,24891	1,83177	2,51184	2,26559	1
	16×16	1,75	2,26189	2,10359	2,33237	2,26623	1

Візуальні результати підтверджують ефективність застосування процедури уточнення. Уточнений розв'язок є кращим за знайдений при допомозі квадратичних апроксимацій.

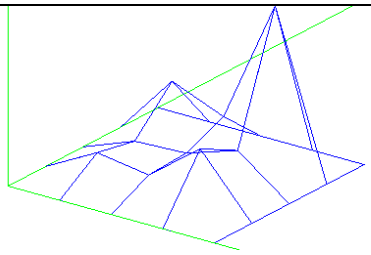
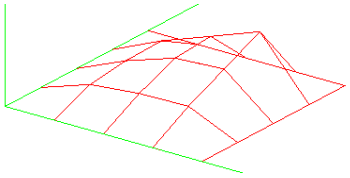
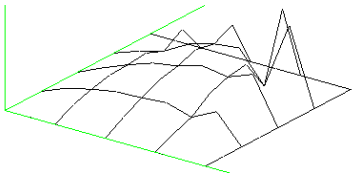
4×4		$u_h \in P_1(K)$
		u_h^*
		$\overline{u_h} \in P_2(K)$

Рисунок 7.9 – Графіки наближених розв’язків задачі (7.39)

2. Проаналізуємо розв’язок наступної крайової задачі:

$$-\nabla.(\nabla u) + (1,1).\nabla u + 10^{10} u = 10^{10} \quad \text{в} \quad \Omega = (0,1)^2 \tag{7.40}$$

Для задачі (7.40) число Фур’є $\frac{1}{Fu} = 2 \cdot 10^{10}$. Таблиця 7.11 представляє деякі характеристики знайденого наближеного розв’язку. Причиною зростання норм при збільшенні розміреності сітки є те, що значення градієнтів у примежовому шарі також збільшується. Характерним є те, що для уточнення розв’язків задач з великим числом Фур’є достатньо одного кроку ітерації.

Таблиця 7.11 – Характеристики знайдених наближень до розв’язку задачі (7.40) на трьох послідовно згущуваних сітках

сітка	$\|u_h\|_V$	$\|e_h\|_V$	$\|u_h^*\|_V$	$\|u_h^c\|_V$	$\|\overline{u}_h\|_V$	N
4×4	5,01890	5,57708	3,07070	7,50288	7,28610	1

Продовження таблиці 7.11

сітка	$\|u_h\|_V$	$\|e_h\|_V$	$\|u_h^*\|_V$	$\|u_h^c\|_V$	$\|\overline{u}_h\|_V$	N
8×8	7,17362	8,07847	1,12878	3,09574	10,52815	1
16×16	10,33687	11,37793	7,32350	15,37232	15,09125	1

Отримані візуальні та числові значення розв’язку дозволяють зробити висновок про можливість застосування процедури уточнення для задач ДАР з великим числом Струхаля.

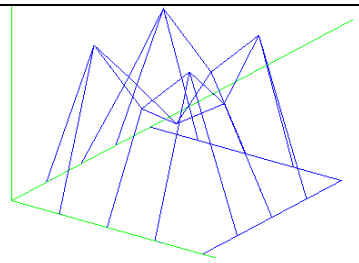
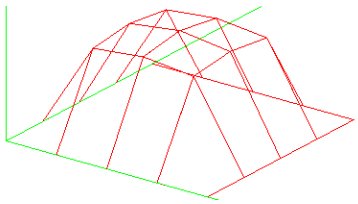
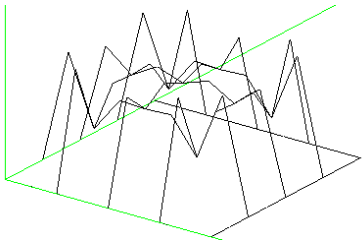
4×4		$u_h \in P_1(K)$
		u_h^*
		$\overline{u}_h \in P_2(K)$

Рисунок 7.10 – Графіки наближених розв’язків задачі (7.40)

8 МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ) ДЛЯ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

8.1 Про вибір стабілізаційного множника у варіаційних задачах руху мілкої води

У випадку застосування методу скінченних елементів (МСЕ) до розв'язування задач мілкої води виникла проблема – з'явилися "паразитичні" осциляції у розв'язку задачі в разі великих значень чисел Рейнольдса. У літературі використовують різні способи для того, щоб уникнути цієї проблеми. Наприклад, автори [163, 174], використовуючи квадратичні апроксимації на трикутних елементах, задавали надмірні сили тертя рідини з донною поверхнею. У працях [172, 173] автори вибирали змішані апроксимації на трикутних елементах: лінійні апроксимації для глибини стоку та квадратичні апроксимації для швидкості, задаючи надмірну в'язкість в рівняннях руху. Ці підходи суттєво погіршували відповідність обчислювальних результатів реальним процесам.

Декілька років пізніше [171] висунуто гіпотезу, що осциляції виникають через неадекватний вибір сітки в місцях великих значень градієнтів швидкості. Річ у тому, що в разі великих значень чисел Рейнольдса (Re>100) розв'язки задачі можуть мати внутрішні та примежові шари – дуже вузькі області, де швидкості та їхні градієнти різко змінюються. Внаслідок цього числові результати, побудовані за схемою Гальоркіна, де параметр дискретизації занадто великий, щоб урахувати всі ці шари, можуть сильно осцилювати у всій області визначення. В працях [151, 166–170] запропоновано різні способи вибору задовільної апроксимації. У багатьох випадках такі підходи приводять до величезної кількості ступенів вільності і, отже, до неможливості ефективного відшукання числового розв'язку.

Для усунення цієї проблеми багато авторів побудувало різні стабілізаційні схеми МСЕ [160, 162, 172, 173]. Найбільшого поширення набули стабілізаційна схема Петрова–Гальоркіна та підхід, що ґрунтується на понятті функцій-бульбашок. Розглянемо другий з них.

Нехай варіаційна задача стоку мілкої води має вигляд

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u \in W, \\ a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \tag{8.1}$$

де $a(u,v)$ – вихідна білінійна форма; $W \subset V = H_0^1(\Omega)$ – заданий скінченноелементний простір.

Процедура побудови стабілізаційної схеми детально наведена в праці [160]. Ефект стабілізації може бути досягнутий унаслідок розширення простору апроксимацій. Для кожного скінченного елемента T визначають простір функцій-бульбашок $B = \left\{ \forall b \in B : b\big|_T \in H_0^1(T) \right\}$. Якщо $W \cap B = \{0\}$, тоді кожен елемент v простору $H := W \oplus B$ визначений однозначно у вигляді $v = v_w + v_B$, де $v_w \in W$ та $v_B \in B$. Далі замість (8.1) розглядають задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u_H = u_w + u_B,\ u_H \in H, \\ a(u_H,v) = (f,v) \quad \forall v \in H. \end{cases} \tag{8.2}$$

З (8.2) на одному скінченному елементі вилучають функції з простору бульбашок B, у результаті чого отримують

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad u \in W, \\ a(u,v) - \sum_T \mu(T)\left(Au - f, A^* v\right)_T = (f,v) \quad \forall v \in W, \end{cases} \tag{8.3}$$

де A^* – спряжений до A оператор.

Важливою для побудови стабілізаційної схеми є оцінка стабілізаційного множника $\mu(T)$ в (8.3). У літературі [162] існує верхня оцінка стабілізаційного множника для лінеаризованих рівнянь Нав'є–Стокса, яку вибирають з практичних міркувань

$$\mu(T) = \frac{h_T}{a\|u(x)\|}\gamma(\mathrm{Re}), \tag{8.4}$$

де a – деяка стала; h_T – діаметр скінченного елемента; Re – число Рейнольдса;

$$\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1, \\ 1, & 1 \le z < \infty. \end{cases}$$

Ми теоретично оцінимо стабілізаційний множник для рівнянь Нав'є–Стокса, користуючись алгоритмом, запропонованим у роботі [160], який застосовано для рівнянь адвекції–дифузії.

8.1.1 Побудова стабілізаційної схеми для рівнянь Нав'є-Стокса

На підставі методики з [160] оцінимо стабілізаційний множник для рівнянь Нав'є–Стокса, які записують у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - k\Delta u = f \quad в \quad \Omega \times [0,T], \\ u = 0 \quad на \quad \Gamma \times [0,T], \\ u\big|_{t=0} = u_0 \quad в \quad \Omega, \end{cases} \tag{8.5}$$

де u – невідома швидкість рідини; p – гідростатичний тиск (уважають відомим); ρ – густина рідини; k – коефіцієнт в'язкості; f – масові сили.

Побудуємо для задачі (8.5) варіаційну постановку

$$\begin{cases} \text{Знайти } u \in V := H_0^1(\Omega) \text{ таку, що} \\ a(u,\varphi) = (f,\varphi)\ \forall \varphi \in V, \\ (u(0) - u_0, \varphi) = 0, \end{cases} \tag{8.6}$$

де $a(u,\varphi)=\left(\frac{\partial u}{\partial t},\varphi\right)+(w\cdot\nabla u,\varphi)-k(\Delta u,\varphi)$, w – відома швидкість з попереднього кроку; $(f,\varphi)=-\frac{1}{\rho}(\nabla p,\varphi)+(f,\varphi)$.

Застосуємо методику попереднього пункту для побудови стабілізаційної схеми задачі (8.6). Розглянемо варіаційну задачу (8.6) у підпросторі $H\subset V$, який складається зі стандартного скінченноелементного підпростору $W\subset V$ та скінченноелементного простору B бульбашок, такого що $\forall\varphi\in H\ \exists!\varphi_w\in W$, $\varphi_B\in B$ $\varphi=\varphi_B+\varphi_w$. Тоді варіаційна задача зведеться до відшукання $u=u_B+u_w\in H$ і набуде вигляду

$$a(u_H,\varphi)=(f,\varphi)\ \forall\varphi\in H. \tag{8.7}$$

Приймемо в (8.7) $\varphi=\varphi_B$, отримаємо

$$a(u_B,\varphi_B)=(f,\varphi_B)-a(u_w,\varphi_B)=(f-\left(\frac{\partial u_w}{\partial t}+w\cdot\nabla u_w-k\Delta u_w\right),\varphi_B). \tag{8.8}$$

Рівняння (8.8) є варіаційною задачею в просторі функцій-бульбашок B, яка має єдиний розв’язок

$$u_B=S_B\left(P_B\left(f-\left(\frac{\partial u_w}{\partial t}+w\cdot\nabla u_w-k\Delta u_w\right)\right)\right), \tag{8.9}$$

де $P_B=L^2$ – проекція на простір B; S_B – оператор, який “розв’язує” (8.8).

Приймемо в (8.7) $\varphi=\varphi_w$ та використаємо вираз (8.9):

$$\begin{aligned}a(u_w,\varphi_w)&=(f,\varphi_w)-a(u_B,\varphi_w)=(f,\varphi_w)-\left(u_B,-\frac{\partial\varphi_w}{\partial t}-w\nabla\varphi_w+k\Delta\varphi_w\right)=\\&=(f,\varphi_w)-\left(S_BP_B\left(f-\left(\frac{\partial u_w}{\partial t}+w\cdot\nabla u_w-k\Delta u_w\right)\right),-\frac{\partial\varphi_w}{\partial t}-w\nabla\varphi_w+k\Delta\varphi_w\right).\end{aligned} \tag{8.10}$$

Отже, (8.10) є варіаційною задачею в просторі W зі збурювальним доданком. Цей доданок ґрунтується на залишку (нев’язці рівняння), тобто якщо точний

розв'язок є достатньо гладкий, щоб задовольнити рівняння Нав'є–Стокса $\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u - k\Delta u = f$, то додатковий член не вносить похибки.

Якщо віртуальний простір функцій бульбашок такий, що $S_B P_B = \mu I$, то (8.10) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} & a(u_w, \varphi_w) + \sum_T \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + w \cdot \nabla u_w - k\Delta u_w, \mu \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta \varphi_w \right) \right) = \\ & = (f, \varphi_w) + \sum_T \left(f, \mu \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi_w - k\Delta \varphi_w \right) \right). \end{aligned} \tag{8.11}$$

8.1.2 Оцінка стабілізаційного множника

Для оцінки множника μ в (8.11) скористаємось такою теоремою [160, с.123].

Теорема 8.1 Нехай Z – скінченновимірний підпростір з $L^2(T)$; $a(u,v)$ – білінійна неперервна форма на $H_0^1(T)$ така, що $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_1^2$, $\forall u \in H_0^1(T)$, $\alpha = const > 0$; для кожного $z \in Z$ визначимо $u = S_B P_B z$ як єдиний розв'язок рівняння $a(u,\varphi) = (z,\varphi)$ $\forall \varphi \in B$, $u \in B$, тоді $\exists \mu_0 = const > 0$ така, що $\forall \mu$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, існує простір функцій бульбашок B такий, що $S_B P_B = \mu I$.

Нижню границю μ_0 можна обчислити таким способом.

1. Візьмемо підпростір $B_0 \subset H_0^1(T)$ з властивостями: а) $\forall z \in Z$ з умови $(u,z)=0$ $\forall u \in B_0$ випливає, що $z=0$; б) $a(u, v) = a(v, u)$ $\forall u, v \in B_0$.
2. Уведемо ортонормований базис $\{z_i\}_{i=1}^N$ в Z і обчислимо $\{s_i\}_{i=1}^N$ в B_0 так $a(s_i, \varphi) = (z_i, \varphi)$ $\forall \varphi \in B_0$ $i=1,\ldots,N$ (це означає, що $s_i = S_B P_B z_i$).
3. Приймемо $S_{ij} = a(s_i, s_j)$ $i, j = 1,\ldots,N$ і обчислимо μ_0 як найменше власне значення S.

Використаємо наведену процедуру для побудови оцінки параметра μ. Нехай простір W складається з кусково-визначених лінійних неперервних функцій, $Z \subset L^2(T)$ – скінченновимірний підпростір, $dim\ Z=1$ і ортонормований базис заданий таким виразом: $z_1 = \frac{1}{\Delta^{1/2}}$; Δ – площа трикутника T. B_0 – це одновимірний простір породжений кубічним баблом $b_3^T(x) = L_1 L_2 L_3$, де L_i – кусково-лінійні функції на трикутнику T (i=1, 2, 3). Вважаємо, що залежності від часу немає, тоді згідно з пунктом 2 теореми отримаємо

$$\int_T (\nabla s_1 \cdot w) b_3 dx + k \int_T \nabla s_1 \cdot \nabla b_3 dx = \int_T \frac{1}{\Delta^{1/2}} b_3 dx . \qquad (8.12)$$

Приймемо в (8.12) $s_1 = \hat{s}_1 b_3$ ($\hat{s}_1$– константа) та розпишемо кожен з інтегралів попереднього виразу.

Інтеграл з в’язкими доданками набуде вигляду

$$\int_T \nabla s_1 \cdot \nabla b_3 dx = \hat{s}_1 \int_T \nabla b_3^2 dx = \hat{s}_1 \int_T \left(\nabla L_1 L_2 L_3\right)^2 dx = \frac{d^2}{720\Delta} \hat{s}_1, d^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2, \quad (8.13)$$

де l_i – довжина сторони трикутника T (i=1, 2, 3);

$$\int_T \left(\nabla s_1 \cdot w\right) b_3 dx = s_1 \int_T \left(\nabla b_3 \cdot w\right) b_3 dx = \frac{1}{2} \hat{s}_1 \int_T w \cdot \nabla b_3^2 dx = -\frac{1}{2} \hat{s}_1 div\ w \int_T b_3^2 dx = -\frac{\hat{s}_1 e \Delta}{7!}, (8.14)$$

де $e = div\ w$.

Права частина рівняння (8.12) матиме вигляд

$$\int_T \frac{1}{\Delta^{1/2}} b_3 dx = \frac{1}{\Delta^{1/2}} \frac{\Delta}{60} = \frac{\Delta^{1/2}}{60} . \qquad (8.15)$$

З використанням значення інтегралів (8.13)–(8.15) рівняння (8.12) запишемо так:

$$\frac{\hat{s}_1}{720} \left(\frac{kd^2}{\Delta} - \frac{e\Delta}{7} \right) = \frac{\Delta^{1/2}}{60} .$$

З попереднього виразу отримаємо

$$\widehat{s}_1 = \frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2 - \Delta^2 e}. \tag{8.16}$$

Скористаємось третім пунктом теореми для знаходження оцінки. Оскільки простір B_0 одновимірний, то найменшим власним значенням матриці S буде елемент $S_{11}=a(s_1, s_1)$. Використаємо (8.16) і обчислимо це значення:

$$S_{11} = \int_T (w \cdot \nabla s_1) s_1 dx + k \int_T (\nabla s_1)^2 dx = \widehat{s}_1^2 \int_T (w \cdot \nabla b_3) b_3 dx + k \widehat{s}_1^2 \int_T (\nabla b_3)^2 dx =$$

$$= \widehat{s}_1^2 \left(-\frac{1}{2} e \int_T b_3^2 dx + k \int_T (\nabla b_3)^2 dx \right) = \widehat{s}_1^2 \left(-\frac{\Delta e}{7!} + k \frac{d^2}{720\Delta} \right) = \left(\frac{84\Delta^{3/2}}{7kd^2 - \Delta^2 e} \right)^2 \left(\frac{7kd^2 - \Delta^2 e}{7!\Delta} \right) =$$

$$= \frac{7}{5} \left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2 - e} \right).$$

Отримаємо таку верхню оцінку параметра μ:

$$\mu_0 = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{7kd^2/\Delta^2 - e} \right). \tag{8.17}$$

Наведена процедура знаходження оцінки не буде найкращим можливим вибором μ_0 (за винятком дуже вдалого вибору B_0), однак дає оцінку, якої може бути достатньо для застосувань. Оцінку (8.17) можна використовувати для множника M_e у стабілізаційній схемі рівнянь мілкої води [159].

Отже, отримано верхню оцінку стабілізаційного множника, яку можна застосовувати до моделей, рівняння яких походять з рівнянь Нав'є–Стокса. Однак безпосереднє використання такої оцінки не завжди дає задовільний результат. Тому в багатьох задачах вигідно скористатись наведеною вище процедурою для побудови точнішої верхньої межі параметра μ. Цю методику обчислення оцінки стабілізаційного множника застосовували автори для задач стоку мілкої води [159].

8.2 Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання

Нагрівання тепловим випромінюванням широко застосовують у сучасних технологіях термообробки елементів конструкцій та приладів. Під дією теплового випромінювання такі елементи можуть перебувати під час експлуатації [183, 184, 191]. Вони можуть мати складну будову і містити складники, виготовлені як з непрозорих, так і частково прозорих для теплового випромінювання матеріалів. У разі дослідження перенесення тепла в таких складниках з урахуванням процесів поглинання випромінювання і випромінювання теплової енергії, як звичайно, використовують моделі, які приводять до нелінійних початково-крайових задач перенесення випромінювання та теплопровідності. Під час їх розв'язування застосовують методику лінеаризації. Наприклад, у [189] запропоновано ітераційну схему для лінеаризованої форми стаціонарного рівняння теплопровідності (що містить нелінійний член з четвертим степенем температури), а для розв'язку граничної задачі застосовано метод суперпозиції. У праці [176] для знаходження розв'язку нелінійні початково-крайові задачі теплопровідності (що містять нелінійний доданок з четвертим степенем температури в крайовій умові) за допомогою методу типу функцій Гріна зводять до еквівалентних нелінійних інтегральних рівнянь за часом типу Вольтера, які розв'язують методом послідовних наближень.

Під час вивчення процесів перенесення випромінювання і тепла в частково прозорих тілах до нелінійних задач застосовують метод ітерацій. Рівняння перенесення розв'язують методами Ньютона-Котеса [193] та функцій Гріна [195–197], а розв'язок рівнянь теплопровідності (які вже є лінійними) отримують відомими методами, а саме: для інтегрування за часом Кранка-Ніколсона, а для дискретизації за просторовими змінними – методи Гальоркіна

або скінченних різниць [193, 198, 199]. Нагрівання непрозорих тіл (нелінійності містяться в крайових умовах) досліджують методом скінченних різниць, що приводить до нелінійної системи, яку розв'язують методом Ньютона-Рафсона [185].

8.2.1 Нелінійні задачі теплоперенесення

Нехай тіло частково прозоре чи непрозоре перебуває під дією електромагнітного випромінювання (ЕМВ) світлового діапазону (охоплює інфрачервоне випромінювання ($3\cdot10^{11}\div3\cdot10^{14}$ Гц), видиме світло ($3\cdot10^{14}\div3\cdot10^{15}$ Гц) та ультрафіолетове випромінювання ($3\cdot10^{15}\div3\cdot10^{17}$ Гц)), заданого у зовнішньому середовищі спектральною інтенсивністю $I_{\lambda}^{(e)}(\vec{x}^{(e)},t,\vec{g}_0)$, де λ – довжина хвилі; $\vec{x}^{(e)}$ – радіус-вектор точок зовнішнього середовища; $\vec{g}_0$ – орт у напрямі поширення променя; t – час. Для теплового випромінювання ця інтенсивність пропорційна до спектральної інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла $I_{\lambda b}(\lambda,T_S)$ при температурі T_S реального джерела випромінювання (нагрітого тіла) [177, 185, 189], тобто

$$I_{\lambda}^{(e)}(\vec{x}^{(e)},t,\vec{g}_0)=k_{\lambda}(\vec{x}^{(e)},\vec{g}_0)I_{\lambda b}(\lambda,T_{\mathrm{s}})\,. \tag{8.18}$$

Тут $k_{\lambda}(\vec{x}^{(e)},\vec{g}_0)$ – коефіцієнт пропорційності – задана функція, вигляд якої визначають залежно від енергетичних і спектральних характеристик реального джерела випромінювання та його розміщення щодо тіла. Дослідження поширення зовнішнього теплового випромінювання в частково прозорих тілах пов'язане як з поглинанням, так і з розсіюванням електромагнітної енергії. Розсіювання може бути суттєвим лише в разі сумірності довжин хвиль зовнішнього випромінювання з характерними розмірами структурних частинок тіла [177, 185]. Якщо ним знехтувати, то за певних обмежень на інтенсивність

$I_\lambda^{(e)}$ зовнішнього випромінювання [185] поширення випромінювання в частково прозорому тілі описують квазістаціонарним рівнянням перенесення, що виражає закон збереження енергії ЕМВ. Таке рівняння, отримане феноменологічно на підставі закону Бугера, є узагальненням рівняння перенесення геометричної оптики [194] на випадок урахування власного випромінювання тіла (яке вважають ізотропним) і має вигляд [185, 190]

$$\frac{\partial I_\lambda(\vec{x},t,\vec{g}_0)}{\partial g} = a_\lambda(\vec{x})[I_{m\lambda}(T,\vec{g}_0) - I_\lambda(\vec{x},t,\vec{g}_0)], \tag{8.19}$$

де $I_\lambda(\vec{x},t,\vec{g}_0)$ – спектральна інтенсивність випромінювання в тілі, яка є функцією координат ($\vec{x}$ – радіус-вектор точок тіла), часу і напряму, визначеного ортом $\vec{g}_0$; $I_{m\lambda}(\lambda,T) = n_\lambda^2 I_{\lambda b}(\lambda,T)$ – спектральна інтенсивність власного випромінювання, що залежить від температури T у тілі; $a_\lambda(\vec{x})$ – спектральний коефіцієнт поглинання; n_λ^2 – показник заломлення щодо зовнішнього середовища.

Рівняння (8.19) доповнюють граничними умовами, які враховують зв'язок на поверхні тіла спектральної інтенсивності I_λ випромінювання в ньому з відомою спектральною інтенсивністю $I_\lambda^{(e)}$ випромінювання, що падає на тіло і створюване реальним джерелом, за визначених експериментально коефіцієнтів відбивання і заломлення.

За відомою інтенсивністю випромінювання I_λ у тілі знаходимо об'ємну спектральну густину тепловиділень [178, 190]

$$Q_\lambda = a_\lambda(\vec{x})[\eta_\lambda(\vec{x},t) - \eta_{m\lambda}(T)]. \tag{8.20}$$

Тут $\eta_{m\lambda} = 4\pi I_{b\lambda}(T)$ (для ізотропного власного випромінювання) – густина потоку власного випромінювання,

$$\eta_\lambda(\vec{x},t) = \int\limits_{\Gamma=4\pi} I_\lambda(\vec{x},t,\vec{g}_0)\,d\Gamma \tag{8.21}$$

– густина потоку випромінювання, що є в точці. Інтегрування в (8.21) виконують за тілесним кутом Γ, а $d\Gamma$ – його елемент.

Інтегруючи співвідношення (8.20) по всьому спектру випромінювання, отримуємо вираз для об'ємної густини тепловиділень у частково прозорому тілі

$$Q = \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\vec{x})[\eta_\lambda(\vec{x},t) - \eta_{m\lambda}(T)]d\lambda . \qquad (8.22)$$

У разі розрахунку температури у частково прозорому тілі (початкова температура задана $T(0,\vec{x}) = T_0(\vec{x})$) тепловиділення (8.22) розглядаємо як питому потужність неперервно розподілених теплових джерел у рівнянні теплопровідності

$$(\kappa T_{,\alpha})_{,\alpha} - \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + Q = 0 , \qquad (8.23)$$

де κ, c_ε – коефіцієнт теплопровідності та теплоємність тіла за постійної деформації; кома, яка передує індексу, означає диференціювання за відповідними декартовими координатами x_α, а індекси, що повторюються, – підсумовування. Рівняння (8.23) доповнюємо крайовими умовами, що описують теплообмін тіла із зовнішнім середовищем, зокрема, якщо тіло перебуває в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура $T^{ext}(t)$ якого задана як функція часу, то тепловіддачу описують за законом Ньютона [186], і крайова умова має вигляд

$$(\kappa T_{,\alpha}) n_\alpha = \alpha_П(\vec{x})[T(\vec{x},t) - T^{ext}(t)], \qquad \vec{x} \in S , \qquad (8.24)$$

де $\alpha_П(\vec{x})$ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні S тіла; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Якщо досліджують нагрівання непрозорого тіла, то беруть до уваги, що поглинання і випромінювання теплової енергії для такого тіла є приповерхневим [185, 190], і враховують його в умовах балансу теплових

потоків на поверхні. Тоді крайова умова (8.24) матиме вигляд

$$(\kappa T_{,\alpha})n_\alpha = q + \alpha_{\Pi}(\vec{x})[T(\vec{x},t) - T^{ext}(t)], \qquad \vec{x} \in S, \tag{8.25}$$

а розподіл температури описуватиме рівняння вигляду (8.23), в якому $Q = 0$. Тут $q = q^{(a)} - q^{(b)}$, а потік $q^{(a)}$ поглинутої та потік $q^{(b)}$ випроміненої тілом теплової енергії (нехтуючи теплообміном випромінюванням з іншими тілами) можна визначити так:

$$q^{(a)} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Gamma=2\pi} [1 - R_\lambda(\vec{x},\vec{g}_0)] I_\lambda^{(f)}(\vec{x},t,\vec{g}_0,T_s)\, d\Gamma\, d\lambda; \tag{8.26}$$

$$q^{(b)} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Gamma=2\pi} \varepsilon_\lambda(\vec{x},\vec{g}_0) I_{m\lambda}(T, \vec{g}_0)\, d\Gamma\, d\lambda, \tag{8.27}$$

де $I_\lambda^{(f)}(T_s,t,\vec{g}_0)$ – інтенсивність зовнішнього теплового випромінювання, що падає на поверхню тіла і залежить від інтенсивності $I_\lambda^{(e)}$ джерела випромінювання та його взаємного розташування щодо тіла; $\varepsilon_\lambda(\vec{x},\vec{g}_0)$, $R_\lambda(\vec{x},\vec{g}_0)$ – однонапрямлені ступінь чорноти та коефіцієнт відбивання поверхні. У цьому разі згідно з законом Кірхгофа $1 - R_\lambda = \varepsilon_\lambda$. Зазначимо, що під час розгляду теплообміну випромінюванням розглядуваного тіла з навколишніми тілами рівняння вигляду (8.23) та крайові умови вигляду (8.24) чи (8.25) повинні бути записані й для цих тіл (залежно від їхньої прозорості). У цьому випадку задачі про визначення температури в системі розглядуваних тіл є взаємопов’язаними, а методи їхнього числового розв’язування потребують подальшого розвитку.

Як випливає з аналізу співвідношень (8.22), (8.24)–(8.27) тепловиділення Q для частково прозорого тіла та потік q теплової енергії на поверхні непрозорого тіла можна подати як суми, що визначені поглинанням енергії випромінювання (явно залежать від координати та часу) і випромінюванням теплової енергії (залежать від температури), тобто

$$Q = Q_1(\vec{x},t) + Q_2(T), \qquad q = q_1(\vec{x},t) + q_2(T). \tag{8.28}$$

8.2.2 Лінеаризація та числове розв'язування задач теплоперенесення

Вище зазначено, що задачі про дослідження нагрівання частково прозорих та непрозорих тіл, спричиненого дією зовнішнього теплового випромінювання, зводяться, відповідно, до таких нелінійних початково-крайових задач на визначення температури:

$$\begin{cases} \kappa T_{,\alpha\alpha} - \rho c_\varepsilon \dfrac{\partial T}{\partial t} + Q_1(\vec{x}) + Q_2(T) = 0 \qquad в \;\; \Omega\times[0,t_{\max}]; \\ \kappa T_{,\alpha}\vec{n}_\alpha = \alpha_{\Pi}(\vec{x})[T(\vec{x},t) - T^{ext}(t)] \qquad в \;\; S\times[0,t_{\max}]; \\ T\big|_{t=0} = T_0(\vec{x}) \qquad в \;\; \Omega \end{cases} \tag{8.29}$$

та

$$\begin{cases} \kappa T_{,\alpha\alpha} - \rho c_\varepsilon \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad в \; \Omega\times[0,t_{\max}]; \\ \kappa T_{,\alpha}\vec{n}_\alpha = q_1(\vec{x}) + q_2(T) + \alpha_{\Pi}(\vec{x})[T(\vec{x},t) - T^{ext}(t)] \qquad в \;\; S\times[0,t_{\max}]; \\ T\big|_{t=0} = T_0(\vec{x}) \qquad в \;\; \Omega. \end{cases} \tag{8.30}$$

Тут Ω – область просторових змінних ($\vec{x}\in\Omega$), яку займає тіло в момент часу t; S – межа області Ω; $[0,t_{\max}]$ – розглядуваний проміжок часу ($t\in[0,t_{\max}]$). Для числового розв'язування сформульованих задач (8.29), (8.30) побудуємо відповідні варіаційні задачі, які дискретизуємо за допомогою схеми Гальоркіна з використанням апроксимацій методу скінченних елементів та однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом [116].

Для задачі (8.29), увівши простір допустимих функцій її розв'язків $V := \{v\in H^1(\Omega)\}$, сформулюємо варіаційну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти } T \in V \textit{ таку що} \\ m(T'(t),v) + a(T(t),v) - n(T(t),v) = <\psi, v>; \\ m(T(0) - T_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{8.31}$$

де білінійні форми визначені так:

$$\begin{cases} m(T,v) = \int\limits_{\Omega} \rho c_{\varepsilon} T v \, d\Omega; \\ a(T,v) = \int\limits_{\Omega} \kappa T_{,\alpha} v_{,\alpha} d\Omega - \int\limits_{S} \alpha_{\Pi} T v \, dS; \\ n(T;v) = \int\limits_{\Omega} Q_2(T) v \, d\Omega; \\ <\psi, v> = \int\limits_{S} \alpha_{\Pi} T^{ext} v \, dS - \int\limits_{\Omega} Q_1(\vec{x}) v d\Omega \qquad \forall T, v \in V. \end{cases}$$

Тут $d\Omega$, dS – елементи об’єму та площі.

Розіб’ємо відрізок часу $[0, t_{\max}]$ на $(N_T + 1)$ однакових частин $[t_j, t_{j+1}]$, j=0,…, N_T та введемо величину $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ – параметр дискретизації за часом. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ розв’язок *T(t)* задачі (8.31) будемо апроксимувати функцією [116]

$$T_{\Delta t}(t) = T^j + \Delta t \, \omega(t) \dot{T}^{j+\frac{1}{2}}, \tag{8.32}$$

де $\omega(t) = (t - t_j)/\Delta t$, $\quad \dot{T}^{j+\frac{1}{2}} = (T^{j+1} - T^j)/\Delta t \qquad \forall\, t \in [t_j, t_{j+1}]$.

Розкладемо функцію $Q_2(T)$ в ряд Тейлора в околі $T^j = T(t_j)$ й обмежимось лінійним членом, отримаємо

$$Q_2(T) = Q_2(T^j) + (T - T^j) \frac{dQ_2}{dT}(T^j) + O((T - T^j)^2). \tag{8.33}$$

Підставимо апроксимацію (8.32) у розклад (8.33), знайдемо вираз

$$Q_2(T^j + \Delta t \, \omega(t) \dot{T}^{j+\frac{1}{2}}) \cong Q_2(T^j) + \Delta t \omega(t) \left\{ \frac{dQ_2}{dT}(T^j) \right\} \dot{T}^{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^2).$$

Якщо в ньому знехтувати величинами порядку $O(\Delta t^2)$, то знайдемо лінеаризовану форму $n(T;v)$:

$$n(T_{\Delta t}(t);v) \cong n(T^j,v) + \Delta t\omega(t)\, d(T^j,\dot{T}^{j+\frac{1}{2}},v) \;\; \forall t \in [t_j,t_{j+1}], \tag{8.34}$$

де $d(w,u,v) = \int\limits_{\Omega} \frac{dQ_2}{dT}(w)uvd\Omega \;\; \forall w,u,v \in V.$

Для дискретизації задачі (8.31) скористаємося проекційним методом [116]. Тоді, врахувавши наведені апроксимації (8.32)–(8.34), отримаємо таку однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом:

$$\begin{cases} \textit{задано } \Delta t > 0,\ \theta \ge 0 \textit{ та } T^0, T^j \in V; \\ \textit{знайти } T^{j+1} \in V \textit{ таку, що} \\ m(\dot{T}^{j+\frac{1}{2}},v) + \Delta t\theta \left\{ a(\dot{T}^{j+\frac{1}{2}},v) - d(T^j,\dot{T}^{j+\frac{1}{2}},v) \right\} = \\ = <\psi,v> - a(T^j,v) + n(T^j,v) \qquad \forall v \in V; \\ T^{j+1} = T^j + \Delta t\, \dot{T}^{j+\frac{1}{2}},\ j = 0,1,\ldots \end{cases} \tag{8.35}$$

Виберемо в просторі V допустимих функцій послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій $\{V_h\}$, таких що $\dim V_h = N \to \infty$, і базис $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ в просторі V_h. Це дає змогу записати розв'язок дискретизованої за просторовими змінними задачі у вигляді розкладу

$$T_h^j = \sum_{i=1}^{N} q_i^j \varphi_i(\vec{x}),\ j = 0,1\ldots \tag{8.36}$$

Підставимо цей розклад у рекурентну схему (8.35) інтегрування за часом, отримаємо її матричний запис:

$$\begin{cases} \textit{задано } q^m \in R^N,\ \Delta t,\ \theta \geq 0;\ \textit{знайти } q^{m+1} \in R^N \textit{ такий що} \\ \left\{ M + \Delta t\theta \left[A - \Phi^*(T_h^m) \right] \right\} \dot{q}^{m+\frac{1}{2}} = \Psi + \Phi(T_h^m) - Aq^m; \\ q^{m+1} = q^m + \Delta t \dot{q}^{m+\frac{1}{2}},\ m = 0,1,\ldots, \end{cases} \tag{8.37}$$

де

$$\begin{cases} M_{ij} = \int\limits_{\Omega} \rho c_\varepsilon \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\ A_{ij} = \int\limits_{\Omega} \kappa \varphi_{i,\alpha} \varphi_{j,\alpha} d\Omega - \int\limits_{S} \alpha_{\Pi} \varphi_i \varphi_j\, dS; \\ \Phi_i(T_h^m) = n(T_h^m, \varphi_i) = \int\limits_{\Omega} Q_2(T_h^m) \varphi_i d\Omega; \\ \Phi^*_{ij}(T_h^m) = d(T_h^m, \varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_{\Omega} \frac{dQ_2}{dT}(T_h^m) \varphi_i \varphi_j\, d\Omega; \\ \Psi = \int\limits_{S} \alpha_{\Pi} T^{ext} \varphi_i\, dS - \int\limits_{\Omega} Q_1(\vec{x}) \varphi_i\, d\Omega,\ i, j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{8.38}$$

Якщо за базиси $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ вибрати кусково-лінійні функції, то система (8.37) набуде тридіагонального вигляду і її можна розв’язати одним з відомих методів.

Сформулюємо відповідну варіаційну задачу для (8.30):

$$\begin{cases} \textit{знайти } T \in V,\ \textit{таку що} \\ m(T'(t), v) + a(T(t), v) - n(T(t), v) = \langle \psi, v \rangle; \\ m(T(0) - T_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{8.39}$$

Тут білінійні форми визначені так:

$$\begin{cases} m(T, v) = \int\limits_{\Omega} \rho c_\varepsilon T v\, d\Omega; \\ a(T, v) = \int\limits_{\Omega} \kappa T_{,\alpha} v_{,\alpha}\, d\Omega - \int\limits_{S} \alpha_{\Pi} T v\, dS; \\ n(T; v) = \int\limits_{S} q_2(T) v\, dS; \\ \langle \psi, v \rangle = \int\limits_{S} [q_1(\vec{x}) - \alpha_{\Pi} T^{ext}] v\, dS \qquad \forall T, v \in V. \end{cases}$$

Аналогічно, як і в попередній задачі, після лінеаризації отримуємо однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом

$$\begin{cases} \textit{задано } \Delta t > 0,\ \theta \ge 0 \textit{ та } T^0, T^j \in V; \\ \textit{знайти } T^{j+1} \in V \textit{ таку, що} \\ m(\dot{T}^{j+\frac{1}{2}}, v) + \Delta t\theta \left\{ a(\dot{T}^{j+\frac{1}{2}}, v) - d(T^j, \dot{T}^{j+\frac{1}{2}}, v) \right\} = \\ = <\psi, v> - a(T^j, v) + n(T^j, v) \qquad \forall v \in V; \\ T^{j+1} = T^j + \Delta t \dot{T}^{j+\frac{1}{2}},\ j = 0,1,\ldots, \end{cases} \tag{8.40}$$

де $d(w,u,v) = \int\limits_S \frac{dq_2}{dT}(w) uv\, dS \ \ \forall w,u,v \in V$.

Виконаємо дискретизацію за просторовими змінними, остаточно отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} \textit{задано } q^m \in R^N,\ \Delta t,\ \theta \ge 0;\ \textit{знайти } q^{m+1} \in R^N \textit{ такий що} \\ \left\{ M + \Delta t\theta \left[A - \Phi^*(T_h^m) \right] \right\} \dot{q}^{m+\frac{1}{2}} = \Psi + \Phi(T_h^m) - A q^m; \\ q^{m+1} = q^m + \Delta t \dot{q}^{m+\frac{1}{2}},\ m = 0,1,\ldots \end{cases} \tag{8.41}$$

для визначення розв’язку задачі. Матриці у (8.41) мають вигляд

$$\begin{cases} M_{ij} = \int\limits_\Omega \rho c_\varepsilon \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\ A_{ij} = \int\limits_\Omega \kappa \varphi_{i,\alpha} \varphi_{j,\alpha} d\Omega - \int\limits_S \alpha_\Pi \varphi_i \varphi_j dS; \\ \Phi_i(T_h^m) = n(T_h^m, \varphi_i) = \int\limits_S q_2(T_h^m) \varphi_i\, dS; \\ \Phi^*{}_{ij}(T_h^m) = d(T_h^m, \varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_S \frac{dq_2}{dT}(T_h^m) \varphi_i \varphi_j\, dS; \\ \Psi = \int\limits_S \left[q_1(\vec{x}) - \alpha_s T^{ext} \right] \varphi_i\, dS,\ i,j = 1,\ldots,N. \end{cases} \tag{8.42}$$

Запропонована методика, на відміну від класичних, які використовують для лінеаризації рівнянь теплопровідності метод Ньютона, дає змогу уникнути

трудомістких ітераційних процесів. Її особливістю є одночасна лінеаризація та дискретизація за часом варіаційних рівнянь [182].

Приклад реалізації цієї методики на конкретній задачі дослідження теплоперенесення розглянемо нижче.

8.2.3 Розрахунок температури в системі плоскопаралельних шарів у разі нагрівання тепловим випромінюванням

Розглянемо задачу про нагрівання випромінюванням шаруватої системи (рис 8.1), що складається з двох частково прозорих скляних шарів *2* товщиною h та непрозорого металевого шару *3* товщиною $2b$. Система перебуває під дією теплового випромінювання від площини *1*, яка є джерелом дифузного теплового випромінювання за сталої температури T_S, інтенсивність якого визначена згідно з (8.18), тобто $I_\lambda^{(e)} = kI_{\lambda b}(\lambda, T_S)$.

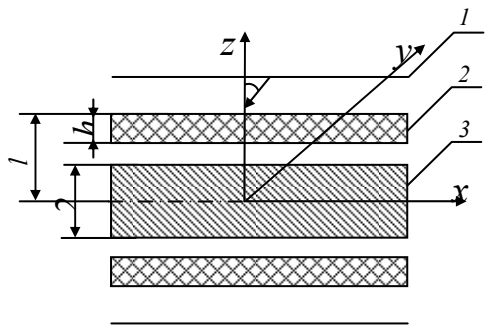


Рисунок 8.1 – Досліджувана шарувата система

Області зовнішнього середовища між площиною *1* та шаром *2* – повітря, яке приймали прозорим для теплового випромінювання, тобто крайові умови на поверхнях $z = \pm l$ (z – товщинна координата) мають вигляд (8.24). Область між шарами *2* і *3* приймали в наближенні вакууму [181, 188]. Тоді крайові умови на поверхнях $z = \pm(l - h)$ скляного шару відповідають умовам теплоізоляції, які отримуємо з (8.24) при $\alpha_П = 0$, а умови на поверхнях $z = \pm b$

металевого шару формулюють згідно з (8.25) (при $\alpha_{П} = 0$). Визначення температури в скляних та металевому шарах зводиться, відповідно, до розв'язування одновимірних по zкоординаті задач (8.29) та (8.30). У цьому разі з огляду на симетрію задачі при $z = 0$ виконується умова екстремуму температури, $\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial z} = 0$.

Коефіцієнт поглинання скляного шару, як звичайно для частково прозорих тіл, апроксимуємо кусково-сталою функцією [180, 186]

$$a_{\lambda} = \begin{cases} a_1, & 0 \le \lambda \le \lambda_{П}; \\ a_2, & \lambda_{П} < \lambda < \infty, \end{cases}$$

де $\lambda_{П}$ – порогова довжина хвилі. Ступінь чорноти поверхні металевого шару та показник заломлення скляного замінюємо їхніми середньоінтегральними значеннями в реальному діапазоні зміни довжини хвилі, тобто $\varepsilon_{\lambda}(\lambda) = \varepsilon = \text{const}$, $n_{\lambda}(\lambda) = n = \text{const}$. Тоді, нехтуючи перевідбиванням випромінювання в системі, вирази для тепловиділень Q та теплового потоку q матимуть вигляд [188]

$$Q_1(z) = 2n^2 k\sigma T_S^4 \left\{ a_1 F_{0-\lambda_{П} T_S} \left[E_2(a_1 z) - v_* E_2(\frac{a_1 z}{v_*}) \right] + a_2 (1 - F_{0-\lambda_{П} T_S}) \left[E_2(a_2 z) - v_* E_2(\frac{a_2 z}{v_*}) \right] \right\};$$

$$Q_2(T) = -4n^2 \sigma \left[a_1 \overline{F}_{0-\lambda_{П} T} + a_2 (1 - \overline{F}_{0-\lambda_{П} T}) \right] T^4;$$

$$q_1(z) = k\varepsilon\sigma T_S^4 \left\{ F_{0-\lambda_{П} T_S} \left[E_2(a_1 h) - v_* E_2(\frac{a_1 h}{v_*}) \right] + (1 - F_{0-\lambda_{П} T_S}) \left[E_2(a_2 h) - v_* E_2(\frac{a_2 h}{v_*}) \right] \right\};$$

$$q_2(T) = -\varepsilon\sigma T^4,$$

де σ – стала Стефана-Больцмана; $F_{0-\lambda_{П} T_S}$ – частка півсферичної інтегральної поверхневої густини потоку випромінювання джерела в спектральному діапазоні $(0 - \lambda_{П})$; $\overline{F}_{0-\lambda_{П} T} = (F_{0-\lambda_{П} T_0} + F_{0-\lambda_{П} T_{\max}})/2$ – середня частка на проміжку нагрівання від початкової температури T_0 до максимальної $T_{\max}$; E_2 – інтегро-

експоненціальна функція 2-го порядку [185].

Числові дослідження проводили для системи, що складається з напівпрозорих шарів скла С95-3 та непрозорого шару з іржостійкої сталі марки 304. Характеристики матеріалів, згідно з [180, 186, 192], вибрано такими:

для скла

$$\kappa = 1{,}6\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}; \quad \rho = 2{,}63\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c_\varepsilon = 760{,}4\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};$$

$$\alpha_П = 26{,}4\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}};$$

$$n = 1{,}5; \quad \lambda_П = 2{,}73\cdot 10^{-6}\,\text{м}; \quad a_1 = 150\,\text{м}^{-1};\ a_2 = 900\ \text{м}^{-1};$$

для сталі:

$$\kappa = 14{,}4\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}; \quad \rho = 7{,}82\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c_\varepsilon = 461{,}51\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};\ \varepsilon = 0{,}2.$$

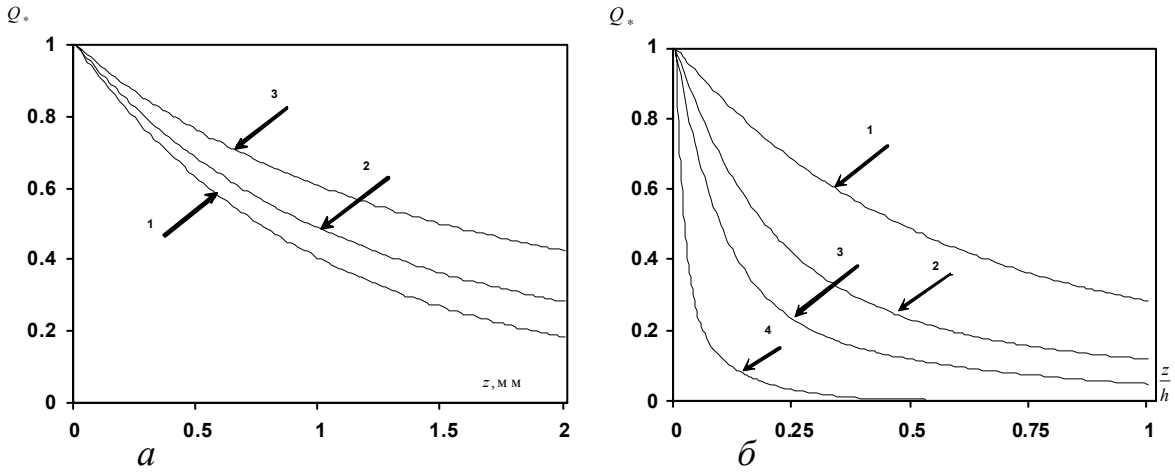


Рисунок 8.2 – Розподіл тепловиділень по товщині скляного шару

Початкову температуру T_0 в шарах і температуру T^{ext} у зовнішньому повітряному середовищі приймали такими, що дорівнюють 300 К. Розглядали температури випромінювальної поверхні $T_S = 1300,\ 2000,\ 3000$ К. В усіх випадках інтегральний потік випромінювання в напрямі шарів приймали однаковим і таким, що дорівнює потоку при 1300 К (завдяки вибору коефіцієнта k, який, відповідно, визначали з умови, щоб температури в шарах у разі дії випромінювання розглядуваної інтенсивності не перевищували

температури трансформації скла – 700 К).

На рис. 8.2, *а* показано розподіл тепловиділень $Q_* = Q_1(z)/Q_1(l)$ у шарі *2* фіксованої товщини $h = 2\,\text{мм}$. Тут криві *1-3* відповідають температурам випромінювальної поверхні $T_S = 1300, 2000, 3000$ К. Рис. 8.2, *б* ілюструє розподіл Q_* за температури випромінювальної поверхні T_S=2000 К, для різної товщини шару скла h=2 мм, 5 мм, 10 мм, 50 мм (криві *1–4*). На рис. 8.2 видно, що нерівномірність розподілу тепловиділень у шарі заданої товщини збільшується зі зниженням температури джерела випромінювання (див. рис. 8.2, *а*), а якщо вона фіксована – то зі збільшенням товщини шару (див. рис. 8.2, *б*).

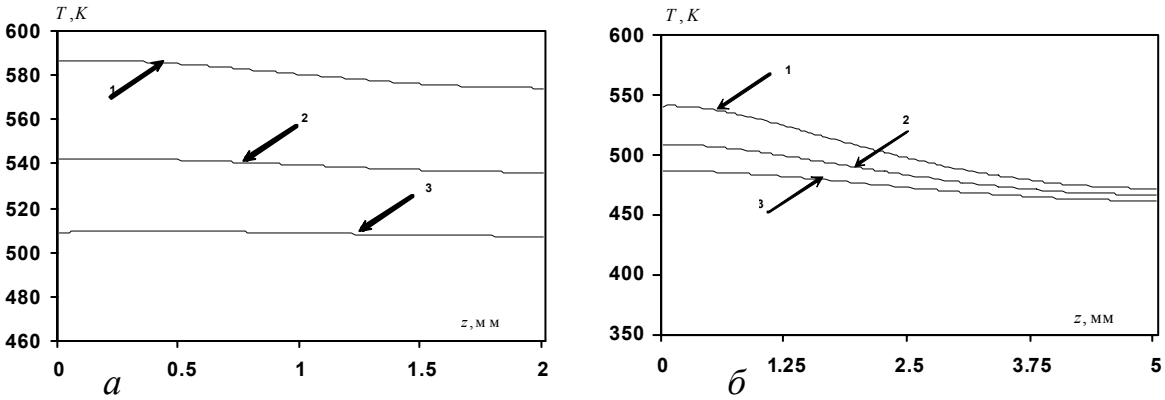


Рисунок 8.3 – Розподіл температури у скляному шарі

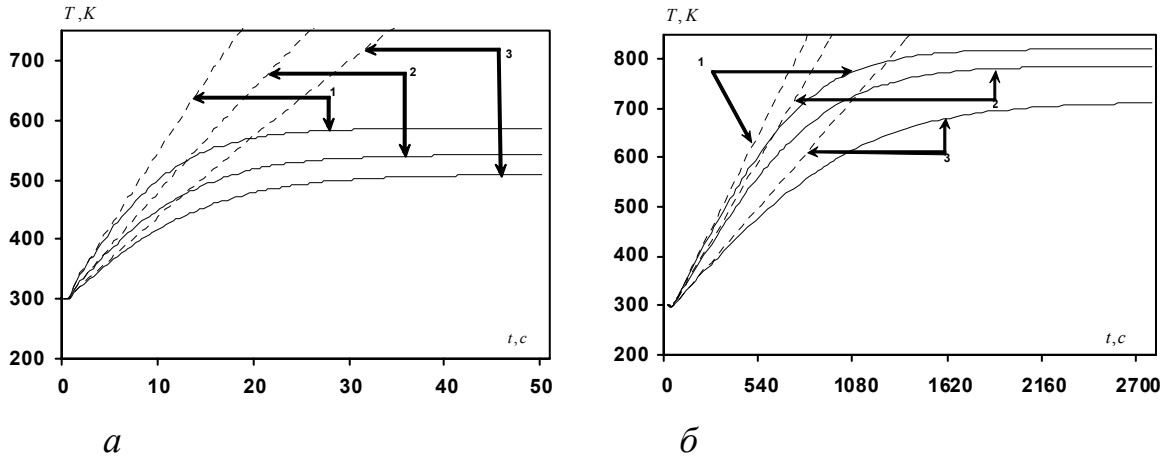


Рисунок 8.4 – Зміна в часі температури на поверхнях скляного (*а*) та металевого (*б*) шарів

Розподіли температури в скляному шарі завтовшки h=2 мм, 5 мм в усталеному тепловому режимі показані на рис 8.3, *а*, *б*, відповідно. Криві *1–3* отримані для температур джерела випромінювання $T_S = 1300$, 2000, 3000 К. Як бачимо температура в усіх перерізах шару цієї товщини, а також нерівномірність його нагрівання, зростають з зниженням температури джерела від 3000 до 1300 К (за однакового інтегрального потоку його випромінювання). За конкретної температури джерела T_S температура в шарі знижується зі збільшенням його товщини, і в цьому разі зростає нерівномірність нагрівання.

Зміну в часі температури на поверхні $z = l$ шару *2* завтовшки h=2 мм показано на рис. 8.4, *а*. Криві *1–3* відповідають температурам джерела $T_S = 1300$, 2000, 3000 К. Бачимо, що максимальна температура в шарі підвищується зі зниженням температури T_S. Штрихові криві на рис. 8.4 відповідають розрахункам без урахування випромінювання теплової енергії частково прозорим скляним шаром. Різке розходження штрихових та суцільних кривих при температурах 450–500 К свідчить про потребу розв’язування нелінійних задач типу (8.29) в разі дослідження нагрівання частково прозорих тіл до температур, вищих від згаданих.

Зміна в часі температури на поверхні $z = b$ металевого шару завтовшки b=2 мм за температур джерела $T_S = 1300$, 2000, 3000 К (суцільні криві *1–3*, відповідно), показана на рис. 8.4, *б*. Штрихові лінії відображають температуру, обчислену без урахування випромінювання теплової енергії поверхнею непрозорого металевого шару. Видно, що відповідні штрихові та суцільні криві різко розходяться, починаючи з температур 600–700 К. Отже, розв’язування нелінійних задач типу (8.29) доцільне в разі визначення температур непрозорих тіл, вищих від зазначених.

8.3 Напівдискретизація за товщиною задачі теплопровідності у тонкому криволінійному шарі

Поряд із суттєво тривимірними вузлами більшість реальних інженерних конструкцій містить елементи, які мають один, а то й два просторові виміри, значно менші від решти. Наявність об’єктів різної вимірності свідчить, з одного боку, про певну раціональність попереднього проектування, а з іншого боку, значно ускладнює доведення конструктивних параметрів до оптимальних значень як за допомогою традиційних розрахунків, так і комп’ютерного моделювання. Добре відомо, що спроби числового аналізу напружено-деформованого стану таких конструкцій на основі тривимірних рівнянь еластостатики приводять до сингулярно збурених крайових задач і, за звичай, супроводжуються значним зростанням вимог до комп’ютерних ресурсів та переосмислення решти вжитих засобів математичного моделювання.

Одним із підходів стосовно підвищення ефективності моделювання таких конструкцій є перехід до адекватних спрощених моделей розрахунку тонкостінних елементів на основі теорії пластин та оболонок. В контексті технології методу скінченних елементів такий підхід відомий під назвою d-адаптивності [203,204].

Тут ми демонструємо можливості d-адаптивності при моделюванні процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі. Припускається, що цей шар має нерегулярну форму, яка вимагає для свого опису використання криволінійної ортогональної системи координат [202]. Далі ми показуємо як використання простору апроксимацій з лінійною залежністю функцій від змінної товщини дозволяє здійснити напівдискретизацію вихідної варіаційної задачі за просторовою змінною товщини. Виявляється, що одержана модель меншої розмірності лишається коректно поставленою задачею, якщо певні інтеграли від даних задачі вдається точно обчислити.

8.3.1 Початково-крайова і варіаційна задача тривимірної теплопровідності для тонкого криволінійного шару

Розглянемо тонкий криволінійний шар товщини $h = const > 0$, який займає в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ обмежену область D з неперервною за Ліпшицем межею S. Серединну поверхню шару Ω віднесемо до ортогональної криволінійної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \le h/2$ (будемо вважати, що координатні лінії α_1, α_2 співпадають з лініями головних кривин поверхні). Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω. Тоді точки шару визначатимуться множиною

$$D = \Omega \times (-h/2, h/2)$$

межа S якої складається з лицьових поверхонь

$$\Omega_{\pm} = \Omega \times \{\pm h/2\}$$

та бічної поверхні

$$\Sigma = \Gamma \times (-h/2, h/2).$$

Нехай $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ і $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω відповідно. Тоді мають місце наступні рівності для параметрів Ляме [201]:

$$H_i = A_i(1 + \alpha_3 k_i), \quad i = 1, 2, \qquad (8.43)$$

$$H_3 = 1.$$

Будемо припускати, що розподіл температури $\theta = \theta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$ тонкого криволінійного шару описується рівнянням [205,206]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta = f \quad в \quad D \times (0, T]. \qquad (8.44)$$

Тут $\Delta\theta := \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3}\right)\right]$,

w – інтенсивність внутрішніх джерел тепла; t – змінна часу, $t\in(0,T]$, $0<T<+\infty$; $\mu=\frac{\lambda}{c_v\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності, λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, c_v – коефіцієнт теплоємності при постійному тиску, ρ – густина матеріалу.

Для визначеності будемо вважати, що на межі області D мають місце наступні крайові умови теплообміну з довкіллям:

$$-\mu\, n.\nabla\theta = q^{\pm} \quad \textit{на} \quad \Omega_{\pm}\times(0,T], \tag{8.45}$$

$$-\mu\, n.\nabla\theta = \tilde{q} \quad \textit{на} \quad \Sigma\times(0,T], \tag{8.46}$$

де $\nabla f=\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial\alpha_1},\frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha_2},\frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}\right\}$, $q^{\pm}$ та $\tilde{q}$ – задані густини теплових потоків, n – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні області D, $n.\nabla\theta$ – скалярний добуток векторів в $\mathbb{R}^3$.

Доповнимо рівняння (8.44) та крайові умови (8.45),(8.46) початковою умовою на значення температури

$$\theta\big|_{t=0}=\theta^0 \quad \textit{в} \quad D. \tag{8.47}$$

Отже, початково-крайова задача теплопровідності для тонкого криволінійного шару формулюється наступним чином:

$$\begin{cases}\textit{знайти функцію}\ \theta=\theta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)\ \textit{таку, що задовольняє рівняння (8.44),}\\ \textit{крайові умови (8.45),(8.46) та початкову умову (8.47).}\end{cases} \tag{8.48}$$

Введемо позначення $u(t):=u(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$, $u'(t):=\frac{\partial}{\partial t}u$, функціональні простори

$$G := L^2(D), \qquad W := H^1(D)$$

і сформулюємо відповідну до (8.48) варіаційну задачу теплопровідності:

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad \theta^0 \in G, \quad w \in L^2(0,T;G); \\ \textit{знайти} \quad \theta \in L^2(0,T;W) \quad \textit{таку, що} \\ \quad m(\theta'(t),\varphi) + a(\theta(t),\varphi) = < l(t),\varphi > \quad \forall t \in (0,T], \\ \quad m(\theta(0) - \theta^0, \varphi) = 0 \qquad\qquad\qquad \forall \varphi \in W. \end{cases} \tag{8.49}$$

Тут білінійні та лінійна форми визначаються виразами

$$m(\theta,\varphi) := \int_D \theta\varphi H_1 H_2 H_3 \, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \,, \tag{8.50}$$

$$a(\theta,\varphi) := \int_D \mu \nabla\theta . \nabla\varphi H_1 H_2 H_3 \, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \,, \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned} < l,\varphi > := m(w,\varphi) + \int_{\Omega_+} q^+ \varphi H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Omega_-} q^- \varphi H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\Sigma} \tilde{q}\varphi d\Sigma \quad \forall \theta,\varphi \in W. \end{aligned} \tag{8.52}$$

З огляду на структуру області інтегрування D ми можемо записати інтеграли в (8.50)-(8.52) у вигляді, більш зручному для майбутніх застосувань. Наприклад,

$$m(\theta,\varphi) = \int_{\Omega} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \int_{-h/2}^{h/2} \theta\varphi(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2) d\alpha_3 \,. \tag{8.50'}$$

Добре відомо, що варіаційна задача теплопровідності (8.49) коректно поставлена, див., напр. [205].

8.3.2 Напівдискретизація варіаційної задачі за змінною товщини

8.3.2.1 Простір апроксимацій

З огляду на малість товщини h шару виберемо підпростір W_1 простору допустимих функцій W такої структури

$$W_1 := \left\{ \varphi \in W : \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega) \right\}. \quad (8.53)$$

Специфікою підпростору W_1, яку ми будемо систематично експлуатувати, є відокремлення незалежної змінної α_3. Приймаючи W_1 за простір апроксимацій схеми Гальоркіна, розглянемо наступне наближення для розв'язку вихідної варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \textit{знайти} \;\; \theta_h \in L^2(0,T;W) \;\; \textit{таку, що} \\ \quad m\left(\theta_h'(t), \varphi\right) + a\left(\theta_h(t), \varphi\right) = < l(t), \varphi > \qquad \forall t \in (0,T]. \\ \quad m\left(\theta_h(0) - \theta^0, \varphi\right) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \varphi \in W_1. \end{cases} \quad (8.54)$$

Оскільки розв'язок θ_h має структуру

$$\theta_h(t) = \theta_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \theta_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \in W_1, \quad (8.55)$$

то тільки що сформульована задача (8.54) слугує для визначення вектор-функції двох просторових змінних $\vec{\theta} = \left\{ \theta_i(\alpha_1, \alpha_2, t) \right\}_{i=1}^2$ і, по-суті, є зв'язною системою варіаційних рівнянь. Отже, особливістю нашого підходу є заміна тривимірної (за просторовими змінними) задачі деякою двовимірною задачею, яку будемо називати напівдискретною (за змінною α_3) моделлю варіаційної задачі. Підставою для такої термінології є розвинення (8.55), яке показує, що відшукання температури θ тонкого шару можна замінити знаходженням вектора $\vec{\theta} = \left\{ \theta_i(\alpha_1, \alpha_2, t) \right\}_{i=1}^2$, компоненти якого є функціями часу t і лише двох просторових змінних (α_1, α_2) на серединній поверхні Ω шару D.

8.3.2.2 Структура форм напівдискретної задачі

Зараз ми деталізуємо структуру напівдискретної варіаційної задачі (8.54) з врахуванням специфіки простору W_1.

З цією метою ми введемо простори векторних функцій

$$H := \left[L^2(\Omega)\right]^2 \quad \text{і} \quad V := \left[H^1(\Omega)\right]^2.$$

і такі позначення для деяких характеристик геометричних даних

$$\chi_i := \frac{(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)}{(1+\alpha_3 k_i)^2}, \tag{8.56}$$

$$\beta^n := \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n (1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)\, d\alpha_3, \tag{8.57}$$

$$\gamma_i^n := \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n \chi_i\, d\alpha_3, \quad i=1,2, \quad n=0,1,2. \tag{8.58}$$

Лема 8.1 (про напівдискретизовану білінійну форму енергії температурного поля)

Нехай оператор $\Pi : W_1 \to V$ діє згідно правила

$$\varphi \in W_1 \to \Pi\varphi = \vec{\varphi} \in V.$$

Тоді білінійна форма $m(\cdot,\cdot) : G \times G \to \mathbb{R}$, визначена в (8.50), допускає наступне подання на просторі W_1

$$m(\theta,\varphi) = \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) \quad \forall \theta,\varphi \in W_1, \tag{8.59}$$

де

$$m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) := \int_{\Omega} \beta^{i+j-2} \theta_i \varphi_j A_1 A_2\, d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad \forall \vec{\theta},\vec{\varphi} \in V.$$

Лема 8.2 (про напівдискретизовану форму дисипації температурного поля)

Білінійна форма $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$, визначена в (8.51), допускає наступне подання

$$a(\theta,\varphi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \quad \vec{\theta} = \left(\theta_1,\theta_2\right), \quad \vec{\varphi} = \left(\varphi_1,\varphi_2\right), \quad \forall \theta,\varphi \in W_1, \tag{8.60}$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) := \int_{\Omega} \mu \sum_{k=1}^{2} \gamma_k^{i+j-2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_k} \frac{A_1 A_2}{A_k^2} da_1 d\alpha_2 + \\ + \delta_{2i}\delta_{2j} \int_{\Omega} \mu \beta^0 \theta_i \varphi_j A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad i,j = 1,2 \quad \forall \vec{\theta},\vec{\varphi} \in V, \end{aligned} \tag{8.61}$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Лема 8.3 (про напівдискретизований функціонал інтенсивності джерел тепла)

Якщо дані задачі теплопровідності тонкого шару допускають розвинення вигляду

$$\begin{aligned} f\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right) \cong f_1\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right) + \alpha_3 f_2\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right), \\ \tilde{q}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right) \cong \tilde{q}_1\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right) + \alpha_3 \tilde{q}_2\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right), \end{aligned} \tag{8.62}$$

то функціонал l задачі (8.49) подається в такому записі

$$< l,\varphi > = \sum_{i,j=1}^{2} \left[m_{ij}\left(\vec{w},\vec{\varphi}\right) + < l_{ij},\vec{\varphi} > \right] + \sum_{i=1}^{2} < l_i,\vec{\varphi} > \quad \forall \varphi \in W_1 \tag{8.63}$$

де на додаток до раніше введених позначень

$$< l_{ij},\vec{\varphi} > := \int_{\Gamma} \beta^{i+j-2} \tilde{q}_i \varphi_j A_1 A_2 d\gamma, \quad \forall \vec{\varphi} \in \left[L^2(\Gamma) \right]^2, \tag{8.64}$$

$$< l_i,\vec{\varphi} > := \int_{\Omega} \left[q^+ \xi_+ + (-1)^{i-1} q^- \xi_- \right] \left(\frac{h}{2} \right)^{i-1} \varphi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 , \tag{8.65}$$

$$\xi_{\pm} := 1 \pm \left(k_1 + k_2\right)\frac{h}{2} + k_1 k_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 . \tag{8.66}$$

Доведення лем ґрунтуються на розвиненні довільних допустимих функцій $\theta, \varphi \in W_1$ за правилами (8.62) в околі серединної поверхні Ω шару D і підставленні у (8.50), (8.51) та (8.52) відповідно. Тоді, використовуючи позначення (8.55)-(8.57), безпосередніми обчисленнями переконуємося у правильності висловлених тверджень.

8.3.3 Напівдискретизована задача теплопровідності

Тепер ми готові сформулювати основний результат.

Пропозиція 8.1 (про формулювання напівдискретної варіаційної задачі теплопровідності)

Нехай на додаток до умов лем 8.1-8.3 початковий розподіл температури θ^0 такий, що

$$\theta^0\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = \theta_1^0\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \alpha_3 \theta_2^0\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \quad \text{в} \quad D, \tag{8.67}$$

і мають місце наступні умови регулярності

$$\begin{cases} \vec{\theta}^0 = \left(\theta_1^0, \theta_2^0\right) \in H := \left[L^2\left(\Omega\right)\right]^2, \\ \vec{f} = \left(f_1\ , f_2\ \right) \in L^2\left(0, T; H\right), \\ \vec{\tilde{q}} = \left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\right) \in L^2\left(0, T; \left[L^2\left(\Gamma\right)\right]^2\right), \\ q^+, q^- \in L^2\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right). \end{cases} \tag{8.68}$$

Тоді варіаційна задача теплопровідності (8.54) за допомогою напівдискретизації за товщиною приводиться до наступного формулювання:

$$\begin{cases} \textit{знайти пару } \vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)\in L^2(0,T;V) \textit{ таку, що} \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2}\left\{m_{ij}\left(\vec{\theta}'(t),\vec{\varphi}\right)+a_{ij}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\varphi}\right)\right\}= \\ \quad =\sum\limits_{i.j=1}^{2}\left\{m_{ij}\left(\vec{w}(t),\vec{\varphi}\right)+<l_{ij},\vec{\varphi}>\right\}+\sum\limits_{i=1}^{2}<l_i(t),\vec{\varphi}> \quad \forall t\in(0,T], \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2}m_{ij}\left(\vec{\theta}(0)-\vec{\theta}^0,\vec{\varphi}\right)=0 \qquad \forall\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2)\in V. \end{cases} \tag{8.69}$$

Далі там, де це доцільно, з метою спрощення запису задачі (8.69) будемо вживати позначення

$$\begin{cases} \mathcal{M}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right):=\sum\limits_{i,j=1}^{2}m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \\ \mathcal{A}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right):=\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \qquad \forall\vec{\theta},\vec{\varphi}\in V, \\ <\mathcal{L},\vec{\varphi}>:=\sum\limits_{i.j=1}^{2}\left\{m_{ij}\left(\vec{w},\vec{\varphi}\right)+<l_{ij},\vec{\varphi}>\right\}+\sum\limits_{i=1}^{2}<l_i,\vec{\varphi}>. \end{cases} \tag{8.70}$$

В цих термінах напівдискретну варіаційну задачу теплопровідності (8.69) можна переписати наступним чином :

$$\begin{cases} \textit{знайти } \vec{\theta}\in L^2(0,T;V) \textit{ такий, що} \\ \mathcal{M}\left(\vec{\theta}'(t),\vec{\varphi}\right)+\mathcal{A}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\varphi}\right)=<\mathcal{L}(t),\vec{\varphi}> \quad \forall t\in(0,T], \\ \mathcal{M}\left(\vec{\theta}(0)-\vec{\theta}^0,\vec{\varphi}\right)=0 \qquad \forall\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2)\in V. \end{cases} \tag{8.71}$$

8.3.4 Напівдискретна задача теплопровідності: змішані крайові умови

Аналіз нашого алгоритму напівдискретизації варіаційної задачі теплопровідності для тонкого шару (8.49) показує, що він допускає узагальнення в двох напрямках:

В багатьох застосуваннях необхідно здійснювати аналіз температури за більш загальних крайових умов, ніж використані нами умови теплообміну (8.45),(8.46). Нижче ми показуємо, як вжита нами в п. 8.3.2.1 методика без принципових змін приводить до формування напівдискретних задач і які зміни в структуру задачі (8.54) вносить наявність крайових умов на температуру.

Якщо дані вихідної задачі теплопровідності є достатньо регулярними функціями змінної α_3, то можна скористатись наближенням більш високих порядків

$$\theta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(\alpha_1,\alpha_2,t)\alpha_3^i, \quad n\geq 2. \tag{8.72}$$

В результаті безпосереднього використання методики п.8.3.2.1 знову прийдемо до відшукання вектора функцій $\vec{\theta}=\{\theta_i(\alpha_1,\alpha_2,t)\}_{i=1}^{n}$ із варіаційної задачі вигляду (8.71) із більш складною структурою білінійних форм та лінійного функціоналу.

В багатьох застосуваннях необхідно здійснювати аналіз температури за більш загальних крайових умов, ніж використані нами умови теплообміну за Ньютоном (8.45). Нижче ми показуємо, як вжита нами в п. 8.3.2.1 методика без принципових змін приводить до формулювання напівдискретних задач, і які зміни в структуру задачі (8.60) вносить наявність крайових умов на температуру.

Наслідок 8.1 (про напівдискретну задачу теплопровідності з однорідними умовами Діріхле на бічній поверхні шару)

Нехай в початково-крайовій задачі теплопровідності тонкого шару (8.48) крайова умова (8.46) замінена однорідною умовою Діріхле

$$\theta=0 \qquad \textit{на} \quad \Sigma\times(0,T] \tag{8.73}$$

і при цьому для решти даних задачі виконуються умови регулярності (8.69) із пропозиції 8.1.

Тоді структура відповідної напівдискретної варіаційної задачі (8.68) містить такі зміни:

$$V := \left\{ \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \left[H^1(\Omega) \right]^2 : \quad \vec{\varphi} = 0 \quad на \quad \Gamma \right\}, \tag{8.74}$$

$$l_{ij}(t) \equiv 0, \qquad i, j = 1, 2. \tag{8.75}$$

Дещо інші зміни в формулювання напівдискретної задачі теплопровідності вносить заміна умови (8.45) на однорідну умову Діріхле.

Наслідок 8.2 (про напівдискретну задачу теплопровідності з однорідними умовами Діріхле на бічній та частині лицьової поверхні шару)

Нехай на додаток до умов наслідку 8.1

$$\theta = 0 \qquad \text{на} \quad \Omega_D \times (0, T], \quad \Omega_D \subset \Omega_+, \quad mes\, \Omega_D > 0 \tag{8.76}$$

Тоді видозмінюються наступні компоненти напівдискретної задачі (8.70) :

$$V := \left\{ \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \left[H^1(\Omega) \right]^2 : \quad \vec{\varphi} = 0 \quad на \quad \Gamma \right\};$$

$$l_{ij}(t) \equiv 0, \qquad i, j = 1, 2; \tag{8.77}$$

$$\langle l_i, \vec{\varphi} \rangle := \int\limits_{\Omega_+ \setminus \Omega_D} q^+ \xi_+ \left(\frac{h}{2} \right)^{i-1} \varphi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Omega} q^- \xi_- \left(-\frac{h}{2} \right)^{i-1} \varphi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad \forall \vec{\varphi} \in V, \quad i = 1, 2.$$

Наведені тут наслідки цілком ясно ілюструють можливості перенесення алгоритму напівдискретизації на задачі теплопровідності з іншими крайовими умовами, що можуть зустрітись в застосуваннях.

8.3.5 Коректність напівдискретної задачі теплопровідності для тонкого шару

Тут з метою спрощення технічних деталей ми обмежимось варіаційною задачею теплопровідності з наслідку 8.1. За наявності крайової умови Діріхле

(8.73) на бічній поверхні Σ шару D простір допустимих функцій W варіаційної задачі теплопровідності (8.49) має наступну структуру

$$W := \left\{ \varphi \in H^1(D) : \varphi = 0 \quad \textit{на} \quad \Sigma \right\}. \tag{8.78}$$

Добре відомо [116], що в цьому випадку білінійна форма $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$ є скалярним добутком на W і породжує енергетичну норму

$$|\varphi|_W := a^{\frac{1}{2}}(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in W, \tag{8.79}$$

яка еквівалентна звичайній нормі $\|\cdot\|_{1,D}$ простору $H^1(D)$. Позначимо через W' – простір, спряжений до гільбертового простору W з нормою (8.79).

Нарешті наділимо простір G нормою

$$|\varphi|_G := m^{\frac{1}{2}}(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in G. \tag{8.80}$$

Теорема 8.2 (про коректність напівдискретної задачі теплопровідності**)**

Нехай дані варіаційної задачі теплопровідності (8.54) задовольняють наступні умови:

I) білінійна форма $m(.,.) : G \times G \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна та G – еліптична;

II) білінійна форма $a(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна та W – еліптична;

III) $l \in L^2(0,T;W')$.

Тоді напівдискретна за товщиною задача теплопровідності коректно поставлена; тобто, знайдеться єдиний розв'язок $\vec{\theta} \in L^2(0,T;V) \bigcap L^\infty(0,T;H)$, рівнянь задачі (8.54) і при цьому будуть вірними апріорні оцінки:

$$\mathcal{M}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\theta}(t)\right) + \int_0^t \mathcal{A}\left(\vec{\theta}(\tau),\vec{\theta}(\tau)\right) dt \le \mathcal{M}\left(\vec{\theta}^0,\vec{\theta}^0\right) + \int_0^t \|l(\tau)\| d\tau \qquad \forall \tau \in (0,T]. \tag{8.81}$$

Доведення. За умов (I)-(III) варіаційна задача (8.49) коректно поставлена (див. напр. [205]) і при цьому

$$\left|\theta(t)\right|_G^2 + \int_0^t \left|\theta(\tau)\right|_W^2 d\tau \le \left|\theta^0\right|_G^2 + \int_0^t \left\|l(\tau)\right\|^2 d\tau \qquad \forall \tau \in (0,T]. \tag{8.82}$$

Тепер введемо простір

$$W_1 = \left\{\varphi \in W : \varphi = \varphi_1 + \alpha_3 \varphi_2 \quad \forall \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in V\right\} \subset W. \tag{8.83}$$

Зауважимо, що структура простору W_1 визначає бієктивне відображення $I : W_1 \to V$ згідно правила $\forall \varphi \in W_1 \to I\varphi := \vec{\varphi} \in V$ і при цьому згідно (8.71)

$$\left|\varphi\right|_W^2 = a(\varphi,\varphi) = \mathcal{A}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}),$$

$$\left|\varphi\right|_G^2 = m(\varphi,\varphi) = \mathcal{M}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}), \qquad \forall \varphi \in W. \tag{8.84}$$

Якщо при цьому ввести норми

$$\left|\varphi\right|_V := \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}) \qquad \forall \vec{\varphi} \in V,$$

$$\left|\varphi\right|_H = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}) \qquad \forall \vec{\varphi} \in H. \tag{8.85}$$

то відображення $I : W_1 \to V$ визначить ізоморфізм просторів W_1 та V.

Нарешті, оскільки задача (8.49) коректно поставлена, то внаслідок щойно встановленого ізоморфізму варіаційна задача (8.72) має єдиний розв'язок $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$.

При цьому бажана апріорна оцінка (8.81) є безпосереднім наслідком застосування тотожностей (8.84) до енергетичної нерівності (8.82).

8.3.6 Початково-крайова задача напівдискретної теплопровідності

У цьому розділі ми демонструємо загальну структуру відповідної до (8.70) початково-крайової задачі напівдискретної теплопровідності. Вона отримана з рівнянь задачі (8.70) стандартним шляхом із використанням формул інтегрування частинами і має наступний вигляд:

$$
\begin{cases}
\textit{знайти такі } \theta_1, \theta_2, \textit{ що задовольняють систему рівнянь:} \\
\sum_{i=1}^{2}\left\{\beta^{i-1}\theta_i' - \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum_{j=1}^{2}\gamma_j^{i-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{A_1A_2}{A_j^2}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_j}\right)\right\} = \sum_{i=1}^{2}\beta^{i-1}f_i + \xi_+q^+ + \xi_-q^-, \\
\sum_{i=1}^{2}\left\{\beta^{i}\theta_i' - \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum_{j=1}^{2}\left[\gamma_j^{i}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{A_1A_2}{A_j^2}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_j}\right) - \delta_{2i}\delta_{2j}\frac{A_1A_2}{2}\beta^{j-2}\theta_i\right]\right\} = \\
\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{2}\beta^{i}f_i + \frac{h}{2}\left(\xi_+q^+ - \xi_-q^-\right) \ \text{ в } \ \Omega\times(0,T], \qquad (8.86) \\
\textit{початкові} \\
\theta_1\big|_{t=0} = \theta_1^0, \qquad \theta_2\big|_{t=0} = \theta_2^0, \qquad \textit{в } \Omega \\
\textit{та крайові умови} \\
\frac{2\mu}{A_1A_2}\sum_{i,j=1}^{2}\gamma_j^{i-1}\frac{\partial\theta_i}{A_j\partial\alpha_j}\cos\left(n,\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta^{i-1}\tilde{q}_i, \\
\frac{2\mu}{A_1A_2}\sum_{i,j=1}^{2}\gamma_j^{i}\frac{\partial\theta_i}{A_j\partial\alpha_j}\cos\left(n,\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{2}\beta^{i}\tilde{q}_i \qquad \textit{на } \Gamma,
\end{cases}
$$

де $\left(n,\alpha_j\right)$ *- кут між нормаллю до* Γ *та напрямком* α_j.

Нижче ми наводимо два класичні приклади задач теплопровідності, які показують особливості нашого способу напівдискретизації за товщиною.

8.3.6.1 Теплопровідна пластина

Якщо теплопровідний шар D є пластиною постійної товщини h з серединною поверхнею Ω, то його геометрія добре описується в декартовій прямокутній системі координат (x_1, x_2, x_3)

$$D = \Omega \times (-h/2, h/2).$$

Приймаючи $\alpha_i \equiv x_i$, знайдемо, що параметри Ляме та кривини набувають особливо простих значень

$$A_i \equiv 1, \qquad \kappa_i \equiv 0, \qquad i = 1,2,$$

У цьому випадку величини β^n і γ_i^n легко обчислюються:

$$\beta^0 = \gamma_i^0 = h, \qquad \beta^1 = \gamma_i^1 = 0, \qquad \beta^2\gamma_i^2 = \frac{h^2}{12} \qquad i = 1,2,$$

і напівдискретна модель (8.86) значно спрощується і формулюється наступним чином:

$$\begin{cases} \textit{знайти } \vec{\theta} = \{\theta_i(\alpha_1, \alpha_2, t)\} \textit{ такий, що} \\ \theta_1' - 2\mu\Delta\theta_1 = f_1 + \dfrac{q^+ + q^-}{h} \\ \theta_2' - 2\mu\Delta\theta_2 + \dfrac{12}{h^2}\mu\theta_2 = f_2 + \dfrac{12}{h^2}\dfrac{(q^+ - q^-)}{h} \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0,T] \\ \quad 2\mu\nabla\theta_i . n = \tilde{q}_i \qquad \textit{на} \quad \Gamma \times (0,T], \\ \quad \theta_i\big|_{t=0} = \theta_i^0 \qquad \textit{в} \quad \Omega, \qquad i=1,2. \end{cases} \tag{8.87}$$

Особливістю цієї задачі є той факт, що система рівнянь напівдискретної моделі поділяється на незалежні початково-крайові задачі для кожної компоненти вектора $\vec{\theta}$, які розв'язуються стандартною методикою методу скінченних елементів. Подібний результат одержано в працях [207,208].

8.3.6.2 Сферична оболонка

Нехай теплопровідний шар D є порожнистою кулею з серединною сферою Ω радіуса R і товщини h. Тоді його зручно описати за допомогою сферичних координат

$$\alpha_3 = \rho \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \alpha_1 = \psi \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_2 = \vartheta \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Значення параметрів Ляме та кривин наступні:

$$A_1 = R, \qquad A_2 = R\sin\psi, \qquad A_3 = 1, \qquad k = k_i = \frac{1}{R}, \qquad i = 1, 2,$$

і напівдискретна задача теплопровідності (8.86) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} \textit{знайти такі } \theta_1, \theta_2, \textit{ що задовольняють рівняння}: \\ \left(1 + \dfrac{h^2}{12R^2}\right)\theta_1' + \dfrac{h^2}{6R}\theta_2' - \dfrac{2\mu}{R^2\cos^2\psi}\left\{\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\psi^2} + \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\vartheta^2} - tg\psi\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\psi}\right\} = \\ \quad = \left(1 + \dfrac{h^2}{12R^2}\right)f_1 + \dfrac{h^2}{6R}f_2 + \left(\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{h}{4R^2}\right)q^+ + \left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{R} + \dfrac{h}{4R^2}\right)q^- \\ \dfrac{\theta_1'}{2} + 2\theta_2' - \dfrac{\mu}{R^2\cos^2\psi}\left\{\dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial\psi^2} + \dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial\vartheta^2} - tg\psi\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\psi}\right\} + \mu\left(\dfrac{6}{h^2} + \dfrac{1}{2R^2}\right) = \\ \qquad = \dfrac{f_1}{R} + \dfrac{f_2}{2} + 3\left\{\left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{hR} + \dfrac{1}{4R^2}\right)q^+ + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{hR} - \dfrac{1}{4R^2}\right)q^-\right\} \\ \textit{початкові умови з (8.87) та крайові умови} \\ \dfrac{2\mu}{R^3\cos^2\psi}\partial_2\theta_1 = \left(1 + \dfrac{h^2}{12R^2}\right)\tilde{q}_1 + \dfrac{h^2}{6R}\tilde{q}_2, \\ \dfrac{2\mu}{R^3\cos^2\psi}\partial_2\theta_2 = \dfrac{\tilde{q}_1}{R} + \dfrac{\tilde{q}_2}{2}. \end{cases}$$

8.4 Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення

При проектуванні елементів конструкцій сучасної техніки часто виникають складні задачі визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок, які можуть мати різноманітну геометричну форму і складну фізико-механічну структуру, а також перебувати під дією нерівномірних силових навантажень. Математичне моделювання із застосуванням обчислювальної техніки дає змогу використовувати числові методи, що ґрунтуються на варіаційних формулюваннях розглядуваних задач, які допомагають з достатньою точністю передбачити поведінку тонких оболонок.

Головна особливість застосованого нами підходу полягає в напівдискретизації вихідної задачі теорії пружності за просторовою змінною, яка визначена нормаллю до серединної поверхні, з метою зведення тривимірної задачі аналізу процесів у пружних тілах з малою (порівняно з іншими розмірами) товщиною до адекватних двовимірних задач, сформульованих на серединній поверхні цього тіла.

8.4.1 Головні припущення та геометричні характеристики оболонки

Розглянемо оболонку сталої товщини $h = \text{const} > 0$, що займає в евклідовому просторі R^3 обмежену область V з неперервною за Ліпшицем межею S. Позначимо через n одиничний вектор зовнішньої нормалі до S. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \le h/2$. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω. Тоді точки

оболонки визначатиме множина $V = \Omega \times]-h/2, h/2[$, межу S якої повністю описують поверхні $\Omega_{\pm} = \Omega \times \{\pm h/2\}$ та $\Sigma = \Gamma \times]-h/2, h/2[$.

Уведена параметризація оболонки дає підстави стверджувати, що елемент об'єму оболонки $dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$. Тут H_i $(i = 1,2,3)$ – параметри Ляме, причому

$$H_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = A_i(1 + \alpha_3 k_i) \qquad i = 1,2 \tag{8.88}$$

$$H_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$$

де $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ і $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ $(i = 1,2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω та її головні кривини, відповідно.

Припустимо, що оболонка піддається дії

- поверхневого навантаження

$$\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i(\alpha)\}_{i=1}^{3} \tag{8.89}$$

прикладеного до поверхні $S_\sigma = \Omega_+ \cup \Omega_-$;

- поверхневого навантаження

$$\hat{\tau} = \{\hat{\tau}_t(\alpha, \alpha_3), \hat{\tau}_s(\alpha, \alpha_3), \hat{\tau}_n(\alpha, \alpha_3)\}^T \tag{8.90}$$

на частині Σ_σ поверхні Σ, причому $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times]-h/2, h/2[$, $\qquad \Gamma_\sigma \subset \Gamma$;

- масових сил

$$f(\alpha, \alpha_3) = \{f_i(\alpha, \alpha_3)\}_{i=1}^{3} \qquad \text{в } V \tag{8.91}$$

де $\hat{\tau}_t, \hat{\tau}_s, \hat{\tau}_n$ – нормальна, дотична та перерізувальна складові прикладеного до Σ_σ поверхневого навантаження (тут t, s, n,– орти правої трійки криволінійних координат).

На решті бічної поверхні $\Sigma_u = \Sigma \setminus \Sigma_\sigma$ задано переміщення

$$u|_{\Sigma_u} = \{u_i^g\}_{i=1}^{6} \tag{8.92}$$

8.4.2 Апроксимація переміщень

Нехай процес деформування оболонки в розглядуваній системі координат характеризують три проекції U_1, U_2, U_3, вектора повного переміщення точки в напрямах, дотичних до координатних ліній $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, у цій точці. З огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами оболонки товщину h, обмежимось в описі переміщень точок оболонки лише лінійними складовими ряду Тейлора в околі значень $\alpha_3 = 0$. Тоді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2) \tag{8.93}$$

Тут $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ $(i = 1,2,3)$ описують переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки, оскільки $u_i(\alpha_1, \alpha_2) = U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)$, а $\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\partial U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_3}$ $(i = 1,2,3)$ характеризують залишкові члени ряду Тейлора і визначають кут повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні. Оскільки $\gamma_3(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, то апроксимація (8.93) припускає зміну довжини елемента нормалі в разі деформування.

Зі співвідношення (8.93), яке відповідає кінематичній гіпотезі теорії оболонок типу Тимошенка, випливає, що вектор переміщень довільної точки оболонки повністю визначений компонентами вектора переміщень $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$ $(i = 1,2,3)$ та вектора кутів повороту $\gamma = \{\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2)\}_{i=1}^{3}$ нормалі до серединної поверхні оболонки.

Для зручності подальшого викладу введемо вектор узагальнених переміщень серединної поверхні оболонки $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$.

8.4.3 Деформація оболонки

Компоненти тензора лінійних деформацій E_{ij}, $(i, j = 1,2,3)$ довільної точки оболонки визначають через компоненти деформації серединної поверхні за допомогою співвідношень [201].

$$E_{ii} = \frac{e_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}; \quad E_{i3} = \frac{2e_{i3} + \alpha_3 2\kappa_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i}, \qquad i = 1,2;$$

$$E_{33} = e_{33}; \qquad E_{12} = \frac{2e_{12} + \alpha_3 2\kappa_{12}}{(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)} \tag{8.94}$$

де $\{e_{ij}(u)\}$ та $\{\kappa_{ij}(u)\}$ – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій, визначені так:

$$e_{ii} = \frac{\partial_i u_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} u_{3-i} + u_3 k_i; \qquad 2e_{i3} = \gamma_i + \frac{\partial_i u_3}{A_i} - k_i u_i; \qquad i = 1,2;$$

$$e_{33} = \gamma_3; \qquad 2e_{12} = \frac{A_1}{A_2}\partial_2 \frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\partial_1 \frac{u_2}{A_2}; \qquad \kappa_{ii} = \frac{\partial_i \gamma_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} \gamma_{3-i} + \gamma_3 k_i;$$

$$2\kappa_{i3} = \frac{\partial_i \gamma_3}{A_i}; \qquad i = 1,2; \tag{8.95}$$

$$2\kappa_{12} = \frac{k_1}{A_2}\partial_2 u_1 - \frac{k_2 \partial_2 A_1}{A_1 A_2} u_1 + \frac{k_2}{A_1}\partial_1 u_2 -$$
$$- \frac{k_1 \partial_1 A_2}{A_1 A_2} u_2 + \frac{A_1}{A_2}\partial_2 \frac{\gamma_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\partial_1 \frac{\gamma_2}{A_2}.$$

У співвідношеннях (8.95) та далі введені позначення $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i}$, $(i = 1,2,3)$.

Описані вище компоненти можна об’єднати у вектор компонент тензора лінійної деформації $e = \{e_i\}_{i=1}^{11} = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\}^T$.

8.4.4 Потенціальна енергія оболонок та напруження

Потенціальну енергію оболонки виражають за допомогою компонент тензорів напружень $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ та деформацій $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}E_{ii} + \sigma_{12}E_{12} + \sigma_{13}E_{13} + \sigma_{23}E_{23}\right)dV =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}E_{ii} + \sigma_{12}E_{12} + \tag{8.96}$$

$$+\sigma_{13}E_{13} + \sigma_{23}E_{23}\ )(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)d\alpha_3.$$

Уведемо усереднені характеристики напружень σ_{ij} :

$$\left[N_{ij}, M_{ij}\right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(1+\alpha_3 k_{3-i})[1,\alpha_3]d\alpha_3;$$

$$N_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33}(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)d\alpha_3;$$

$$\left[N_{i3}, M_{i3}\right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3}(1+\alpha_3 k_{3-i})[1,\alpha_3]d\alpha_3, \qquad i,j=1,2. \tag{8.97}$$

Використаємо умову рівності з точністю до $o\left(h^2\right)$ крутних моментів $H = M_{12} = M_{21}$ та симетричне зусилля Новожилова [211] $S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$. Підставимо у (8.96) замість деформацій їхні вирази (8.94) та проінтегруємо за α_3 з урахуванням (8.97), отримаємо такий вираз для роботи внутрішніх сил на варіаціях переміщень:

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} \Big(N_{11} e_{11}(\delta u) + M_{11}\kappa_{11}(\delta u) + N_{22} e_{22}(\delta u) + M_{22}\kappa_{22}(\delta u) + \\ + N_{33} e_{33}(\delta u) + 2S e_{12}(\delta u) + 2H\kappa_{12}(\delta u) + 2N_{13} e_{13}(\delta u) + \\ + 2M_{13}\kappa_{13}(\delta u) + 2N_{23} e_{23}(\delta u) + 2M_{23}\kappa_{23}(\delta u) \Big) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{8.98}$$

Для зручності подальшого викладу введемо вектор зусиль-моментів $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{11} = \left(N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23} \right)^T$.

8.4.5 Робота зовнішніх сил на оболонку

Повна робота зовнішніх сил на варіаціях допустимих переміщень δU дорівнює сумі робіт масових сил (8.91) та поверхневих навантажень (8.89), (8.90):

$$\delta A = \iint_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^T \delta U (1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2) d\alpha_3 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{\tau}^T \delta U (1+\alpha_3 k_t) d\alpha_3 \right) d\Gamma + \\ + \iint_{\Omega_+} \left(\tilde{\sigma}^{+\frac{h}{2}} \right)^T \delta U^{+\frac{h}{2}} \left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \iint_{\Omega_-} \left(\tilde{\sigma}^{-\frac{h}{2}} \right)^T \delta U^{-\frac{h}{2}} \left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{8.99}$$

де k_t – кривина бічної поверхні оболонки в напрямі нормалі до кривої Γ; $\tilde{\sigma}^{\pm\frac{h}{2}}$ – напруження на лицьових поверхнях оболонки; $U^{\pm\frac{h}{2}}$ – переміщення на лицьових поверхнях оболонки.

Використаємо розвинення (8.93), зведемо (8.99), попередньо проінтегрувавши

за α_3 , до вигляду

$$\delta A = \int_{\Gamma} \left(N_t \delta u_t + N_s \delta u_s + N_n \delta u_n + M_t \delta\gamma_t + M_s \delta\gamma_s + M_n \delta\gamma_n \right) d\Gamma + \\ + \iint_{\Omega} \left(P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3 + m_1 \delta\gamma_1 + m_2 \delta\gamma_2 + m_3 \delta\gamma_3 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{8.100}$$

Тут уведені такі усереднені характеристики навантаження:

$$P_i = \left(1 + \frac{h}{2}k_1\right)\left(1 + \frac{h}{2}k_2\right)\hat{\sigma}_i^{+\frac{h}{2}} + \left(1 - \frac{h}{2}k_1\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_2\right)\hat{\sigma}_i^{-\frac{h}{2}} + \\ + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i \left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right) d\alpha_3;$$

$$m_i = \frac{h}{2}\left\{\left(1 + \frac{h}{2}k_1\right)\left(1 + \frac{h}{2}k_2\right)\hat{\sigma}_i^{+\frac{h}{2}} - \left(1 - \frac{h}{2}k_1\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_2\right)\hat{\sigma}_i^{-\frac{h}{2}}\right\} + \\ + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i \left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right) \alpha_3 d\alpha_3, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{8.101}$$

а також

$$\left[N_t, M_t\right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_t \left(1 + \alpha_3 k_t\right)\left[1, \alpha_3\right] d\alpha_3;$$

$$\left[N_s, M_s\right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_s \left(1 + \alpha_3 k_s\right)\left[1, \alpha_3\right] d\alpha_3; \tag{8.102}$$

$$\left[N_n, M_n\right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_n \left[1, \alpha_3\right] d\alpha_3.$$

Під k_s розуміємо кривину бічної поверхні оболонки в напрямі дотичної до кривої Γ .

8.4.6 Рівняння рівноваги оболонки та крайові умови

Рівняння рівноваги теорії оболонок, податливих на зсув і стиснення, та статичні крайові умови запишемо із принципу можливих переміщень [212], згідно з яким робота $\delta\Pi$ внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі δA зовнішніх сил на тих самих варіаціях.

У термінах зусиль і моментів система рівнянь рівноваги оболонок, податливих на зсув та стиснення, має вигляд

$$\begin{gathered}
\partial_1\left(N_{11}A_2\right)-N_{22}\partial_1 A_2+S\partial_2 A_1+\frac{1}{2}\partial_2\left(Hk_1A_1\right)+\\
+\frac{1}{2}Hk_2\partial_2 A_1+k_1A_1A_2N_{13}+A_1\partial_2 S=-P_1A_1A_2;\\
\partial_2\left(N_{22}A_1\right)-N_{11}\partial_2 A_1+S\partial_1 A_2+\frac{1}{2}\partial_1\left(Hk_2A_2\right)+\\
+\frac{1}{2}Hk_1\partial_1 A_2+k_2A_1A_2N_{23}+A_2\partial_1 S=-P_2A_1A_2;\\
\partial_1\left(N_{13}A_2\right)+\partial_2\left(N_{23}A_1\right)-A_1A_2\left(N_{11}k_1+N_{22}k_2\right)=-P_3A_1A_2;\\
\partial_1\left(M_{11}A_2\right)-M_{22}\partial_1 A_2+H\partial_2 A_1-A_1A_2N_{13}+A_1\partial_2 H=-A_1A_2m_1;\\
\partial_2\left(M_{22}A_1\right)-M_{11}\partial_2 A_1+H\partial_1 A_2-A_1A_2N_{23}+A_2\partial_1 H=-A_1A_2m_2;\\
\partial_1\left(M_{13}A_2\right)+\partial_2\left(M_{23}A_1\right)-A_1A_2\left(N_{33}+M_{11}k_1+M_{22}k_2\right)=-A_1A_2m_3
\end{gathered}\tag{8.103}$$

Крайові умови на напруження на частині контуру серединної поверхні Γ_σ ($\Gamma_\sigma \subset \Gamma$) запишемо так:

$$\begin{gathered}
N_t=N_{11}\cos^2\theta+N_{22}\sin^2\theta+\frac{1}{2}S\sin 2\theta+\frac{1}{4}\left\{\left(k_1+k_2\right)H\right\}\sin 2\theta;\\
N_s=\frac{1}{2}\left(N_{22}-N_{11}\right)\sin 2\theta+S\cos^2\theta-S\sin^2\theta+\frac{1}{2}\left(k_2\cos^2\theta-k_1\sin^2\theta\right)H;\\
N_n=N_{13}\cos\theta+N_{23}\sin\theta;\\
M_t=M_{11}\cos^2\theta+M_{22}\sin^2\theta+\frac{1}{2}H\sin 2\theta;
\end{gathered}\tag{8.103'}$$

$$M_s = \frac{1}{2}\left(M_{22} - M_{11}\right)\sin 2\theta + H\cos^2\theta - H\sin^2\theta;$$

$$M_n = M_{13}\cos\theta + M_{23}\sin\theta$$

У формулах (8.103') символом θ позначено кут між нормаллю n до границі області Ω та віссю α_1 .

8.4.7 Фізичні співвідношення

Щоб повністю описати процес лінійного деформування ізотропної оболонки, необхідно доповнити систему наведених вище рівнянь співвідношеннями, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами:

$$\sigma = Be \tag{8.104}$$

Тут B – матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11, ненульові компоненти якої такі:

$$B^{1,1} = B^{2,2} = B^{3,3} = \frac{(1-\nu)Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$B^{1,2} = B^{2,1} = B^{1,3} = B^{3,1} = B^{2,3} = B^{3,2} = \frac{\nu Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$B^{4,4} = B^{5,5} = B^{6,6} = \frac{Eh}{(1+\nu)};$$

$$B^{7,7} = B^{8,8} = \frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}; \tag{8.105}$$

$$B^{7,8} = B^{8,7} = \frac{\nu Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$B^{9,9} = B^{10,10} = B^{11,11} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}.$$

Нижче наведені формули для обчислення напружень у довільній точці оболонки:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{h}\left(N_{11} + 12M_{11}\frac{\alpha_3}{h^2} \right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{h}\left(N_{22} + 12M_{22}\frac{\alpha_3}{h^2} \right)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{h}\left(N_{33} + 6\nu\left(M_{11} + M_{22} \right)\frac{\alpha_3}{h^2} \right) \qquad (8.106)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{h}\left(S + 12H\frac{\alpha_3}{h^2} \right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{h}\left(N_{13} + 12M_{13}\frac{\alpha_3}{h^2} \right)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{h}\left(N_{23} + 12M_{23}\frac{\alpha_3}{h^2} \right)$$

8.4.8 Числовий розв’язок (дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки)

Розглянемо замкнуту циліндричну оболонку, переріз серединної поверхні якої має вигляд

$$x = R\cos\alpha_2; \qquad y = R\sin\alpha_2; \qquad 0 \le \alpha_2 \le 2\pi.$$

Оболонка перебуває під дією рівномірно розподіленого внутрішнього навантаження $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 = P$; краї $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_1 = a$ шарнірно оперті. Розрахунок виконано для значень $\frac{a}{R} = 1{,}5$, $\nu = 0{,}3$, $\frac{h}{R} = 0{,}025$, $E = 1$. Тут R – радіус оболонки; h – товщина оболонки; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

У таблицях 8.1 – 8.3 наведено значення $2u_3E \big/ \left(RP \cdot 10^2 \right)$, $2N_{22} \big/ RP$ та

напружень σ_{22}/P на зовнішній поверхні циліндра для різних $\alpha_1 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ числового розв'язку, розглянутого в праці [154] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка – Міндліна), який порівнюють із результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної нами.

Таблиця 8.1

α_1	Числовий розв'язок $2u_3E/(RP\cdot 10^2)$	
	[154]	МСЕ (розбиття
0.0	0.0	0.0
0.1579	0.4615	0.447006
0.3158	0.7392	0.720647
0.4737	0.8390	0.832992
0.6316	0.8520	0.852683
0.7895	0.8328	0.837230
0.9474	0.8123	0.817623
1.1050	0.8022	0.804499
1.2630	0.7976	0.798209
1.4210	0.7965	0.796071

Таблиця 8.2

α_1	Числовий розв'язок $2N_{22}/RP$	
	[154]	МСЕ (розбиття 19×1)
0.0	0.0	0.0
0.1579	1.154	1.11689
0.3158	1.848	1.80107
0.4737	2.098	2.08218
0.6316	2.130	2.13160
0.7895	2.082	2.09308
0.9474	2.031	2.04409
1.1050	2.005	2.01128
1.2630	1.994	1.99554
1.4210	1.991	1.99020

Таблиця 8.3

α_1	Числовий розв'язок	
	σ_{22}/P	
	[154]	МСЕ (розбиття 19×1)
0.0	0.0	0.0
0.1579	36.61	32.8840
0.3158	49.16	45.3140
0.4737	47.34	46.7364
0.6316	44.65	44.3569
0.7895	41.61	41.8245
0.9474	39.82	40.2689
1.1050	39.79	39.6192
1.2630	39.64	39.4725
1.4210	39.76	39.4862

8.4.9 Числовий розв'язок (дослідження напружено-деформованого стану катеноїда)

Розглянемо оболонку, що утворена обертанням лінії $y = a\ ch\dfrac{z}{a}$ навколо осі OZ. Один з контурів оболонки вільний, а інший – жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження q.

Параметричні рівняння розглядуваної оболонки мають вигляд

$$x(\alpha_1,\alpha_2) = a\ \cos\alpha_2\ ch\frac{\alpha_1}{a};$$

$$y(\alpha_1,\alpha_2) = a\ \sin\alpha_2\ ch\frac{\alpha_1}{a};$$

$$z(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1.$$

Коефіцієнти Ляме і кривини обчислені за формулами

$$A_1 = ch\frac{\alpha_1}{a}; \qquad A_2 = a\ ch\frac{\alpha_1}{a};$$

$$k_1 = -\frac{1}{a\ ch^2 \alpha_1 / a}; \qquad k_2 = \frac{1}{a\ ch^2 \alpha_1 / a}.$$

Зазначимо, що катеноїд деформується під дією осьового навантаження q, яке в локальній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ розкладається на компоненти в напрямі нормалі та дотичної до поверхні оболонки:

$$P_1 = q \frac{1}{\left(1 + sh^2 \alpha_1 / a\right)^{\frac{1}{2}}}; \qquad P_3 = -q \frac{sh\, \alpha_1 / a}{\left(1 + sh^2 \alpha_1 / a\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Розрахунок виконано для таких вхідних параметрів: $a = 40$ см, $b = 80$ см, модуль Юнга $E = 0,7 \cdot 10^6$ кг/см2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, товщина оболонки $h = 2$ см, навантаження $q = 17$ кг/см2, причому розглядуване навантаження є критичним.

На рисунках 8.5 – 8.7 показано графіки переміщень серединної поверхні оболонки u_1, u_3, та меридіального напруження σ_{11} на внутрішній поверхні оболонки. Точками позначений розв'язок, що наведений у [210] (у межах теорії Кіргофа – Лява).

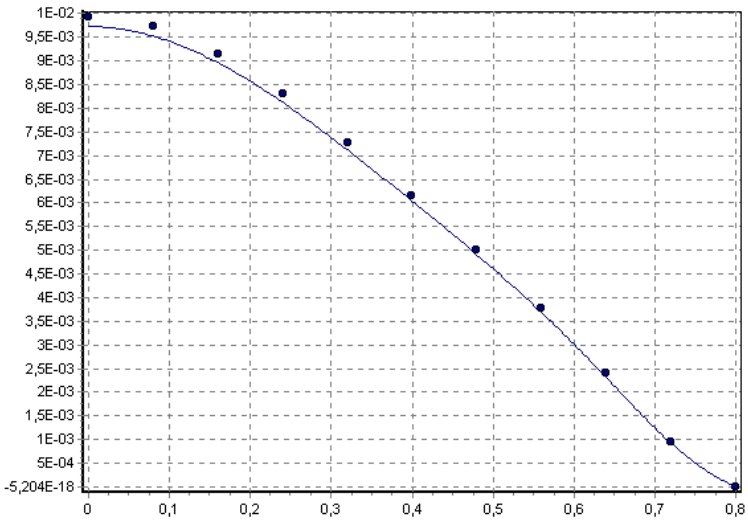


Рисунок 8.5 – Переміщення u_1

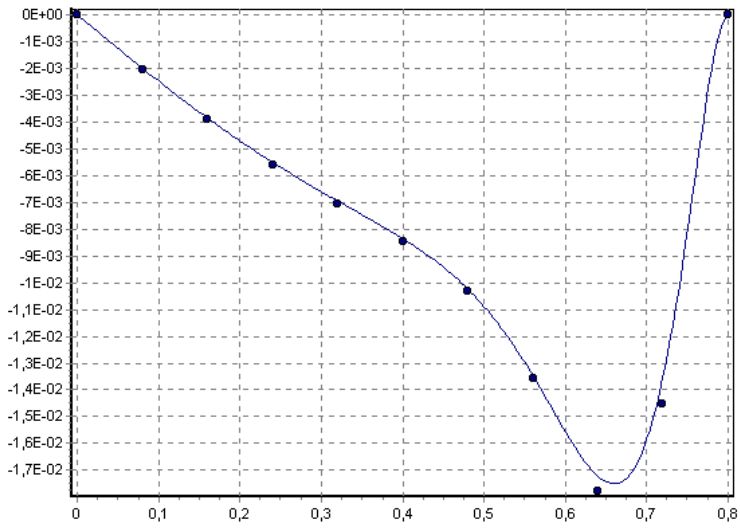


Рисунок 8.6 – Переміщення u_3

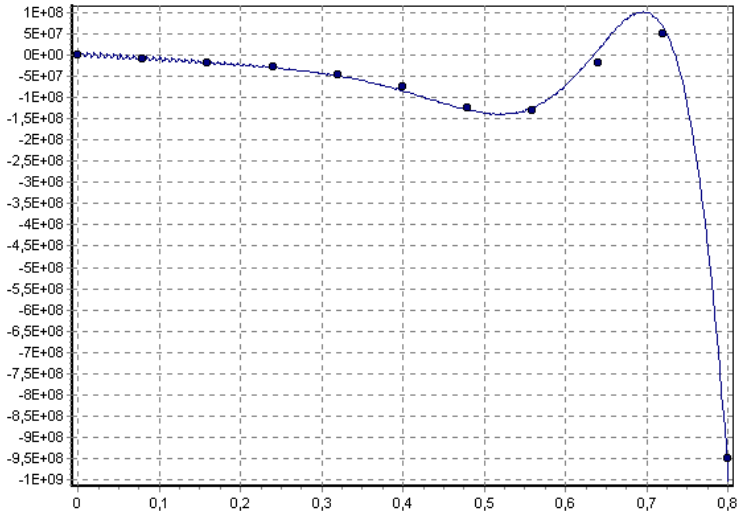


Рисунок 8.7 – Меридіальне напруження на внутрішній поверхні катеноїда

Отже, з аналізу наведених результатів обчислень випливає, що переміщення та напруження, знайдені за уточненою теорією оболонок, податливих на зсув та стиснення, практично повністю збігаються з числовими розв’язками в межах п’ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка – Міндліна та в межах теорії Кіргофа – Лява, знайденими іншими авторами.

8.5 Розв'язування лінійних крайових задач мультисітковим ітераційним нейронним методом

Точні розв'язки крайових задач для рівнянь з частинними похідними, до яких зводиться дослідження багатьох важливих проблем практики, вдається знайти лише для часткових випадків. Тому, зазвичай, такі задачі розв'язують наближено [215, 216, 222–226 та ін.]. Незважаючи на розвиток сучасної обчислювальної техніки, досягнення в програмному забезпеченні, конструюванні нових алгоритмів, є багато задач, які або не піддаються розв'язуванню наявними числовими методами, або не досягають задовільної точності. Це зумовило пошук нових ідейно методів, зокрема нейромережевих [221, 227]. Серед відомих числових методів для розв'язування крайових задач особливо поширеними є метод скінченних різниць (МСР) та метод скінченних елементів (МСЕ). Ідея цих методів полягає в редукції вихідної диференціальної задачі до дискретної: область зміни неперервного аргументу заміняють дискретною множиною точок (вузлів), які називають сіткою. Згідно з МСР, замість функцій неперервного аргументу розглядають функції дискретного аргументу, визначені у вузлах сітки. Похідні, що містять диференціальні рівняння і граничні умови, заміняють різницевими співвідношеннями. У такий спосіб знаходження розв'язку лінійної крайової задачі зводиться до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь [219, 224]. Теоретичною основою МСЕ є варіаційні методи. В праці [222] наведено аналіз найуживаніших скінченно-елементних апроксимацій наближених розв'язків крайових задач математичної фізики. Як альтернативні до відомих числових методів розв'язування крайових задач останнього часу ефективно застосовують мультисіткові методи [228]. Загальну характеристику методів розв'язування задач, які використовують штучні нейронні мережі (ШНМ), принципи побудови та функціонування ШНМ описано у [221, 227]. Для розв'язування крайових задач на ШНМ застосовують прямі та ітераційні методи, а також

різноманітні їхні комбінації (так звані гібридні методи). Зазначимо, що використання прямих методів є традиційним і найчастіше полягає у відображенні системи лінійних алгебричних рівнянь, одержаної внаслідок редукції неперервної диференціальної задачі до дискретної задачі, на архітектуру Хопфілда [221], а далі процес одержання розв'язку ґрунтується на мінімізації енергетичної функції нейронної мережі. Ітераційні методи розв'язування крайових задач на нейронних мережах почали застосовувати порівняно недавно (такий висновок можна зробити, наприклад, на підставі достатньо повної бібліографії, наведеної в книгах [221, 227]). Отже, досягнення сучасних високих технологій сприяло розвитку нових обчислювальних методів, у тому числі нейронних ітераційних.

Для характеристики можливості й ефективності застосування штучних нейронних мереж у процесі розв'язування лінійних крайових задач розглянемо реалізацію алгоритму мультисіткового методу на рекурентних штучних нейронних мережах, здатних апроксимувати з високою точністю шукані розв'язки досліджуваних задач. Тестування нейронного мультисіткового ітераційного методу виконували на модельних задачах, для яких відомі точні розв'язки, а наближені розв'язки знайдено іншими методами. Мультисітковим ітераційним методом на рекурентних ШНМ отримано з високою точністю розв'язки непростих, конфліктних задач з огляду на числову реалізацію (нестійкі обчислювальні схеми, наявність примежового шару тощо) відомих числових алгоритмів.

Отже, для розв'язування досліджуваних лінійних крайових задач будемо використовувати нейронний мультисітковий метод на рекурентних мережах. Перш ніж перейти до побудови нейроном мережі, стисло опишемо застосовність мультисіткового методу до крайових задач математичної фізики.

8.5.1 Ідея мультисіткового методу та алгоритм його реалізації

Розглянемо лінійну крайову задачу, яка полягає у розв'язуванні диференціального рівняння

$$Lu(x) = f(x),\ x \in \Omega \tag{8.107}$$

за деяких додаткових умов, накладених на шуканий розв'язок $u(x)$, на границі області Ω

$$u(x) = \chi(x),\ x \in \Gamma.$$

Розв'язок задачі шукаємо в області $G = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega \subset R^n$, $\Gamma \subset R^n$. На G заданий диференціальний оператор задачі $L : R^n \to R^n$, який діє на функцію $u(x)$, $x \in \Omega$. Через $f(x)$ і $\chi(x)$ позначено задані функції.

Для числового розв'язування сформульованої крайової задачі (8.107) виконаємо дискретизацію у такий спосіб, як у МСР [216]: замінимо область зміни неперервного аргументу дискретною множиною точок (сіткою) та апроксимуємо диференціальне рівняння різницевим рівнянням. У цьому разі отримаємо таку апроксимовану крайову задачу:

$$L_h u_h(x) = f_h(x),\ x \subset G_h, \tag{8.108}$$

де $L_h : H \to H$ – лінійний оператор, визначений у просторі сіткових функцій; u_h, f_h – функції, які визначені у вузлах сітки $G_h = \omega_h \cup \gamma_h$; $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, \ldots, N-1, h = 1/N\}$ – множина внутрішніх вузлів; $\gamma_h = \{x_i = ih, i = 0, N, h = 1/N\}$ – множина граничних вузлів.

На множині G_h неперервну функцію $u(x)$ апроксимуємо сітковою функцією $u(x_i) = u_i$, де x_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$ – значення x у вузлах сіткової області.

Нехай u_h – точний розв'язок рівняння (8.108). Через $u_h(n)$ позначимо отримане наближення на n-му кроці. Поточне значення похибки апроксимації $v_h(n)$ обчислимо за формулою

$$v_h(n) = u_h - u_h(n). \tag{8.109}$$

Відхил визначимо у такий спосіб:

$$d_h(n) = f_h - L_h u_h(n). \tag{8.110}$$

Тоді, використавши (8.109) та (8.110), запишемо рівняння для відхилу

$$L_h v_h(n) = d_h(n). \tag{8.111}$$

Зазначимо, що рівняння (8.111) є еквівалентним рівнянню (8.108). Для розв'язування дискретної задачі застосуємо технологію мультисіткових обчислень, яка полягає в організації обчислювального процесу шукання розв'язку на певній послідовності сіток дискретизації області. Перехід від однієї сітки до іншої забезпечують спеціальні оператори пролонгації та рестрикції [227].

Задачу (8.108) будемо розв'язувати на множині сіток $G^{(0)}$, $G^{(1)}$, … , $G^{(M)}$, починаючи з деякої базової сітки $G^{(0)}$, яка має найменший крок дискретизації h_0. Сітку $G^{(0)}$ називають точною. Значення кроку дискретизації для довільної сітки $G^{(i)}$ можна задати так: $h_i = k^{(i)} h_{i-1}$, де $k^{(i)}$ – коефіцієнт зростання кроку дискретизації. Здебільшого приймають $k^{(i)} = k = 2$.

Перехід від сітки $G^{(i)}$ до сітки $G^{(i+1)}$ відбувається за допомогою лінійного оператора рестрикції

$$R_i^{i+1} : H_i \to H_{i+1}. \tag{8.112}$$

У загальному випадку вигляд оператора рестрикції R_i^{i+1} залежить від номера сітки *i*. У разі переходу між різними сітками в обчислювальній практиці

часто застосовують той самий оператор, який позначають через R. Оператор пролонгації P_{i+1}^{i} виконує зворотний перехід:

$$P_{i+1}^{i} : H_{i+1} \to H_i . \tag{8.113}$$

Ідея мультисіткового ітераційного методу полягає у послідовному розв'язуванні рівнянь відхилу (8.111) на грубих сітках. Далі результат передають на точніші сітки та відбувається корекція розв'язку. Для параметрів $d^{(i)}(n)$ і $v^{(i)}(n)$, що відповідають значенням відхилу та похибки у вузлах сітки $G^{(i)}$, оператори R_i^{i+1} і P_{i+1}^{i}, відповідно, задають переходи

$$d^{(i+1)}(n) = R_i^{i+1} d^{(i)}(n);$$

$$\nu^{(i)}(n) = P_{i+1}^{i} \nu^{i+1}(n).$$

Очевидно, що обчислення на грубих сітках потребують значно меншої кількості обчислювальних ресурсів, ніж обчислення на точній сітці. З урахуванням цього мультисіткові методи містять, як звичайно, багато переходів на сітках з великим кроком дискретизації. Для мультисіткових методів існує фіксований порядок переходів між сітками. Алгоритми переходу між елементами заданої сіткової послідовності називають циклами. Їхню структуру визначають за коефіцієнтом циклічності γ. Частіше застосовують так звані V- або W-цикли. На рис. 8.8 зображені V- та W-цикли з коефіцієнтом циклічності $\gamma = 4$.

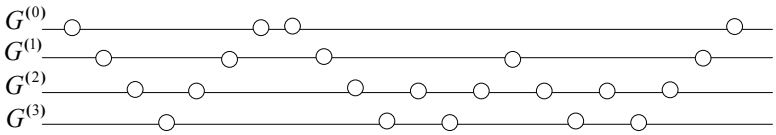


Рисунок 8.8 – Цикли V та W

Мультисітковий метод у загальному випадку містить таку послідовність етапів: перше згладжування, уточнення та друге згладжування [221].

Позначимо через $S\left[u^{(i)}(n), L^{(i)}, f^{(i)}\right]$ ітераційну схему згладжування розв'язку на сітці $G^{(i)}$. Опишемо алгоритм мультисіткового методу. Він складається з такої послідовності кроків на n-й ітерації.

Крок 1. *Перше згладжування наближення.*

1. Виконання ν_1 разів ітераційної схеми

$$u^{(0)}(n) = S^{\nu_1}\left[u^{(0)}(n), L^{(0)}, f^{(0)}\right].$$

2. Обчислення відхилу

$$d^{(0)}(n) = f^{(0)} - L^{(0)}u^{(0)}(n). \tag{8.114}$$

Крок 2. *Обчислення похибки на грубих сітках.* Цей крок полягає у послідовному розв'язуванні рівняння відхилу на грубих сітках. На кожній з сіток, за винятком останньої, визначені такі види операцій.

1. Операція рестрикції

$$d^{(i)}(n) = Rd^{(i-1)}(n), \quad 0 < i < M\ . \tag{8.115}$$

2. Перше згладжування похибки

$$\nu^{(i)}(n) = S^{\nu_1}\left[\nu^{(i)}(n), L^{(i)}, d^{(i)}\right]$$

для рівняння відхилу $L^{(i)}v^{(i)} = d^{(i)}$ на сітці $G^{(i)}$.

3. Операція пролонгації та корекція похибки на сітці $G^{(i)}$

$$\nu^{(i)}(n) = \nu^{(i)}(n) + P\nu^{(i-1)}(n), \quad 0 < i < M\ . \tag{8.116}$$

4. Друге згладжування похибки

$$\nu^{(i)}(n) = S^{\nu_2}\left[\nu^{(i)}(n), L^{(i)}, d^{(i)}\right].$$

Крок 3. *Корекція на точній сітці.*

1. Корекція наближення $u^{(0)}(n)$ шляхом обчислення похибки $v^{(0)}(n)$ на грубих сітках $u^{(0)}(n+1) = u^{(0)}(n) + \nu^{(0)}(n)$.

2. Друге згладжування наближення

$$u^{(0)}(n+1) = S^{\nu_2}\left[u^{(0)}(n+1), L^{(0)}, f^{(0)}\right].$$

Крок 4. *Повторення кроків 1–3 до досягнення збіжності.* Умова завершення ітераційного процесу має вигляд

$$\frac{\left|u_h(n+1) - u_h(n)\right|}{\left|u_h(n)\right|} < \varepsilon. \qquad (8.117)$$

Зазначимо, що мультисітковим методам властива висока швидкість збіжності для задач з гладкими коефіцієнтами, причому швидкість збіжності не залежить від кроку дискретизації [221, 228, 229].

8.5.2 Побудова нейронної мережі

Реалізуємо описаний вище мультисітковий метод на нейронній мережі. Для прикладу розглянемо лінійну одновимірну крайову задачу, розв'язок якої шукаємо на дискретній множині з $M = 4$ сіток. Точна сітка містить 17 точок. Нейрони ототожнимо з вузлами сіткової області, в якій будуємо наближений розв'язок крайової задачі. Архітектура нейронної мережі складається з кліткової двошарової мережі та субмережі прямого поширення. Якщо для розв'язування задачі необхідно застосувати $N+1$ сітку дискретизації, то кожній з сіток, за винятком $G^{(M)}$, ставлять у відповідність два шари нейронів. Оператори рестрикції (8.112) та пролонгації (8.113) визначають граф міжнейронних з'єднань і вагові коефіцієнти, відповідно, у верхній та нижній половині нейронної мережі прямого поширення. Структура мережі допускає зворотні зв'язки, тобто обчислення в нейроні поточного шару відбуваються з урахуванням попереднього стану цього ж шару. Мережі такого типу називають рекурентними [227]. Результатом роботи штучної нейронної мережі на *n*-му

кроці є корекція розв'язку $\Delta u(n)$. Архітектуру рекурентної ШНМ зображено на рис. 8.9. Нейронна субмережа прямого поширення (рис. 8.9) складається з чотирьох шарів. Першим шаром є найточніша сітка $G^{(0)}$, а останнім – найгрубіша сітка $G^{(3)}$. На сітці $G^{(0)}$ для переходу на $G^{(1)}$ визначено оператор рестрикції R_0^1. На всіх решта шарах мережі визначені два оператори: рестрикції (8.112) для переходу на грубішу сітку та пролонгації (8.113) для переходу на точнішу сітку. Перехід від точної сітки до грубішої визначимо дією оператора рестрикції $R_i^{i+1} : u^{(i)} \to u^{(i+1)}$:

$$u_j^{(i+1)} = \left(R_i^{i+1} u^{(i)} \right)_j = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{2j-1}^{(i)}}{2} + u_{2j}^{(i)} + \frac{u_{2j+1}^{(i)}}{2} \right). \tag{8.118}$$

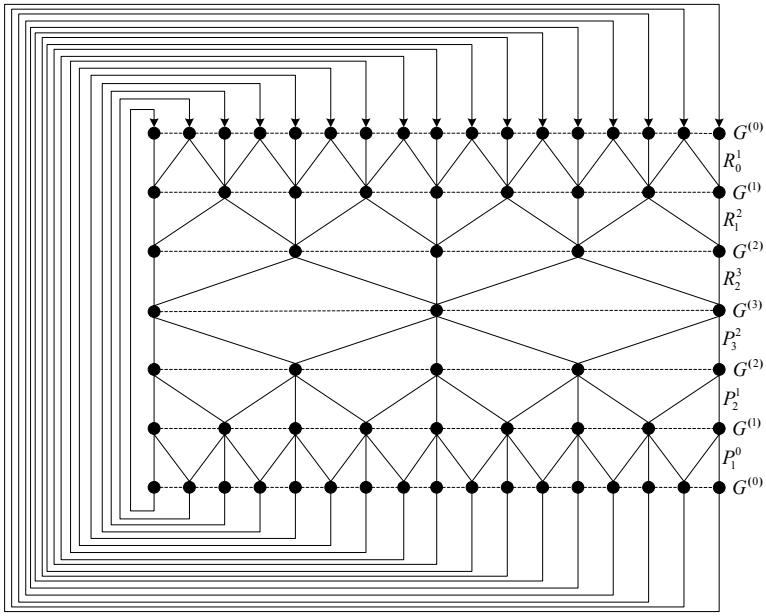


Рисунок 8.9 – Архітектура рекурентної ШНМ

Оператор вузлової пролонгації $P_{i+1}^i : u^{(i+1)} \to u^{(i)}$ для переходу з сітки $G^{(i+1)}$ на $G^{(i)}$ задамо у такому вигляді:

$$u_j^{(i)} = \begin{cases} \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j} = u_j^{i+1}, \\ \left(P_{i+1}^i u^{(i+1)}\right)_{2j+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_j^{(i+1)} + u_{j+1}^{(i+1)}\right). \end{cases} \tag{8.119}$$

На кожному з шарів субмережі прямого поширення, за винятком останнього, розташовані два шари кліткової субмережі, які виконують специфічні обчислення, що зумовлює їхню різну структуру. На першому шарі мережі виконуються обчислення мультисіткової корекції за формулою вигляду

$$u_h(n+1) = W u_h(n) + \Delta u(n),$$

де W – матриця вагових коефіцієнтів, що задає коефіцієнти загасання [221].

Структура нейрона першого шару зображена на рис. 8.10.

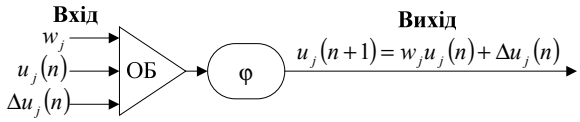


Рисунок 8.10 – Структура нейрона першого шару

Нейрон складається з операційного блока **ОБ** та блока активаційної функції φ. Операційний блок виконує обчислення нового значення елемента u_i вектора u для наступного кроку рекурентної мережі. На вхід нейрона подаються значення елемента u_i на n-му кроці, корекція Δu_i та ваговий коефіцієнт w_j. Як результат отримуємо скориговане значення елемента u_i для наступного кроку рекурентної нейронної мережі. Активаційну функцію φ для нейронів першого та другого шарів кліткової нейронної субмережі вибираємо кусково-лінійною.

Нейрон другого шару забезпечує згладжування розв’язку на поточному ітераційному кроці шляхом реалізації такої обчислювальної схеми:

$$u_h(n) = u_h(n) - \rho\left(L_h u_h(n) - f_h\right).$$

Запишемо ітераційний процес у загальному випадку

$$u_j(n) = u_j(n) + \rho\varphi\left(\sum_k w_{k,j} u_k(n) + c_j\right). \qquad (8.120)$$

Тут $w_{k,j} \in W$; $c_j \in C$; C – відомий вектор правої частини диференціального рівняння крайової задачі у вузлових значеннях сітки; ρ – параметр загасання ($\rho \le 1$, від вибору цього параметра залежить швидкість збіжності [221]). Матриця вагових коефіцієнтів W у (8.120) інтерпретує дію диференціального оператора L_h. Отже, процес формування вагових коефіцієнтів є частиною алгоритму створення кліткової нейронної субмережі і залежить від вибору типу обчислювального шаблону.

Зазначимо, що головним критерієм оцінки ефективності навчання ШНМ є цільова функція [227]. За допомогою цієї функції оцінюють, наскільки робота ШНМ відповідає бажаному результату. Отже, навчання мережі відбувається методом навчання з учителем. Цільовою функцією навчання рекурентної нейромережі є мінімізація відхилу $L_h u_h(n) - f_h$ [221]. Ітераційний процес будуємо за схемою, описаною вище (кроки 1-3). На першому шарі мережі згладжуємо розв'язок за ітераційною схемою (8.120) та обчислюємо відхили (8.114). Далі отриманий відхил передаємо на наступний шар нейронів з використанням операторів рестрикції (8.115), які відіграють роль вагових коефіцієнтів для верхньої половини мультисіткової субмережі. На грубих сітках розв'язуємо рівняння відхилу $L_h^{(i)} \nu_h^{(i)} = d_h^{(i)}$, де індекс i означає номер шару. Для згладжування розв'язку застосовуємо ітераційну схему, яка реалізується на другому шарі кліткової субмережі:

$$\nu_h^{(i)} = \nu_h^{(i)} - \rho\left(L_h^{(i)} \nu_h^{(i)} - d_h^{(i)}\right).$$

Тоді одержані значення похибки передаємо до наступного шару, використовуючи оператор рестрикції (8.115). Після досягнення останнього

шару мережі за допомогою операторів пролонгації (8.116), які визначають як вагові коефіцієнти для нижньої половини мультисіткової субмережі, отримані значення похибок повертаємо на шар з точнішою сіткою. Результатом роботи буде апроксимоване значення похибки. Корекція поточного значення вектора розв'язку відбувається на першому шарі кліткової субмережі. Для завершення обчислювального процесу використовуємо умову (8.117).

Отже, навчання нейронної мережі полягає у модифікації матриці вагових коефіцієнтів, яка задає дію операторів пролонгації та рестрикції. Головною метою навчання вважають досягнення максимальної швидкості збіжності результатів ефективних операцій корекції.

8.5.3 Аналіз результатів обчислювального експерименту

Розглянемо числову реалізацію описаного вище алгоритму для тестових прикладів (складних задач з огляду на застосування традиційних обчислювальних схем) та наведемо порівняльний аналіз числових результатів, отриманих мультисітковим ітераційним методом на навченій рекурентній ШНМ, щодо точності з наближеними розв'язками, які знайдено іншими методами, та відомими точними розв'язками.

Приклад 8.1 Для апробації й ілюстрації можливостей описаного алгоритму нейронного мультисіткового ітераційного методу та дослідження коректності отриманих результатів розглянемо (з першого погляду просту, проте складну у разі розв'язування числовим методом) одновимірну крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{8.121}$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = d, \tag{8.122}$$

де $f(x)=\beta\sin\alpha x$, $\beta=-225000$, $\alpha=150$, $d=-7.148764$.

Задача (8.121), (8.122) має такий точний розв'язок: $u(x)=10\sin\alpha x$.

Алгоритм мультисіткового ітераційного методу до задачі (8.121), (8.122) реалізовано у разі кількості кроків згладжування $v=1$. Для розв'язування цієї задачі використано кількість сіток $M=2$, тобто субмережа прямого поширення складається з двох шарів.

Згідно зі схемою алгоритму спочатку апроксимуємо диференціальний оператор крайової задачі різницевим оператором. У цьому випадку

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_i=(2u_i^{(k)}-u_{i+1}^{(k)}-u_{i-1}^{(k)})/h^{(k)2},$$

де k – номер сітки, $h^{(k)}$ – крок розбиття сітки.

Згладжування наближених значень шуканої функції виконуємо за такою ітераційною формулою:

$$u^{(k)}(n)=u^{(k)}(n)-\rho\left(L^{(k)}u^{(k)}(n)-F^{(k)}\right),$$

де $\rho=\dfrac{h^{(k)2}}{2}$. Значення відхилу визначаємо за формулою

$$d_i^{(k)}(n)=F_i^{(k)}-\left(L^{(k)}u^{(k)}(n)\right)_i.$$

Для переходу між сітками використовуємо лінійні оператори рестрикції (8.118) та пролонгації (8.119). Наведемо результати обчислювального експерименту для різної кількості нейронів N у нейромережі, яку використовували для розв'язування крайової задачі (8.121), (8.122).

Наближений розв'язок, отриманий ітераційним методом на цій мережі, позначено через $u_{\text{Н}}$, точні значення розв'язку, знайдені за формулою $u(x)=10\sin\alpha x$, через $u_{\text{Т}}$. У табл. 8.4 наведено точні значення розв'язку $u_{\text{Т}}$ та наближені $u_{\text{Н}}$ з відповідною кількістю нейронів початкового шару і точністю $\varepsilon=0{,}0000000001$.

Таблиця 8.4 – Результати обчислень нейронної мережі

x	$u_{\text{Т}}$	$u_{\text{Н}}$			
		$N=451$	$N=851$	$N=1651$	$N=2651$
0,1	6,502880	6,570080	6,521640	6,507850	6,504810
0,2	-9,880320	-9,959000	-9,902280	-9,886140	-9,882570
0,3	8,509040	8,608230	8,536730	8,516380	8,511880
0,4	-3,048110	-3,049860	-3,048600	-3,048240	-3,048160
0,5	-3,877820	-3,880640	-3,878610	-3,878030	-3,877900
0,6	8,939970	9,063140	8,974350	8,949080	8,943500
0,7	-9,705350	-9,749130	-9,717570	-9,708590	-9,706610
0,8	5,806110	5,913420	5,836070	5,814050	5,809190
0,9	0,883687	0,951820	0,902707	0,888729	0,885641

Унаслідок порівняння й аналізу числових результатів з табл. 8.4 можна зробити висновок, що у разі збільшення кількості нейронів мережі наближений розв’язок помітно наближається до точного. Що меншою є кількість нейронів, то більше наближені значення розв’язку відрізняються від точних.

Таблиця 8.5 – Тестова задача 1 для МСЕ

x	Розв’язок за МСЕ [220]				Точний розв’язок
	$h=10^{-1}$	$h=10^{-2}$	$h=10^{-3}$	$h=10^{-4}$	
0,2	-541,767871	-11,660847	-9,8843622	-11,346133	-9,8803162
0,4	-14,8593	-3,0887079	-3,0217342	-3,6358633	-3.0481062
0,6	841,55054	11,7255256	8,9875851	8,7577219	8,9399666
0,8	731,13477	8,2320433	5,8285751	5,4492216	5,8061118

На підставі дослідження достовірності результатів тестової задачі (8.121), (8.122), отриманих МСЕ, зазначимо, що для деяких значень кроку h сітки простежуються явища неадекватності системи лінійних алгебричних рівнянь до

вихідної задачі, а також нестійкість розв'язку [220]. У разі використання грубої сітки за МСЕ , похибка може катастрофічно зрости (табл. 8.5, h=10^{-1}, 10^{-2}). Унаслідок зменшення кроку сітки результат мав би бути точнішим, натомість, як видно з табл. 8.5 (дані, що відповідають h=10^{-3}, 10^{-4}), він навіть погіршився. Подібного феномену позбавлена обчислювальна схема методу, який ми досліджуємо.

Приклад 8.2 Розглянемо одновимірну стаціонарну задачу міграції домішки [151]. Математичною моделлю цієї задачі є звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+\mu\frac{du}{dx}=3\mu x^2,\ 0<x<1 \tag{8.123}$$

та умови

$$u(0)=0,\ u(1)=0. \tag{8.124}$$

Крайова задача (8.123), (8.124) має такий точний розв'язок:

$$u(x)=x^3+\frac{3x^2}{\mu}+\frac{6x}{\mu^2}-\left(1+\frac{3}{\mu}+\frac{6}{\mu^2}\right)\frac{e^{\mu x}-1}{e^{\mu}-1}. \tag{8.125}$$

Щоб одержати фізично коректний числовий розв'язок крайових задач, яким властива наявність так званого примежового шару з застосуванням числових методів, важливо побудувати стійкі обчислювальні схеми [151,216,217,222]. Для розв'язування одновимірних задач адвекції - дифузії в [151] використовували удосконалені, стабілізаційні обчислювальні схеми МСЕ, тому що стандартні схеми МСЕ не забезпечували задовільного результату (чисельному розв'язку властиві сильні осциляції, неприйнятна точність).

Дослідимо спроможність нейронного ітераційного методу розв'язувати задачі типу (8.123), (8.124) та коректність отримуваних результатів. Усі параметри нейронної мережі будемо вибирати аналогічно до попереднього прикладу. Оператор задачі апроксимуємо таким різницевим оператором:

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_i = (2u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}) / h^{(k)2} + \mu\left(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}\right)/(2h^{(k)}).$$

Кількість нейронів першого шару мережі вибрано $N = 1321$. Порівняємо одержані в ході обчислювального процесу на побудованій нейронній мережі наближені результати $u_{\text{Н}}$ для задачі (8.123), (8.124) з точними $u_{\text{Т}}$, знайденими за формулою (8.125), для різних значень параметра μ (табл. 8.6 і 8.7).

Таблиця 8.6 – Досяжна точність числових результатів

u / x	$u_{\text{Т}}$		$u_{\text{Н}}$	
	$\mu = 10$	$\mu = 20$	$\mu = 10$	$\mu = 20$
0,1	0,0098939	0,0040000	0,0098919	0,0039999
0,2	0,0316055	0,0169999	0,0315994	0,0169997
0,3	0,0708215	0,0449990	0,0708078	0,0449988
0,4	0,1326900	0,0939928	0,1326640	0,0939925
0,5	0,2208980	0,1699470	0,2208520	0,1699460
0,6	0,3351510	0,2786090	0,3350800	0,2786080
0,7	0,4643480	0,4241120	0,4642480	0,4241100
0,8	0,5679970	0,5986620	0,5678780	0,5986590
0,9	0,5257230	0,7063340	0,5256210	0,7063330

На підставі порівняльного аналізу наведених у табл. 8.6 і 8.7 числових результатів можемо зробити висновок, що знайдений за допомогою рекурентної нейронної мережі розв’язок є стабільним і практично збігається з точним розв’язком (8.125) та розв’язком, що одержаний числово-аналітичним методом ([225], с. 64, табл.1). Досліджено асимптотичну поведінку наближеного розв’язку зі збільшенням параметра μ. Виявлено, що для досягнення належної точності необхідно вибирати більшу кількість нейронів зі зростанням μ, проте в цьому разі збільшуються часові затрати алгоритму.

Таблиця 8.7 – Порівняння точності розв’язків

u / x	u_T		u_H	
	μ=100	μ=200	μ=100, N=531	μ=200, N=1321
0,1	0,001360	0,001165	0,001360	0,001165
0,2	0,009320	0,008630	0,009319	0,008630
0,3	0,029880	0,028395	0,029879	0,028395
0,4	0,069040	0,066460	0,069039	0,066460
0,5	0,132800	0,128825	0,132798	0,128825
0,6	0,227160	0,221490	0,227158	0,221490
0,7	0,358120	0,350455	0,358118	0,350455
0,8	0,531680	0,521720	0,531677	0,521720
0,9	0,753793	0,741285	0,753791	0,741284

Приклад 8.3 Розглянемо двовимірну крайову задачу, яка описує стаціонарну адвекцію - дифузію, у випадку локально-градієнтного розв’язку [218]

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Pe\frac{\partial u}{\partial x}=1,\left(x,y\right)\in\left(0,1\right)\times\left(0,1\right); \tag{8.126}$$

$$u\big|_{x=0}=0;\, u\big|_{x=1}=0;\, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0;\, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=0, \tag{8.127}$$

де Pe – число Пекле.

Аналітичний розв’язок крайової задачі (8.126), (8.127) є таким:

$$u=\frac{1}{Pe}\left(\frac{1}{e^{Pe}-1}\left(1-e^{Pex}\right)+x\right). \tag{8.128}$$

Зазначимо, що в разі застосування числових алгоритмів на основі МСЕ до задач типу адвекції - дифузії простежується втрата точності отримуваних числових результатів [216–218]. З метою одержання коректного результату в

процесі числового розв'язування двовимірної задачі адвекції - дифузії (8.126), (8.127) у праці [218] використано удосконалену схему МСЕ: застосовано p- та hp- апроксимації на основі ієрархічних базисів на трикутних скінченних елементах. Такий підхід до розв'язування задачі (8.126), (8.127) виявився добре застосовним для числа Pe до 10^2 , а для більших значень Pe уже виникали певні обчислювальні труднощі.

Для розв'язування задачі (8.126), (8.127) використаємо нейронний мультисітковий ітераційний метод та проілюструємо його обчислювальну ефективність у разі великих значень числа Пекле. Спочатку виконаємо дискретизацію області $G=[0,1]\times[0,1]$, в якій шукаємо розв'язок задачі. Розбиття області по координатах x та y задамо однакове з кількістю точок N та кроком розбиття на k-му шарі нейронів $h^{(k)}$, у цьому разі кількість сіток $M=2$.

Апроксимуємо оператор задачі скінченними різницями:

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,j}=(4u_{i,j}^{(k)}-u_{i+1,j}^{(k)}-u_{i-1,j}^{(k)}-u_{i,j+1}^{(k)}-u_{i,j-1}^{(k)})/h^{(k)2}+Pe(u_{i+1,j}^{(k)}-u_{i-1,j}^{(k)})/(2h^{(k)2}),$$

де $i,j=1,\ldots,N-2$.

Унаслідок апроксимації граничні умови набувають такого вигляду:

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{0,j}=u_{0,j}^{(k)}=0,\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{N-1,j}=u_{N-1,j}^{(k)}=0;$$

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,0}=(-u_{i,2}^{(k)}+4u_{i,1}^{(k)}-3u_{i,0}^{(k)})/(2h^{(k)})=0;$$

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,N-1}=(3u_{i,N-1}^{(k)}-4u_{i,N-2}^{(k)}+3u_{i,N-3}^{(k)})/(2h^{(k)})=0.$$

Згладжування значень функції виконаємо за ітераційною формулою

$$u^{(k)}(n)=u^{(k)}(n)-\rho\left(L^{(k)}u^{(k)}(n)-F^{(k)}\right),$$

де $\rho=\dfrac{h^{(k)2}}{2}$, $F^{(k)}=\left\{F_{i,j}^{(k)}\middle|\, i=0,\ldots,N-1,\ j=0,\ldots,N-1\right\}$, $F_{i,j}^{(k)}=1$.

Значення відхилу визначимо за формулою

$$d_{i,j}^{(k)}(n) = F_{i,j}^{(k)} - \left(L^{(k)} u^{(k)}(n)\right)_{i,j}.$$

Проекцію відхилу на грубішу сітку виконаємо за допомогою оператора рестрикції:

$$d_{i,j}^{(k+1)} = \left(R_k^{k+1} d^{(k)}\right)_{i,j} = \frac{1}{8}\left(4d_{2i,2j}^{(k)} + d_{2i-1,2j}^{(k)} + d_{2i+1,2j}^{(k)} + d_{2i,2j-1}^{(k)} + d_{2i,2j+1}^{(k)}\right).$$

Проміжне згладжування на грубих сітках задамо формулою

$$\nu^{(k)}(n) = \nu^{(k)}(n) - \rho\left(L^{(k)}\nu^{(k)}(n) - d^{(k)}(n)\right),$$

де $\rho = \dfrac{\left(h^{(k)}\right)^2}{2}$; $v^{(k)}(n)$ – поточне значення похибки на сітці $G^{(k)}$.

Оператор лінійної вузлової пролонгації на двовимірних сітках $P_{k+1}^{k} : G^{(k+1)} \to G^{(k)}$ задамо у такий спосіб:

$$\nu_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} \left(P_{k+1}^{k}\nu^{(k+1)}\right)_{2i,2j} = \nu_{i,j}^{(k+1)}; \\ \left(P_{k+1}^{k}\nu^{(k+1)}\right)_{2i+1,2j} = \dfrac{1}{2}\left(\nu_{i,j}^{(k+1)} + \nu_{i+1,j}^{(k+1)}\right); \\ \left(P_{k+1}^{k}\nu^{(k+1)}\right)_{2i,2j+1} = \dfrac{1}{2}\left(\nu_{i,j}^{(k+1)} + \nu_{i,j+1}^{(k+1)}\right); \\ \left(P_{k+1}^{k}\nu^{(k+1)}\right)_{2i+1,2j+1} = \dfrac{1}{2}\left(\nu_{i,j}^{(k+1)} + \nu_{i+1,j+1}^{(k+1)}\right). \end{cases}$$

На останньому кроці поточної ітерації виконаємо корекцію значення функції на сітці $G^{(0)}$: $u_{i,j}^{(0)}(n+1) = u_{i,j}^{(0)}(n) + \nu_{i,j}^{(0)}(n)$.

Для числової реалізації алгоритму задамо такі значення параметрам: $N = 121$, $M = 2$, кількість ітерацій згладжування на кожному шарі нейронів $\nu = 1$, точність $\varepsilon = 0{,}00000001$. На рис. 8.11 зображено поверхню наближеного розв’язку досліджуваної задачі для $Pe = 150$ за результатами обчислень побудованої нейронної мережі. У табл. 8.8 наведено точні $u_{\text{Т}}$, знайдені за

формулою (8.128), та наближені значення $u_{\text{Н}}$ розв'язку $u(x, y)$ крайової задачі (8.126), (8.127) в однакових вузлах сітки (для випадку $x = 0,7$; $0 \le y \le 1$).

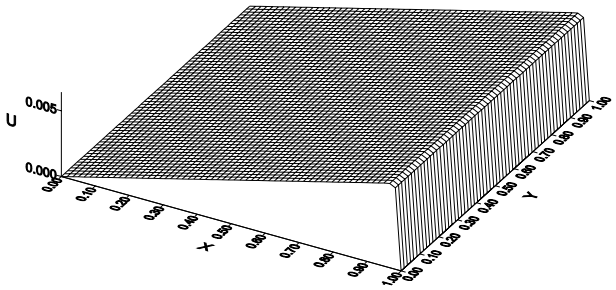


Рисунок 8.11 – Вигляд поверхні шуканої функції за результатами обчислень нейронної мережі

Таблиця 8.8 – Порівняння точного і наближеного розв'язків

y	$u_{\text{Т}}$	$u_{\text{Н}}$
0	0,00466667	0,00466667
0,1	0,00466667	0,00466667
0,2	0,00466667	0,00466667
0,3	0,00466667	0,00466667
0,4	0,00466667	0,00466667
0,5	0,00466667	0,00466667
0,6	0,00466667	0,00466667
0,7	0,00466667	0,00466667
0,8	0,00466667	0,00466667
0,9	0,00466667	0,00466667
1	0,00466667	0,00466667

З порівняння цих числових результатів бачимо, що точний та наближений розв'язки збігаються у межах заданої точності. На підставі аналізу виконаних

числових експериментів для різних значень числа Пекле можемо зробити такий висновок: якщо відношення числа Пекле до кількості точок розбиття по координатах x та y більше від одиниці, то тоді розв'язок зберігає стійкість, у протилежному випадку стійкість втрачається. Максимальне число Пекле, за якого будували наближений розв'язок, $Pe = 250$.

Приклад 8.4 Розглянемо таку математичну модель стаціонарної двовимірної задачі адвекції - дифузії [217, 218]:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Pe\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0;\ (x, y) \in (0,1) \times (0,1); \tag{8.129}$$

$$u\big|_{x=0} = \frac{1 - e^{(y-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}};\ u\big|_{x=1} = 0; \quad u\big|_{y=0} = \frac{1 - e^{(x-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}};\ u\big|_{y=1} = 0. \tag{8.130}$$

Крайова задача (8.129), (8.130) має такий аналітичний розв'язок:

$$u = \left(1 - e^{(x-1)Pe}\right)\left(1 - e^{(y-1)Pe}\right) / \left(1 - e^{-Pe}\right)^2. \tag{8.131}$$

Як зазначено в [217, 218], для цієї крайової задачі за великих значень числа Пекле ($Pe \approx 100$) простежується нестійкість наближеного розв'язку, отриманого з використанням традиційних обчислювальних схем. У [217] осциляції наближеного розв'язку задачі (8.129), (8.130) за МСЕ вдалося загасити завдяки використанню ієрархічної системи базових функцій-бульбашок. У [218] для побудови стійкого числового розв'язку (значення числа Pe до 10^2) цієї ж задачі застосовано p- та hp- апроксимації на підставі ієрархічних базисів на трикутних скінченних елементах. Відомий точний розв'язок (8.131) та числові розв'язки, отримані в [217, 218], використаємо для дослідження достовірності наближеного розв'язку крайової задачі (8.129), (8.130) за нейронним ітераційним методом. Відповідно до описаного вище алгоритму виконаємо покрокове обчислення.

Спочатку вихідну неперервну задачу редукуємо до дискретної. Апроксимуємо оператор задачі скінченними різницями

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,j} = (4u_{i,j}^{(k)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)})/h^{(k)2} + Pe(u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)})/(2h^{(k)2}),$$

де $i, j = 1, \ldots, N-2$.

Граничні умови у цьому разі набувають вигляду

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{0,j} = \frac{1-e^{(j-1)Pe}}{1-e^{-Pe}} = 0; \left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{N-1,j} = u_{N-1,j}^{(k)} = 0;$$

$$\left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,0} = \frac{1-e^{(i-1)Pe}}{1-e^{-Pe}}; \ \left(L^{(k)}u^{(k)}\right)_{i,N-1} = u_{i,N-1}^{(k)} = 0; \ i, j = 0, \ldots, N-1.$$

Аналогічно до попереднього прикладу виберемо $M = 2$, кількість ітерацій згладжування на кожному шарі нейронів $\nu = 1$, точність $\varepsilon = 0{,}00000001$. Задамо значення числа Пекле. На рис. 8.12 показано отримані результати у випадку $N = 231$ для $Pe = 150$.

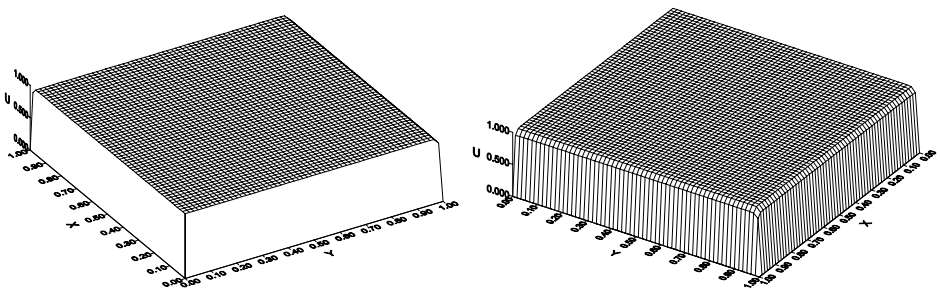


Рисунок 8.12 – Вигляд у різних проекціях поверхні функції $u(x, y)$ за результатами обчислень нейронної мережі

З метою порівняння досяжної точності результатів обчислення шуканої функції $u(x, y)$ у табл. 8.9 наведено числові результати, отримані за формулою (8.131) і позначені через $u_{\text{Т}}$ (точний розв'язок) та нейронним ітераційним методом і позначені $u_{\text{Н}}$ (наближений розв'язок) в однакових вузлах сітки (при $x = 0{,}5$).

Для розглянутого прикладу характерно, що зі збільшенням кількості нейронів у мережі числовий розв'язок ліпше апроксимує точний.

Таблиця 8.9 – Порівняння результатів

y	$u_{\text{Т}}$	$u_{\text{Н}}$
0,904	0,999999	1,000000
0,913	0,999998	0,999999
0,922	0,999992	0,999995
0,930	0,999971	0,999980
0,939	0,999892	0,999923
0,948	0,999601	0,999703
0,957	0,998529	0,998851
0,965	0,994579	0,995551
0,974	0,980020	0,982774
0,983	0,926369	0,933300

ВИСНОВКИ

Для сингулярно збурених крайових задач механіки та фізики розвинуто високоточні схеми методу скінченних елементів, здатні якісно відтворювати структури примежових та внутрішніх шарів шуканих розв'язків як за допомогою стабілізації апроксимацій МСЕ, так і адаптуванням неструктурованих тріангуляцій.

Стабілізовані схеми МСЕ побудовано з використанням як експоненціальних апроксимацій, так і експоненціальних вагових функцій процедури Петрова-Гальоркіна. Проаналізовано стійкість та збіжність схем такого ґатунку.

Побудова *h*-адаптивних схем МСЕ ґрунтується на обчисленні розподілу апостеріорних оцінювачів похибок на скінченних елементах та системі керування структурою розрахункових тріангуляцій, здатної відшукати апроксимації з наперед гарантованою точністю в природних нормах розглядуваної задачі.

В роботі, за допомогою методу перетворення Лагерра та інтегральних рівнянь побудовано наближений розв'язок лінійної осесиметричної задачі слошингу з врахуванням наявності перегородок та чисельно розв'язано нестаціонарну плоску задачу для рівняння Стокса; застосовано поєднання перетворення Лапласа і методу інтегральних рівнянь до нестаціонарної задачі теплопровідності у тривимірних просторових областях; здійснено чисельне розв'язування обернених граничних задач теорії потенціалу в частково-необмежених областях; побудовано алгоритм оцінки розмірів і місцезнаходження обмеженого включення в частково-необмеженій області. Досліджено методи розв'язування просторових задач електростатики; проаналізовано методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь, декомпозиція складних областей та апарат функцій Гріна; досліджено наближені схеми розв'язування відповідних інтегральних рівнянь зі слабкою

особливістю в ядрі. Проведено дослідження збіжності методу Стеффенсена при узагальнених умовах Ліпшиця на поділені різниці першого порядку для розв'язування нелінійних рівнянь, де замість константи Ліпшиця використано деяку додатну інтегровну функцію. Досліджено єдиність розв'язку.

Порівняльний аналіз результатів обчислювальних експериментів з відомими теоретичними та експериментальними даними засвідчив дієвість пропонованих підходів. По результатах науково-дослідної роботи також опубліковано статті [2, 8, 9, 12, 22, 23, 38-42, 44, 53, 60, 87-89, 137, 147, 150, 158, 175, 200, 209, 214, 230] та подані до друку [95-102, 115].

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями), прогнозування забруднення ґрунтів та атмосфери (еволюційні задачі адвекції-дифузії), медична томографія та корозія металів (обернені граничні задачі нестаціонарної теплопровідності), розрахунок електронно-оптичних систем для генерації і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмології (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Поставлені у науково-дослідній роботі завдання виконано повністю, що відображено в 44 публікаціях у вітчизняних та міжнародних наукових журналах з прикладної математики та чисельного аналізу, а також представлено в доповідях на наукових конференціях. Протягом звітного періоду за тематикою науково-дослідної роботи захищено захищено одна дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук та дві дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, дипломних, магістерських та 101 курсову роботу.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Абрамовиц М.*, *Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
2. *Баранецька Н.*, *Хапко Р.* Про застосування перетворення Лагерра та методу інтегральних рівнянь до нестаціонарної задачі для рівняння Стокса // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2006. Вип. 11. С. 19-28.
3. *Бартіш М.Я.*, *Чипурко А.І.* Про одну модифікацію методу Гаусса – Ньютона // Матем. студії. 1998. Т. 10. № 1. С. 85-92.
4. *Бартіш М.Я.*, *Чипурко А.І.*, *Шахно С.М.* Про одну модифікацію методу Гаусса –Ньютона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 42. С. 35-38.
5. *Бартіш М.Я.*, *Щербина Ю.М.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1972. № 7. С. 579-582.
6. *Белоносов С.М.*, *Черноус К.А.* Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1985.
7. *Бреббия К.*, *Теллес Ж.*, *Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. *Вінтоняк Н.*, *Хапко Р.* Про використання sinc-квадратур для наближеного обчислення інтегралів з різними типами особливостей // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 35-42.
9. *Гарасим Я.С.*, *Остудін Б.А.* Виявлення ефективної методики наближеного розв’язування двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу на основі обчислювальних експериментів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2004. Вип. 9. С 47-53.
10. *Гарасим Я.С.*, *Остудін Б.А.* Наближене розв’язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання

кубатурних формул // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 46. С. 73-82.

11. *Гарасим Я.С.*, *Остудін Б.А.* Про особливості чисельного розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь першого роду в задачах теорії потенціалу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 50. С. 54-59.
12. *Дацiв Г.П.* Про чисельне розв'язування однієї еволюційної задачі на частині поверхні осесиметричної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. Вип. 13. 2007. С. 90-104.
13. *Дацiв Г.П.* Про чисельне розв'язування однієї еволюційної задачі на частині поверхні осесиметричної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. Вип. 13. 2007. С. 90-104.
14. *Дэннис Дж.*, *мл.*, *Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
15. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 334 с.
16. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
17. *Каханер Д.*, *Моулер К.*, *Нэш С.* Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 575 с.
18. *Крылов В.И.*, *Бобков В.В.*, *Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. Мн.: Наука и техника, 1984. 263 с.
19. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1988. Т. 1. 712 с., Т. 2. 576 с.
20. *Курчатов В.А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. 1971. Т. 198. № 3. С. 524 –526.
21. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1971. 736 с.

22. *Лаврик С.В*. Про наближене розв’язування початково-крайової тривимірної задачі теплопровідності з використанням методу інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2007. Вип. 13. – С 110-125.
23. *Лаврик С.В*. Про наближене розв'язування суттєво-просторової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца у випадку областей з гладкими поверхнями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 60-68.
24. *Ладыженская О*., *Солонников В*., *Уральцева Н*. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
25. *Людкевич И.В*., *Музычук А.Е*. Численное решение краевых задач для волнового уравнения. Львов, 1990.
26. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. 383 с.
27. *Ортега Дж*., *Рейнболдт В*. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
28. *Полищук А.Д*. О численном решении интегральных уравнений теории потенциала. Препринт № 743. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1987. 26 с.
29. *Сибиль Ю.Н*. Существование решения двумерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого рода теории потенциала заданных на гладком многообразии с краем. Львов, 1990. 17 с.
30. *Сибіль Ю.М*., *Остудін Б.А*., *Романенко А.В*. Розв’язність задачі Діріхле для рівняння Пуассона в просторі зі щілинами та еквівалентне інтегральне рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. № 6. С. 90-97.
31. *Смагин С.И*. Решение трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн методом потенциалов // Числ. мет. в интерпрет. геофиз. наблюд. Новосибирск, 1980. С. 109-124.
32. *Смирнов В.И*. Курс высшей математики в 4-х томах. Т. 4. Ч. 2. М., 1981.

33. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А*. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

34. *Трауб Дж*. Итерационные методы решения уравнений/Пер. с англ. И.А. Глинкина / Под ред. А.Г. Сухарева. М.: Мир, 1985.

35. *Треногин В.А*. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 488 с.

36. *Ульм С*. Об обобщенных разделенных разностях // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1967. Т. 16. С. 13-26. С. 146-156.

37. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 807 с., Т. 3. 656 с.

38. *Хапко Р*., *Вінтоняк Н*. Про методи Ландвебера та інтегральних рівнянь для оберненої граничної задачі нестаціонарної теплопровідності в частково необмеженій області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2004. Вип. 8. С. 77-90.

39. *Шахно С*., *Гнатишин О.П*., *Якимчук Р*. Про різницевий метод з надквадратичною збіжністю для розв’язування нелінійних задач про найменші квадрати // Вісник Львів. ун-ту . Сер. Інформатика та прикладна математика. Вип. 13. 2007. С. 51-58.

40. *Шахно С*., *Макух О*. Дво- та трикрокові ітераційні процеси для розв’язування нелінійних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту . Сер. Інформ. та прикл. матем. Вип. 11. 2006. С. 99-107.

41. *Шахно С.М*. Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь // Матем. студії. 2004. Т. 22. № 1. С. 79-86.

42. *Шахно С.М*. Про різницевий метод з квадратичною збіжністю для розв’язування нелінійнихоператорних рівнянь // Математичні студії, 2006 Т. 26 № 1. 105-110.

43. *Шахно С.М*., *Макух О.М*. Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв’язування нелінійних операторних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 124-131.

44. *Шахно С.М.*, *Макух О.М.* Про ітераційні методи в умовах неперервності за Гьольдером поділених різниць другого порядку // Матем. методи і фіз.-мех. поля, Т. 49, 2006, № 2. С. 90-98.
45. *Aparicio N.D.*, *Pidock M.K.* The boundary inverse problem for the Laplace equation in two dimensions // Inverse Problem 12 (1996), 565-577.
46. *Argyros I.K.* On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen / Vol. 10 (1991) 1. Pp. 83-92.
47. *Atkinson K.E.* Quadrature of singular integrands over surfaces // El. Tran. Numer. Anal. 2004. Vol. 17. P. 133-150.
48. *Banks H.T.*, *Kojima F.* Boundary shape indentification in two – dimensional electrostatic problems using SQUIDs // J. III - Posed Inverse Problems 8 (2000), 467 - 504.
49. *Chapko R.* On the combination of Rothe's method and boundary integral equations for the nonstationary Stokes equation // Journal of Integral Equations and Applications. 2001. Vol. 13. P. 99 - 116.
50. *Chapko R.* On the numerical solution of direct and inverse problems for the heat equation in a semi – infinite region // J. Computational Appl. Math. 108 (1999), 41-55.
51. *Chapko R.* On the numerical solution of the Dirichlet initial boundary-value problem for the heat equation in the case of a torus // J. Eng. Math. 2002. Vol. 43. P. 75 - 87.
52. *Chapko R.* The numerical solution of an evolution problem of second order in time on a closed smooth boundary // J. Comput. Appl. Math. 2002. Vol. 145. P. 493 - 503.
53. *Chapko R.*, *Kress R.* A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // J. III-Posed Inverse problems 13 (2005), 27-40.
54. *Chapko R.*, *Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // World Scientific Series in Applicable Analysis. 1993. Vol. 2. P. 127 - 140.

55. *Chapko R.*, *Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // World scientific series in applicable analysis, Vol. 2, Agarwal, ed., World Scientific, Singapore, 1993.
56. *Chapko R.*, *Kress R.* On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations // Integral and integrodifferential equations: Theory and applications. Vol. 2. Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam. 2000. P. 55 - 66.
57. *Chapko R.*, *Kress R.* Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations // J. of Integral Equations and Applications. 1997. Vol. 9. P. 47-69.
58. *Chapko R.*, *Kress R.*, *Yoon J.-R.* On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation // Inverse Problems, 14, P. 853-867 (1998).
59. *Chapko R.*, *Kress R.*, *Yoon J.R.* On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation // Inv. Problems. 1998. Vol. 14. P. 853-867.
60. *Chapko R.*, *Vintonyak N.* On some numerical methods for an inverse potential problem in 2D semi infinite regions // Proceedings of the Annual GAMM meeting in Berlin: GAMM 2006, Proc. Appl. Math. Mech. 6, P. 729-730 (2006).
61. *Cody W.J.* Chebyshev approximation for the complete elliptic integrals *K* and *E* // Math. Comput. 1965. Vol. 19. P. 105 - 112.
62. *Costabel M.*, *Stephan E.P.* Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation // Mathematical Models in Mechanics, Banach Center Publications, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1985. Vol. 15. P 175 - 251.
63. *Elshner J.*, *Stephan E.P.* A discrete collocation method for Symm's integral equation on curves with corners // J. Comput. Appl. Math. 1996. Vol. 75. P. 131 - 146.

64. *Garasym Ya.S.*, *Ostudin B.A.* On numerical appoach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method // Журнал обчисл. та прикл. матем. 2003. № 1 (88). С. 17-28.
65. *Garipov R.*, On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 24. P. 352 - 362.
66. *Gavrilyuk I.*, *Kulyk A.*, *Makarov V.* Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization // Comput. Methods Appl. Math. 2001. Vol. 1. P. 39 - 61.
67. *Hettlich F.*, *Rundell W.* Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem // Inverse Problems. 12, P. 251-266 (1996).
68. *Hohage T.*, *Sayas F.-J.* Numerical solution of a heat diffusion problem by boundary elements methods using the Laplace transform // Numer. Math. 2005. Vol. 102. P. 67-92.
69. *Kim S.*, *Kwon O.*, *Seo J.K.* Location search technique for a grounded conductor // SIAM J. Appl. Math. 62, P. 1383-1393 (2002).
70. *Kirsch A.*, *Kress R.* An optimization method in inverse acoustic scattering // Boundary element IX, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
71. *Kress R.* Inverse Dirichlet problem and conformal mapping, Math. Comp. Simu. 66 (2004), 255-265.
72. *Kress R.* Linear integral equations. 2nd. ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.
73. *Kress R.* Linear Integral Equations. New-York: Springer-Verlag, 1989.
74. *Kress R.* Linear Integral Equations. Second ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
75. *Kress R.* Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares // Inverse Problems 19 (2003), 91-104.
76. *Kress R.* On constant-alpha force-free fields in a torus // J. Eng. Math. 1986. Vol. 20. P. 323 - 344.

77. *Kress R.*, *Serranho P.* A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction // Inverse Problems 21 (2005), 773-784.
78. *Kwon O.*, *Seo J.K.* Total size estimation and identification of multiple anomalies in the inverse conductivity problem // Inverse Problems, 17, P. 59-75 (2001).
79. *Lions J.L.* Quelques méthodes de résolution des probléms aux limites non linéaires, Dunod Gautheir-Villars, Paris, 1969.
80. *Lopez-Fernandez M.*, *Palencia F.* On the numerical inversion of the Laplace transform of certain holomorphic mappings //PrePrint, Universitat de Valladolid (Spain).
81. *More J.J.*, *Garbow B.S.*, Hillstrom K. E. Testing unconstrained optimization software // ACM Transaction on Mathematical Software. 1981. Vol. 7. № 1. P. 17-41.
82. *Polyanin A.* Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. – Chapman & Hall, CRC Press, Boca Raton, 2002.
83. *Potra F.A.* On an iterative algorithm of order 1.839… for solving nonlinear operator equations // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1984-85. 7 (1) . P. 75-106.
84. *Roche J.R.*, *Sokolowski J.* Numerical methods for shape identification prolems // Control Cybernetics 25 (1996), 867-894.
85. *Schwetlick H.* Numerische Lösung Nichtlinearer Gleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1979.
86. *Serranho P.* A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance // Inverse Problem 22 (2006), 663-680.
87. *Shakhno S.M.* Method of order $1+\sqrt{2}$ for the solution of nonlinear equations with Hölder continuous divided differences // Proc. Appl. Math. Mech. 2005. Vol. 5. C. 779-780.
88. *Shakhno S.M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations // Proc. Appl. Math. Mech. 2004. Vol. 4. C. 650–651.

89. *Shakhno S.M.*, *Gnatyshyn O.P.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving the nonlinear least squares problems // AMC (Appl. Math. Comp.) 2005. Vol. 161. P. 253-264.

90. *Stenger F.* Numerical methods based on sinc and analytic functions. Springer-Verlag, Ahedelberg, 1993.

91. *Sybil Yu.M.* Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface // Матем. студії. 1997. Т. 8. № 2. – С. 79-96.

92. *Varnhorn W.* The boundary value problems for the Stokes resolvent equations in $\mathbf{R}^2$ // Methoden Verfarhen Math. Phys. 1990. Vol. 40. P. 169 - 188.

93. *Werner W.* Űber ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. 1979. Vol. 32. P. 333-342.

94. *Wienert L.* Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im $\mathbf{R}^3$ // PhD thesis. University of Göttingen, 1990.

95. *Дацiв Г.П.* Чисельне розв'язування лiнiйної осесиметричної задачi слошингу у випадку области з перегородками // Математичний вiсник НТШ, 13 с.

96. *Дацiв Г.П., Хапко Р.С.* Застосування перетворення Келлi i методу iнтегральних рiвнянь для чисельного розв'язування лiнiйної осесиметричної задачi слошингу // Доповiдi НАН України, 7 с.

97. *Шахно С.М.* Метод Стеффенсена при узагальнених умовах Лiпшиця для подiлених рiзниць першого порядку // Математичнi студiї, 7 с.

98. *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Лiпшиця для подiлених рiзниць першого порядку // Математичний вiсник НТШ, 8 с.

99. *Шахно С.М.* Про двокроковий iтерацiйний процес для розв'язування нелiнiйних рiвнянь в узагальнених умовах Лiпшиця для подiлених рiзниць першого порядку // Математичнi методи i фiзико-механiчнi поля, 6 с.

100. *Chapko R., Datsiv G.* The numerical solution of the axially symmetric linear sloshing problem by the boundary integral equation method // Journal of Integral Equations and Applications, 24 p. (to appear).

101. *Chapko R.*, *Vintonyak N.* A hybrid method for inverse boundary value problems for an inclusion in semi-infinite two dimensional domains // J. of Integral Equations and Applications, 18 p. (approved).

102. *Chapko R., Vintonyak N.* On the convergence analysis of the hybrid method for an inverse boundary value potential problem // Математичні студії, 10 с.

103. *Kress R.*, *Serranho P.* A hybrid method for sound-hard obstacle reconstruktion // J. Comput. Appl. Math., (to appear).

104. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численне методы решения задач с пограничным слоем/ Пер. с англ. М., Мир, 1983. 213с.

105. *Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А.* Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Ч. 1. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2002. Вип. 5. С. 153-165.

106. *Сінчук Ю.О.* МСЕ для задач конвекції-дифузії з експоненціальними базисними функціями // Сучасні проблеми приклад. математики та інформатики.: Тези доп. 12-ї Всеукр. наук. конф. Львів, 2005. С. 139.

107. *Adjerid S., Aiffa M., Flaherty J.E.* Computational methods for singularly perturbed systems // Singular Perturbation Concepts of Differential Equations / J. Cronin, R.E. O'Malley, eds., AMS, Providence, 1998.

108. *Bykova E.G., Kalpush T.V., Karepova E.D. et al.* Accurate Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems/ U. Rude, V.V. Shaidurov, eds. -Novosibirsk: Publishing House of Institute of Mathematics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2001. Vol. 1.

109. *De Groen P.P.N., Hemker P.W.* Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems // Numerical

Analysis of Singular Perturbation Problems, P.W. Hemker, J.J.II. Miller, eds.. Academic Press, -New York,1979. P. 217 – 249.

110. *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for. Flow Problems, -Chichester: Wiley & Sons, 2003.

111. *Hemker P.W.* A numerical study of stiff two-point boundary value problems. Amsterdam: Mathematical Center, 1977.

112. *Melenk J.M., Schwab C.* An hp finite element method for convection-diffusion problems // Technical Report 97-05, Eidgenössiche Technische Hochschule, 1997.

113. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska I.* Numerical Solution of singularly perturbed boundary value problems, Berlin: Springer, 1996

114. *Verfurth R.* A posteriori error estimator for convection-diffusion problem. // Numer. Math. 1998. N.80. P. 641–663.

115. *Сінчук Ю.*, *Шинкаренко Г* Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії-реакції // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2007. 14 с.

116. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. Київ: НМК ВО, 1991. 88 с.

117. *Calvo M., Palencia C.,* A class of explicit multistep exponential integrators for semilinear problems // Numer. Math. 2006. Issue 102. P. 367-381.

118. *Cox S.M., Matthews P.C.* Exponential time differencing for stiff systems // J. Comput. Phys. 2002. Issue 176(2). P. 430-455.

119. *Hochbruck M., Lubich C., Selhofer H.* Exponential integrators for large systems of differential equations // SIAM J. Sci. Comput. 1998. Issue 19(5). P. 1552-1574.

120. *Nie Q., Zhang Y.-T., Zhao R.* Efficient semi-implicit schemes for stiff systems // J. Comput. Phys. 2006. Issue 214. P. 521-537.

121. *Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.* Numerical Mathematics. Springer, 2000. 655 p.

122. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 535 с.

123. *Абрамов Є., Ліпіна О., Сінчук Ю., та ін.* Числовий аналіз кусково лінійних апроксимацій h–адаптивних схем методу скінчених елементів // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: / Тези доп. XII Всеукр. наук. конф. Львів, 2005. С. 21–22.

124. *Квасниця Г., Шинкаренко Г.* Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач електростатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 95–106.

125. *Квасниця Г., Шинкаренко Г.* Порівняння простих апостеріорних оцінок похибок методу скінченних елементів для задачі електростатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 162–174.

126. *Шинкаренко Г., Голуб Н., Щербина Ю.* Застосування нейронних мереж для розв'язування крайових задач Штурма - Ліувілля. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2004. Вип. 8. С. 23–37.

127. *Ainsworth M., Oden J.T.* A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, 2000.

128. *Babuśka I., Strouboulis T.* The Finite Element Method and its Reliability. Oxford: Clarendon Press, 2001.

129. *Bangerth W., Rannacher R.* Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. Basel: Birkhauser, 2003.

130. *Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C.* Introduction to adaptive methods for differential equations // Acta Numerica. 1995. Vol. 4. P. 105–158.

131. *Stein E. (ed.), Ramm E.* Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics./ New York: John Wiley & Sons, 2003.

132. *T. Gratsch, K.-J. Bathe*. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // Computers&Struct. 2005. Vol. 83. P. 235–265.

133. *Melenk J.M.* hp-Finite Element Method for Singular Perturbations. Berlin: Springer, 2002.

134. *Morton K.* Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. London: Chapman & Hall, 1996. 372 p.

135. *Verfurth R.* A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.

136. *Zienkiewicz O. C., Taylor, R. L.* The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Butterworth-Heinemann. Oxford, 2002.

137. *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Ю., Ямелинець А.* Кусково-лінійні апроксимації h–адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач// Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2005. Вип. 11. С. 3–8.

138. *Вагін П.П., Ямелинець А.С.* Розв'язування початково-крайових задач мігрування домішок. // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2002. Вип. 5. С. 61–67.

139. *Г. Шинкаренко, Г. Квасниця.* Порівняння простих апостеріорних оцінок похибок методу скінчених елементів для задачі електростатики // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 162–174.

140. *Babuska I., Miller A.* A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1987. Vol. 61. P. 1–40.

141. *Babuska I., Rheinboldt W.C.* A posteriori error estimates for the Finite Element Methods // Int. J. Num. Meth. Engrg. 1978. Vol. 12. P. 1597–1615.

142. *Bank R.E., Weiser A.* Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations // Math. Comput. 1985. Vol. 44. P. 283–301.

143. *Becker R, Rannacher R.* A feed-back approach to error control in finite element methods: basic analysis and examples // East–West J Numer Math. 1996. Vol. 4. P. 237–64.

144. *Johnson C.* Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

145. *Ladeveze P., Leguillon D.* Error estimation procedures in the finite element method and applications // SIAM J. Numer. Anal. 1983. Vol. 20. P. 485–509.

146. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1987. Vol. 24. P. 337–357.

147. *Г. Шинкаренко, А. Ямелинець* Апостеріорні оцінки точкових похибок та уточнення апроксимацій методу скінченних елементів: ієрархічні оцінювачі лишків// Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2006. Вип. 11. С. 107–119.

148. *Токар Ю.* Численное исследование вынужденных акустических колебаний пьезопреобразователей. Дисерт. канд. фіз.–мат. наук, Львів, 1988. 120 с.

149. *Шинкаренко Г.А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний // Дифференциальные уравнения. Т.29 (1993), №.7. С. 1252 – 1260.

150. *Chaban F. Shynkarenko H.* Finite element method approximations for the boundary valued problems of piezoelectricity. // Modern Analysis and Application. Book of abstracts. Odessa, 2007. P. 32-33.

151. *Козаревська Ю.С., Шинкаренко Г.А., Шинкаренко 0.Г.* Регуляризація чисельних розв’язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати // Вісник Львівського університету Серія механіка – математика. Вип.52. 1999. С. 59-71.

152. *Козаревська Ю.С.* Чисельний аналіз варіаційних задач міграції домішок в нестисливих потоках із домінуючою конвекцією. Автореф. дисерт. канд. фіз. – мат. наук, Львів, 2004. 17с.

153. *Марчук Г.И.* Математичиское моделирование в проблеме окружающей среды. Москва: Наука, 1982. 320 с.

154. *Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.М.* Некоторые приложения метода конечных элементов. Львів: Вища школа, 1982.

155. *Чабан Ф., Шинкаренко Г., Ямелинець А.* Уточнення вузлових значень апроксимацій МСЕ для крайових задач міграції домішок. // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Тези доповідей. Львів, 2005. С. 158.

156. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. Київ: НМК ВО, 1991. 88 с.

157. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 1: Fundamentals. E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Wiley, Chichester, 2004.

158. *Чабан Ф., Шинкаренко Г.* Постпроцесорне уточнення полілінійних апроксимацій МСЕ для задач міграції домішок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2007. Вип. 13. С. 164-176.

159. *Венгерський П.С.*, *Трушевський В.М.*, *Шинкаренко Г.А.* Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку мілкої води // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика 2002. № 4. С.102-109.

160. *Baiochi C.*, *Brezzi F.*, *Franca L.P.* Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1993. N 105. P.125-141.

161. *Barrenechea G.R.*, *Valentin F.* An unusual stabilized finite element method for a generalized Stokes problem // Numer. Math. 2001. N 7. P. 1-25.

162. *Behr M.A.*, *Franca L.P.*, *Tezduyar T.E.* Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-Stress Formulation of Incompressible Flows // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1993. N 104. P. 31-48.

163. *Brebbia C.A.*, *Partridge P.W.* Finite element models for circulation studies. In Mathematical Models for Environmental Problems: Proceedings of the international conference held at the University of Southampton. New York: Wiley, 1976. 537p.

164. *Brezzi F.*, *Fortin M.* A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods // Numer. Math. 2001. N 89. P. 457-491.

165. *Brezzi F.*, *Franca L.P.*, *Hughes T.J.R.*, *Russo A.* b = ∫ g // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1997. N 145. P. 329-339.

166. *Codina R.*, *Blasco J.* Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations // Numer. Math. 2000. N 87. P.59-81.

167. *Constantin A.* On the Blow-Up of Solutions of a Periodic Shallow Water Equation // J. Nonlinear Sci. 2000. N 10. P. 391-399.

168. *Fursikov A.V.* Stabilizability of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control // J. math. fluid mech. 2001. N 3. P. 259-301.

169. *Gavrilyuk V.M.*, *Teshukov V.M.* Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Continuum Mech. Thermodyn. 2000. N 13. P. 365-382.

170. *Gerbeau J.-F.* A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations // Numer. Math. 2000. N 87. P. 83-111.

171. *Gresho P.M.*, *Lee R.L.* Don't suppress the wiggles – they're telling you something // Computers and Fluids. 1981. N 9. P. 223-253.

172. *King I.P.*, *Norton W.R.* Recent applications of ram's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality // Finite Elements in Water Resources, Computational Methods in Water Resources XI. London: Pentech Press, 1978. P. 2.81-2.99.

173. *King I.P.*, *Norton W.R.*, *Iceman W.R.* A finite element solution for two-dimensional strained flow problems. // Finite elements in fluids, volume 1 of Viscousows and hydrodynamics. London: Wiley, 1975. P. 133-156.

174. *Partridge P.W.*, *Brebbia C.A.* Quadratic finite elements in shallow water problems // ASCE J. Hydr. Eng. 1976. N 102. P. 1299-1313.

175. *П. Венгерський, В. Трушевський* Про вибір стабілізаційного множника у варіаційних задачах руху мілкої води // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2005. Вип. 10. С. 71-77.

176. *Березовський А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. Киев: Наук. думка, 1968. 165 с.

177. *Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н.* Теплообмен излучением: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.

178. *Бурак Я.Й, Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф.* Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 6. С. 39–43.

179. *Гачкевич А.Р., Бойчук В.Я.* Термонапряженное состояние длинного цилиндра при нагреве тепловым излучением // Прикл. механіка. 1987. Т. 23. № 4. С. 18–23.

180. *Гачкевич А.Р., Драбык В.О., Сосновый Ю.Р., Терлецкий Р.Ф.* Термонапряженное состояние стеклооболочки кинескопа при нагреве электромагнитным излучением // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1991. Вып. 33. С. 31–35.

181. *Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Сосновий Ю.Р., Терлецький Р.Ф.* Моделювання режимів нагріву електровакуумних приладів з використанням електромагнітного випромінювання // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні і приладобудуванні. – 1998. – Вип. 33. – С. 51-61.

182. *Гачкевич О., Смірнов О., Шинкаренко Г.А.* Числове розв’язування нелінійних задач перенесення зарядів у напівпровідникових структурах // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. 2005. Вип. 10. С. 98–110.

183. *Григорьев Б.А.* Импульсный нагрев излучениями: В 2 т. М.: Наука, 1974. Т. 1. 320 с.

184. *Дерибере М.* Практическое применение инфракрасных лучей. М.,Л.: Госэнергоиздат, 1959. 440 с.

185. *Зигель Р., Хауелл Дж.* Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 935 с.

186. *Каменщиков В.А., Пластинин Ю.А., Николаев В.М., Новицкий Л.А.* Радиационные свойства газов при высоких температурах. М.:

Машиностроение, 1971. 441 с.

187. *Крейт Ф., Блэк У.* Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.

188. *Малкиель Б.С., Гачкевич А.Р., Сосновый Ю.Р., Терлецкий Р.Ф.* Температурные поля и напряжения в системе плоскопараллельных слоев при нагреве электромагнитным излучением // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1988. Вып. 28. С. 21–26.

189. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.

190. *Рубцов Н.А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, 1984. 277 с.

191. *Степаньянц Ю.Р., Морозов М.В.* Экспериментальное исследование скоростей нагрева оболочки ЦЭЛТ при обезгаживании лучевым способом // Оборудование электронного машиностроения, технология и робототехника: Межвуз. сб. науч. тр. М.: МИЭМ, 1984. С. 81–86.

192. *Эспе В.* Технология электровакуумных приборов: В 3 т. М.: Энергия, 1968. Т. 2. 448 с.

193. *Glass D.E., Özişik M.N., McRae D.S.* Combined conduction and radiation with flux boundary condition for a semitransparent medium covered by thin radiating layers // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1987. Vol. 38. P. 201-208.

194. *Krawcow Ju.A., Orłow Ju.I.* Optyka geometryczna ośrodków niejednorodnych. – Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1993. 439 s.

195. *Siegel R.* Green's function and two-flux transient analysis for a composite // National Heat Transfer Conference. Houston, August 3-5, 1996. ASME HTD. 1996. Vol. 325. P. 35-43.

196. *Siegel R.* Two-flux and Green's function method for transient radiative transfer in layer // Proceedings of the First International Symposium on Radiative Heat Transfer, August 14-18, Kusadasi, Turkey, 1995.

197. *Siegel R.* Two-flux Green's function analysis for transient spectral radiation in a composite // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1996. Vol. 10. P. 681–688.

198. *Sutton W.H.* A short time solution for coupled conduction and radiation in a participating slab geometry // J. of Heat Transfer. 1986. Vol. 108. P. 465–466.

199. *Tsai J-H., Lin J-D.* Transient combined conduction and radiation with anisotropic scattering // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1990. Vol. 4. P. 92–97.

200. *М.Брухаль, Р.Терлецький, О.Фундак* Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2007. Вип. 13. С. 59-71.

201. *Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А.* Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статики зсувних оболонок // Матем. методи та фіз.-мат. поля. 1999. 42, № 2. С. 53-61.

202. *Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А.* Моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок при термосиловому навантаженні / Львів. ун-т. Львів, 1998. 29 с. Деп. в ДНТБ України 13.04.98 № 186-Ук98.

203. *Дяконюк Л.М., Савула Я.Г.* Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. 1998. Вип. 50. С. 93-95.

204. *Кревс В., Савула Я.* Ієрархічні моделі та метод декомпозиції області у D-адаптивних моделях теплопровідності // Вісник Львів. ун-ту, серія прикл. матем. та інформ.-2000. Вип. 2. С. 142-150.

205. *Кревс В.В., Савула Я.Г.* Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат.-1999. Вип. 52. С. 83-96.

206. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.

207. *Савула Я.Г.* Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. 1995. Вип. 42. С. 3-7.

208. *Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В.* Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. 1992. Вип. 37. С. 39-45.

209. *П. П. Вагін, Р. Б. Малець, Г.А. Шинкаренко* Напівдискретизація за товщиною задачі теплопровідності у тонкому криволінійному шарі // Математичні студії. 2006. 26, № 1, С. 71-80.

210. *Григоренко Я. М., Мукоед А. П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 286 с.

211. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 211 с.

212. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 159 с.

213. *Шот І. Я.* Чисельне розв’язування задач теорії зсувних оболонок методом скінченних елементів // VI всеукр. студентська наук. конф. з прикл. математики та інформатики. Львів, 2003. С. 60-61.

214. *Вагін П., Шот І.* Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2006. Вип. 11. С. 135-147.

215. *Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д.* Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. К.: Либідь, 1995. 280 с.

216. *Гумецький Л. Р., Савула Я. Г.* Застосування стабілізаційних рівнянь для чисельного розв’язування задач адвекції - дифузії // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 1999. Вип. 1. С. 88–93.

217. *Коваль М., Савула Я.* Використання апроксимацій функціями-бульбашками на чотирикутних скінченних елементах для числового аналізу задачі адвекції-дифузії // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та

інформатика. 2003. Вип. 6. С. 157–165.

218. *Мандзак Т., Савула Н.* Про використання ієрархічних базисів у методі скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2003. Вип. 6. С. 80–85.

219. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.

220. *Молчанов И. Н.* Достоверность решений, полученных по методу конечных элементов // Кибернетика. 1991. № 3. С. 23–31.

221. *Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б.* Штучні нейронні мережі: обчислення // Праці Ін-ту математики НАН України. 2004. Т.51. 408 с.

222. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 221 с.

223. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

224. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

225. *Щербина Н. М.* Обчислювальні аспекти чисельно-аналітичного розв’язування лінійних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. 2000. Вип. 2. С. 169–180.

226. *Gorbachenko V. I.* Methods for solving partial differential equations // Neurocomputers: Design and Applications, 2000. Vol. 1. No 2. P. 16–29.

227. *Haykin S.* Neural Networks: A comprehensive foundation. Prentice-Hall: New Jersey, 1999. 842 p.

228. *Xu J.* Iterative methods by space decomposition and subspace correction // SIAM Review. 1992. Vol. 34. P. 581–613.

229. *Yserentant H.* Old and new convergence proofs for multigrid methods // Acta Numerica. 1993. P. 285–326.

230. *Трушевський В., Шинкаренко Г., Щербина Н.* Застосування нейронних мереж до розв’язування задач теплопровідності // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2007. Вип. 13. С. 151-163.