УДК 517.9, 518:517.948
№ держреєстрації 0110U001375
Інв. № 0212U004222

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
ЛНУ ім.Івана Франка
79000 м. Львів, вул. Університетська, 1; тел. (032) 272 70 40
факс (032) 261–69–03, ndch@franko.lviv.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор
з наукової роботи
д–р хім. наук, проф.
_____ Б. Котур
_____ _____ _____

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО–ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І МЕХАНІКИ
Пі–68П
(заключний)

Начальник НДЧ
канд. хім. наук, ст. наук. співроб. С. Орищин

Декан факультету
прикладної математики та інформатики,
д. ф.–м. н., професор Я. Савула

Керівник НДР
д. ф.–м. н., професор Г. Шинкаренко

Керівник НДР
д. ф.–м. н., професор Р. Хапко

2011

Рукопис закінчено 4 листопада 2011 р.
Результати цієї роботи розглянула Вчена Рада
факультету прикладної математики та інформатики
протокол № 6 від 9 листопада 2011 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Зав. кафедри, г. н. співроб., д–р фіз.–мат. наук, проф.	_____ __.__._____	Г. Шинкаренко (розд.4, 5, 6)
Зав. кафедри, г. н. сп., д–р фіз.–мат. наук, проф.	_____ __.__._____	Р. Хапко (розд. 1)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	Б. Остудін (розд. 2)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доц.	_____ __.__._____	С. Шахно (розд. 3)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	В. Вовк (розд. 6)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	В. Горлач (розд. 4)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	П. Вагін (розд. 6)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	І. Бернакевич (розд. 6)
ст. наук. співроб., канд. фіз.–мат. наук, доцент	_____ __.__._____	П. Венгерський (розд. 6)
мол. наук. співроб., ст. викл.	_____ __.__._____	Я. Гарасим (розд. 2)
наук. співроб.	_____ __.__._____	Р. Малець (розд. 6)
доцент канд. фіз.–мат. наук	_____ __.__._____	В. Трушевський (розд. 6)
асистент	_____ __.__._____	Г. Квасниця (розд. 5)
асистент	_____ __.__._____	Т. Мандзюк (розд. 6)
асистент канд. фіз.–мат. наук	_____ __.__._____	Ф. Чабан (розд. 5)
інж. 1 к.	_____ __.__._____	Л. Пахолків (розд. 1)
ст. лаб.	_____ __.__._____	Т. Семенюта (розд. 6)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	О. Вовк (розд. 6)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	І. Клименко (розд. 4)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	Я. Коковська (розд. 6)
аспірант, ст. лаб.	_____ __.__._____	О. Остапов (розд. 4)

Нормоконтролер М. Благітко

Р Е Ф Е Р А Т

Звіт про НДР: 336 с., 6 розділів, 70 рис., 34 табл., 169 джерел.

Об’єктом дослідження є прямі та обернені еволюційні задачі, крайові, початково–крайові і варіаційні задачі фізики та механіки, граничні задачі теорії потенціалу, інтегральні рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Предметом дослідження є математичні моделі відповідних фізичних процесів та об’єктів.

Мета роботи – створення, дослідження та апробування чисельних методів для розв’язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики на основі варіаційних рівнянь, граничних інтегральних рівнянь і нелінійних функціональних рівнянь.

Методи дослідження – метод Петрова–Гальоркіна, метод скінченних елементів, граничні інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функції Гріна.

КРАЙОВА ЗАДАЧА, РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ–АДВЕКЦІЇ–РЕАКЦІЇ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ П’ЄЗОЕЛЕКТРИКИ, РІВНОВАГИ ПРУЖНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА ТА ГІДРОЛОГІЇ, ВАРІАЦІЙНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ТА ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ, АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ, АДАПТУВАННЯ ТРІАНГУЛЯЦІЙ, БАГАТОСІТКОВА НЕЙРОМЕРЕЖНА СХЕМА, СТАБІЛІЗОВАНА СХЕМА, АДАПТИВНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ГАРАНТОВАНА ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЙ, ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ, ЕВОЛЮЦІЙНІ ЗАДАЧІ СЛОШИНГУ, ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА, ПРОСТОРОВІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНІ ПОЛЯ, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

З М І С Т

В С Т У П

За останнє двадцятип'ятиріччя серед методів чисельного розв'язування наукових та інженерних задач домінуючі позиції здобув метод скінчених елементів (МСЕ). Успішну альтернативу зараз йому складають методи граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Можна навести й випадки, коли кооперування цих чисельних методів для варіаційних та інтегральних рівнянь приводило до успішного розв'язання складних проблем фізики і механіки, демонструючи актуальність подібних досліджень в галузі обчислювальної математики. Систематизований і найбільш повний огляд новітніх досягнень можна знайти в двотомнику Encyclopedia of Computational Mechanics / E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.

На порядку дня перед теорією та застосуваннями МСЕ стоїть вирішення таких проблем:

(I) як забезпечити належний запас стійкості апроксимацій МСЕ, щоб гарантувати їх надійне застосування до широкого кола задач, зокрема, сингулярно збурених;

(II) яким чином можна забезпечити ефективність обчислення апроксимацій МСЕ з наперед заданою точністю.

Розробка цих фундаментальних проблем далека від остаточних рішень, але вагомі здобутки останніх п'ятнадцяти років привели до становлення двох важливих концепцій: (I) стабілізовані схеми МСЕ, в яких забезпечення стійкості не занижує порядків збіжності апроксимацій; (II) адаптивні схеми МСЕ, які встановили тісний зв'язок між апостеріорними похибками одержаних наближених розв'язків та стратегіями адаптування чисельних схем.

З іншого боку, застосування інтегральних рівнянь передбачає доведення теорем еквівалентності, а також побудову та обгрунтування наближених схем розв'язування інтегральних рівнянь різних класів у суттєво просторовому

випадку, ускладнених різним характером нелінійностей, при наявності незамкнених поверхонь інтегрування. Окрім цього, актуальними залишаються різноманітні прямі та обернені нестаціонарні проблеми, до яких можна ефективно застосовувати методи ГІР. У зв'язку з цим виникає необхідність створення досконалих чисельних методів розв'язування відповідних еволюційних задач, одно– та двовимірних інтегральних рівнянь із різними показниками та типами сингулярностей у ядрах.

Актуальним є також створення конкурентноспроможного програмного продукту, адаптованого до аналізу широкого кола прикладних проблем.

Метою даного проекту є побудова та обґрунтування числових схем, які створять теоретичну основу для проведення кваліфікованого обчислювального експерименту у проблемах фізики і механіки, які описуються сингулярно збуреними крайовими і початково–крайовими прямими та оберненими задачами для систем рівнянь у часткових похідних.

Основою проектування схем методу скінченних елементів є побудова та аналіз функціоналів джерел похибок, які приводять до надійних та зручних апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій МСЕ та індикаторів їх чутливості, створюючи теоретичний фундамент пошуку оптимальних реалізацій алгоритмів МСЕ, здатних знаходити наближені розв'язки з наперед гарантованою точністю та очікуваною швидкістю збіжності. На цих засадах будуються алгоритми послідовного уточнення апроксимацій МСЕ із системою контролю за пониженням рівня похибок на кожному скінченому елементі до бажаної величини шляхом адаптування розрахункових сіток, підвищення порядку апроксимації та/або зважування нев'язок. Доповненням до адаптивних схем відшукання розв'язків сингулярно збурених задач є стабілізовані МСЕ, які будуть розвинені за допомогою належного вибору базисів просторів вагових функцій методу Петрова–Гальоркіна.

Результати побудови та дослідження згаданих схем МСЕ конкретизуються для сингулярно збурених задач: п'єзо– і піроелектрики та фотопровідності;

уточнених моделей оболонок, мілкої води та гідроакустики; формування дисипативних структур у збудливих середовищах та мігрування домішок. Запропоновані схеми знайдуть програмну реалізацію і перевірку своїх можливостей за результатами обчислювальних експериментів.

Альтернативний підхід до створення та обґрунтування чисельних методів для розв’язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики полягає у широкому застосуванні граничних інтегральних рівнянь. В основу цих досліджень покладено інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функції Гріна, декомпозицію складних нерегулярних областей, регуляризуючі методи типу Ньютона тощо. Розглядаються питання розв’язності наближених схем, апроксимації відповідних операторів та просторів, умови стійкості та збіжності.

Конкретні фундаментальні задачі, яку вирішує проект:

Розробка та аналіз методів дискретизації варіаційних та інтегральних рівнянь математичної фізики, які забезпечують надійні обчислення високоточних апроксимацій їхніх розв’язків, зокрема, із наперед заданою точністю, та оптимальність їх обчислень.

Конструювання схем граничних інтегральних рівнянь, адаптивних та стабілізованих схем МСЕ.

Аналіз апроксимативності, стійкості та збіжності, апріорні та апостеріорні оцінки швидкості зібжності.

Розробка алгоритмів чисельних схем та відповідного програмного забезпечення комп’ютерного моделювання.

1 МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Метод граничних інтегральних рівнянь є ефективним підходом до розв'язування різних прикладних задач. В даному розділі продемонстровано його переваги для наближеного розв'язування задач стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності.

У підрозділі 1.1 розглядається крайова задача стаціонарної теплопровідності у тривимірній області, утвореній шаром і півпростором з порожниною, яка обмежена гладкою замкненою поверхнею. На межі контакту шару і півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту, на іншій межі шару задано тепловий потік. Через поверхню порожнини здійснюється конвективний теплообмін з середовищем нульової температури. За допомогою побудованої матриці Гріна для відповідної шаруватої області крайова задача зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з невідомою функцією на поверхні порожнини. Чисельне розв'язування здійснено з використанням sinc–квадратур, квадратурних формул Гаусса–Лежадра та проекційного методу зі сферичними базисними функціями. Приведено результати чисельних експериментів.

У підрозділі 1.2 для розв'язування нестаціонарної мішаної задачі теплопровідності у частково необмеженій області застосовано поєднання методу Роте, функцій Гріна і непрямого методу інтегральних рівнянь. У підсумку вихідна задача зводиться до послідовності інтегральних рівнянь лише по границі включення, наближене розв'язування яких виконують методом квадратур. Для обчислення інтегралів використано квадратурні формули на основі тригонометричної інтерполяції, а також sinc–квадратури. Наведено результати чисельних експериментів.

1.1 Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у шаруватій області за допомогою функцій Гріна

1.1.1 Постановка задачі

Застосування методу інтегральних рівнянь для наближеного розв'язування крайових задач набуло широкого поширення. Це зумовлено перевагами такого підходу у порівнянні з методом сіток або методом скінченних елементів. До найбільш важливих із них слід віднести зменшення розмірності задачі та застосовність для необмежених областей.

Чисельне розв'язування отриманих інтегральних рівнянь здійснюється переважно проекційними методами. Розрізняють два підходи підчас практичної реалізації таких чисельних схем. Перший з них полягає у використанні граничних елементів, тобто невідома функція і задана границя апроксимуються за допомогою відповідних фінітних базисних функцій [1]. Інший підхід передбачає параметричне задання границі і здійснення аналітичних перетворень в інтегральному рівнянні, що спрощує подальше використання проекційних методів [2]. У тривимірному випадку застосування цього підходу вимагає обмеження на клас розглянутих поверхонь, що, однак, через наявну супералгебраїчну збіжність, не зменшує його актуальності. Цей підхід і використано в даній роботі.

Застосування інтегральних рівнянь до крайових задач у частково–необмежених областях має ряд особливостей. Безпосереднє використання класичного прямого або непрямого варіантів методу інтегральних рівнянь приводить до необхідності визначення невідомої функції на безмежних границях. Уникнути цих проблем вдається, задіюючи в інтегральному поданні розв'язку замість фундаментального розв'язку відповідні функції Гріна [3]. Це

приводить до інтегрального рівняння на обмеженій частині границі області. В [4–6] техніка функцій Гріна використана для чисельного розв'язування прямих і обернених задач в плоских частково–необмежених областях. Такий підхід узагальноно також на тривимірні задачі у багатошарових областях [7, 8, 9, 10]. У даному підрозділі шляхом побудови інтегрального подання розв'язку за допомогою знайденої матриці Гріна крайова задача Робіна для рівняння Лапласа у півпросторі з шаром і порожниною редукується до граничного інтегрального рівняння на поверхні порожнини.

Нехай $D_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), 0 < x_3 < h, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ – шар в $\mathbf{R}^3$ товщиною h, утворений двома паралельними площинами Γ_1 і Γ_2. Півпростір $D_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), x_3 > h, x_1, x_2 \in R\}$ містить порожнину $D_3 \subset D_2$ з достатньо гладкою границею Γ_3 (рис.1). Середовища в областях D_1 і $D_4 = D_2 \setminus \overline{D}_3$ мають постійні коефіцієнти теплопровідності $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$, відповідно. Зовнішня поверхня шару Γ_1 нагрівається тепловим потоком β, на межі шару і півпростору середовища ідеально контактують, а через поверхню Γ_3 здійснюється конвективний теплообмін із середовищем з нульовою температурою. Математична модель такої задачі теплопровідності полягає у відшуканні функції

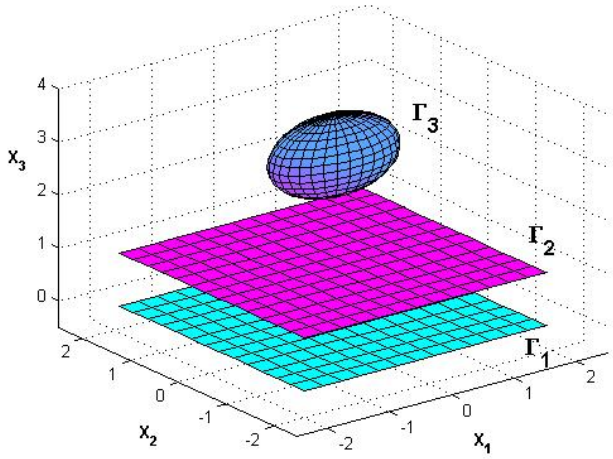


Рисунок 1.1 – Граничні поверхні частково–необмеженої області з порожниною.

$$t(\mathbf{x}) = \begin{cases} t_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_1, \\ t_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_4, \end{cases}$$

яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta t = 0 \quad \text{в} \quad D = D_1 \cup D_4, \tag{1.1}$$

граничну умову Неймана

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial x_3} = -\beta \quad \text{на} \ \Gamma_1, \tag{1.2}$$

умови спряження

$$t_1 = t_2, \ \ \lambda^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial x_3} = \lambda^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial x_3} \quad \text{на} \ \Gamma_2, \tag{1.3}$$

однорідну умову Робіна

$$\lambda^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial \nu} + \alpha t_2 = 0 \quad \text{на} \ \Gamma_3 \tag{1.4}$$

і умову регулярності

$$t(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \ \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{1.5}$$

Тут $\boldsymbol{\nu}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні Γ_3, β і $\alpha > 0$ – задані достатньо гладкі функції, причому $\beta(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1-\varepsilon})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_1$, $|\mathbf{x}| \to \infty$,

$\varepsilon > 0$. Будемо шукати класичний розв'язок задачі (1.1) – (1.5) в класі функцій $t_1 \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1),\ t_2 \in C^2(D_4) \cap C^1(\overline{D}_4)$.

Теорема 1.1.

Крайова задача (1.1) – (1.5) має найбільше один розв'язок.

Доведення. Розглянемо задачу (1.1) – (1.5) з $\beta = 0$. Застосування першої формули Гріна в області визначення функції t дає

$$\int_{D_1} |\nabla t_1(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}} \int_{D_4} |\nabla t_2(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_{\Gamma_3} \alpha(\mathbf{y}) t_2{}^2(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0.$$

Звідси випливає, що $|\nabla t_1(\mathbf{x})| = 0, \mathbf{x} \in D_1,\ |\nabla t_2(\mathbf{x})| = 0,\ \mathbf{x} \in D_4$ і $t_2(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma_3$. Зважаючи тепер на неперервність функції t, отримуємо, що $t \equiv 0$. ▲

1.1.2 Зведення задачі до інтегрального рівняння

Для зведення задачі (1.1) – (1.5) до граничного інтегрального рівняння скористаємось технікою функцій Гріна.

Означення 1.1. Матрицею Гріна задачі (1.1) – (1.3) називають матрицю функцій $\{G_{ij}\}_{i.j=1}^2$, які задовольняють співвідношення

$$\Delta G_{ll}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{\lambda^{(l)}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \mathbf{x} \in D_l,\ \mathbf{y} \in D_l, \tag{1.6}$$

$$\Delta G_{3-l,l}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,\quad \mathbf{x} \in D_{3-l},\ \mathbf{y} \in D_l, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial G_{1l}}{\partial x_3}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,\quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,\ \mathbf{y} \in D_l, \tag{1.8}$$

$$G_{1l}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_{2l}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \lambda^{(1)} \frac{\partial G_{1l}}{\partial x_3}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda^{(2)} \frac{\partial G_{2l}}{\partial x_3}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Gamma_2,\ \mathbf{y} \in D_l. \tag{1.9}$$

Тут $\delta-$ функція Дірака і $l = 1,2$.

Введемо позначення $\widetilde{\mathbf{x}}_n = (x_1, x_2, 2nh + x_3)$, $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2, -y_3)$, $\rho = \dfrac{\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}}$ і $G_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\widetilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}|^{-1} + |\widetilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1}$.

Теорема 1.2.

Матриця Гріна задачі (1.1) – (1.3) має вигляд

$$G_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\lambda^{(1)}}\left(G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(G_{-n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + G_n(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\right),$$

$$G_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})}\left(G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(|\widetilde{\mathbf{x}}_{-n} - \mathbf{y}|^{-1} + |\widetilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1}\right)\right),$$

$$G_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_{12}(\mathbf{y},\mathbf{x}),$$

$$G_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}}\left(G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(|\widetilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{y}^*|^{-1} - |\widetilde{\mathbf{x}}_{n-2} - \mathbf{y}^*|^{-1}\right)\right).$$

Доведення. Для функції $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ визначимо стандартні пряме й обернене перетворення Фур'є

$$\hat{g}(\xi) = F(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}d\mathbf{x},\ g(\mathbf{x}) = F^{-1}(\hat{g}) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\hat{g}(\xi)e^{i\mathbf{x}\cdot\xi}d\xi.$$

Застосування цього перетворення до (1.6) – (1.9) за змінними x_1 і x_2 приводить до двох задач відносно функцій $\hat{G}_{lk} = F(G_{lk}),\ \ l,k = 1,2$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{G}_{ll}(x_3,y_3)}{dx_3^2} - |\xi|^2\,\hat{G}_{ll}(x_3,y_3) = -\dfrac{1}{2\pi\lambda^{(l)}}\delta(x_3 - y_3),\ \ x_3,y_3 \in \hat{D}_l, \\ \dfrac{d^2\hat{G}_{3\text{-}l,l}(x_3,y_3)}{dx_3^2} - |\xi|^2\,\hat{G}_{3\text{-}l,l}(x_3,y_3) = 0,\ \ x_3,y_3 \in \hat{D}_{3\text{-}l}, \\ \dfrac{d\hat{G}_{1l}(0,y_3)}{dx_3} = 0,\ \ y_3 \in \hat{D}_1,\ \ |\hat{G}_{2l}| < \infty, \\ \hat{G}_{1l}(h,y_3) = \hat{G}_{2l}(h,\widetilde{y}_3),\ \lambda^{(1)}\dfrac{d\hat{G}_{1l}(h,y_3)}{dx_3} = \lambda^{(2)}\dfrac{d\hat{G}_{2l}(h,\widetilde{y}_3)}{dx_3},\ y_3 \in \hat{D}_1, \widetilde{y}_3 \in \hat{D}_2, \end{cases}$$

для $l = 1,2$ з $\hat{D}_1 = (0,h)$ і $\hat{D}_2 = (h,\infty)$. В результаті розв'язання цієї системи отримуємо

$$\hat{G}_{11}(x_3,y_3)=\frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}|\xi|}\left(e^{-|\xi|(y_3-x_3)}E(y_3-x_3)+e^{-|\xi|(x_3-y_3)}E(x_3-y_3)+e^{-|\xi|(x_3+y_3)}\right)+$$

$$\frac{\rho}{4\pi\lambda^{(1)}|\xi|Q(|\xi|)}\left(e^{-|\xi|(2h+x_3-y_3)}+e^{-|\xi|(2h-x_3+y_3)}+e^{-|\xi|(2h-x_3-y_3)}+e^{-|\xi|(2h+x_3+y_3)}\right),$$

$$\hat{G}_{12}(x_3,y_3)=\frac{1}{2\pi(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})|\xi|Q(|\xi|)}\left(e^{|\xi|(x_3-y_3)}+e^{-|\xi|(x_3+y_3)}\right),$$

$$\hat{G}_{21}(x_3,y_3)=\hat{G}_{12}(y_3,x_3),$$

$$\hat{G}_{22}(x_3,y_3)=\frac{1}{4\pi\lambda^{(2)}|\xi|Q(|\xi|)}\left(e^{-|\xi|(y_3-x_3)}E(y_3-x_3)+e^{-|\xi|(x_3-y_3)}E(x_3-y_3)+\right.$$

$$\left.\frac{e^{-|\xi|(x_3+y_3)}}{Q(|\xi|)}-\frac{ve^{-|\xi|(x_3+y_3-2h)}}{Q(|\xi|)}\right).$$

Тут $E-$ функція Хевісайда і $Q(z)=1-\rho e^{-2hz}$. Зважаючи на розвинення

$$\frac{1}{Q(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n e^{-2hzn}$$

і формулу оберненого перетворення Фур'є

$$F^{-1}\left(\frac{e^{-p|\xi|}}{|\xi|}\right)=\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+p^2)^{1/2}},$$

для зображень $\hat{G}_{lk}$ знаходимо оригінали G_{lk}. ▲

Зауважимо, що при $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\lambda$ отримуємо, що $G_{ll}=\frac{1}{4\pi\lambda}G_0$, $l=1,2$, де G_0- функція Гріна задачі Неймана для рівняння Лапласа у півпросторі.

Теорема 1.3.

Розв'язок задачі (1.1) – (1.5) можна подати у вигляді

$$t_l(\mathbf{x})=\int_{\Gamma_1}G_{l1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\beta(\mathbf{y})ds(\mathbf{y})+\int_{\Gamma_3}\left(G_{l2}(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})+\lambda^{(2)}\frac{\partial G_{l2}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{v}(\mathbf{y})}\right)u(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}) \quad (1.10)$$

для $\mathbf{x}\in D$ і $l=1,2$, де функція $u=t_2\big|_{\Gamma_3}$ є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{x})-\int_{\Gamma_3}\left(G_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})+\lambda^{(2)}\frac{\partial G_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{v}(\mathbf{y})}\right)u(\mathbf{y})ds(\mathbf{y})=\int_{\Gamma_1}G_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y})\beta(\mathbf{y})ds(\mathbf{y})\quad(1.11)$$

для $\mathbf{x}\in\Gamma_3$.

Доведення. Зважаючи на властивості функцій t_l і G_{kl}, очевидно можемо записати

$$t_1(\mathbf{x})=\lambda^{(1)}\int_{D_1}\left(G_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta t_1(\mathbf{y})-t_1(\mathbf{y})\Delta G_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)d\mathbf{y}+$$
$$\lambda^{(2)}\int_{D_4}\left(G_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta t_2(\mathbf{y})-t_2(\mathbf{y})\Delta G_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)d\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\in D_1.$$

Використання тепер другої формули Гріна, крайових умов та умов спряження приводять до подання (1.10) при $l=1$. Аналогічно розглядається випадок $l=2$ і, спрямовуючи $\mathbf{x}\to\Gamma_3$ для цього подання, з врахуванням стрибка відповідного потенціалу подвійного шару отримуємо інтегральне рівняння (1.11). ▲

Знову при $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$ з формули (1.10) як частковий випадок одержуємо інтегральне подання розв'язку мішаної крайової задачі Неймана–Робіна у півпросторі з порожниною.

Встановимо коректність рівняння (1.11).

Теорема 1.4.

Для $\beta\in L^2(\Gamma_1)$ і $\alpha\in L^2(\Gamma_3)$ інтегральне рівняння (1.11) має єдиний розв'язок $u\in L^2(\Gamma_3)$, який неперервно залежить від вхідних даних.

Доведення. З однорідного рівняння (1.11) маємо через теорему 1.1, що $t_2=0$ в D_4 і, зокрема, $t_2|_{\Gamma_3}=0$. Тим самим отримано єдиність розв'яку рівняння (1.11). Зважаючи на вигляд функції G_{22} і нерівність [5]

$$\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\le\frac{C}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Gamma_3,\mathbf{x}\ne\mathbf{y},C>0,$$

отримуємо, що ядро інтегрального оператора в (1.11) є слабосингулярним і тому він є компактним в $L^2(\Gamma_3)$. Твердження теореми випливає з теорії Рісса–Шаудера [2]. ▲

Зважаючи на вигляд матриці Гріна (див. теорему 1.2), інтегральне рівняння (1.11) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{x})-\int_{\Gamma_3}\left(\frac{Q_1(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}+Q_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)u(\mathbf{y})ds(\mathbf{y})=\int_{\Gamma_1}G_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y})\beta(\mathbf{y})ds(\mathbf{y}), \qquad (1.12)$$

де

$$Q_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\alpha(\mathbf{y})}{\lambda^{(2)}}+\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\right)$$

і

$$Q_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha(\mathbf{y})}{\lambda^{(2)}}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\frac{1}{|\widetilde{\mathbf{x}}_n-\mathbf{y}^*|}-\frac{1}{|\widetilde{\mathbf{x}}_{n-2}-\mathbf{y}^*|}\right)\right]+$$
$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}^*-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})\cdot(\widetilde{\mathbf{x}}_n^*-\mathbf{y})}{|\widetilde{\mathbf{x}}_n-\mathbf{y}^*|^3}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})\cdot(\widetilde{\mathbf{x}}_{n-2}^*-\mathbf{y})}{|\widetilde{\mathbf{x}}_{n-2}-\mathbf{y}^*|^3}\right)\right].$$

1.1.3 Чисельне розв’язування інтегрального рівняння

Будемо вважати, що поверхню порожнини Γ_3 можна взаємнооднозначно відобразити в одиничну сферу Ω, тобто існує бієктивне відображення $q:\Omega\to\Gamma_3$. Для наближеного розв’язування інтегрального рівняння (1.12) скористаємось підходом, розвиненим в [11, 12, 13, 14]. При цьому для чисельного інтегрування неперервних функцій застосуємо квадратурну формулу

$$\int_{\Omega}f(\hat{\mathbf{y}})ds(\hat{\mathbf{y}})\approx\sum_{\rho'=0}^{2n'+1}\sum_{s'=1}^{n'+1}\widetilde{\mu}_{\rho'}\widetilde{a}_{s'}f(\mathbf{p}(\theta_{s'},\varphi_{\rho'})), \qquad (1.13)$$

де $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{p}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$, $\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ – параметризація одиничної сфери, квадратурні вузли визначаються як

$$\varphi_{\rho'}=\frac{\rho'\pi}{n'+1},\quad \theta_{s'}=\arccos z_{s'}$$

з нулями $z_{s'}$ поліномів Лежандра $P_{n'+1}$ і квадратурні ваги мають вигляд

$$\widetilde{a}_{s'} = \frac{2(1-z_{s'}^2)}{((n'+1)P_{n'}(z_{s'}))^2}, \ \widetilde{\mu}_{\rho'} = \frac{\pi}{n'+1}.$$

Ця формула належить до класу квадратур Гаусса–Лежандра і отримана шляхом апроксимації функції f через лінійну комбінацію сферичних функцій (гармонік) порядку меншого або рівного $n'+1$ і подальшого точного інтегрування (див. [14, 24]). За побудовою формула (1.13) є точною для сферичних функцій порядку меншого або рівного $n'+1$.

В інтегральному рівнянні (1.11) присутня слабка особливість типу $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}$. Нехай $\hat{\mathbf{n}} = (0,0,1)$ – полюс сфери. Квадратура для невласного інтеграла в цьому випадку має вигляд [6]

$$\int_{\Omega} \frac{f(\hat{\mathbf{y}})}{|\hat{\mathbf{n}}-\hat{\mathbf{y}}|} ds(\hat{\mathbf{y}}) \approx \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \widetilde{\mu}_{\rho'} \widetilde{b}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})) \tag{1.14}$$

з ваговими коефіцієнтами

$$\widetilde{b}_{s'} = \frac{\pi \widetilde{a}_{s'}}{n'+1} \sum_{l=0}^{n'} P_l(z_{s'}).$$

В [11, 12] показано, що квадратури (1.13) і (1.14) мають супералгебраїчну швидкість збіжності, а для аналітичних функцій f – експоненційну.

Після підстановки $\mathbf{y} = q(\hat{\mathbf{y}})$ інтегральне рівняння (1.12) по поверхні Γ_3 зводиться до рівняння по сфері Ω

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \int_{\Omega} \left(\frac{\widetilde{Q}_1(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) F(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})}{|\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}|} + \widetilde{Q}_2(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) \right) J_q(\hat{\mathbf{y}}) \widetilde{u}(\hat{\mathbf{y}}) ds(\hat{\mathbf{y}}) = f(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Omega, \tag{1.15}$$

де J_q – якобіан відображення q, $\widetilde{u}(\hat{\mathbf{x}}) = u(q(\hat{\mathbf{x}}))$, $\widetilde{Q}_l(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) = Q_l(q(\hat{\mathbf{x}}), q(\hat{\mathbf{y}}))$,

$$F(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) = \frac{|\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}|}{|q(\hat{\mathbf{x}})-q(\hat{\mathbf{y}})|} \ \text{і} \ f(\hat{\mathbf{x}}) = \iint_{\mathbf{R}^2} G_{12}(q(\hat{\mathbf{x}}), \tau) \beta(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}.$$

Для переміщення сингулярності в рівнянні (1.15) у полюс сфери визначимо для $\psi \in \mathbf{R}$ ортогональні перетворення

$$\mathbf{D_F}(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ і } \mathbf{D_T}(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix}.$$

Ортогональне лінійне перетворення $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}=\mathbf{D_F}(\varphi)\mathbf{D_T}(\theta)\mathbf{D_F}(-\varphi)$ володіє властивістю $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{n}}$ для $\hat{\mathbf{x}}\in\Omega$ і, позначивши $\hat{\boldsymbol{\eta}}=\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{y}$, маємо, що $|\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}|=|\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}(\hat{\mathbf{n}}-\hat{\boldsymbol{\eta}})|=|\hat{\mathbf{n}}-\hat{\boldsymbol{\eta}}|$. В результаті, з (1.15) отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\widetilde{u}(\hat{\mathbf{x}})-\\ -\int_{\Omega}\left(\frac{\widetilde{Q}_1(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})F(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})}{|\hat{\mathbf{n}}-\hat{\boldsymbol{\eta}}|}+\widetilde{Q}_2(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})\right)J_q(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})\widetilde{u}(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})ds(\hat{\boldsymbol{\eta}})=f(\hat{\mathbf{x}}),\end{gathered}\tag{1.16}$$

де $\hat{\mathbf{x}}\in\Omega$. Зауважимо, що тепер функція $F(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\eta}})$ є неперервною по $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ при фіксованих $\hat{\mathbf{x}}\in\Omega$. Застосування квадратур (1.13) і (1.14) в (1.16) приводить до апроксимаційного рівняння

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}_n(\hat{\mathbf{x}})-\sum_{\rho'=0}^{2n'+1}\sum_{s'=1}^{n'+1}\widetilde{\mu}_{\rho'}\left(\widetilde{b}_{s'}K_1(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})+\widetilde{a}_{s'}K_2(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})\right)\widetilde{u}_n(\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})=f(\hat{\mathbf{x}}).\tag{1.17}$$

Тут введено позначення $K_1(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})=Q_1(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})F(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})J_q(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$, $K_2(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})=Q_2(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})J_q(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$ і $\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}=\mathbf{p}(\theta_{s'},\varphi_{\rho'})$.

Через залежність $\mathbf{T}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}$ від $\hat{\mathbf{x}}$ використання колокації в (1.17) (класичний метод Нистрьома) не приводить до лінійної системи. Тому до рівняння (1.17) застосовується проекційний метод Гальоркіна [15]. Подамо $\widetilde{u}_n$ у вигляді лінійної комбінації

$$\widetilde{u}_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}a_k^m Y_{k,m}^R,\tag{1.18}$$

де

$$Y_{k,m}^R=\begin{cases}\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,Y_{k,|m|}, 0<m<k,\\ \mathrm{Re}\,Y_{k,|m|},\ m=0,\\ \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,Y_{k,|m|}, -k\le m<0\end{cases}$$

з сферичними функціями $Y_{k,m}$ [16] і розглянемо скалярний добуток

$$(v,w)=\sum_{\rho=0}^{2n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\mu_\rho a_s v(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho})w(\hat{\mathbf{y}}_{s\rho}).$$

Домножуючи рівняння (1.17) скалярно на базисні функції $Y^R_{k,m}$ з врахуванням подання (1.18), приходимо до системи лінійних рівнянь

$$\frac{1}{2}a^{m'}_{k'}-\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}a^m_k R^{mm'}_{kk'}=\sum_{\rho=0}^{2n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\mu_\rho a_s f(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho})Y^R_{k',m'}(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}) \tag{1.19}$$

для $k'=0,\ldots,n,\ m=-k',\ldots,k'$ з коефіцієнтами

$$R^{mm'}_{kk'}=\sum_{\rho,s}\sum_{\rho',s'}\mu_\rho\widetilde{\mu}_{\rho'}a_s[\widetilde{b}_{s'}K_1(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho},\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})+\widetilde{a}_{s'}K_2(\hat{\mathbf{x}}_{s\rho},\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})]Y^R_{k',m'}(\hat{\mathbf{x}}_{sp})Y^R_{k,m}(\hat{\mathbf{y}}^{s'\rho'}_{sp}) \tag{1.20}$$

з $\hat{\mathbf{x}}_{s\rho}=\mathbf{p}(\theta_s,\varphi_\rho)$ і $\hat{\mathbf{y}}^{s'\rho'}_{s\rho}=\mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{p}(\theta_s,\varphi_\rho)}\mathbf{p}(\theta_{s'},\varphi_{\rho'})$.

Зауважимо, що розмірність системи лінійних рівнянь (1.19) складає $(n+1)^2\times(n+1)^2$.

Наближене обчислення інтеграла по площині здійснюється за допомогою sinc–квадратури [17], тобто

$$f(\hat{\mathbf{x}})\approx h^{(1)}_\infty h^{(2)}_\infty\sum_{i=-M_1}^{M_1}\sum_{j=-M_2}^{M_2}G_{21}(q(\hat{\mathbf{x}}),(ih^{(1)}_\infty,jh^{(2)}_\infty))\beta(ih^{(1)}_\infty,jh^{(2)}_\infty), \tag{1.21}$$

де $h^{(l)}_\infty=M_l^{-1/2}$, $l=1,2$. Відповідно до (1.10) чисельні розв'язки вихідної задачі знаходяться за формулами

$$\begin{aligned}t_l(\mathbf{x})\approx{}& h^{(1)}_\infty h^{(2)}_\infty\sum_{i=-M_1}^{M_1}\sum_{j=-M_2}^{M_2}G_{l1}(\mathbf{x},(ih^{(1)}_\infty,jh^{(2)}_\infty))\beta(ih^{(1)}_\infty,jh^{(2)}_\infty)+\\ &\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}a^m_k\sum_{\rho',s'}\widetilde{\mu}_{\rho'}\widetilde{a}_{s'}Y^R_{k,m}(\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'}))J_q(\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})[G_{l2}(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})\alpha(\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})+\lambda^{(2)}\widetilde{G}_{l2}(\mathbf{x},\hat{\mathbf{y}}_{s'\rho'})],\end{aligned} \tag{1.22}$$

де $\widetilde{G}_{l2}$ – параметризація нормальної похідної $\partial G_{l2}/\partial\mathbf{v}$ на поверхні Γ_3 і $l=1,2$.

Грунтуючись на результатах в [15], де розглянуто чисельне розв'язування інтегрального рівняння другого роду задачі дифракції, не складає труднощів довести, що при належній точності обчислення інтегралів у правій частині

(1.20) при $\alpha \in C^r(\Gamma_3)$, $r > 0$, і $\beta \in C(\Gamma_1)$ для розв'язку інтегрального рівняння (1.12) і наближеного розв'язку (1.18) для достатньо великих n має місце оцінка похибки

$$\| u - \widetilde{u}_n \|_{\infty,\Gamma_3} \le C_r n^{-r} . \qquad (1.23)$$

1.1.4 Чисельні експерименти

Приклад 1.1. Розглянемо задачу (1.1) – (1.5), коли $\beta(\mathbf{x}) = q_0 e^{-k|\mathbf{x}|^2}$ на Γ_1, а гранична поверхня Γ_3 – еліпсоїд з півосями a, b, c, центр якого знаходиться на віддалі c_0 від поверхні півпростору (рис.1.1). Чисельні розрахунки проводились при $\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)} = 0.75$, $h/l = 1$, $a/l = 1$, $b/l = 0.5$, $c/l = 0.75$, $c_0/l = 3$, $\alpha l/\lambda^{(2)} = 1$, $l = 1/\sqrt{k}$. В табл. 1.1 приведено наближені значення безрозмірних температур $\mathrm{T} = t\lambda^{(2)}/(q_0 l)$ у випадку $q_0 = 1$ і $k = 1$ при різних значеннях параметра дискретизації n і фіксованих $M_1 = M_2 = 100$ і точності $\varepsilon = 10^{-8}$ підсумовування рядів у елементах матриці Гріна (теорема 1.2). Як бачимо, має місце очікувана супералгебраїчна збіжність. Зауважимо також, що обчислення функцій t_1 і t_2 за формулами (1.22) на Γ_2 дає, як і слід було очікувати, однакові результати.

Таблиця 1.1 – Чисельні результати.

n	x=(0,0,0.5)	x=(0,0,1.5)	x=(0,0,4.5)
4	0.16715042	0.08477078	0.03295008
8	0.16715145	0.08485896	0.03299230
16	0.16715145	0.08485973	0.03299267
32	0.16715145	0.08485973	0.03299267

На рис. 1.2 зображено розподіл температур у перерізах $x_3 / l = 0.5$ і $x_3 / l = 4.5$, отриманий при $n = 8$, $M_1 = M_2 = 50$ і $\varepsilon = 10^{-5}$.

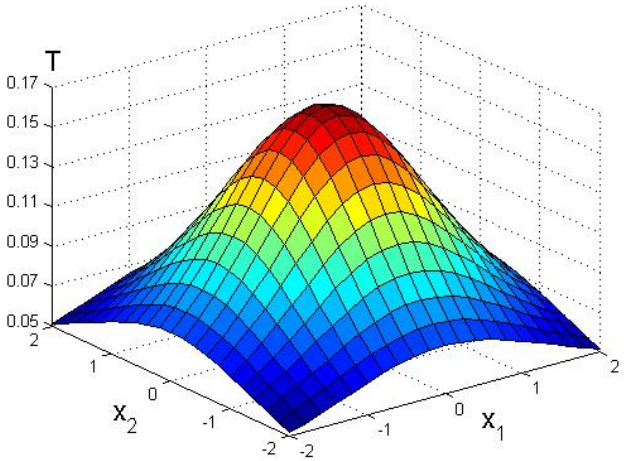


Рисунок 1.2а – Розподіл безрозмірної температури в перерізі $x_3 / l = 0.5$ (п–д 1).

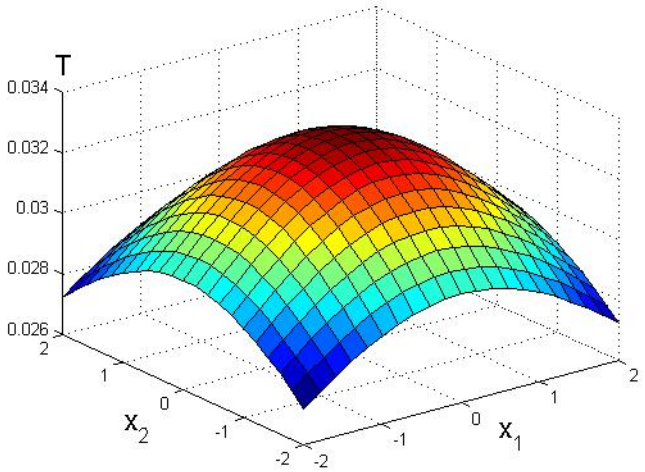


Рисунок 1.2б – Розподіл безрозмірної температури в перерізі $x_3 / l = 4.5$ (п–д 1).

Приклад 1.2. Нехай поверхня поржнини має параметричне подання (рис. 1.3)

$$\Gamma_3 = \{\mathbf{z}(\theta,\varphi) = r(\theta,\varphi)\mathbf{p}(\theta,\varphi) + \mathbf{c}, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]\},$$

де $\mathbf{c} = (0,0,3)$ і $r(\theta,\varphi) = 0.8\sqrt{0.8 + 0.5(\cos 2\varphi - 1)(\cos 4\theta - 1)}$. Гранична функція задана як $\beta(\mathbf{x}) = \dfrac{q_0}{k\left(x_1^2 + x_2^2 + 1\right)^2}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_1$. Інші вхідні дані такі ж як і раніше. На рис. 1.3 зображено наближений розв'язок задачі з параметрами дискретизації як і в попередньому прикладі. Як бачимо з отриманих результатів, найбільш істотний вплив порожнини на розподіл температури має місце в її околі і суттєво залежить від форми поверхні.

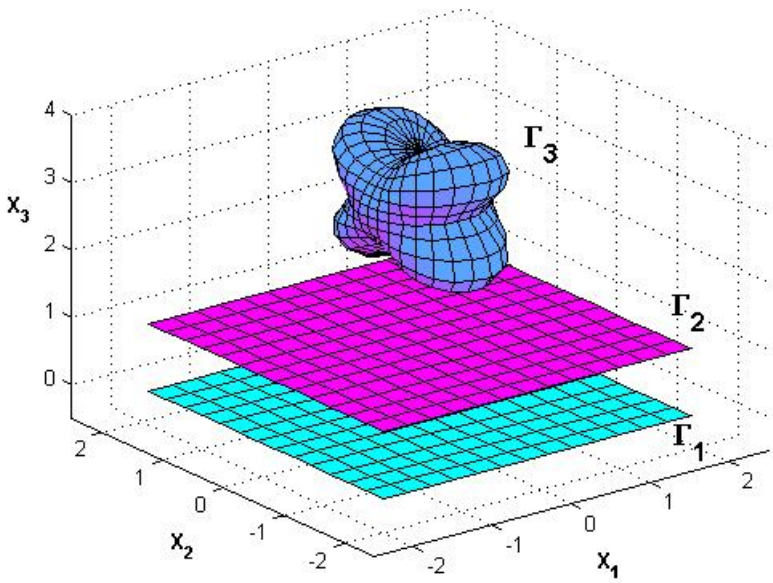


Рисунок 1.3 – Граничні поверхні частково–необмеженої області з порожниною (п–д 2).

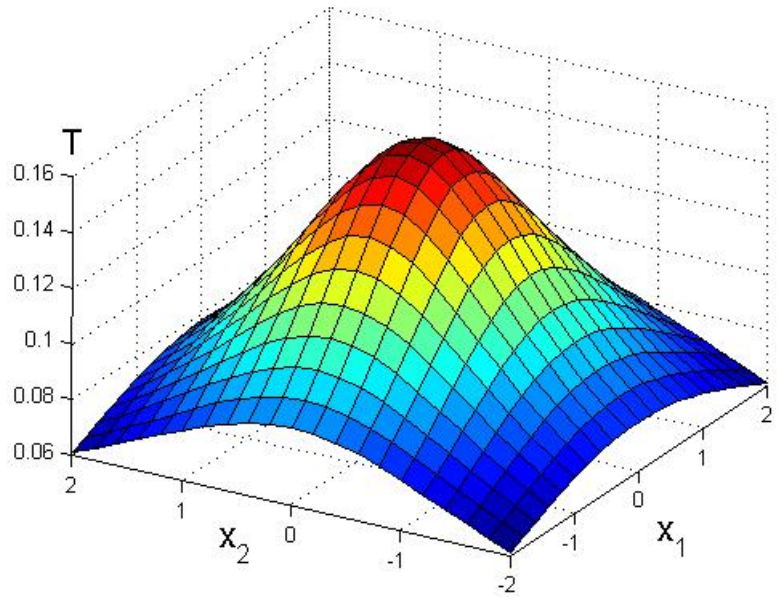


Рисунок 1.4а – Розподіл безрозмірної температури
в перерізі $x_3 / l = 0.5$ (п–д 2).

Отже, використання матриці Гріна дало можливість редукувати крайову задачу в частково–необмеженій багатошаровій області з порожниною до граничного інтегрального рівняння на поверхні порожнини. Для класу поверхонь, які гомеоморфні сфері, запропоновано проекційний метод розв’язування інтегрального рівняння з супералгебраїчним порядком збіжності.

В подальшому складає інтерес застосування непрямого варіанту методу інтегральних рівнянь до крайових задач стаціонарної теплопровідності в шаруватій області з умовами типу Діріхле, Неймана і Робіна на поверхні порожнини.

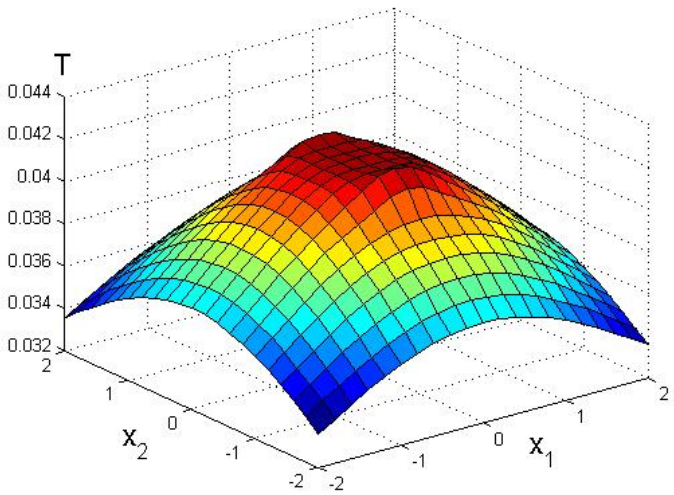


Рисунок 1.4б – Розподіл безрозмірної температури
в перерізі $x_3 / l = 4.5$ (п д 2).

1.2 Чисельне розв'язування мішаної нестаціонарної задачі теплопровідності в частково необмеженій області

1.2.1 Постановка задачі та функції Гріна

Чисельне розв'язування прямих нестаціонарних мішаних задач – актуальна проблема обчислювальної математики. Необхідність у цьому виникає у разі застосування до оберненої задачі Коші деякого ітераційного регуляризуючого методу. Оскільки на кожному кроці ітераційного процесу треба розв'язувати одну або більше пряму задачу, крім того, для досягнення необхідної точності часто доводиться виконувати велику кількість ітерацій, то важливим критерієм є ефективність методу розв'язування прямих задач. Якщо в постановці задачі неоднорідні вхідні дані задані тільки на границі області, то недоцільно використовувати методи, які вимагають дискретизації цілої області, натомість у разі використання граничних інтегральних рівнянь понижується розмірність задачі, що поліпшує швидкодію методу.

Додаткові труднощі для застосування інтегральних рівнянь до нестаціонарної задачі становить наявність часу як незалежної змінної. Одним із підходів у цьому випадку є метод Роте, його можна використовувати в поєднанні з граничними інтегральними рівняннями для розв'язування внутрішніх чи зовнішніх нестаціонарних задач у випадку, коли границя обмежена [18]. Після виконання часткової дискретизації одержують послідовність еліптичних задач. Згодом, за допомогою потенціалів простого чи подвійного шару ці задачі зводять до послідовності інтегральних рівнянь по границі області. Водночас у випадку канонічної частково необмеженої області ефективно використовувати техніку функцій Гріна, які дозволяють забезпечити граничну умову на нескінченній границі. Далі методи Роте та функцій Гріна поширюються на випадок нестаціонарної задачі у частково необмеженій області. Потрібно зазначити, що альтернативою до цього підходу є використання нестаціонарних функцій Гріна. Проте нестаціонарна функція Гріна не відома для деяких областей (смуга, півсмуга тощо).

Нехай задано канонічну (півплощина, квадрант, смуга, півсмуга) частково необмежену область D з простору R^2 з границею Γ_0 без включення обмеженого кривою Γ_1 (див. рис. 1.5). Припускаємо, що границі достатньо гладкі, а також $T > 0$ деяка константа.

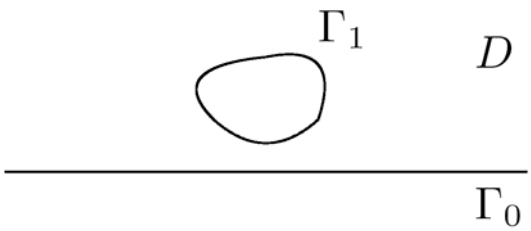


Рисунок 1.5 – Вигляд області.

Розглянемо таку початкову мішану задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & в\, D \times (0,T), \\ u = f_1 & на\, \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_0 & на\, \Gamma_0 \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 & при\, x \in D. \end{cases} \tag{1.24}$$

Тут f_0, f_1 задані функції, які задовольняють умови погодженості. Параметр $c > 0$ сталий коефіцієнт дифузії, ν – вектор зовнішньої нормалі. Шукатимемо класичний розв'язок $u \in C^2(\overline{D} \times (0,T))$, який двічі неперервно диференційований за просторовою змінною і один раз неперервно диференційований за часовою змінною.

У випадку різних канонічних частково необмежених областей границя Γ_0 матиме наперед відомий вигляд, а саме

- півплощина

$$\Gamma_0^{hp} = \{x_0(t) = (t,0), t \in R\},$$

- квадрант $\Gamma_0^q = \Gamma_{01}^q \cup \Gamma_{02}^q$

$$\Gamma_{01}^q = \{x_{01}(t) = (t,0), t \in R\},\ \Gamma_{02}^q = \{x_{02}(t) = (0,t), t \in R\},$$

- смуга (для простоти ширина смуги дорівнює π) $\Gamma_0^s = \Gamma_{01}^s \cup \Gamma_{02}^s$

$$\Gamma_{01}^s = \{x_{01}(t) = (t,0), t \in R\},\ \Gamma_{02}^s = \{x_{02}(t) = (t,\pi), t \in R\},$$

- півсмуга $\Gamma_0^{hs} = \Gamma_{01}^{hs} \cup \Gamma_{02}^{hs} \cup \Gamma_{03}^{hs}$

$$\Gamma_{01}^{hs} = \{x_{01}(t) = (t,0), t \in R\},$$

$$\Gamma_{02}^{hs} = \{x_{02}(t) = (t,\pi), t \in R\},$$

$$\Gamma_{03}^{hs} = \{x_{03}(t) = (0,t), t \in (0,\pi)\}.$$

У працях [18, 19] описано метод Роте, який полягає у апроксимації початкової задачі послідовністю стаціонарних граничних задач. Для цього на $[0,T)$ вводиться рівновіддалений поділ $t_n = (n+1)h$, $h = T/(N+1)$, тоді $u_n(x) \approx u(x,t_n)$, $f_{1n}(x) = f_1(x,t_n)$, $f_{0n}(x) = f_0(x,t_n)$, $n = 0,\ldots,N-1$ і

$u_{-1} = f_{1,-1} = f_{0,-1} = 0$. Після використання скінченнорізницевої апроксимації похідної за часом одержуємо послідовність еліптичних рівнянь

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \text{ в } D, \tag{1.25}$$

де γ і β_i відомі коефіцієнти. Разом з граничними умовами $u_n = f_{1n}$ на Γ_1 і $\frac{\partial u_n}{\partial \nu} = f_{0n}$ на Γ_0 утворюється послідовність стаціонарних мішаних задач. Зазначимо, що у разі використання тих чи інших апроксимаційних співвідношень можна досягнути першого або другого порядку апроксимації за часовою змінною.

Означення 1.2. Послідовність функцій Φ_n, $n = 0,\ldots,N-1$ називається фундаментальним розв'язком системи рівнянь (1.25), якщо

$$\Delta_x \Phi_n(x,y) - \sum_{m=0}^{n} \beta_{n-m} \Phi_m(x,y) = \delta(x-y). \tag{1.26}$$

Наступні поліноми використовують для побудови фундаментального розв'язку

$$v_n(r) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n,2m} r^{2m}, \; w_n(r) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{n,2m+1} r^{2m+1},$$

де a_{nm} відомі коефіцієнти, які рекурсивно визначаються через γ, β_i (див. [7]).

Теорема 1.5.

Функції

$$\Phi_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left\{K_0(\gamma|x-y|)v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|)w_n(|x-y|)\right\} \tag{1.27}$$

$n = 0,\ldots,N-1$ *є фундаментальним розв'язком (1.25) в сенсі означення 1.6. Тут* K_0 *і* K_1 *модифіковані функції Бесселя другого роду.*

На основі цього фундаментального розв'язку можна побудувати аналоги потенціалів простого і подвійно шару і звести еліптичну задачу до

інтегрального рівняння по межі області. Для того щоб мати змогу одержати розв'язок у випадку частково необмеженої області, аналогічно, побудуємо послідовність функцій Гріна.

Означення 1.3. Функції $N_n(x,y)$ при $n=0,\ldots,N-1$ називають послідовністю функцій Гріна для задачі Неймана для системи еліптичних рівнянь (1.25) в області Ω, якщо

- $\forall x,y\in\Omega$, $N_n(x,y)$ – фундаментальний розв'язок у сенсі (1.26);
- $\forall x\in\Omega$ та $\forall y\in\partial\Omega$ справджується $\dfrac{\partial N_n}{\partial\nu(y)}(x,y)=0$.

Теорема 1.6 вигляд послідовності фунцій Гріна.

Нехай Ω частково необмежена область, тоді функції Гріна для задачі Неймана мають вигляд

$$N_n(x,y)=\Phi_n(x,y)+\phi_n(x,y), \tag{1.28}$$

де Φ_n фундаментальні розв'язки, а ϕ_n неперервна в Ω функція, що визначається з задачі

$$\Delta_y\phi_n(x,y)-\sum_{m=0}^{n}\beta_{n-m}\phi_n(x,y)=0 \qquad в\,\Omega,$$
$$\frac{\partial\phi_n(x,y)}{\partial\nu(y)}=-\frac{\partial\Phi_n(x,y)}{\partial\nu(y)} \qquad на\,\partial\Omega.$$

Доведення. Очевидно, що для так побудованих функцій $N_n(x,y)$ виконуються умови означення 1.8. ▲

Теорема 1.7 подання розв'язку через послідовність функцій Гріна.

Для Φ_n з (1.27) виберемо функції Гріна N_n у формі (1.28). Тоді розв'язок u_n задачі Неймана для послідовності еліптичних рівнянь в області Ω виражається як

$$u_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_m}{\partial\nu}(y)-\frac{\partial u_{m-1}}{\partial\nu}(y)\right]N_{n-m}(x,y)ds(y). \tag{1.29}$$

Доведення. Застосувавши до u_n і N_n аналог другої формули Гріна і враховуючи той факт, що N_n є фундаментальним розв'язком у сенсі (1.26), а також поведінку $\Phi_n(x,y)$ при $x=y$, одержимо для $x\in\Omega$

$$\sum_{m=0}^{n}u_m(x)=\sum_{m=0}^{n}\int_{\Omega}\left\{N_{n-m}(x,y)\frac{\partial u_m}{\partial\nu}(y)-u_m(y)\frac{\partial N_{n-m}(x,y)}{\partial\nu(y)}\right\}ds(y).$$

Твердження теореми випливає з другого пункту означення послідовності функцій Гріна.

Зокрема, для знаходження функцій Гріна можна використовувати метод відображень [20, 21], тоді вони будуть такого вигляду:

- півплощина

$$\varphi_n^{hp}(x,y)=\Phi_n\left(x,y^*\right),\ y^*=(y_1,-y_2).$$

- квадрант

$$\varphi_n^{q}(x,y)=\Phi_n\left(x,y^{*_1}\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_2}\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_3}\right),$$

де $y^{*_1}=(y_1,-y_2)$, $y^{*_2}=(-y_1,y_2)$, $y^{*_3}=(-y_1,-y_2)$.

- смуга

$$\varphi_n^{s}(x,y)=-\Phi_n(x,y)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\Phi_n\left(x,y^k\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_k}\right)\right],$$

де $y^k=(y_1,y_2+2\pi k)$, $y^{*_k}=(y_1,-y_2+2\pi k)$.

- півсмуга

$$\varphi_n^{hs}(x,y)=-\Phi_n(x,y)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\Phi_n\left(x,y^k\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_{k1}}\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_{k2}}\right)+\Phi_n\left(x,y^{*_{k3}}\right)\right],$$

де $y^k=(y_1,y_2+2\pi k)$, $y^{*_{1k}}=(y_1,-y_2+2\pi k)$, $y^{*_{2k}}=(-y_1,y_2+2\pi k)$, $y^{*_{3k}}=(-y_1,-y_2+2\pi k)$.▲

При обчисленнях функцій Гріна для смуги та півсмуги обмежуються деяким $(2N_{g\max}+1)$ числом членів ряду. Оскільки $K_0(z)=O\left(e^{-z}\right)$ при $z\to\infty$, то

у випадку рівняння (1.25) для досягнення необхідної точності достатньо невеликого $N_{g\max}$.

1.2.2 Граничні інтегральні рівняння.

Виходячи з теореми 1.7 функція

$$\omega_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\int_{\Gamma_0}\left[f_{0m}(y)-f_{0,m-1}(y)\right]N_{n-m}(x,y)ds(y)$$

задовольняє рівняння (1.25), а також $\frac{\partial\omega_n}{\partial\nu}=f_{0n}$. Але крім умови Неймана, треба забезпечити умову Діріхле на Γ_1. Використаємо для цього непрямий метод інтегральних рівнянь. Отже, подамо розв'язок мішаної задачі як композицію потенціалу простого шару на Γ_1 та ω_n

$$u_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\int_{\Gamma_1}\varphi_m(y)N_{n-m}(x,y)ds(y)+\omega_n(x), \qquad (1.30)$$

де φ_n невідома густина потенціалу. Після використання теореми про неперервність потенціалу простого шару при переході через границю одержимо систему інтегральних рівнянь

$$\int_{\Gamma_1}\varphi_n(y)N_0(x,y)ds(y)=f_{1n}(x)-\omega_n(x)-\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\Gamma_1}\varphi_m N_{n-m}(x,y)ds(y).$$

Тут $x\in\Gamma_1$.

Припустимо, що границя включення є гладкою і має параметричне представлення

$$\Gamma_1=\{x_1(s)=(x_{11}(s),x_{12}(s)),s\in[0,2\pi]\}.$$

Використовуючи параметричне представлення і провівши адитивне виділення логарифмічної особливості з ядер, одержуємо таку послідовність інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_n(\sigma)\left[H_{00}(s,\sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}+H_{01}(s,\sigma)\right]d\sigma=G_n(s), \qquad (1.31)$$

де $\mu_n(\sigma)=\varphi_n(x_1(\sigma))|x_1'(\sigma)|$. Праві частини набувають вигляду

$$G_n(s)=f_{1n}(s)-\omega_n(s)-$$
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{2\pi}\mu_m(\sigma)\left[H_{n-m,0}(s,\sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}+H_{n-m,1}(s,\sigma)\right]d\sigma,\ f_{1n}(s)=f_{1n}(x_1(s)),$$

$$\omega_n(s)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\sum_{m=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}_{0m}(\sigma)H_{n-m}(s,\sigma)d\sigma & для\,\Gamma_0^{hp},\\ \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{m=0}^{n}\int_{0}^{+\infty}\widetilde{f}_{0\ell,m}(\sigma)H_{n-m}(s,\sigma)d\sigma & для\,\Gamma_0^{q},\\ \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{m=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}_{0\ell,m}(\sigma)H_{n-m}(s,\sigma)d\sigma & для\,\Gamma_0^{s},\\ \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{m=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}_{0\ell,m}(\sigma)H_{n-m}(s,\sigma)d\sigma+ & \\ \qquad\sum_{m=0}^{n}\int_{0}^{\pi}\widetilde{f}_{03,m}(\sigma)H_{n-m}(s,\sigma)d\sigma & для\,\Gamma_0^{hs}.\end{cases}$$

Ядра можна записати у наступному вигляді

$$H_n(s,\sigma)=2\pi N_n(x_1(s),x_1(\sigma)),$$

$$H_{n0}(s,\sigma)=-\frac{1}{2}I_0(\gamma|r_{11}(s,\sigma)|)v_n(|r_{11}(s,\sigma)|)+\frac{1}{2}I_1(\gamma|r_{11}(s,\sigma)|)w_n(|r_{11}(s,\sigma)|),$$

$$H_{n1}(s,\sigma)=H(s,\sigma)-H_0(s,\sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2},\ \text{при}\ s\neq\sigma,$$

$$H_{n1}(s,s)=-0.5\ln\frac{e\gamma^2|x_1'(s)|^2}{4}-C_E+\frac{a_{n1}}{\gamma}+\varphi_n(x_1(s),x_1(s)).$$

Тут $r_{11}(s,\sigma)=x_1(s)-x_1(\sigma)$ і C_E константа Ейлера. Коректність таких інтегральних рівнянь досліджена у просторах Гельдера у праці [22] і у просторах Соболєва [2].

Як чисельний метод розв’язування інтегральних рівнянь застосуємо метод квадратур. Для цього введемо рівновіддалений поділ інтервалу $[0,2\pi]$

$$s_i = \frac{i\pi}{M},\ i = 0,\ldots,2M-1.$$

Для обчислення інтегралів використаємо такі квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(\sigma_j),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\log\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(s)f(\sigma_j),$$

з ваговими функціями

$$R_j(s) = -\frac{1}{2M}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos m(s-s_j) + \frac{\cos(s-s_j)}{M}\right\}.$$

Для обчислення невласних інтегралів з безмежним інтервалом інтегрування застосовують sinc–квадратури [17]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)d\sigma \approx h_\infty \sum_{k=-M_\infty}^{M_\infty} f(kh_\infty),\ h_\infty = \frac{c_\infty}{\sqrt{M_\infty}},\ c_\infty > 0.$$

Для інтегрування на інтервалах $(0,\infty)$ і $(0,\pi)$ спочатку застосовують відповідне конформне відображення φ, щоб перейти до інтегралу по R, після цього sinc–квадратура набуде вигляду

$$\int_a^b f(\sigma)d\sigma \approx h_\infty \sum_{k=-M_\infty}^{M_\infty} \frac{f(\psi(kh_\infty))}{\varphi'(\psi(kh_\infty))},$$

де $\psi = \varphi^{-1} : R \to (a,b)$. Якщо $(a,b) = (0,\infty)$, то конформне відображення можна вибрати у вигляді $\varphi(z) = \ln z$, $\psi(w) = \exp w$. У випадку скінченного інтервалу (a,b) використовують відображення $\varphi(z) = \ln\frac{z-a}{b-z}$, $\psi(w) = \frac{a+be^w}{1+e^w}$.

Отже, остаточно одержимо повністю дискретну послідовність СЛАР

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{\mu}_{nj}\left\{R_{|j-k|}H_{00}(s_k,s_j) + \frac{1}{2M}H_{01}(s_k,s_j)\right\} = G_{nk}^1, \qquad (1.32)$$

де $\tilde{\mu}_{nj} \approx \mu_n(s_j)$, $R_j = R_j(0)$, G_{nk}^1 – відомі праві частини.

Теорема 1.8.

Якщо $\Gamma_1 \in C^{\ell+2}$, $\ell \geq 2$, $f_{1n} \in C^{\ell,\beta}[0,2\pi]$, $f_{0n} \in C^{\ell-1,\beta}(-\infty,+\infty)$, то для достатньо великого M системи (1.31) мають єдиний розв'язок. Крім того, виконується оцінка похибки

$$\left\|\mu_n - \tilde{\mu}_{n,M}\right\|_{m,\alpha} \leq C_n \frac{\ln M}{M^{\ell-m+\beta-\alpha}} \left\|\tilde{\mu}_n\right\|_{\ell,\beta}$$

де $0 \leq m \leq \ell$, $0 < \alpha \leq \beta < 1$ і деяка константа C_n, яка не залежить від M.

Доведення. Теорему доводять, використовуючи оцінки похибки квадратурних формул (див. [22]). ▲

Цей метод можна поширити на випадок наявності кількох включень.

1.2.3 Чисельні експерименти.

У поданих нижче прикладах виберемо параметри задачі (1.24) так: $T = 1$, $c = 1$. Параметри дискретизації M_∞ і $N_{g\max}$ виберемо так, щоб вони забезпечували хорошу точність, наприклад, $M_\infty = 1000$, $N_{g\max} = 10$.

Приклад 1.3. Нехай область D – це квадрант з включенням

$$r(s) = \sqrt{\cos s + 0.25 \sin s}, \tag{1.32}$$

$$x_1(s) = \{(r(s)\cos s + 1, r(s)\sin s + 1), s \in [0,2\pi]\}.$$

Для того, щоб перевірити правильність розв'язування системи еліптичних рівнянь, виберемо граничні умови як звуження значень фундаментального розв'язку (1.28) на границю

$$f_{1n}(x,t) = \Phi_n(x,\tilde{y}),\ x \in \Gamma_1,$$

$$f_{0n}(x,t) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Phi_n(x,\tilde{y}),\ x \in \Gamma_0,$$

де $\tilde{y} = (1,1) \notin D$. В табл. 1.2 наведені абсолютні похибки для деяких елементів u_n розв'язку системи за різних значень частоти дискретизації M. Виміри зроблені в точці $x = (0.25, 0.25)$.

Таблиця 1.2 – Абсолютні похибки розв’язку системи еліптичних рівнянь

	$n=0$	$n=5$	$n=10$
$M=16$	$5.60\cdot10^{-11}$	$2.75\cdot10^{-10}$	$3.42\cdot10^{-10}$
$M=32$	$1.17\cdot10^{-16}$	$3.44\cdot10^{-15}$	$6.32\cdot10^{-15}$
$M=64$	$1.04\cdot10^{-16}$	$1.88\cdot10^{-15}$	$8.99\cdot10^{-15}$

Приклад 1.4. Розглянемо смугу, яка містить включення

$$x_1(s)=\left(r(s)\cos s, r(s)\sin s+1\right),$$

де $r(s)$ з (1.32).

Для перевірки розв’язування нестаціонарної задачі вибираємо граничні умови як звуження нестаціонарного фундаментального розв’язку

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi ct}\exp\left(\frac{-|x-\tilde{y}|}{4ct}\right),\ \tilde{y}\notin D,$$

де $\tilde{y}=(0,1)$. Абсолютні похибки в точці $x=(0,0.25)$ за різних значень часу і при різних параметрах дискретизації подано в табл. 1.3. При цьому реалізовано схему з першим і другим порядком апроксимації за часом.

Таблиця 1.3 – Чисельні результати розв’язування нестаціонарної задачі.

		$O(h)$		$O(h^2)$	
M	M	$N=10$	$N=20$	$N=10$	$N=20$
0.20	16	$7.565\cdot10^{-2}$	$3.044\cdot10^{-2}$	$6.511\cdot10^{-2}$	$1.899\cdot10^{-2}$
	32	$7.565\cdot10^{-2}$	$3.044\cdot10^{-2}$	$6.511\cdot10^{-2}$	$1.899\cdot10^{-2}$
0.40	16	$2.890\cdot10^{-2}$	$9.986\cdot10^{-3}$	$2.433\cdot10^{-2}$	$1.125\cdot10^{-2}$
	32	$2.890\cdot10^{-2}$	$9.986\cdot10^{-3}$	$2.433\cdot10^{-2}$	$4.715\cdot10^{-3}$
0.60	16	$1.239\cdot10^{-2}$	$3.683\cdot10^{-3}$	$1.068\cdot10^{-2}$	–
	32	$1.239\cdot10^{-2}$	$3.683\cdot10^{-3}$	$1.068\cdot10^{-2}$	$2.325\cdot10^{-3}$
0.80	16	$5.976\cdot10^{-3}$	$1.524\cdot10^{-3}$	$5.130\cdot10^{-3}$	–
	32	$5.976\cdot10^{-3}$	$1.524\cdot10^{-3}$	$5.130\cdot10^{-3}$	$1.342\cdot10^{-3}$

Приклад 1.5. Нехай область D півсмуга, що містить два включення у формі квадрата з заокругленими кутами, які описуються таким параметричним зображенням

$$r(s)=\left((2\cos s)^{100}+(2\sin s)^{100}\right)^{0,01},$$

$$x_1(s)=\left\{\left(r(s)\cos s+1.5, r(s)\sin s+\frac{\pi}{2}\right), s\in[0,2\pi]\right\},$$

$$x_2(s)=\left\{\left(r(s)\cos s+3.5, r(s)\sin s+\frac{\pi}{2}\right), s\in[0,2\pi]\right\}.$$

Граничні умови вихідної задачі вибираються як звуження наступного точного розв’язку на границю області

$$u(x,t)=erf\left(\frac{x_1-\widetilde{y}_1}{2\sqrt{ct}}\right)erf\left(\frac{x_2-\widetilde{y}_2}{2\sqrt{ct}}\right)-1,$$

де $\tilde{y} = (-0.1, -0.1)$, а $erf(x)$ фунція помилок. На рис. 1.6–1.9 зображенно значення точного та наближеного розв'язків у різні моменти часу. У цьому разі параметри дискретизації такі: $N = 10$, $M = 64$.

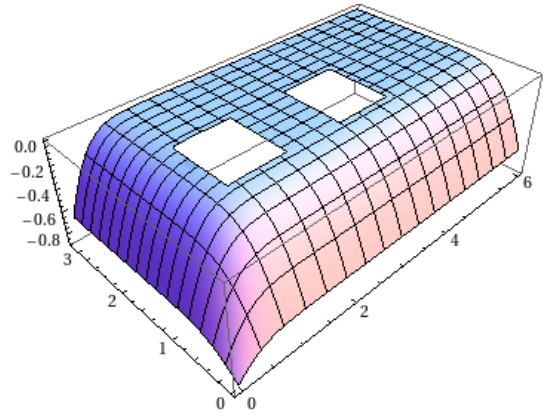


Рисунок 1.6 – Точний розв'язок $t = 0.1$.

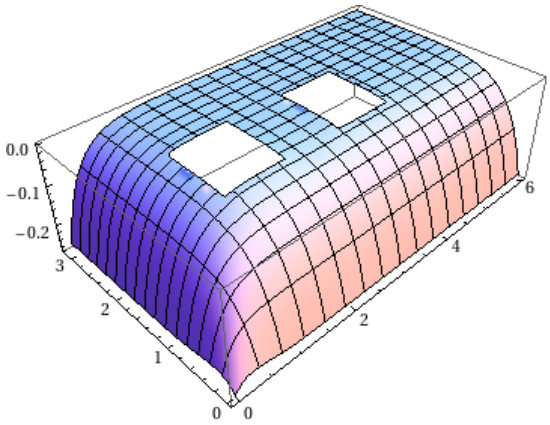


Рисунок 1.7 – Наближений розв'язок $t = 0.1$.

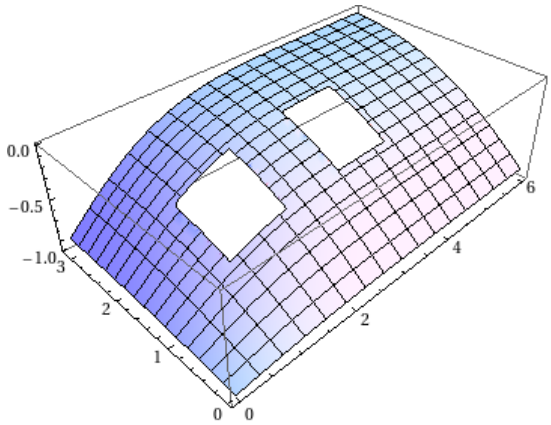


Рисунок 1.8 – Точний розв’язок $t = 1.0$.

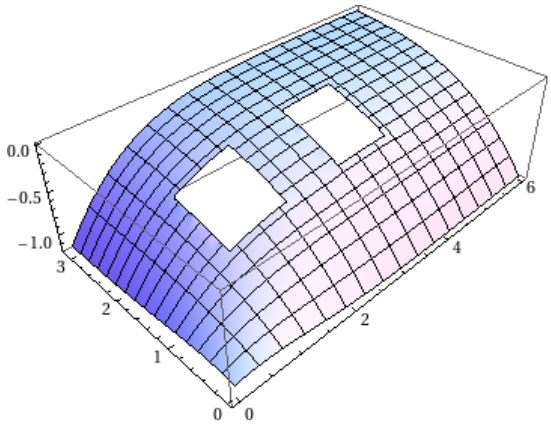


Рисунок 1.9 – Наближений розв’язок $t = 1.0$.

Отже в цьому підрозділі, нами розглянуто чисельне розв’язування мішаної початково–крайової задачі в частково необмеженій області з включенням. Застосуванням методу Роте за часовою змінною вихідну задачу звели до послідовності стаціонарних граничних задач. Використання побудованої послідовності функцій Гріна дало змогу одержати подання розв’язку, яке задовольняє умову Неймана на границі частково необмеженої області. За допомогою аналога потенціалу простого шару задачу звели до інтегрального рівняння по границі включення, яке розв’язується методом дискретної

колокації з використанням квадратурних формул на базі тригонометричної інтерполяції на $[0,2\pi]$, а також sinc–квадратур. Чисельні результати підтверджують ефективність запропонованого методу та теоретичні оцінки похибки.

2 НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У процесі проектування електронно–променевих приладів постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів, яку називають електронно–оптичною системою. Будуючи відповідну математичну модель, окремі електроди доцільно подавати у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Однак наявність досить складних форм сучасних конструкцій електродів суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, оскільки воно пов'язане із знаходженням невідомих величин саме на граничних поверхнях.

Розглянуто різні аспекти побудови наближеної схеми розв'язування двовимірного інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Проаналізовано питання, пов'язані з уточненням отримуваних розв'язків в околі особливих точок розімкнених граничних поверхонь. Запроваджено спеціальні оцінювачі похибок, які дозволяють шляхом відповідного згущення сітки гарантувати потрібні результати.

2.1 Уточнення наближених розв'язків двовимірного інтегрального рівняння теорії потенціалу на розімкнених поверхнях

2.1.1 Загальна зарактеристика проблеми та аналіз можливих шляхів її вирішення

Електронно–оптичні системи (ЕОС) є основними компонентами сучасних науково–дослідних комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних

полях. Відомо, що, наприклад, електростатичне поле ЕОС створюється N ідеально провідними електродами, які у сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею $S := \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, де $S_i \bigcap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. При цьому кожен електрод $S_i \in S$ по'язують із заданим на ньому значенням потенціалу U_i. Для розрахунку електростатичного поля ЕОС складної конфігурації доцільним виявилось використання методів теорії потенціалу, що призвело до необхідності розв'язання такого інтегрального рівняння

$$(A\sigma)(M) \equiv \int_S \sigma(P) \left| M - P \right|^{-1} \mathrm{d}\, S_p = U_i(M),\ M \in S_i,\ (i = \overline{1, N}), \qquad (2.1)$$

де $\sigma(P)$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів на S, тобто $\sigma(P) := \left\{ \sigma_i(P), P \in S_i, i = \overline{1, N} \right\}$, а $U_i(M)$ – граничне значення потенціалу на електроді, змодельованому поверхнею S_i, яка, взагалі кажучи, може бути розімкненою.

З'ясовувати розв'язуваність операторного рівняння (2.1) можна в різних функціональних просторах, однак, при цьому слід враховувати специфіку досліджуваного явища. Так, наприклад, моделювання електростатичного поля в істотно просторовій постановці передбачає зважання характеру поведінки шуканої густини розподілу зарядів $\sigma(P)$ поблизу контуру розімкненої поверхні S та ліній її зламу. Власне тому, в найбільш загальному випадку, показано [25], що $A : H_{00}^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S)$ – ізоморфізм, а розв'язуваність (2.1) виявляється нерівностями

$$m_1 \| \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \leq \| A\sigma \|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \| \sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(S)},\ (0 < m_1 \leq m_2).$$

Наближені методи розв'язування інтегральних рівнянь типу (2.1) для кусково–гладких замкнених граничних поверхонь S постої структури є добре відомими [26, 27]. Проте в реальних ЕОС наявна значна кількість заряджених електродів складної конфігурації. Тому використання навіть досить економічного методу колокації за умов кусково–постійної апроксимації

шуканої густини вимагає чисельного розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великих розмірностей з щільно заповненими матрицями. Останнє очевидним чином призводить до нестійкості обрахунків. У зв'язку з цим перспективним виявився метод врахування наявної симетрії у геометрії сукупної поверхні S [28, 29]. Він дозволяє трактувати проблему як задачу з абелевою групою симетрії скінченого порядку, що суттєво понижує порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні, оскільки (2.1) зводиться до послідовності рівнянь лише по конгруентній складовій S. Таким чином розширюється клас задач, що допускає чисельне моделювання з використанням методу граничних інтегральних рівнянь.

Слід також додати, що отримані рівняння можна розв'язувати методом колокації із використанням кусково–постійної, білінійної, біквадратичної або бікубічної апроксимації невідомої $\sigma(P)$. При цьому виникає необхідність обчислення значної кількості невласних інтегралів, ускладнених наявністю певної вагової функції. Запровадження останнього пояснюється тим, що шукана густина розподілу зарядів в околі кутових точок контуру поверхні S і при підході до самого контуру має особливості, від яких, однак, можна позбавитись шляхом використання спеціальних замін у відповідних подвійних інтегралах. Така процедура значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування розглядуваного інтегрального рівняння. Для усвідомлення цього подамо одне можливе зображення згаданої вище вагової функції. Нехай поверхнею S є одна прямокутна пластина, розташована перпендикулярно до осі $0z$, зі сторонами паралельними до координатних осей $0x$ і $0y$ обраної прямокутної декартової системи координат xyz. Оскільки вагова функція $1/\Omega(x,y)$ повинна враховувати сингулярну поведінку шуканого розв'язку в околі вершин пластини, які мають координати $x=\pm a$ ш $y=\pm b$, ф також при наближенні до її ребер, то $\Omega(x,y)$ можна, наприклад, подати в такому вигляді

$$\Omega(\alpha,\beta)=\frac{[(1-\lambda\alpha)(1-\mu\beta)]^{1/2}}{(1-\lambda\alpha)^{\gamma}+(1-\mu\beta)^{\gamma}},\ |x|\le a,\ |y|\le b,$$

причому $\lambda,\mu\in\{-1,1\}$, а γ – деяка фізична константа [30]. Аналіз змодельованої ситуації переконує в доцільності використання одного варіанту так званого методу апостеріорної оцінки похибки [31, 32], який дозволяє надійно контролювати нерегулярність шуканого розв'язку в околі окремих точок поверхні S, і відмовитись таким чином від аналітичного врахування його поведінки.

Слід також зауважити, що зважання на специфіку розімкнених поверхонь дозволяє значно зменшити кількість контрольованих "особливих" точок поверхні S і в найкращому випадку мати справу лише з однією ! Останнє суттєво спрощує алгоритм розв'язування початкової проблеми і відкриває шлях до застосування чисельно–аналітичної процедури, запровадженої авторами [33]. Власне такий підхід до аналізу двовимірного інтегрального рівняння типу (2.1) є цілком логічним; на нашу думку, з точки зору використання можливостей обчислювальної математики.

Найлегше продемонструвати переваги запропонованої методики шляхом розв'язання однієї модельної задачі. Наші дослідження присвячені поглибленому числовому аналізу проблеми відтворення електростатичного поля плоского конденсатора. Ця задача не є тривіальною, оскільки потенціали на відповідних пластинах обираємо суттєво відмінними, а відстань між пластинами поступово зменшуємо. Отже, аналізуємо ситуацію, коли чисельний розв'язок задачі стає особливо чутливим до змін вхідних даних.

2.1.2 Апостеріорний метод оцінки похибки

Розглянемо питання оцінки похибки наближеного розв'язку інтегрального рівняння типу (2.1). Припустимо, що $\sigma_h(P)$ – такий розв'язок, який належить

до обраного простору апроксимацій. Потенціал електростатичного поля в будь–якій точці M міжелектродного простору шукали в інтегральному вигляді, тому на підставі $\sigma_h(P)$ його наближене значення $U_h(M) = (A\sigma_h)(M)$. Функцію похибки $e_U := U - U_h$ відповідно можна обчислити за формулою

$$e_U = A\sigma - A\sigma_h = A(\sigma - \sigma_h) = Ae_\sigma,\ M \in S, \tag{2.2}$$

де U – теоретичне значення потенціалу, а $e_e := \sigma - \sigma_h$ – похибка наближеної густини розподілу зарядів. Легко бачити, що e_σ є розв'язком такого інтегрального рівняння

$$Ae_\sigma = U - A\sigma_h,\ M \in S. \tag{2.3}$$

Отже, для знаходження e_U на S потрібно розв'язати (2.3) і скористатись (2.2).

Як відомо, розв'язок інтегрального рівняння (2.1) поводить себе нерегулярно лише в околі контуру розімкненої поверхні S. Тому відтворюємо функцію e_U лише на "екстремальних" елементах D^e – там, де вона може набувати максимальне значення. Згадуючи "елементи", маємо на увазі такі, які утворюються в результаті початкової дискретизації S. Далі перевіряємо умову досягнення наперед заданої точності:

$$\frac{\| e_U \|_{H^{1/2}(D^e)}}{\sqrt{\| U_h \|^2_{H^{1/2}(D^e)} + \| e_U \|^2_{H^{1/2}(D^e)}}} \le \frac{\| e_\sigma \|_{H_{00}^{-1/2}(D^e)}}{\sqrt{\| \sigma_h \|^2_{H_{00}^{-1/2}(D^e)} + \| e_\sigma \|^2_{H_{00}^{-1/2}(D^e)}}} < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Якщо на "екстремальному" елементі умова (2.4) не виконується, то необхідно здійснити його поділ на кілька і в результаті розв'язати задачу вдруге на густішій сітці. При перевірці умови (2.4) необхідно обчислювати норми деяких функцій у просторі $H_{00}^{-1/2}(D^e)$. З практичної точки зору це не завжди виправдовується, оскільки e_σ і σ_h отримуються нами як поліноміальні апроксимації відповідних розв'язків. Для їх об'єктивної оцінки можна скористатись нормою в $L_2(D^e)$ або її ваговим аналогом $\| \cdot \|_{L_{2,\rho}}$, де в якості ваги

ρ можна розглянути функцію відстані від будь–якої точки D^e до контуру S. Нарешті повернемось до згаданої вище модельної задачі.

2.1.3 Аналіз розв'язків модельної задачі

Нехай потрібно розрахувати поле плоского конденсатора, інформацію про геометрію якого подано у вигляді проекцій на координатні площини xy і xz (див. рис. 2.1). З точки зору запровадженої термінології поверхня S є об'єднанням двох паралельних пластин S_1 і S_2 однакового розміру, симетрично розташованих відносно площини xy на відстані $2h$ одна від одної. Граничні значення потенціалів C_1 і C_2 (довільні сталі), відповідно.

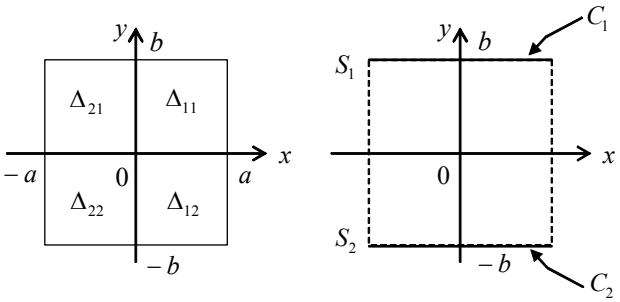


Рисунок 2.1 – Проекції пластин S_1 і S_2 на координатні площини.

У даному випадку аналогом інтегрального рівняння (2.1) буде така система

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Delta} \tau_1(x,y)\,K(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ \qquad + \iint\limits_{\Delta} \tau_2(x,y)\,K_h(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C_1, \quad M := (x_0,y_0) \in S_1; \\ \iint\limits_{\Delta} \tau_1(x,y)\,K_h(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ \qquad + \iint\limits_{\Delta} \tau_2(x,y)\,K(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C_2, \quad M := (x_0,y_0) \in S_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

де $\Delta := [-a,a]\times[-b,b]$,

$$K(x,y;x_0,y_0) := \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{-1/2},$$

$$K_h(x,y;x_0,y_0) := \left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+4h^2\right]^{-1/2},$$

$\{\tau_1(x,y), \tau_2(x,y); (x,y)\in\Delta\}$ – сукупна густина розподілу зарядів на $S := S_1 \cup S_2$.

Зауважимо також, що $\Delta = \bigcup_{i,j=1}^{2} \Delta_{ij}$, де Δ_{ij} – конгруентні складові Δ (див. рис. 2.1). Оскільки початкова задача володіє абелевою групою симетрії другого порядку, від системи (2.5) легко перейти до двох незалежних інтегральних рівнянь по конгруентній складовій S_1

$$\iint_{\Delta} \sigma_1(x,y)(K+K_h)(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F_1,\ (x_0,y_0)\in S_1, \tag{2.6}$$

$$\iint_{\Delta} \sigma_2(x,y)(K-K_h)(x,y;x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F_2,\ (x_0,y_0)\in S_1, \tag{2.7}$$

де $\sigma_1(x,y) := \tau_1(x,y)+\tau_2(x,y)$, $\sigma_1(x,y) := \tau_1(x,y)-\tau_2(x,y)$, $F_1 := C_1+C_2$, $F_2 := C_1-C_2$. Праві частини в (2.6) і (2.7) постійні, тому шукані розв'язки σ_1 і σ_2 симетричні відносно осей $0X$ і $0Y$. Це дає можливість подати (2.6), (2.7) у вигляді

$$(K_1\sigma_1)(M) \equiv \iint_{\Delta_{11}} \sigma_1(x,y)\sum_{i,j=1}^{2}(K+K_h)\left((-1)^{i-1}x,(-1)^{j-1}y;x_0,y_0\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F_1, \quad M\in\Delta_{11}, \tag{2.8}$$

$$(K_2\sigma_2)(M) \equiv \iint_{\Delta_{11}} \sigma_2(x,y)\sum_{i,j=1}^{2}(K-K_h)\left((-1)^{i-1}x,(-1)^{j-1}y;x_0,y_0\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F_2, \quad M\in\Delta_{11}, \tag{2.9}$$

де σ_1 у (2.8) і σ_2 у (2.9) – звуження шуканих розв'язків на Δ_{11}. Далі, розв'язуючи (2.8), (2.9), знаходимо $\tau_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1(x,y)+\sigma_2(x,y)\right)$, $\tau_2(x,y) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1(x,y)-\sigma_2(x,y)\right)$.

Інтегральні рівняння (2.8) і (2.9) розв'язували методом колокації із використанням кусково–постійних і білінійних базисних функцій. Поділ на

елементи проводили в області $\Delta_{11} := (0,a)\times(0,b)$. "Екстремальним" вважаємо елемент $D_{N_xN_y}$, який включає кутову точку пластини S_1 (N_xN_y – кількість елементів на Δ_{11}, див. рис. 2.2).

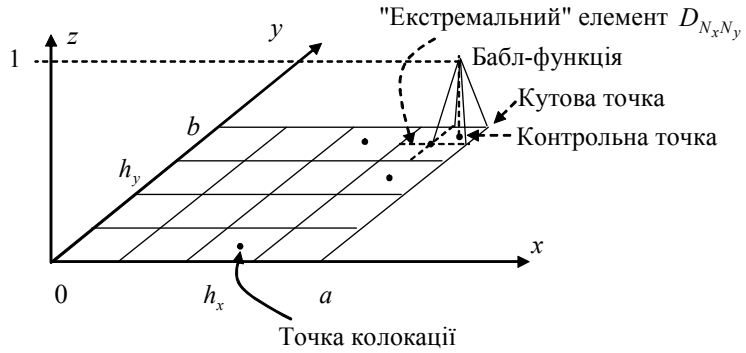


Рисунок 2.2 – Ілюстрація схеми уточнення розв’язку (2.8) і (2.9).

В умовах "ігнорування" особливості $\Omega(x,y)$ у поданні шуканого розв’язку компенсувати її відсутність можна лише шляхом згущення сітки в околі кутової точки пластини для досягнення потрібної точності результатів.

Отже, нехай потрібно розв’язати наближено (2.8) з наперед заданою точністю ε. Припустимо, що в результаті розв’язання відповідної системи алгебраїчних рівнянь отримали $\sigma_{1\varepsilon}(x,y)$. Перевірка задоволення граничної умови полягає в обчисленні $(K_1\sigma_{1\varepsilon})(M_1)$, де $M_1 := \left\{ a-\dfrac{h_x}{4}, b-\dfrac{h_y}{4} \right\}$ – так звана контрольна точка, що лежить в околі кутової точки пластини S_1 на "екстремальному" елементі $D_{N_xN_y} := [a-h_x,a]\times[b-h_y,b]$. Далі, враховуючи подання функції–похибки $e_{\sigma_1} := \sigma_1 - \sigma_{1\varepsilon}$ у вигляді $e_{\sigma_1}(x,y) = \lambda_1 \mathrm{B}_{M_1}(x,y)$, знаходимо невідомий параметр λ_1 шляхом колокації (2.8) в точці M_1:

$$\lambda_1 = \frac{F_1 - (K_1\sigma_{1\varepsilon})(M_1)}{(K_1\mathrm{B}_{M_1})(M_1)}. \qquad (2.10)$$

Слід зауважити, що така проста формула для обчислення параметра λ_1 пов'язана із фінітністю білінійної (біквадратичної, якщо для подання розв'язку використовуємо білінійні базисні функції) бабл–функції $\mathrm{B}_{M_1}(x,y)$:

$$\operatorname{supp} \mathrm{B}_{M_1}(x,y) = D^{1/4}_{N_x N_y} := \left[a - \frac{h_x}{2}, a\right] \times \left[b - \frac{h_y}{2}, a\right].$$

Подріблення сітки тепер пов'язане з перевіркою умов типу (2.4). Аналогічна процедура здійснюється при наближеному розв'язуванні інтегрального рівняння (2.9). У табл. 2.1 наведено результати розв'язання (2.8) при $a = 1$ і $b = 1$ у залежності від конкретних значень C_1, C_2, та h, а також різного рівня точності. Результати обрахунків підтверджують наведені вище мотивації.

Таблиця 2.1 – Значення потенціалу електростатичного поля U_h та його уточнення у контрольних точках (x,y) при $C_2 = -C_1$ та $N_x = N_y$.

C_1	h	N_x	x	y	U_h	λ_1	e_{U_1}	$U_h + e_{U_1}$
10	1,0	10	0,9500	0,9500	8,4775	0,1171	0,9926	9,4702
		20	0,9750	0,9750	8,7402	0,1037	0,9059	9,6462
	0,5	10	0,9500	0,9500	8,2397	0,1288	1,0611	9,3009
		20	0,9750	0,9750	8,5095	0,1182	1,0060	9,5156
	0,1	10	0,9500	0,9500	8,2725	0,1053	0,8711	9,1437
		20	0,9750	0,9750	8,0670	0,1345	1,0850	9,1520
100	1,0	10	0,9500	0,9500	84,775	0,0928	7,8675	92,643
		20	0,9750	0,9750	87,402	0,1037	9,0594	96,461
	0,5	10	0,9500	0,9500	82,397	0,1288	10,611	93,008
		20	0,9750	0,9750	85,095	0,1182	10,059	95,155
	0,1	10	0,9500	0,9500	82,725	0,1053	8,7114	91,436
		20	0,9750	0,9750	80,670	0,1345	10,850	91,520

Як видно із наведених у таблиці 2.1 чисельних результатів при зближенні пластин відбувається погіршення точності в контрольних точках, що і слід було очікувати. Також слід відзначити, що застосування бабл–функції дозволяє покращити точніть не лише на "екстремальних" елементах, але й в цілому.

2.1.4 Висновки

Таким чином, враховування наявної симетрії у граничних поверхнях дозволяє понизити розмірність відповідної системи лінійних рівнянь та, відповідно, суттєво зменшити об’єм обчислень. Апостеріорний метод оцінки похибки дає можливість отримувати розв’язки інтегральних рівнянь з потрібною точністю, що особливо актуально при розв’язуванні граничних задач у вуттєпо просторовій постановці на незамкнених поверхнях. Зауважимо також, що описану методику можна застосовувати і у випадку наявності лише однієї граничної поверхні, яка володіє одним із видів симетрії.

2.2 Деякі аспекти наближеного розв'язування задач електростатики із врахуванням специфіки вхідної інформації

У процесі проектування електронно–променевих приладів постає проблема визначення електростатичного поля, створюваного системою заряджених електродів. Якщо поверхні останніх моделювати нескінченно довгими циліндричними, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей, то в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюється деяка сукупність розімкнених дуг. Тоді значення потенціалу досліджуваного поля в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому необхідні розрахунки достатньо проводити лише в $\mathbf{R}^2$, тобто розглядувану просторову

проблему трактувати як “плоску” [34]. До того ж помічено [35], що при розв'язанні задач у суттєво просторовій постановці за умови переважання однієї геометричної складової поверхні над іншою значення потенціалу у відповідних поперечних перерізах системи, близьких до центрального, мало змінюється. Це дозволяє зробити висновок, що для встановлення якісної картини поля в центральних поперечних перерізах електронно–оптичних систем за умови задоволення граничними поверхнями вказаних вище геометричних властивостей можна обмежитись дослідженням лише плоских перерізів просторових конструкцій. Враховуючи сказане вище, зосередимось на дослідженні певних аспектів математичної моделі, яка описує так зване “плоске” електростатичне поле.

Нехай $L := \bigcup_{j=1}^{\nu} L_j$ – об'єднання скінченної кількості простих, гладких, незамкнених і обмежених дуг L_j на площині $\mathbf{R}^2$. Припустимо, що довільні дві дуги L_j не мають спільних точок. Позначимо через x, y , … точки в $\mathbf{R}^2$, через $|x-y|$ – відстань між x і y, а через x_m^* $\left(m = 2j-1,\, 2j;\; j = 1, 2, ..., \nu \right)$ – крайні точки дуги L_j. Нехай також

$$\overline{L} := L \cup \left\{ x_1^*, x_2^*, ..., x_{2\nu}^* \right\}.$$

Кожну з двох сторін L будемо вважати додатньою або від’ємною, відповідно, в залежності від напрямку нормалі до L. Якщо функція $g(x)$ має скінченну границю, коли $x \in \overline{L}$ прямує до точки x_0 на L з додатньої (від’ємної) сторони L, то будемо говорити, що $g(x)$ неперервна з додатньої (від’ємної) сторони, а границю позначимо $g^+(x_0)$ $\left(g^-(x_0)\right)$.

Отже, при математичному моделюванні проблеми в загальній постановці необхідно знайти функцію $U \in C^2\left(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}\right)$, яка разом із похідними першого порядку неперервна з додатньої (від'ємної) сторони L і задовольняє двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}; \tag{2.11}$$

крайові умови

$$U^{\pm}(x) = g(x),\ x \in L, \tag{2.12}$$

де $g(x)$ – відома функція, задана на L, яка в нашому конкретному випадку є постійною величиною; умову обмеженості на нескінченності

$$U(\infty) = C, \tag{2.13}$$

а також “умову на ребрі” [36]

$$\lim_{\rho \to 0} \sum_{m=1}^{2\nu} \int_{C_m^*(\rho)} \left| \frac{\partial U(y)}{\partial \rho} \right| \mathrm{d}s_y = 0, \tag{2.14}$$

причому $C_m^*(\rho) := \left\{ x \in \mathbf{R}^2 \middle| \left| x - x_m^* \right| = \rho \right\} \setminus L$.

Приймаючи до уваги, що $\Psi(x, y) := \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x - y|}$ – фундаментальний розв’язок двовимірного рівняння Лапласа (2.11), доведемо теорему про еквівалентність задачі (2.11)–(2.14) певному інтегральному рівнянню.

Теорема 2.1.

Якщо розв’язок $U(x)$ задачі (2.11)–(2.14) існує, то його можна подати у вигляді

$$U(x) = \int_L \Psi(x, y) \tau(y) \mathrm{d}s_y + C,\ x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}, \tag{2.15}$$

причому $\tau(y)$ задовольняє таке інтегральне рівняння першого роду

$$\int_L \Psi(x, y) \tau(y) \mathrm{d}s_y = g(x) - C,\ x \in L. \tag{2.16}$$

Навпаки, якщо функція $U(x)$ визначена за допомогою (2.15), де $\tau(y)$ і константа C задовольняють систему

$$\begin{cases} \int_L \Psi(x, y) \tau(y) \mathrm{d}s_y = g(x) - C,\ x \in L, \\ \int_L \tau(y) \mathrm{d}s_y = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

то $U(x)$ – розв'язок задачі (2.11)–(2.14).

Доведення. Скористаємось методикою, запровадженою в роботі [36]. Припустимо, що $z_j := \hat{c}^*_{2j-1}(\rho) \cup \hat{c}^*_{2j}(\rho) \cup L_j^{(+)} \cup L_j^{(-)}$, $j = \overline{1, \nu}$, – простий, замкнений контур, який охоплює L_j таким чином, що $\hat{c}^*_m(\rho)$, $m = 2j-1, 2j$, є дугою кола радіуса ρ з центром у точці x^*_m, а $L_j^{(+)}$ $\left(L_j^{(-)}\right)$ – незамкнена дуга, розміщена паралельно до L_j на відстані $\rho' < \rho$ з додатньої (від'ємної) сторони L_j. Позначимо через S_ρ об'єднання областей, обмежених замкненими контурами z_j, які містять L_j.

Нехай x – довільна фіксована точка в $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}$, $T := \left\{ y \in \mathbf{R}^2 \middle| \, |y - x| \le R \right\}$, причому R настільке велике, що в T цілком міститься S_ρ. Застосуємо другу формулу Гріна [37] для функції $U(y)$, яка є розв'язком задачі (2.11)–(2.14), і функції $\Psi(x, y)$ в області , обмеженій $\bigcup_{j=1}^{\nu} z_j$ і двома колами $\Sigma_\varepsilon := \left\{ y \in T \setminus \overline{S}_\rho \middle| \, |y - x| = \varepsilon \right\}$ і $\Sigma_R := \left\{ y \in \mathbf{R}^2 \middle| \, |y - x| = R \right\}$. Зауважимо, що $\varepsilon > 0$, згідно логіки доведення, довільне, скільки завгодно мале число.

Далі, спрямовуючи ρ' до нуля, отримаємо

$$\iint\limits_{T \setminus \left(K_\varepsilon \cup \overline{S}_\rho\right)} \left[\Psi(x,y) \Delta U(y) - \Delta \Psi_y(x,y) U(y) \right] d\sigma_y =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_R} \left[\Psi(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial n_y} \right] ds_y +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left[\Psi(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial n_y} \right] ds_y +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2\upsilon} U^*_m(x, \rho) + \sum_{j=1}^{\upsilon} \int\limits_{L'_j} \Psi(x,y) \tau(y) \, ds_y -$$

$$-\sum_{j=1}^{\upsilon}\int_{L'_j}\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial n_y}\left[U^-(y)-U^+(y)\right]\mathrm{ds_y},$$

де $K_\varepsilon := \left\{ y\in T\setminus\overline{S}_\rho \,\middle|\, |y-x|\le\varepsilon \right\}$, $L'_j := L_j \setminus \sum_{m=2j-1}^{2j}\left\{ y\in L_j \,\middle|\, \left|y-x^*_m\right|\le\rho \right\}$,

$$U^*_m(x,\rho) := \int_{c^*_m(\rho)}\left[\Psi(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}-U(y)\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial n_y}\right]\mathrm{ds_y},$$

а $\tau(y) := \left(\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right)^- - \left(\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right)^+$.

У рівності (2.18) розглянемо інтеграли, які залежать від ε. Очевидно, що

$$\iint_{T\setminus\left(K_\varepsilon\cup\overline{S}_\rho\right)} U(y)\Delta\Psi_y(x,y)\,\mathrm{d\sigma_y}=0,$$

Оскільки $\Delta_y\Psi(x,y)=0$ за умови $x\ne y$. У відповідності з означенням невласного інтегралу

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{T\setminus\left(K_\varepsilon\cup\overline{S}_\rho\right)}\Psi(x,y)\Delta U(y)\mathrm{d\sigma_y}=\iint_{T\setminus\overline{S}_\rho}\Psi(x,y)\Delta U(y)\mathrm{d\sigma_y}=0,$$

тому що $\Delta U(y)=0$ за будь–якого $y\in\mathbf{R}^2\setminus\overline{L}$. Далі,

$$-\int_{\Sigma_\varepsilon}U(y)\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial n_y}\mathrm{ds_y}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\varepsilon}U(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|y-x|}\mathrm{ds_y}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon}U(y)\mathrm{ds_y}=-\frac{1}{2\pi}\varepsilon 2\pi\varepsilon U^*=-U^*,$$

оскільки $\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|y-x|}=-\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|y-x|=\frac{\partial}{\partial r}\ln r=\frac{1}{r}$, $\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$, а U^* – середнє значення функції $U(y)$ на колі Σ_ε. За рахунок неперервності $U(y)$ при $\varepsilon\to 0$ $U^*\to U(x)$. Аналогічним чином

$$\int_{\Sigma_\varepsilon}\Psi(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\mathrm{ds_y}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\varepsilon}\ln\frac{1}{|y-x|}\frac{\partial U(y)}{\partial n}\mathrm{ds_y}=-\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial U(y)}{\partial n}\mathrm{ds_y}=$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon 2\pi\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^* = -\varepsilon\ln\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^*,$$

де $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^*$ – середнє значення нормальної похідної функції $U(y)$ на колі Σ_ε, звідки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^* = 0$, оскільки перші похідні функції $U(y)$ неперервні в $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}$, отже величина $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^*$ обмежена.

Оцінимо у (2.18) інтеграли, які залежать від R. Очевидно, що

$$-\int\limits_{\Sigma_R} U(y)\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial n_y}\,\mathrm{ds_y} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_R} U(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|y-x|}\,\mathrm{ds_y} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_R} U(y)\frac{\partial}{\partial R}\ln\frac{1}{R}\,\mathrm{ds_y} = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Sigma_R} U(y)\mathrm{d}s_y.$$

За умови прямування R до нескінченності, враховуючи (2.13), легко бачити, що

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Sigma_R} U(y)\mathrm{d}s_y \to C.$$

Далі,

$$\int\limits_{\Sigma_R}\Psi(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\,\mathrm{ds_y} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_R}\ln|y-x|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\,\mathrm{ds_y} = -\frac{1}{2\pi}\ln R\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U(y)}{\partial n}\,\mathrm{dS_R}.$$

Оскільки $U(y)$ гармонічна функція на нескінченності, то в околі нескінченно віддаленої точки площини справедливою є оцінка [37]

$$\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right| \le \frac{A}{R^2},\ R = |y-x|.$$

Тому при достатньо великому R

$$\left|\int\limits_{\Sigma_R}\Psi(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\,\mathrm{ds_y}\right| \le \frac{A\ln R}{R} \to 0,\ R\to\infty.$$

Із формули (2.18) при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, на підставі попереднього, враховуючи умови (2.12), отримуємо

$$U(x)=\sum_{j=1}^{\upsilon}\int_{L'_j}\Psi(x,y)\tau(y)\mathrm{ds_y}+\sum_{m=1}^{2\upsilon}U_m^*(x,\rho)+C\,. \qquad (2.19)$$

Розглянемо величини $U_m^*(x,\rho)$, враховуючи те, що $\rho>0$ – скільки завгодно мале число. Оскільки $\Psi(x,y)$ неперервно диференційована при $y\neq x$, $|\Psi(x,y)|$ і $\left|\dfrac{\partial\Psi(x,y)}{\partial n_y}\right|$ обмежені за будь–якого $y\in C_{\mathrm{m}}^*(\rho)$. Тому

$$\left|U_m^*(x,\rho)\right|\leq B\int_{\mathrm{C}_{\mathrm{m}}^*(\rho)}\left[\left|U(y)\right|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial\rho}\right|\right]\mathrm{d}s_y\,,$$

де $B>0$ – деяка стала. При виконанні умови (2.14) $\lim\limits_{\rho\to 0}U_m^*(x,\rho)=0$.

Внаслідок припущення щодо існування розв'язку задачі (2.11)–(2.14), вираз у правій частині (2.19), який існує при довільному ρ, буде збігатись до даного $U(x)$ при $\rho\to 0$. З урахуванням останнього отримуємо

$$U(x)=\sum_{j=1}^{\upsilon}\int_{L_j}\Psi(x,y)\tau(y)\mathrm{ds_y}+C\,,$$

або скорочено,

$$U(x)=\int_{L}\Psi(x,y)\tau(y)\mathrm{ds_y}+C\,.$$

Далі, отримаємо інтегральне рівняння (2.16). Для цього в (2.15) спрямуємо точку x до точки $x_0\in L$ з додатньої або від'ємної сторони. Враховуючи властивості потенціалу простого шару [37], маємо

$$U^{\pm}(x_0)=\int_{L}\Psi(x_0,y)\tau(y)\mathrm{ds_y}+C\,, \qquad (2.20)$$

причому використання крайових умов (2.12) дає

$$\int_{L}\Psi(x_0,y)\tau(y)\mathrm{ds_y}=g(x_0)-C\,.$$

Отже, побудовано інтегральне рівняння і доведена перша частина теореми.

Навпаки, припустимо, що $U(x)$ подається правою частиною (2.15), а $\tau(y)$ і C задовольняють систему (2.17). Очевидно, що $U(x)$ є розв'язком (2.11). Оскільки крайові значення $U(x)$ виражаються формулою (2.20), а $\tau(y)$ задовольняє систему (2.17), то легко бачити, що $U^{\pm}(x_0) = g(x_0)$.

Оскільки поки що на константу C ніяких обмежень не накладається, підберемо її так, щоби виконувалась умова (2.17). Для цього подамо $\tau(y)$ у вигляді $\tau(y) = \tau_1(y) - C\tau_2(y)$, де $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ – розв'язки інтегральних рівнянь

$$\int_L \Psi(x,y)\tau_1(y)\mathrm{ds_y} = g(x)$$

і $\int_L \Psi(x,y)\tau_2(y)\mathrm{ds_y} = 1$, $x \in L$, відповідно. Якщо $C = \left(\int_L \tau_1(y)\mathrm{ds_y}\right)\left(\int_L \tau_2(y)\mathrm{ds_y}\right)^{-1}$, то $\tau(y)$ задовольняє (2.17), що легко перевірити. При виконанні умови $\int_L \tau(y)\mathrm{ds_y} = 0$ функція $U(x)$ обмежена на нескінченності. Дійсно, нехай $x \overline{\in} \overline{L}$, а $\hat{y}$ – довільна точка на L, тоді

$$U(x) = \int_L \Psi(x,y)\tau(y)\mathrm{ds_y} + C =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_L \ln\frac{1}{|x-y|}\tau(y)\mathrm{ds_y} + \frac{1}{2\pi}\ln|\mathrm{x} - \hat{y}|\int_L \tau(y)\mathrm{ds_y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_L \ln\frac{|x-\hat{y}|}{|x-y|}\tau(y)\mathrm{ds_y} + C.$$

Застосовуючи теорему про середнє, неважко отримати таку оцінку

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_L \ln\frac{|x-\hat{y}|}{|x-y|}\tau(y)\mathrm{ds_y}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_L |\tau(y)|\left|\ln\frac{|x-\hat{y}|}{|x-y|}\right|\mathrm{ds_y} = \int_L |\tau(y)|\mathrm{ds_y}\,\frac{1}{2\pi}\left|\ln\frac{|x-\hat{y}|}{|x-y^*|}\right|,$$

де y^* – деяка точка на L. Звідси при $x \to \infty$ маємо $|x-\hat{y}||x-y^*|^{-1} \to 1$, а $\ln\frac{|x-\hat{y}|}{|x-y^*|} \to 0$, тобто $U(\infty)=C$. Зауважмо також, що величина $\int\limits_L |\tau(y)|\mathrm{ds_y}$ обмежена, що випливає з наступних міркувань.

Залишається перевірити виконання умови (2.14). При цьому достатньо, що $|\partial U(y)/\partial\rho|$ при $y \in \mathrm{C}_{\mathrm{m}}^*(\rho)$ та $\rho \to 0$ є величиною порядку $o(\rho^\alpha)$, де $\alpha > -1$. Скористаємось відомим поданням інтегралу Коші [38]:

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t\text{-}z}\mathrm{d}t = v(x_1,x_2) + iu(x_1,x_2),$$

де $z := x_1 + ix_2 \overline{\in} L$, $\varphi(t)$ – дійсна обмежена на L функція, $v(x_1,x_2)$ – потенціал подвійного шару, а $u(x_1,x_2)$ – з точністю до сталої логарифмічний потенціал простого шару. Легко бачити, що

$$\Phi'(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{(t\text{-}z)^2}\mathrm{d}t\,.$$

З іншого боку, враховуючи умову Коші–Рімана,

$$\Phi'(z) = \frac{\partial v}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x_2} - i\frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в ролі L виступає інтервал $(0,1)$ осі абсцис декартової прямокутної $0\mathrm{x}_1x_2$. Побудуємо коло радіуса ρ з центром у початку координат. Точка кола z, яка не лежить на L, належить комплексній площині, а тому її можна подати у вигляді

$$z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\beta} = \rho(\cos\beta + i\sin\beta),$$

де β – аргумент, ρ – модуль комплексного числа z.

Похідну логарифмічного потенціалу U за напрямком ρ можна обчислити за формулою

$$\frac{\partial U}{\partial\rho} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial x_2}\sin\beta,$$

а похідна інтегралу Коші на колі радіуса ρ в даному випадку має вигляд:

$$\Phi'(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi(s)}{\left(s - \rho e^{i\beta}\right)^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Відділяючи в останньому інтегралі дійсну і уявну частини, з урахуванням (2.21), отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{s^2 - 2\rho s\cos\beta + \rho^2\cos 2\beta}{\left(s^2 + \rho^2 - 2\rho s\cos\beta\right)^2}\varphi(s)\mathrm{d}s\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\rho\sin\beta}{\pi}\int_0^1 \frac{s - \rho\cos\beta}{\left(s^2 + \rho^2 - 2\rho s\cos\beta\right)^2}\varphi(s)\mathrm{d}s\,.$$

Тепер формулу для обчислення похідної U за напрямком ρ можна подати у вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{2\rho s - (s^2 + \rho^2)\cos\beta}{\left(s^2 + \rho^2 - 2\rho s\cos\beta\right)^2}\varphi(s)\mathrm{d}s\,.$$

Для оцінки цього інтегралу за порядком величини використаємо очевидну нерівність $2\rho s \le s^2 + \rho^2$, яка виконується строго за умови $s \ne \rho$. Звідки отримаємо

$$2\rho s - (s^2 + \rho^2)\cos\beta \le (1 - \cos\beta)(s^2 + \rho^2)\,,$$

$$(1 - \cos\beta)^2(s^2 + \rho^2) \le (s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos\beta)^2\,,\ 0 < \beta \le \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} < \frac{1}{2\pi}\frac{\varphi(s^*)}{1 - \cos\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{s^2 + \rho^2} = o\left(\frac{1}{\rho}\right),\ \rho \to 0\,,\ s^* \in (0,1)\,.$$

Строге виконання останньої нерівності, а також властивість монотонності показникової функції дозволяє стверджувати, що

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = o(\rho^{\alpha})\,,\ \alpha > -1\,.$$

Отже, доведено еквівалентність початкової задачі (2.11)–(2.14) інтегральному рівнянню першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. ▲

Використовуючи диференціальну постановку початкової задачі (2.11)–(2.14), запроваджену вище методику, міркуючи від супротивного, легко довести єдиність розв’язку відповідного інтегрального рівняння.

Серед крайових задач теорії потенціалу в $\mathbf{R}^2$ можна виділити класи задач, які володіють абелевою групою симетрії того чи іншого скінченного порядку. Припустимо, що межа L володіє абелевою групою симетрії скінченного порядку, тоді в процесі чисельного розв’язування задачі (2.11)–(2.14) можна скористатись апаратом теорії груп [39, 40]. У зв’язку з цим для відповідного уточнення попередніх результатів сформулюємо та доведемо таку теорему.

Теорема 2.2 про адитивну сталу.

Якщо початкова крайова задача (2.11)–(2.14) володіє абелевою групою симетрії скінченного k–го порядку, а граничні значення потенціалу на окремих ділянках межі приймають довільні постійні значення C_1, C_2, …, C_{k} $|C_{\mathrm{i}}| < +\infty,\ i = \overline{1, k}$, то адитивну сталу в поданні розв’язку (2.15) можна обчислити за формулою

$$C = \frac{1}{k}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} C_{\mathrm{i}}\,.$$

Доведення. Із доведення теореми 1 випливає, що адитивна стала в інтегральному подані розв'язку задачі (2.11)–(2.14) має вигляд:

$$C = \left(\int_L \tau_1(y)\mathrm{d}s_y\right)\left(\int_L \tau_2(y)\mathrm{d}s_y\right)^{-1}.$$

Тут $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ – розв'язки таких інтегральних рівнянь

$$\int_L \tau_1(y)\Psi(x,y)\mathrm{d}s_y = g(x),\ x \in L, \tag{2.22}$$

$$\int_L \tau_2(y)\Psi(x,y)\mathrm{d}s_y = 1,\ x \in L, \tag{2.23}$$

відповідно. Зауважимо, що $g(x) \equiv const$ на кожній складовій L, а $\Psi(x,y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^2$.

Оскільки початкова крайова задача (2.11)–(2.14) володіє абелевою групою симетрії k–го порядку, то межа L допускає розбиття на конгруентні складові L_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$, тобто $L=\bigcup\limits_{i=1}^{k}L_i$, причому $L_i\cap L_j=0$ для $i\neq j$. Трактючи шукані густини $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ у відповідності з таким подрібненням L, подамо інтегральні рівняння (2.22) і (2.23) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{L_i}\tau_{1\mathrm{i}}(y)\Psi(x,y)\mathrm{d}s_y=C_j,\ x\in L_j,\ j=\overline{1,k}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{L_i}\tau_{2\mathrm{i}}(y)\Psi(x,y)\mathrm{d}s_y=1,\ x\in L_j,\ j=\overline{1,k}, \tag{2.25}$$

де $\tau_{1\mathrm{i}}(y)$, $\tau_{2\mathrm{i}}(y)$ – звуження $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ на L_i, відповідно. Здійснивши параметризацію інтегральних рівнянь (2.24) і (2.25), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{a_i}^{b_i}\tau_{1\mathrm{i}}(\alpha)\Phi\left[y_i(\alpha),x\right]\mathrm{d}\alpha=C_j,\ x\in L_j,\ j=\overline{1,k}, \tag{2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{a_i}^{b_i}\tau_{2\mathrm{i}}(\alpha)\Phi\left[y_i(\alpha),x\right]\mathrm{d}\alpha=1,\ x\in L_{\mathrm{j}},\ j=\overline{1,k}, \tag{2.27}$$

де $\tau_{1\mathrm{i}}(\alpha):=\tau_1\left[y_i(\alpha)\right]$, $\tau_{2\mathrm{i}}(\alpha):=\tau_2\left[y_i(\alpha)\right]$, $i=\overline{1,k}$; $\Phi\left[y_i(\alpha),x\right]:=\left|y_i(\alpha)\right|\Psi\left(y_i(\alpha),x\right)$, при тому, що $y_i(\alpha)\left(a_i\le\alpha\le b_i,\ i=\overline{1,k}\right)$ – параметричні подання ділянок межі L, а для позначення невідомих густин збережені позначення з (2.24), (2.25). Припускаємо також, що вектор–функції $y_i(\alpha)$ володіють достатньою гладкістю. Оскільки операція суперпозиції елементів групи симетрії, які є відповідними перетвореннями конгруентних складових L із множини $\left\{L_i\right\}_{i=1}^{k}$, транзитивна, то при визначенні нумерації елементів σ_i цієї групи будемо вважати, що $L_1=\sigma_iL_i$, $i=\overline{1,k}$, де σ_1 – тотожне перетворення. Далі здійснимо в (2.26), (2.27) перехід до нового базису:

$$\tau'_{1\mathrm{i}}(\alpha):=\tau_1\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha)\right],\ \tau'_{2\mathrm{i}}(\alpha):=\tau_2\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha)\right],\ a_1\le\alpha\le b_1,\ i=\overline{1,k}.$$

Тут $\tilde{\sigma}_i^{-1}$ – матриці, обернені до матриць, які , в свою чергу, є зображенням елементів групи $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$. Таким чином запроваджені "заміни змінних" дозволяють від (2.26), (2.27) перейти до інтегральних рівнянь у вигляді

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{a_1}^{b_1}\tau'_{1i}(\alpha)\Phi\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha);\,\tilde{\sigma}_j^{-1}y_1(\overline{\alpha})\right]d\alpha = C_j, \tag{2.28}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{a_1}^{b_1}\tau'_{2i}(\alpha)\Phi\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha);\,\tilde{\sigma}_j^{-1}y_1(\overline{\alpha})\right]d\alpha = 1, \tag{2.29}$$

де $\overline{\alpha}\in[a_1, b_1]$, $j=\overline{1,k}$. Отже, на даному етапі досліджень ми отримали дві системи інтегральних рівнянь (2.28) і (2.29), у яких інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій L_1 межі L.

Системи (2.28) і (2.29) зручно подати у формі таких операторних рівнянь

$$(AG_1)(\overline{\alpha}) = \hat{C}, \tag{2.30}$$

$$(AG_2)(\overline{\alpha}) = I. \tag{2.31}$$

Тут $A := (A_{ji})_{j,i=1}^k$ – матриця операторів; $G_1(\alpha) := [\tau'_{1i}(\alpha)]_{i=1}^k$, $G_2(\alpha) := [\tau'_{2i}(\alpha)]_{i=1}^k$ – стовпчики–функції; $\hat{C} := (C_1, C_2, ..., C_k)^T$; I – одиничний стовпчик. При цьому кожний з операторів визначається за формулами

$$\left(A_{ji}G_1^{(i)}\right)(\overline{\alpha}) := \int_{a_1}^{b_1}\tau'_{1i}(\alpha)\Phi\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha);\,\tilde{\sigma}_j^{-1}y_1(\overline{\alpha})\right]d\alpha,$$

$$\left(A_{ji}G_2^{(i)}\right)(\overline{\alpha}) := \int_{a_1}^{b_1}\tau'_{2i}(\alpha)\Phi\left[\tilde{\sigma}_i^{-1}y_1(\alpha);\,\tilde{\sigma}_j^{-1}y_1(\overline{\alpha})\right]d\alpha,$$

де $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$ – i–ті компоненти $i=\overline{1,k}$ стовпчиків–функцій $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, відповідно. Далі, використовуючи теорію характерів [39], побудуємо матрицю перетворення Фур'є для розглядуваної групи k–го порядку, що дає можливість подати (2.30) і (2.31) у розщепленому вигляді:

$$\left(B_p\overline{G}_{1p}\right)(\overline{\alpha}) = \overline{C}_p, \tag{2.32}$$

$$\left(\mathrm{B_p}\overline{\mathrm{G}}_{2\mathrm{p}}\right)\left(\overline{\alpha}\right)=\overline{I}_p\,, \tag{2.33}$$

де $p=\overline{1,k}$; $a_1\le\overline{\alpha}\le b_1$;

$$\overline{\mathrm{G}}_{1\mathrm{p}}(\alpha):=\sum_{i=1}^{k}F_{pi}G_1^{(i)}(\alpha);\ \overline{\mathrm{G}}_{2\mathrm{p}}(\alpha):=\sum_{i=1}^{k}F_{pi}G_2^{(i)}(\alpha);\ a_1\le\alpha\le b_1;$$

$$\overline{C}_p:=\sum_{i=1}^{k}F_{pi}C_i\,;\ \overline{I}_p=\sum_{i=1}^{k}F_{pi}\,,$$

а $\mathrm{B_p}$ – елементи діагональної матриці $\mathrm{F\,A\,F^{-1}}$, причому

$$\mathrm{F}:=\left\{\mathrm{F_{pi}}\right\}_{p,i=1}^{k}.$$

На основі наведеної вище методики переходу до k незалежних інтегральних рівнянь (2.32), (2.33) шукану адитивну сталу можна обчислити за такою формулою:

$$C=\left(\sum_{i=1}^{k}\int_{a_1}^{b_1}\tau'_{1\mathrm{i}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{k}\int_{a_1}^{b_1}\tau'_{2\mathrm{i}}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{k}\int_{a_1}^{b_1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}F_{ip}\overline{G}_{1i}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\Bigg/\left(\frac{1}{k}\int_{a_1}^{b_1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}F_{ip}\overline{G}_{2i}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right).$$

Враховуючи вигляд матриці перетворення Фур'є для групи k–го порядку, легко побачити, що

$$C=\left(\int_{a_1}^{b_1}\overline{G}_{11}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\Bigg/\left(\int_{a_1}^{b_1}\overline{G}_{21}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right),$$

де $\overline{G}_{11}(\alpha)$ і $\overline{G}_{21}(\alpha)$ визначаємо з таких інтегральних рівнянь:

$$\left(\mathrm{B_1}\overline{\mathrm{G}}_{11}\right)\left(\overline{\alpha}\right)=\overline{C}_1\,, \tag{2.34}$$

$$\left(\mathrm{B_1}\overline{\mathrm{G}}_{21}\right)\left(\overline{\alpha}\right)=\overline{I}_1\,, \tag{2.35}$$

відповідно. Тут

$$\overline{C}_1=\sum_{i=1}^{k}F_{1i}C_i=\sum_{i=1}^{k}C_i\,,$$

а

$$\overline{I}_1 = \sum_{i=1}^{k} F_{1i} \cdot 1 = k\,,\ a_1 \le \overline{\alpha} \le b_1\,.$$

Внаслідок існування та єдиності розв'язку початкової задачі (2.11)–(2.14) існує оператор B_1^{-1}, що дозволяє подати розв'язки (2.34), (2.35) у вигляді $\overline{G}_{11} = B_1^{-1}\overline{C}_1$, $\overline{G}_{21} = B_1^{-1}\overline{I}_1$. Оскільки $\overline{C}_1$ і $\overline{I}_1$ – сталі величини

$$C = \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(B_1^{-1}\overline{C}_1\right)(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \right) \Bigg/ \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(B_1^{-1}\overline{I}_1\right)(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \right) = \frac{\overline{C}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i}{k}\,,$$

що і треба було довести. ▲

Встановлення даного факту суттєво спрощує алгоритм наближеного розв'язування задачі (2.11)–(2.14), оскільки при знаходження $\tau(y)$ можна обмежитись дослідженням лише одного інтегрального рівняння виду

$$\int_L \Psi(x, y)\tau(y)\mathrm{d}S_y = \hat{g}_i(x)\,,\ x \in L_i\,,$$

де $\hat{g}_i(x) = g_i(x) - C$, причому $g_i(x) \equiv C_i$, $i = \overline{1, N}$. Отже, значення C можна знаходити просто без додаткових складних обчислень.

Зауваження 2.1. Враховуючи складність чисельної та програмної реалізації відповідних алгоритмів апарату теорії груп, можна обмежитись 16–м порядком групи симетрії. Вибір групи саме з таким максимальним порядком є, на нашу думку, вичерпним з точки зору подання систем електродів, які здебільшого використовують у процесі реального моделювання електронно–променевих приладів.

2.2.1 Чисельні експерименти

Розглянуто задачу знаходження електростатичного поля "плоскої" електронно–оптичної системи, зображеної на рис. 2.3. Як бачимо, інформацію про геометрію заряджених електродів подано у вигляді деякої сукупності

конгруентних гладких незамкнених дуг L_1, L_2, L_3, L_4. Граничні значення потенціалу $g_i(x) \equiv C_i$, $i = \overline{1, 4}$ – довільні відомі величини.

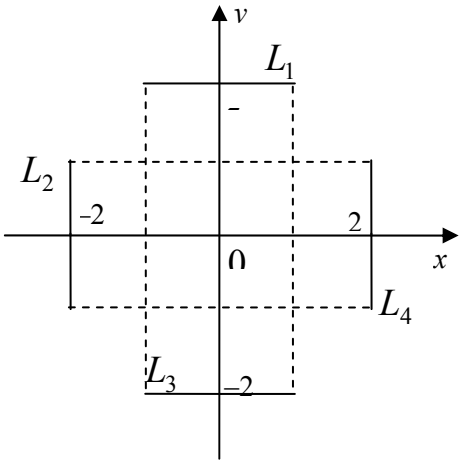


Рисунок 2.3 – Досліджувана “плоска” електронно–оптична система.

Чисельне розв’язування такої задачі здійснено з використанням методики запропонованої в роботі [41]. Тобто враховується той факт, що границя $L = \bigcup_{i=1}^{4} L_i$ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. Для перевірки достовірності отриманих результатів адитивна стала C, яка фігурує в інтегральному подані поля (2.15) обчислена чисельно, тобто без врахування теореми 2. Наближене розв’язування інтегральних рівнянь здійснюється методом колокації з апроксимацією шуканої густини кусково–постійними базисними функціями. При цьому отримані невласні інтеграли обчислювались аналітично. Для наочного зображення електростатичного поля використано лінії рівного потенціалу та еквіпотенціальні поверхні.

Приклад 2.1. У Табл. 2.2 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжку $[-5, 5]$ з кроком $h = 0{,}5$ при антисиметричних граничних значеннях: $g_1(x) = g_3(x) = 1$, $g_2(x) = g_4(x) = -1$. Кількість точок колокації $n = 100$. Загальний вигляд розв’язку продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 2.4) та еквіпотенціальній поверхні (див. рис. 2.5).

Таблиця 2.2 – Результати, отримані в одній точці для прикладу 2.1.

x	*y*	*u*
–1.00	2.00	0.945862
0.00	2.00	0.995043
0.50	4.00	0.288362
0.00	1.50	0.561519
1.00	1.00	0.000000
1.50	0.50	–0.506728
–1.50	–0.50	–0.506728

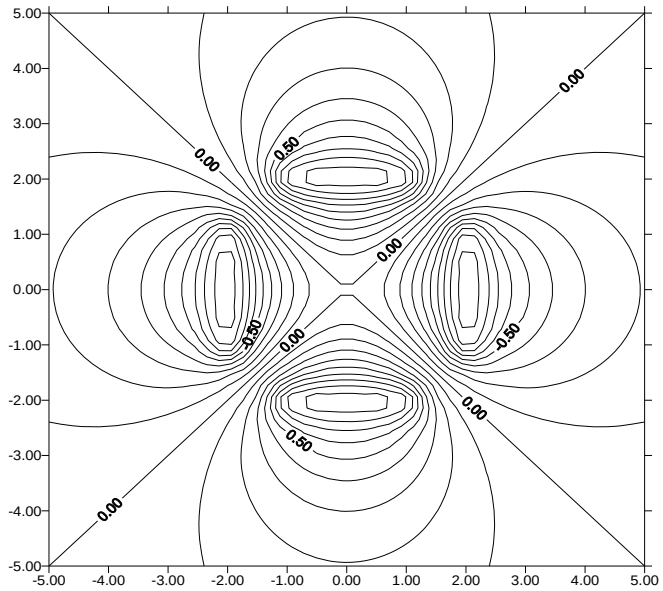


Рисунок 2.4 – Розподіл ліній рівня для прикладу 2.1.

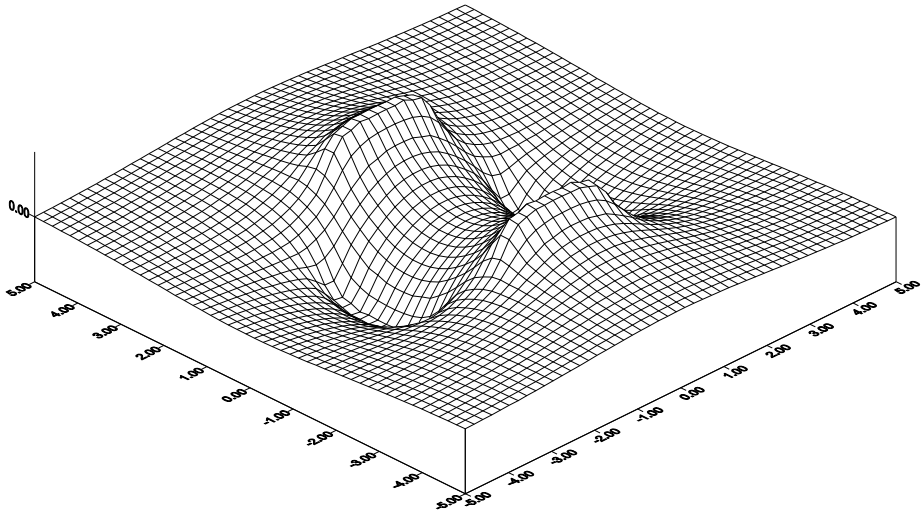


Рисунок 2.5 – Еквіпотенціальна поверхня для прикладу 2.1.

Приклад 2.2. У Табл. 2.3 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжку $[-5, 5]$ з кроком $h = 0{,}5$ при наступних граничних значеннях: $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 10$, $g_3(x) = -1000$, $g_4(x) = 100$. Кількість точок колокації $n = 100$. Загальний вигляд розв'язку продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 2.6) та еквіпотенціальній поверхні (див. рис. 2.7).

Таблиця 2.3 – Результати, отримані в одній точці для прикладу 2.2.

x	y	u
–1.00	–2.00	–998.868931
0.00	–2.00	–999.884148
–1.00	–2.50	–717.181022
–0.50	–0.5	–333.964404
0.50	1.00	–10.5027500
0.00	0.00	–222.250000
0.00	2.00	0.99672800

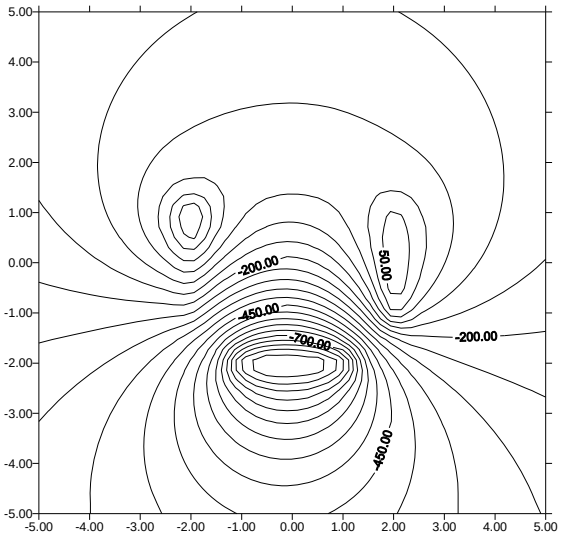


Рисунок 2.6 – Розподіл ліній рівня для прикладу 2.2.

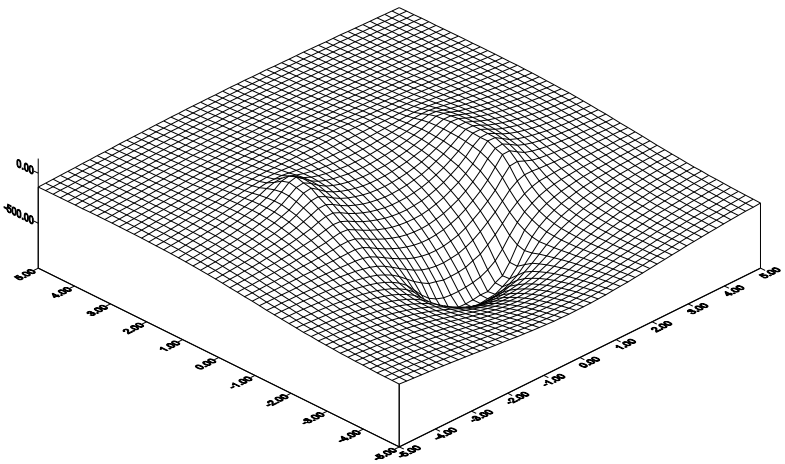


Рисунок 2.7 – Еквіпотенціальна поверхня для прикладу 2.2.

У Табл. 2.4 наведені чисельно обчислені значення адитивної сталої C при різних граничних значеннях потенціалу.

Таблиця 2.4 – Значення константи C, тримані на основі чисельних експериментів.

$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	C
1.0	–1.00	1.000	–1.00	0.0000
1.0	10.0	–1000	100.0	–222.25
10	20.0	10.00	–20.0	5.0000
5.0	–100	–10.00	–1000	–276.25
50	100	500.0	1000	412.50

2.3 Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу

При числовому моделюванні так званого "плоского" електростатичного поля, створюваного системою заряджених електродів складної конфігурації, доцільним виявляється застосування апарату теорії груп [39]. Останнє дає можливість суттєво вдосконалити метод інтегральних рівнянь, який традиційно використовують для такого класу задач. При реалізації основної ідеї методу встановлюють якою групою симетрії володіє початкова задача. Це дає можливість перейти від "сукупної" системи інтегральних рівнянь до послідовності N незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише по одній із конгруентних складових поверхонь–електродів, де N – порядок групи симетрії відповідної краєвої задачі [42]. Результатом є уникнення числової нестійкості, яка може виникати в процесі розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимують інтегральні рівняння, при непомірному збільшенні їх розмірностей.

Очевидним є також створення передумов для розпаралелення процедури розв’язування початкової задачі. Це дозволяє, вибираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їх завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень.

Суттєве спрощення алгоритму наближеного розв’язування “плоскої” задачі електростатики, підтверджене числовими експериментами, пов'язане із встановленням того факту, що наявна в поданні розв’язку адитивна стала, яка відображає довільність граничних значень потенціалу на електродах, рівна середньому арифметичному цих значень.

Враховуючи типові конфігурації складових поверхонь–електродів, які використовують при проектуванні реальних приладів, розглянуто одну модельну задачу. За відсутності універсального підходу до розв’язування задач, що володіють різними групами симетрії, у роботі досліджено саме таку проблему, числове розв'язування якої дозволяє добре проілюструвати всі аспекти запровадженої методики.

2.3.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу знаходження електростатичного поля “плоскої” електронно–оптичної системи, зображеної на рис. 2.8. Як бачимо, інформацію про геометрію заряджених електродів подано у вигляді деякої сукупності конгруентних гладких незамкнених дуг Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, які є частинами відповідних гіпербол у $\mathbf{R}^2$. При цьому граничні значення потенціалу (f_1 , f_2, f_3, f_4) не володіють симетрією чи антисиметрією. Розглядувану систему називають “квадрупольною лінзою”.

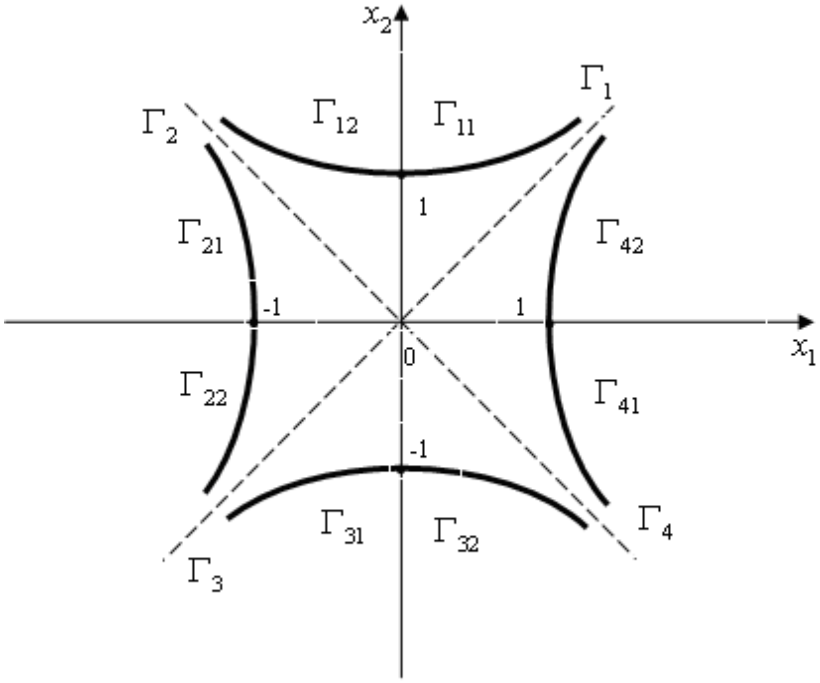


Рисунок 2.8 – Досліджувана “плоска” електронно–оптична система.

З математичної точки зору, більш загально, необхідно знайти функцію $U(x) \in C^2\left(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Gamma}\right)$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Gamma},\ \Gamma := \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i,\ x := (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \tag{2.36}$$

за умови

$$U(x) = f_i(x),\ x \in \Gamma_i,\ (i = \overline{1, 4});\ \sup_{x \in \mathbf{R}^2} \left| U(x) \right| < +\infty. \tag{2.37}$$

Нехай $\Phi(x, y) := -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|y - x|}$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^2$ [43, с. 152]. Тоді розв’язок задачі (2.36) – (2.37) шукатимемо у вигляді

$$U(y) := \int_{\Gamma} \mu(x) \Phi(x, y) \, \mathrm{d}\Gamma_x + C,\ y := (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}. \tag{2.38}$$

Тут $\mu(x) := g(x) - C\lambda(x)$, де $\lambda(x)$ – розв'язок допоміжного інтегрального рівняння

$$\int_{\Gamma} \lambda(x)\Phi(x, y)\,\mathrm{d}\Gamma_x = 1,\ y \in \Gamma, \tag{2.39}$$

а $g(x)$ задовольняє рівняння

$$\int_{\Gamma} g(x)\Phi(x, y)\,\mathrm{d}\Gamma_x = f_i(y),\ y \in \Gamma_i\ \ (i = \overline{1, 4}), \tag{2.40}$$

причому константа C визначається з умови $\int_{\Gamma} \mu(x)\,\mathrm{d}\Gamma_x = 0$, тобто

$$C = \left(\int_{\Gamma} g(x)\,\mathrm{d}\Gamma_x\right) \Big/ \left(\int_{\Gamma} \lambda(x)\,\mathrm{d}\Gamma_x\right).$$

Отже, знаходження $\mu(x)$, – сукупної густини розподілу зарядів уздовж Γ $\left(\mu(x) := \left\{\mu_i(x),\ x \in \Gamma_i;\ i = \overline{1, 4}\right\}\right)$, – пов'язане із необхідністю розв’язання двох інтегральних рівнянь (2.39) і (2.40) [44]. Знайдена при цьому константа C забезпечує обмеженість шуканого розв’язку (2.38) на нескінченності при $|y| \to \infty$.

2.3.2 Параметризація інтегрального рівняння (2.40)

З метою максимального врахування симетрії у розташуванні окремих ділянок межі Γ на площині $x_1 0 x_2$ подамо кожну дугу Γ_i $\left(i = \overline{1, 4}\right)$ у вигляді двох конгруентних складових: $\Gamma_i := \Gamma_{i1} \cup \Gamma_{i2}$. Трактуючи $\mu(x)$ у відповідності з таким подрібненням Γ, розглянемо інтегральне рівняння (2.40) для знаходження шуканої густини розподілу зарядів $g(x)$ у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_{ij}} g_{ij}(x)\Phi(x,y)\,\mathrm{d}\Gamma_x = f_{kl}(y),\ y \in \Gamma_{kl},\ \left(k = \overline{1, 4};\ l = 1,\ 2\right), \tag{2.41}$$

де $g_{ij}(x)$ – звуження $g(x)$ на Γ_{ij}, а $f_{kl}(y)$ – звуження $f_k(y)$ на Γ_{kl}.

Далі, для аналізу криволінійних інтегралів у (2.41) використаємо параметричні рівняння, що описують відповідні ділянки межі [45, с. 202]:

$$\Gamma_1 := \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} := \left\{ x_{11}(\tau) := \left(\mathrm{sh}\tau, \mathrm{ch}\tau \right)^{\mathrm{T}}; 0 \le \tau \le 1 \right\} \cup$$

$$\left\{ x_{12}(\tau) := \left(\mathrm{sh}\tau, \mathrm{ch}\tau \right)^{\mathrm{T}}; -1 \le \tau \le 0 \right\},$$

$$\Gamma_2 := \Gamma_{21} \cup \Gamma_{22} := \left\{ x_{21}(\tau) := \left(-\mathrm{ch}\tau, \mathrm{sh}\tau \right)^{\mathrm{T}}; 0 \le \tau \le 1 \right\} \cup$$

$$\left\{ x_{22}(\tau) := \left(-\mathrm{ch}\tau, \mathrm{sh}\tau \right)^{\mathrm{T}}; -1 \le \tau \le 0 \right\},$$

$$\Gamma_3 := \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} := \left\{ x_{31}(\tau) := \left(\mathrm{sh}\tau, -\mathrm{ch}\tau \right)^{\mathrm{T}}; -1 \le \tau \le 0 \right\} \cup$$

$$\left\{ x_{32}(\tau) := \left(\mathrm{sh}\tau, -\mathrm{ch}\tau \right)^{\mathrm{T}}; 0 \le \tau \le 1 \right\},$$

$$\Gamma_4 := \Gamma_{41} \cup \Gamma_{42} := \left\{ x_{41}(\tau) := \left(\mathrm{ch}\tau, \mathrm{sh}\tau \right)^{\mathrm{T}}; -1 \le \tau \le 0 \right\} \cup$$

$$\left\{ x_{42}(\tau) := \left(\mathrm{ch}\tau, \mathrm{sh}\tau \right)^{\mathrm{T}}; 0 \le \tau \le 1 \right\}.$$

Це дає можливість трактувати (2.41) у вигляді такої "сукупної" системи восьми інтегральних рівнянь:

$$\int_0^1 g_{11}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{11}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau + \int_{-1}^0 g_{12}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{12}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_0^1 g_{21}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{21}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau + \int_{-1}^0 g_{22}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{22}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{-1}^0 g_{31}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{31}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau + \int_0^1 g_{32}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{32}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int_{-1}^0 g_{41}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{41}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau + \int_0^1 g_{42}(\tau) \mathrm{K}\left[\mathrm{x}_{42}(\tau); y \right] \mathrm{d}\tau =$$

$$= f_{kl}(y), \; y \in \Gamma_{kl} \; \left(k = \overline{1, 4}; \, l = 1, 2 \right), \tag{2.42}$$

де $g_{ij} := g[x_{ij}(\tau)]$ $\left(i = \overline{1, 4}; \, j = 1, 2 \right)$, а $\mathrm{K}\left[x(\tau); y \right] := \left| x(\tau) \right| \Phi\left[x(\tau); y \right]$ при тому, що $x(\tau)$ – параметричне подання однієї з восьми ділянок межі.

2.3.3 Врахування симетрії межі

Для зменшення кількості рівнянь, які потрібно розв'язувати одночасно, скористаємось очевидною властивістю розглядуваної проблеми [42, 28].

Лема 2.1. *Система інтегральних рівнянь (2.42) володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, яка є прямим добутком циклічних груп четвертого порядку* $\{e,\beta,\beta^2,\beta^3\}$ *і другого порядку* $\{e,\sigma\}$, *де* e *– тотожне перетворення,* σ *– дзеркальне відображення, а* β *– поворот на кут* $\pi/2$ *відносно початку координат.*

Доведення. Враховуючи запроваджену вище нумерацію конгруентних складових межі Γ, легко бачити, що $\Gamma_{ij} = \beta_h \Gamma_{11}$ $\left(i = \overline{1,4};\ j = 1, 2;\ h = 2(i-1) + j\right)$, причому $\beta_1 := e$, $\beta_2 := \sigma$, $\beta_3 := \beta$, $\beta_4 := \beta\sigma$, $\beta_5 := \beta^2$, $\beta_6 := \beta^2\sigma$, $\beta_7 = \beta^3$, $\beta_8 = \beta^3\sigma$. Звідси Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку $GR_8 := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$. Остання, в свою чергу, є прямим добутком циклічних груп четвертого порядку $GR_4 := \{e,\beta,\beta^2,\beta^3\}$ і другого порядку $GR_2 := \{e,\sigma\}$. Отже, межа Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, а оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору $\mathbf{R}^2$. Кожна група симетрії кривої у $\mathbf{R}^2$ є підгрупою заданої групи рухів, а тому аналогічною групою володіє відповідна гранична задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (2.42) володіє абелевою групою симетрії GR_8, що і треба було показати. ▲

Очевидно, що матриця поворотів на кут $\varphi = \pi/2$ має вигляд: $\beta = \left.\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \beta_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \beta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \beta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \beta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно $\beta_1^{-1}=\beta_1$, $\beta_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\beta_3^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\beta_4^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

$\beta_5^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\beta_6^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\beta_7^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\beta_8^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Лема 2.2. *Система інтегральних рівнянь (2.42) еквівалентна такій системі рівнянь*

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\int_0^1 g'_{ij}(\tau)\mathrm{K}\,[\beta_h^{-1}x_{11}(\tau);\,\beta_{h'}^{-1}x_{11}(\bar{\tau})]\,\mathrm{d}\,\tau = f'_{kl}(\bar{\tau}), \qquad (2.43)$$

де $\bar{\tau}\in[0,1]$; $k=\overline{1,4}$; $l=1,2$.

Доведення. Для отримання (2.43) здійснимо в (2.42) перехід до нового базису згідно такої схеми:

$$g'_{ij}(\tau):=g_{ij}\left[\beta_h^{-1}x_{11}(\tau)\right]\ \left(0\le\tau\le 1;\ i=\overline{1,4};\ j=1,2;\ h=2(i-1)+j\right);$$

$$f'_{kl}(\bar{\tau}):=f_{kl}\left[\beta_{h'}^{-1}x_{11}(\bar{\tau})\right]\ \left(0\le\bar{\tau}\le 1;\ k=\overline{1,4};\ l=1,2;\ h'=2(k-1)+l\right).$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (2.42) до еквівалентної системи (2.43), де інтегрування ведеться лише по конгруентній складовій межі − Γ_{11}. ▲

Систему (2.43), у свою чергу, зручно переписати в формі такого операторного рівняння

$$(AG)(\bar{\tau})=\Psi(\bar{\tau}). \qquad (2.44)$$

Тут $A:=(A_{hh'})_{h,h'=1}^{8}$ – матриця операторів, $G(\tau):=[G_h(\tau)]_{h=1}^{8}$, $\Psi(\bar{\tau}):=[\Psi_{h'}(\bar{\tau})]_{h'=1}^{8}$ – стовпчики–функції такі, що $G_h(\tau):=g'_{ij}(\tau)$, $\Psi_{h'}(\bar{\tau}):=f'_{kl}(\bar{\tau})$, а кожний з операторів $A_{hh'}$ визначається за формулою:

$$(A_{hh'}G_h)(\bar{\tau}):=\int_0^1 G_h(\tau)\mathrm{K}[\,\beta_h^{-1}x_{11}(\tau);\,\beta_{h'}^{-1}x_{11}(\bar{\tau})\,]\,\mathrm{d}\tau=\Psi_{h'}(\bar{\tau}). \qquad (2.45)$$

Відомо [39, с. 37–38], що характери групи GR_4 можна обчислити за формулою $\chi^h(\beta^k)=e^{2\pi ik(h-1)/n}$ $\left(k=\overline{0,3};\ h=\overline{1,4};\ n=4\right)$, де k – степінь

перетворення β, h – номер відповідного представлення. Легко бачити, що таблиця характерів тоді матиме вигляд:

	e	β	β^2	β^3
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	$-i$
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	i	-1	i

Оскільки для групи GR_2 таблиця характерів (матриця перетворення Фур'є) має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а досліджувана група є прямим добутком GR_4 і GR_2, то, знайшовши прямий добуток відповідних матриць перетворення Фур'є, отримаємо

$$F := \left(F_{hl}\right)_{h,\, l=1}^{8} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}. \qquad (2.46)$$

Використовуючи пряме (2.46) і обернене перетворення Фур'є для розглядуваної групи восьмого порядку, матрицю операторів A у (2.44) з врахуванням (2.45) можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (2.43) "розщепити" на вісім незалежних рівнянь. На підставі попереднього можна сформулювати таку теорему.

Теорема 2.3.

Нехай (2.43) володіє абелевою групою симетрії GR_8. Тоді (2.43) можна подати у вигляді:

$$\left(B_h\overline{G}_h\right)(\overline{\tau})=\overline{\Psi}_h(\overline{\tau})\ \left(h=\overline{1,8};\ 0\le\overline{\tau}\le 1\right), \tag{2.47}$$

де

$$\overline{G}_h(\tau):=\sum_{s=1}^{8}F_{hs}G_s(\tau)\ (0\le\tau\le 1),\ \overline{\Psi}_h(\overline{\tau}):=\sum_{s=1}^{8}F_{hs}\Psi_s(\overline{\tau}), \tag{2.48}$$

а B_h – елементи діагональної матриці $F\,A\,F^{-1}$ операторів, які обчислюємо за формулами:

$$B_1:=A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}+A_{51}+A_{61}+A_{71}+A_{81},$$

$$B_2:=A_{11}+A_{21}+i\,A_{31}+i\,A_{41}-A_{51}-A_{61}-i\,A_{71}-i\,A_{81},$$

$$B_3:=A_{11}+A_{21}-A_{31}-A_{41}+A_{51}+A_{61}-A_{71}-A_{81},$$

$$B_4:=A_{11}+A_{21}-i\,A_{31}-i\,A_{41}-A_{51}-A_{61}+i\,A_{71}+i\,A_{81},$$

$$B_5:=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}+A_{51}-A_{61}+A_{71}-A_{81},$$

$$B_6:=A_{11}-A_{21}+i\,A_{31}-i\,A_{41}-A_{51}+A_{61}-i\,A_{71}+i\,A_{81},$$

$$B_7:=A_{11}-A_{21}-A_{31}+A_{41}+A_{51}-A_{61}-A_{71}+A_{81},$$

$$B_8:=A_{11}-A_{21}-i\,A_{31}+i\,A_{41}-A_{51}+A_{61}+i\,A_{71}-i\,A_{81}.$$

Розв'язавши вісім інтегральних рівнянь (2.47), знайдемо $\overline{G}_h(\tau)$. Далі, на основі (2.48), визначимо $G_h(\tau)=g'_{ij}(\tau)$, які можна використати при обчисленні потенціалу в будь–якій точці P площини $x_1 0 x_2$:

$$U(P):=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\int_0^1\left(g'_{ij}(\tau)-C\lambda'_{ij}(\tau)\right)\mathrm{K}\left[\beta_{\mathrm{h}}^{-1}x_{11}(\tau);\ P\right]\mathrm{d}\,\tau+C,$$

де $P\,\overline{\in}\,\overline{\Gamma}$.

Зауваження 2.2 щодо класу отриманих інтегральних рівнянь. Далі, не зменшуючи загальності, для побудови та аналізу наближеної схеми

розв'язування задачі в цілому розглянемо два "типові" інтегральні рівняння в послідовності (2.47) – перше та четверте.

Лема 2.3. *Перше рівняння в послідовності (2.47) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.*

Доведення. Легко бачити, що досліджуване рівняння допускає виділення особливості ядра в явному вигляді:

$$\int_0^1 \overline{G}_1(\tau)\left[\ln|\tau-\overline{\tau}|+N(\tau,\overline{\tau})\right]D(\tau)\mathrm{d}\tau = 2\sum_{k=1}^{4} f_k\,, \tag{2.49}$$

де

$$D(\tau) := \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{sh}^2\tau+\operatorname{ch}^2\tau\right)^{1/2},$$

$$N(\tau,\overline{\tau}) := \ln M(\tau,\overline{\tau}) + 2\pi\sum_{l=2}^{8}\Phi\left[\beta_l^{-1}x_{11}(\tau);\,\beta_1^{-1}x_{11}(\overline{\tau})\right],$$

причому

$$M(\tau,\overline{\tau}) := \left\{\frac{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\tau-\overline{\tau}}{2}\right)}{\left(\dfrac{\tau-\overline{\tau}}{2}\right)^2}\left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{\tau+\overline{\tau}}{2}\right)\right]+\operatorname{ch}^2\left(\frac{\tau+\overline{\tau}}{2}\right)\right\}^{1/2}. \ \blacktriangle$$

Для знаходження правої частини в (2.49) ми врахували ту обставину, що $\mathrm{f}_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ – граничні значення потенціалу, тобто постійні величини в межах відповідних дуг Γ_i. Розв'язуваність (2.49) досліджують у різних функціональних просторах, але при цьому бажано враховувати особливу поведінку шуканої густини розподілу зарядів в околі точки $\tau=1$. Так, наприклад, $\overline{G}_1(\tau)$ можна шукати в модифікованому просторі Гьольдера $\widetilde{H}_\mu([0,1))\,(0<\mu\le 1)$. Функція належить до такого простору тоді й лише тоді, коли має вигляд $\overline{G}_1^*(\tau)/\sqrt{1-\tau}$, причому неперервна функція $\overline{G}_1^*(\tau)$ задовольняє умову Гьольдера з показником μ.

Четверте рівняння в послідовності (2.47), враховуючи наявність уявної одиниці в зображенні оператора B_4, необхідно подати у вигляді такої еквівалентрої системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \left(A_1^{(4)}G_1^{(4)}\right)(\bar{\tau})+\left(A_2^{(4)}G_2^{(4)}\right)(\bar{\tau})=2\left(f_1-f_3\right), \\ -\left(A_2^{(4)}G_1^{(4)}\right)(\bar{\tau})+\left(A_1^{(4)}G_2^{(4)}\right)(\bar{\tau})=2\left(f_2-f_4\right), \end{cases} \quad (0\le\bar{\tau}\le 1) \qquad (2.50)$$

де $A_1^{(4)} := A_{11}+A_{21}-A_{51}-A_{61}$, $A_2^{(4)} := A_{31}+A_{41}-A_{71}-A_{81}$,

$G_1^{(4)} := G_1(\tau)+G_2(\tau)-G_5(\tau)-G_6(\tau)$, $G_2^{(4)} := G_3(\tau)+G_4(\tau)-G_7(\tau)-G_8(\tau)$.

Перше і друге рівняння в системі (2.50) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі. Зауважимо також, що (2.50) можна “розщепити” в послідовність двох незалежних рівнянь.

2.3.4 Чисельне розв’язування інтегральних рівнянь

Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах чисельного розв’язування інтегральних рівнянь (2.49). Враховуючи відносно невисоку гладкість функції $N(\tau,\bar{\tau})$, застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково–постійною апроксимацією шуканої густини $\overline{G}_1(\tau)$. Для цього проведемо розбиття відрізка інтегрування на елементи з кроком $h=1/n$, $[0,1]:=\bigcup_{j=1}^{n}\Delta_j$, де $\Delta_j := \left[\tau_j-\frac{h}{2},\tau_j+\frac{h}{2}\right]$, $\tau_j := \frac{h}{2}(2j-1)$. У відповідності з запровадженим розбиттям подамо (2.49) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j}\overline{G}_1(\tau)\left[\ln|\tau-\bar{\tau}|+N(\tau,\bar{\tau})\right]D(\tau)\,\mathrm{d}\tau=2\sum_{k=1}^{4}f_k\,. \qquad (2.51)$$

Припустимо, що при виборі достатньо великого n у межах j–го елемента $\overline{G}_1(\tau)\approx\overline{G}_1(\tau_j)$. Далі, обираючи в якості точок колокації $(\bar{\tau}\in(0,1))$ послідовно

точки з дискретної множини $\{\,\overline{\tau}_i\,\}_{i=1}^{n}$, де $\overline{\tau}_i := \frac{h}{2}(2i-1)$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження $\overline{G}_1(\tau_j)\left(j=\overline{1,\,n}\right)$:

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{G}_1(\tau_j)\int_{\Delta_j}D(\tau)\left[\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|+N(\tau,\,\overline{\tau}_i)\right]\mathrm{d}\tau=2\sum_{k=1}^{4}f_k\,, \qquad (2.52)$$

яка апроксимує (2.49). У разі необхідності виявлення особливого характеру поведінки шуканої функції $\overline{G}_1(\tau)$ в околі точки $\tau=1$ є підстави апроксимувати останній доданок у лівій частині (2.51) таким виразом:

$$\overline{G}_1(\tau_n)\sqrt{h/2}\int_{1-h}^{1}\frac{D(\tau)}{\sqrt{1-\tau}}\left[\ln\left|\tau-\overline{\tau}\right|+N(\tau,\,\overline{\tau})\right]\mathrm{d}\tau.$$

Для усунення особливості, що при цьому виникає в знаменнику підінтегральної функції, достатньо виконати заміну змінних: $\sqrt{1-\tau}=v$.

Певну трудність викликає обчислення діагональних елементів матриці системи алгебричних рівнянь (2.52), тобто інтегралів виду:

$$\int_{\tau_i-h/2}^{\tau_i+h/2}D(\tau)\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|\mathrm{d}\tau+\int_{\Delta_i}D(\tau)N(\tau,\,\overline{\tau}_i)\,\mathrm{d}\tau\ \left(i=\overline{1,\,n}\right).$$

Для наближеного обчислення першого доданку скористаємось таким “послабленням” особливості у підінтегральній функції:

$$\int_{\Delta_i}D(\tau)\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|\mathrm{d}\tau=\int_{\Delta_i}R(\tau,\,\overline{\tau}_i)\mathrm{d}\tau+D(\overline{\tau}_i)\int_{\Delta_i}\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|\mathrm{d}\tau\,,$$

де

$$R(\tau,\,\overline{\tau}_i)=\begin{cases}\left[D(\tau)-D(\overline{\tau}_i)\right]\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|, & \left|\tau-\overline{\tau}_i\right|\neq 0;\\ 0, & \left|\tau-\overline{\tau}_i\right|=0.\end{cases}$$

Зауважимо при цьому, що $\int_{\Delta_i}\ln\left|\tau-\overline{\tau}_i\right|\mathrm{d}\tau=h\left(\ln\frac{h}{2}-1\right)$. При наближеному розв’язанні інтегрального рівняння (2.49) використовували апостеріорний метод оцінювання похибки, а досягнення потрібної точності результатів

забезпечували шляхом згущення сітки в околі особливої точки шуканого розв'язку [31].

Зауваження 2.3 щодо розпаралелення процедури розв'язування (2.47). На завершення слід відзначити, що "розщеплення" початкової задачі на N незалежних інтегральних рівнянь (у нашому випадку $N = 8$) створює передумови для застосування до її чисельного аналізу процедур розпаралелення. При цьому важливим є встановлення основних загальноприйнятих [46, с. 321–322] характеристик ефективності, а саме, кількості часових тактів, необхідних для реалізації алгоритму за допомогою p процесорів (T_p); коефіцієнта прискорення за умов паралельних обчислень (R_p); коефіцієнта ефективності розпаралелення ($E_p := R_p / p$). Схема наближеного розв'язування одного інтегрального рівняння, в загальних рисах, полягає у формуванні матриці системи лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимує відповідний інтегральний оператор, і подальшому розв'язанні отриманої системи. У нашому конкретному випадку сформовану вже систему рівнянь розв'язували методом Гаусса. За таких умов, використовуючи N процесорів ($p = N$), розв'язок N алгебричних систем, які апроксимують N незалежних інтегральних рівнянь, методом Гаусса можна отримати за $T_p = M^3$ часових тактів, де M – кількість точок колокації на контурі інтегрування. Легко бачити, що при цьому коефіцієнт прискорення $R_p = N$, а коефіцієнт ефективності розпаралелення $E_p = 1$. Отже, використовуючи N процесорів для розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь, ми досягаємо максимальної ефективності розпаралелення.

Для прискорення процесу розв'язування N рівнянь, враховуючи специфіку методу колокації, можна збільшити кількість процесорів до $p = NM^2$. Тоді $T_p = 3M$ – кількість часових тактів, необхідних для

розв'язування N алгебричних систем, які апроксимують N інтегральних рівнянь, на NM^2 процесорах методом Гаусса. Далі, легко бачити, що

$$R_p = \frac{NM^3}{3M} = \frac{NM^2}{3}, \text{ а } E_p = \frac{NM^2}{3NM^2} = \frac{1}{3}.$$

Отже, збільшуючи кількість процесорів, ми прискорюємо процес розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь ($M \geq 2$ – цілком відповідає логіці застосування методу колокації). Зауважимо також, що при цьому зменшується коефіцієнт завантаження. Звідси для найшвидшого отримання розв'язку в цілому, незалежно від ефективності використання процесорів E_p та їх кількості p, необхідно максимізувати коефіцієнт прискорення R_p.

2.3.5 Чисельні експерименти

На прикладах 2.3–2.4 продемонстровано результати тестування методики розв'язування "плоскої" задачі електростатики (2.36)–(2.37) при різних граничних значеннях потенціалу, а загальний вигляд відповідної електронно–оптичної системи подано на рис. 2.8.

Приклад 2.3. У табл. 2.5 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжка $[-2, 2]$ з кроком $h = 0.5$ при антисиметричних граничних значеннях: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -1$, $f_3(x) = 1$, $f_4(x) = -1$ і різній кількості точок колокації M. Загальний вигляд розв'язку при $M = 100$ продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 2.9). Також чисельно отримано константу C: $C = 0$ (що підтверджується лемою про адитивну сталу, оскільки граничні умови антисиметричні).

Таблиця 2.5 – Результати, отримані в одній точці для прикладу 2.3.

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $U(x)$				
		$M = 10$	$M = 30$	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
1	(–0.50, –2.00)	0.5067	0.5590	0.5765	0.5842	0.5845
2	(–0.50, –1.50)	0.7393	0.7974	0.8157	0.8232	0.8235
3	(–0.50, –1.00)	0.6967	0.7318	0.7422	0.7459	0.7462
4	(–0.50, –0.50)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	(–0.50, 0.00)	–0.2236	–0.2412	–0.2466	–0.2478	–0.2480
6	(–0.50, 0.50)	–0.0000	–0.0000	–0.0000	–0.0000	–0.0000
7	(–0.50, 1.00)	0.6967	0.7318	0.7422	0.7459	0.7462
8	(–0.50, 1.50)	0.7393	0.7974	0.8157	0.8232	0.8235
9	(–0.50, 2.00)	0.5067	0.5590	0.5765	0.5842	0.5845

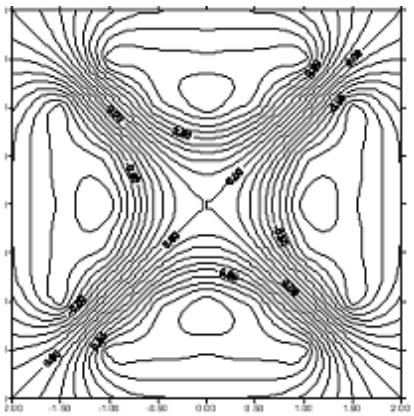


Рисунок 2.9 – Лінії рівня наближеного розв’язку для прикладу 2.3.

Приклад 2.4. У табл. 2.6 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжка [–2, 2] з кроком $h = 0.5$ при таких граничних значеннях: $f_1(x) = 10$, $f_2(x) = 20$, $f_3(x) = -100$, $f_4(x) = 1$ і різній кількості точок колокації M. Загальний вигляд розв’язку при $M = 100$ продемонстровано на лініях рівня (див. рис. 2.10). Константа $C = -17.25$.

Таблиця 2.6 – Результати, отримані в одній точці для прикладу 2.4.

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $U(x)$				
		$M = 10$	$M = 30$	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
1	(–0.50, –2.00)	–66.3840	–71.5473	–73.6754	–74.1832	–74.1857
2	(–0.50, –1.50)	–80.3798	–85.9270	–87.8676	–88.6204	–88.6189
3	(–0.50, –1.00)	–79.5545	–83.8284	–84.6181	–85.7991	–85.8111
4	(–0.50, –0.50)	–37.8503	–39.6271	–40.1711	–40.4701	–40.4712
5	(–0.50, 0.00)	–11.0440	–10.5548	–10.4051	–10.3623	–10.3653
6	(–0.50, 0.50)	3.3503	5.1271	5.8788	5.9709	5.9712
7	(–0.50, 1.00)	6.3833	8.7100	9.8493	9.8897	9.8962
8	(–0.50, 1.50)	4.8476	7.1660	7.9155	8.4007	8.4097
9	(–0.50, 2.00)	3.7618	6.0219	6.8235	7.2415	7.2455

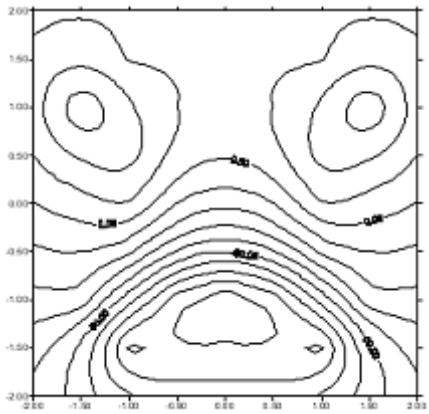


Рисунок 2.10 – Лінії рівня наближеного розв’язку для прикладу 2.4.

2.4 Висновок

Переваги запровадженої методики очевидні: зменшення оперативної пам’яті комп’ютера при формуванні системи лінійних алгебричних рівнянь, яка апроксимує операторне рівняння (у 64 рази!), можливість уникнути числової нестійкості, яка може виникнути при непомірному збільшенні розв’язуваних систем, а також можливість розпаралелення процедури розв’язування задач.

3 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ. ДВОПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ТИПУ ХОРД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано однокрокову та двокрокову модифікації методу хорд з використанням апроксимації похідної Фреше поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність однокрокового методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Знайдено умови та швидкість збіжності цього методу, виявлено область єдиності розв'язку задачі. Розглянуто застосування двопараметричних методів для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Проведено порівняння запропонованих методів на тестових прикладах.

3.1 Вступ

Нехай задано нелінійне операторне рівняння

$$F(x)=0, \tag{3.1}$$

де оператор F визначений на опуклій відкритій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Базовим методом для розв'язування (3.1) є класичний метод Ньютона, який має квадратичну швидкість збіжності за виконання умов Ліпшиця для похідної Фреше чи обмеженості за нормою другої похідної за Фреше. Доброю альтернативою до методу Ньютона для розв'язування (3.1) є метод хорд, який не вимагає в обчислювальній формулі аналітично заданих похідних. Він набуває вигляду

$$x_{n+1}=x_n-F(x_n,x_{n-1})^{-1}F(x_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{3.2}$$

де обмежений лінійний оператор $F(x,y)$ називають поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x, y, якщо справджується рівність

$$F(x,y)(x-y)=F(x)-F(y).$$

Збіжність класичного методу хорд (3.2) вивчало багато авторів [47, 48, 49, 50, 51]. Пізніше були запропоновані методи типу хорд, типу Стеффенсена, які мають вільний числовий параметр [52, 53, 54, 55]. Вибором цього параметра авторам вдалося показати, що швидкість збіжності ітераційної послідовності має порядок $1+p$, де $0<p\le 1$. Якщо параметр методу не прямує до нуля, то доведено тільки лінійну збіжність. Крім того, при дослідженні збіжності накладаються умови на похідні від оператора F у потрібній області, хоч в ітераційній формулі фігурують поділені різниці. У цій праці ми пропонуємо ширший, двопараметричний клас методів типу хорд

$$x_{n+1}=x_n-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{3.3}$$

де $u_n=x_n+a_n(x_{n-1}-x_n)$, $v_n=x_n+b_n(x_{n-1}-x_n)$, $a_n\in[-1;1]$, $b_n\in[0;1]$. Прийнявши $a_n=b_n=0$, отримаємо класичний метод Ньютона, прийнявши $a_n=0$, $b_n=1$, матимемо метод хорд (3.2), за $a_n=-1$, $b_n=1$ – метод лінійної інтерполяції Курчатова [56], і, нарешті, за $a_n=0$, $b_n\in[0;1]$ одержимо метод типу хорд [55]. Як бачимо, запропонований метод (3.3) містить методи Ньютона та Курчатова, для яких доведена квадратична збіжність, і методи типу хорд з дещо нижчою збіжністю. Дослідження в рамках одного методу дає змогу порівняти радіуси збіжності окремих відомих методів за однакових умов, накладених на нелінійний оператор.

У праці [57] введено узагальнені умови Ліпшиця для похідної Фреше, де замість сталої Ліпшиця використано додатну інтегровну функцію, і за цих умов досліджено метод Ньютона. Ми в [49] подібні умови ввели для поділених різниць і за таких умов провели дослідження методу хорд.

У цій праці за таких самих умов досліджено збіжність методу типу хорд (3.3). Показано надлінійну швидкість збіжності ітераційного процесу (з порядком $(1+\sqrt{5})/2$) для постійних параметрів, для незростаючої послідовності

$\{b_n\}$ і постійного a_n, а при певному виборі параметрів одержимо і квадратичну збіжність. Зрештою, деякі застосування і чисельні експерименти показують реальну збіжність методів типу хорд.

Розділ побудований таким чином. У частині 3.2 зроблено аналіз збіжності методу (3.3) та єдиності розв'язку. У частині 3.3 запропоновано двокроковий різницевий метод, а у підрозділі 3.4 наведено результати чисельного експерименту.

3.2 Локальна збіжність методу (3.3)

Умова Ліпшиця в області $D \subset R^n$ для поділених різниць першого порядку має вигляд

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le L(\|x-u\|+\|y-v\|), \tag{3.4}$$

де $x,\ y,\ u,\ v \in D$, L – константа Ліпшиця. Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, але може бути і додатною інтегровною функцією. У цьому випадку умова (3.4) отримає таке подання [49]:

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz\,. \tag{3.5}$$

Тут $x,\ y,\ u,\ v \in D$. Умову (3.5) називатимемо узагальненою умовою Ліпшиця з L в середньому (усередненим L).

Лема 3.1. [49] *Припустимо, що F має поділені різниці в $B(x_*,r)$, існує $F'(x_*)$ і вона оборотна, $F'(x_*)^{-1}F(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця з L в середньому*

$$\|F'(x_*)^{-1}F(x,y)-I\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz \quad \forall\ x,\ y \in B(x_*,r),$$

де L – додатна інтегровна функція, $\rho(x)=\|x-x_*\|$. Нехай r задовольняє умову

$$\int_0^{2r} L(z)dz \le 1.$$

Тоді $F(x,y)$ оборотна в кулі $B(x_*,r)$ і

$$\|F(x,y)^{-1}F'(x_*)\| \le \left(1-\int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz\right)^{-1}.$$

Теорема 3.1.

Нехай F – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:

1) Рівняння (3.1) має розв'язок x_* в кулі $B(x_*,r)=\{x\in D\colon \|x-x_*\|<r\}$, існує похідна за Фреше $F'(x_*)$ і вона є оборотна;

2) В кулі $B(x_*,r)$ функція $F(x)$ має поділені різниці першого порядку $F(x,y)$, які задовольняють умову Ліпшиця з усередненим L:

$$\|F'(x_*)^{-1}F(x,y)-I\| \le \int_0^{\|x-x_*\|+\|y-x_*\|} L(z)dz, \tag{3.6}$$

де $x,\ y\in B(x_*,r)$ і L – неспадна;

3) Нехай $r>0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)r} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)r} L(z)dz} \le 1. \tag{3.7}$$

Тоді послідовність (3.3) збігається для всіх $x_{-1},\ x_0\in B(x_*,r)$ і

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le q_1\|x_{n-1}-x_*\|\,\|x_n-x_*\|, \tag{3.8}$$

де

$$\rho_{max}=\max\{\rho(x_{-1}),\rho(x_0)\},$$

$$q_1=\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)\rho_{\max}} L(z)dz}{\left(1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)\rho_{\max}} L(z)dz\right)\rho_{\max}}.$$

Доведення. Доведення проведемо для фіксованих $a_n=a_0$ і незростаючої послідовності $\{b_n\}$. Виберемо довільно $x_{-1},x_0\in B(x_*,r)$, де r задовольняє (3.7), і покажемо, що

$$q=\frac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})} L(z)dz}$$

буде менше за 1. Справді, з монотонності L отримаємо

$$\left(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}-\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\right)L(z)dz=\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2}+\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)L(z)dz\geq$$

$$\geq L(t_1)\left(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2}+\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right)dz= \tag{3.9}$$

$$=L(t_1)\left(\frac{t_2-t_1}{t_2}+t_1\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)\right)=0$$

для $0<t_1<t_2$. Тобто, $\frac{1}{t}\int_0^t L(z)dz$ є неспадною стосовно t. Отже, ми маємо

$$q=\frac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})} L(z)dz}\times$$

$$\times\frac{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}\leq$$

$$\leq\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)r} L(z)dz}{(1+2|a_0|)r\left(1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)r} L(z)dz\right)}\times$$

$$\times(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})\leq$$

$$\leq\frac{(1+|a_0|-b_0)\,\|x_0-x_*\|+(|a_0|+b_0)\,\|x_{-1}-x_*\|}{(1+2|a_0|)r}<1.$$

Якщо $x_n\in B(x_*,r)$, то згідно (3.3) одержуємо

$$x_{n+1}-x_*=x_n-x_*-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n)=-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_*,x_*)$$
$$\times F(x_*,x_*)^{-1}[F(x_n,x_*)-F(u_n,v_n)](x_n-x_*).$$

Тоді згідно з лемою 3.1 і умовою (3.6) отримаємо

$$\|x_{n+1}-x_*\|=\|x_n-x_*-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n)\|\le$$
$$\le\|F(u_n,v_n)^{-1}F(x_*,x_*)\|\|F(x_*,x_*)^{-1}[F(x_n,x_*)-F(u_n,v_n)](x_n-x_*)\|\le$$
$$\le\frac{\int_0^{\|u_n-x_n\|+\|v_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\int_0^{\|u_n-x_*\|+\|v_n-x_*\|}L(z)dz}\rho(x_n)=$$
$$=\frac{\int_0^{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_n-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}\rho(x_n).$$

Прийнявши $n=0$, отримаємо

$$\|x_1-x_*\|\le q\|x_0-x_*\|<r.$$

Тобто, $x_1\in B(x_*,r)$. Звідси випливає, що (3.3) можна продовжити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією всі $\{x_n\}_{n\ge0}$ належать $B(x_*,r)$ і $\rho(x_n)$ монотонно спадає. Далі для всіх $n=0,\ 1,...$ маємо

$$\|x_{n+1}-x_*\|\le\frac{\int_0^{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_n-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}L(z)dz}\rho(x_n)\times$$
$$\times\frac{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}\le$$
$$\le\frac{\int_0^{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0-b_n)\rho(x_0)+(|a_0|+b_n)\rho(x_{-1})}L(z)dz}\rho(x_n)\times$$
$$\times\frac{(1+|a_n|-b_n)\rho(x_n)+(|a_n|+b_n)\rho(x_{n-1})}{(1+|a_0|-b_0)\rho(x_0)+(|a_0|+b_0)\rho(x_{-1})}\le$$
$$\le\frac{\int_0^{(1+2|a_0|)\rho_{max}}L(z)dz}{1-\int_0^{(2-a_0+|a_0|)\rho_{max}}L(z)dz}\frac{(1+2|a_n|)}{(1+2|a_0|)\rho_{max}}\rho(x_{n-1})\rho(x_n)= \tag{3.10}$$
$$=q_1\|x_{n-1}-x_*\|\|x_n-x_*\|.$$

Отож, справджується нерівність (8). ▲

Наслідок 3.1. Порядок збіжності ітераційного процесу (3.3) дорівнює $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Зауваження 3.1. Вибравши $a_n = 0$ та $b_n = O(\|x_n - x_*\|)$, можна довести квадратичну збіжність процесу (3.3). Справді,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_*\| &\le \frac{\int_0^{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{(2-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})} L(z)dz}\rho(x_n) \\
&\times \frac{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})}{(1-b_n)\rho(x_n)+b_n\rho(x_{n-1})} \\
&\le \frac{\int_0^{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} L(z)dz}{1-\int_0^{2\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} L(z)dz}\rho(x_n) \\
&\times \frac{(1-b_n+O(1)\rho(x_{n-1}))\rho(x_n)}{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})} \\
&\le \frac{(1-b_n+O(1)\rho(x_{n-1}))}{\rho(x_0)+b_n\rho(x_{-1})}\, q\,\|x_n - x_*\|^2 .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Наступна теорема визначає область, в якій розв’язок рівняння (3.1) єдиний.

Теорема 3.2.

Нехай $F(x_*)=0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$, F має поділені різниці $F(x,x_*)$ в $B(x_*,r)$, які задовольняють радіальну умову Ліпшиця з L у середньому

$$\|F'(x_*)^{-1}F(x,x_*)-I\| \le \int_0^{\rho(x)} L(z)dz, \ \forall\ x \in B(x_*,r), \tag{3.12}$$

де $\rho(x)=\|x-x_*\|$ і L – додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє $\int_0^r L(z)dz \le 1$.

Тоді рівняння (3.1) має єдиний розв’язок x_* в $B(x_*,r)$.

Доведення. Припустимо, що $x_{**} \in B(x_*,r)$, $x_{**} \ne x_*$, також розв’язок рівняння (3.1). Тоді $F'(x_*)^{-1}F(x_{**})=0$. Отже,

$$x_{**}-x_{*}=x_{**}-x_{*}-F'(x_{*})^{-1}F(x_{**})=$$
$$=-F'(x_{*})^{-1}\left[F(x_{**})-F(x_{*})-F'(x_{*})(x_{**}-x_{*})\right]=$$
$$=-F'(x_{*})^{-1}\left[F(x_{**},x_{*})-F(x_{*},x_{*})\right](x_{**}-x_{*})=$$
$$=-\left[F'(x_{*})^{-1}F(x_{**},x_{*})-I\right](x_{**}-x_{*}).$$

Тоді, за умови (3.12), отримаємо

$$\|x_{**}-x_{*}\|\le\int_0^{\rho(x_{**})}L(z)\,dz\,\|x_{**}-x_{*}\|<\int_0^{r}L(z)\,dz\,\|x_{**}-x_{*}\|<\|x_{**}-x_{*}\|,$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, $x_{**}=x_{*}$. Теорему 3.4 доведено. ▲

При вивченні методу типу хорд традиційними є припущення, що поділені різниці першого порядку задовольняють умову Ліпшиця. Вважаючи, що L є сталою, ми отримаємо з теорем 3.2 та 3.4 такі наслідки.

Наслідок 3.2. Нехай $F(x_{*})=0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_{*})$, F має поділені різниці, які задовольняють центральну умову Ліпшиця

$$\|F'(x_{*})^{-1}\left(F(x_{*},x_{*})-F(x,y)\right)\|\le L\left(\|x-x_{*}\|+\|y-x_{*}\|\right) \qquad (3.13)$$

$\forall\ x,\ y\in B(x_{*},r)$, де L – додатне число, $r=\dfrac{1}{\left(3+3|a_0|-a_0\right)L}$. Тоді метод типу хорд (3.3) збігається для всіх $x_0,\ x_{-1}\in B(x_{*},r)$ і виконується (3.8), де

$$q=\frac{\left(1+2|a_0|\right)\rho_{\max}L}{1-\left(2-a_0+|a_0|\right)\rho_{\max}L}.$$

Зауважимо, що для класичного методу хорд $(a_0=0,\ b_0=1)$ отримаємо оцінку радіуса $r=\dfrac{1}{3L}$, що збігається з оцінкою з [48, 49, 50]. Такий самий радіус збіжності і в методу Ньютона [58] $(a_0=0,\ b_0=0)$, враховуючи співвідношення для похідних $\left\|F'(x_{*})^{-1}\left(F'(x_{*})-F'(x)\right)\right\|\le 2L\|x-x_{*}\|$, яке отримуємо з (3.13),

прийнявши $x=y$. Для методу Курчатова $\left(a_0=-1,\ b_0=1\right)$ радіус збіжності менший і дорівнює $r=\dfrac{1}{7L}$.

Наслідок 3.3. Припустимо, що $F\left(x_*\right)=0$, існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$, F має поділені різниці $F\left(x,x_*\right)$ в $B(x_*,r)$, які задовольняють радіальну умову Ліпшиця

$$\left\|F'(x_*)^{-1}F(x,x_*)-I\right\|\le L\left\|x-x_*\right\|,$$

де L – додатне число і $r=\dfrac{1}{L}$. Тоді рівняння (3.1) має єдиний розв'язок x_* у відкритій кулі $B(x_*,r)$.

3.3 Напівлокальна збіжність однокрокового методу (3.3)

Дослідження напівлокальної збіжності методу (3.) проведено у випадку, коли поділені різниці першого порядку для оператора F задовольняють умову Ліпшиця.

Теорема 3.3. Нехай $x_0\in D$ – початкове наближення, $S_0=\left\{x\in D:\left\|x-x_0\right\|<R\right\}$. Припустимо, що виконуються умови:

1) $\left\|x_{-1}-x_0\right\|=\alpha$;
2) існує $F\left(u_0,v_0\right)^{-1}=A_0^{-1}$ і $\left\|A_0^{-1}\right\|\le\beta$;
3) $\left\|A_0^{-1}F\left(x_0\right)\right\|\le\eta$;
4) поділені різниці першого порядку оператора F задовольняють умову Ліпшиця з константою L
$$\left\|F\left(x,y\right)-F\left(u,v\right)\right\|\le L\left(\left\|x-u\right\|+\left\|y-v\right\|\right),$$

де $x,\ y,\ u,\ v\in S_0,\ L>0$.

Позначимо через $m=\max\left\{\beta L\left(\eta+\left(a+b\right)\alpha\right),\beta L\left(1+a+b\right)\eta\right\}$, припустимо, що $\left|a_k\right|\le a$, $b_k\le b$ і

$$u\left(1-\frac{m}{1-\beta L\left(\left(2+a+b\right)u+\left(a+b\right)\alpha\right)}\right)-\eta=0 \qquad (3.14)$$

має хоча б один додатний корінь, причому R – найменший додатний. Якщо

$$\beta L\left(\left(2+a+b\right)R+\left(a+b\right)\alpha\right)<1,\ M=\frac{m}{1-\beta L\left(\left(2+a+b\right)R+\left(a+b\right)\alpha\right)}<1,$$

і $\overline{S}_0\subset D$, тоді послідовність $\{x_k\}$, утворена ітераційним процесом (3.3), коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку $x_*\in\overline{S}_0$ рівняння (3.1).

Доведення. Доведення проводять аналогічно як у [50, 51]. Позначимо через $A_k=F\left(u_k,v_k\right)$. Згідно з (3.3) $x_1=x_0-A_0^{-1}F\left(x_0\right)$. Враховуючи умови теореми, отримаємо, що $\left\|x_1-x_0\right\|=\left\|-A_0^{-1}F\left(x_0\right)\right\|\le\eta<R$. Отже, $x_1\in S_0$.

Враховуючи умову 4 теореми, одержимо

$$\left\|I-A_0^{-1}A_1\right\|=\left\|A_0^{-1}\left(A_0-A_1\right)\right\|\le\left\|A_0^{-1}\right\|\left\|A_0-A_1\right\|\le\beta L\left(\left\|u_0-u_1\right\|+\left\|v_0-v_1\right\|\right).$$

Оскільки,

$$\left\|u_0-u_k\right\|=\left\|x_0+a_0\left(x_{-1}-x_0\right)-x_k-a_k\left(x_{k-1}-x_k\right)\right\|\le$$
$$\le\left\|x_0-x_k\right\|+\left|a_0\right|\left\|x_{-1}-x_0\right\|+\left|a_k\right|\left\|x_{k-1}-x_k\right\|,$$

$$\left\|v_0-v_k\right\|=\left\|x_0+b_0\left(x_{-1}-x_0\right)-x_k-b_k\left(x_{k-1}-x_k\right)\right\|\le$$
$$\le\left\|x_0-x_k\right\|+b_0\left\|x_{-1}-x_0\right\|+b_k\left\|x_{k-1}-x_k\right\|,$$

то

$$\left\|I-A_0^{-1}A_1\right\|\le\beta L\left(\left(2+a+b\right)\left\|x_0-x_1\right\|+\left(a+b\right)\left\|x_{-1}-x_0\right\|\right)$$
$$\le\beta L\left(\left(2+a+b\right)\eta+\left(a+b\right)\alpha\right)<\beta L\left(\left(2+a+b\right)R+\left(a+b\right)\alpha\right)<1.$$

За теоремою Банаха A_1^{-1} існує і

$$\left\|A_1^{-1}\right\|<\frac{\beta}{1-\beta L\left(\left(2+a+b\right)R+\left(a+b\right)\alpha\right)}.$$

З означення поділеної різниці першого порядку і формули (3.3) отримаємо

$$F\left(x_1\right)=F\left(x_0\right)-F\left(x_0,x_1\right)\left(x_0-x_1\right)=\left(A_0-F\left(x_0,x_1\right)\right)\left(x_0-x_1\right).$$

Врахувавши умову Ліпшиця (3.4), одержимо

$$\|F(x_1)\|=\|(A_0-F(x_0,x_1))(x_0-x_1)\|\le\|A_0-F(x_0,x_1)\|\|x_0-x_1\|$$
$$\le L(\|u_0-x_0\|+\|v_0-x_1\|)\|x_0-x_1\|\le L((a+b)\|x_{-1}-x_0\|+\|x_0-x_1\|)\|x_0-x_1\|$$
$$\le L((a+b)\alpha+\eta)\|x_0-x_1\|<L((a+b)\alpha+R)\|x_0-x_1\|.$$

Звідси випливає, що x_2 коректно визначена. Крім того,

$$\|x_2-x_1\|\le\|A_1^{-1}\|\|F(x_1)\|<\frac{m}{1-\beta L((2+a+b)R+(a+b)\alpha)}\|x_1-x_0\|=M\|x_1-x_0\|<\eta.$$

З іншого боку, оскільки R – розв'язок рівняння (3.14), то

$$\|x_2-x_0\|\le\|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\|<(M+1)\eta<R$$

і $x_2\in S_0$.

Припустимо, що для $i=\overline{1,k-1}$ лінійні оператори A_i оборотні і $x_{i+1}\in S_0$. Для $i=k$ отримаємо

$$\|I-A_0^{-1}A_k\|\le\|A_0^{-1}\|\|A_0-A_k\|\le\beta L(\|u_0-u_k\|+\|v_0-v_k\|)$$
$$\le\beta L((2+a+b)\eta+(a+b)\alpha)<\beta L((2+a+b)R+(a+b)\alpha)<1$$

і $\|A_k^{-1}\|<\dfrac{\beta}{1-\beta L((2+a+b)R+(a+b)\alpha)}$.

З означення поділеної різниці першого порядку, формули (3.3), та врахувавши умову 4 теореми, отримаємо

$$F(x_k)=F(x_{k-1})-F(x_{k-1},x_k)(x_{k-1}-x_k)=(A_{k-1}-F(x_{k-1},x_k))(x_{k-1}-x_k),$$

$$\|F(x_k)\|=\|(A_{k-1}-F(x_{k-1},x_k))(x_{k-1}-x_k)\|\le\|A_{k-1}-F(x_{k-1},x_k)\|\|x_{k-1}-x_k\|$$
$$\le L(\|u_{k-1}-x_{k-1}\|+\|v_{k-1}-x_k\|)\|x_{k-1}-x_k\|\le L((a+b)\eta+\eta)\|x_{k-1}-x_k\|.$$

Отже,

$$\|x_{k+1}-x_k\|\le\|A_k^{-1}\|\|F(x_k)\|<\frac{m}{1-\beta L((2+a+b)R+(a+b)\alpha)}\|x_k-x_{k-1}\|$$
$$=M\|x_k-x_{k-1}\|<M^k\|x_1-x_0\|<\eta.$$

З іншого боку, врахувавши, що R – розв'язок рівняння (4), то

$$\|x_{k+1}-x_0\|\le\|x_{k+1}-x_k\|+\|x_k-x_{k-1}\|+...+\|x_1-x_0\|$$
$$<(M^k+M^{k-1}+...+1)\|x_1-x_0\|=\frac{1-M^{k+1}}{1-M}\|x_1-x_0\|<\frac{1}{1-M}\eta=R$$

і $x_{k+1}\in S_0$.

Покажемо, що $\{x_k\}$ – послідовність Коші. Справді,

$$\|x_{k+p}-x_k\|\le\|x_{k+p}-x_{k+p-1}\|+\|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}\|+...+\|x_{k+1}-x_k\|$$
$$<(M^{p-1}+M^{p-2}+...+1)\|x_{k+1}-x_k\|=\frac{1-M^p}{1-M}\|x_{k+1}-x_k\|<\frac{1}{1-M}M^k\|x_1-x_0\|.$$

Отже, $\{x_k\}$ – послідовність Коші і збігається до $x_*\in\overline{S}_0$.

Покажемо, що x_* розв'язок рівняння (3.1) і він єдиний. Оскільки

$$\|F(x_k)\|\le L((a+b)\eta+\eta)\|x_k-x_{k-1}\|$$

і $\|x_k-x_{k-1}\|\to 0$ при $k\to\infty$, то $F(x_*)=0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x_{**}\in\overline{S}_0$, $x_{**}\ne x_*$ і $F(x_{**})=0$. Позначимо $F(x_{**},x_*)=H$. За означенням поділеної різниці першого порядку $H(x_{**}-x_*)=F(x_{**})-F(x_*)$. Якщо оператор H оборотний, то $x_{**}=x_*$. Справді,

$$\|A_0^{-1}H-I\|=\|A_0^{-1}(H-A_0)\|\le\|A_0^{-1}\|\|H-A_0\|\le\beta L(\|x_{**}-u_0\|+\|x_*-v_0\|)$$
$$\le\beta L(\|x_{**}-x_0\|+\|x_*-x_0\|+(a+b)\|x_{-1}-x_0\|)<\beta L(2R+(a+b)\alpha)<1.$$

Отже, H^{-1} існує. Теорема 3.3 доведена. ▲

3.4 Двокроковий параметричний різницевий метод

Розглянемо двокрокову модифікацію методу типу хорд

$$\begin{aligned}&x_{n+1}=x_n-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_n),\\&y_{n+1}=x_{n+1}-F(u_n,v_n)^{-1}F(x_{n+1}),n=0,1,2,...,\end{aligned}\qquad(3.15)$$

де $u_n = x_n + a_n(y_n - x_n)$, $v_n = x_n + b_n(y_n - x_n)$, $a_n \in [-1;1]$, $b_n \in [0;1]$. У (3.15) на одній ітерації треба один раз обчислювати матрицю поділених різниць, як і в методі (3.3), розв'язувати дві системи лінійних рівнянь, але з однаковою матрицею. Враховуючи, що у цьому випадку прямий хід методу Гаусса (чи LU–розклад) виконується один раз, то кількість обчислень на ітерації зростає несуттєво.

Алгоритм (3.14) також містить окремі деякі відомі методи, які досліджували окремо. Прийнявши $a_n = 1$, $b_n = -1$, маємо двокроковий варіант методу Курчатова [56, 59]. Зауважимо, О. Ваарманн [60] розглядав дещо інший двокроковий варіант методу Курчатова. При $a_n = 0{,}5$, $b_n = 0{,}5$ одержимо метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, досліджений багатьма авторами [61, 62, 63, 64, 65], а при $a_n = 0$, $b_n = 1$ – його різницевий аналог з таким самим порядком збіжності (див. [66, 67]). Не розглядаючи питання теоретичного обґрунтування методу, дослідимо його на тестових задачах, виявимо залежність швидкості збіжності (кількості ітерацій) від числових параметрів та порівняємо з однокроковим методом (3.3).

3.5 Ітераційні формули для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь

Нехай задано нелінійне інтегральне рівняння

$$F(x) = x(s) - \int_0^1 K\big(s,t,x(t)\big)\,dt = 0, \tag{3.16}$$

де функції $K(s,t,x)$ і $K_x^{'}(s,t,x)$ неперервні за всіма аргументами, $s \in [0,1]$.

Застосовуючи метод (3.3) для розв'язування (3.16), отримаємо такі формули:

$$\Delta x_{k+1}(s)-\int_0^1 H_k(s,t)\Delta x_{k+1}(t)dt=-\left(x_k(s)-\int_0^1 K(s,t,x_k(t))dt\right), \qquad (3.17)$$
$$x_{k+1}(s)=x_k(s)+\Delta x_{k+1}(s),$$

де

$$H_k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{K(s,t,x_k(t)+a_k(x_{k-1}(t)-x_k(t)))-K(s,t,x_k(t)+b_k(x_{k-1}(t)-x_k(t)))}{a_k(x_{k-1}(t)-x_k(t))-b_k(x_{k-1}(t)-x_k(t))}, & a_k\neq b_k,\\ K'(s,t,x_k(t)+a_k(x_{k-1}(t)-x_k(t))),\ a_k=b_k. & \end{cases}$$

Аналогічно для (3.15) одержимо

$$\Delta x_{k+1}(s)-\int_0^1 H_k(s,t)\Delta x_{k+1}(t)dt=-\left(x_k(s)-\int_0^1 K(s,t,x_k(t))dt\right), \qquad (3.18)$$
$$x_{k+1}(s)=x_k(s)+\Delta x_{k+1}(s),$$

$$\Delta y_{k+1}(s)-\int_0^1 H_k(s,t)\Delta y_{k+1}(t)dt=-\left(x_{k+1}(s)-\int_0^1 K(s,t,x_{k+1}(t))dt\right), \qquad (3.19)$$
$$y_{k+1}(s)=x_{k+1}(s)+\Delta y_{k+1}(s),$$

де

$$H_k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{K(s,t,x_k(t)+a_k(y_k(t)-x_k(t)))-K(s,t,x_k(t)+b_k(y_k(t)-x_k(t)))}{a_k(y_k(t)-x_k(t))-b_k(y_k(t)-x_k(t))}, & a_k\neq b_k,\\ K'(s,t,x_k(t)+a_k(y_k(t)-x_k(t))),\ a_k=b_k. & \end{cases}$$

Як бачимо, застосувавши однокроковий і двокроковий методи для розв’язування нелінійного інтегрального рівняння, на кожній ітерації отримаємо лінійні інтегральні рівняння. Для чисельного розв’язування інтегральних рівнянь у (3.17), (3.18), (3.19) застосовуємо метод квадратур.

3.6 Збіжність ітераційного процесу (3.17)

Нехай простір $X = C[0,1]$. Правильна така теорема.

Теорема 3.4. Нехай $x_0(s) \in C[0,1]$ – початкове наближення,

$$S_0 = \left\{ x(s) \in C[0,1] : \max_{0 \le s \le 1} \left| x(s) - x_0(s) \right| < R \right\}.$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) $\max\limits_{0 \le s \le 1} \left| x_{-1}(s) - x_0(s) \right| = \alpha$;

2) Для ядра $H_0(s,t)$ існує резольвента $G_0(s,t)$ і $\max\limits_{0 \le s \le 1} \int\limits_0^1 \left| G_0(s,t) \right| dt \le C$;

3) $(C+1) \max\limits_{0 \le s \le 1} \left| \int\limits_0^1 K(s,t,x_0(t))\,dt - x_0(s) \right| \le \eta$;

4) Функція $K(s,t,x)$ має поділені різниці першого порядку, які задовольняють умову

$$\max_{0 \le s \le 1} \left| \int_0^1 \frac{K(s,t,x(t)) - K(s,t,y(t))}{x(t) - y(t)} dt - \int_0^1 \frac{K(s,t,u(t)) - K(s,t,v(t))}{u(t) - v(t)} dt \right|$$

$$\le L \left(\max_{0 \le s \le 1} \left| x(s) - u(s) \right| + \max_{0 \le s \le 1} \left| y(s) - v(s) \right| \right),$$

де $x,\ y,\ u,\ v \in S_0$.

Позначимо через

$$m = \max\left\{ \beta L\left(\eta + (a+b)\alpha\right), \beta L(1 + a + b)\eta \right\},\ \beta = C + 1,$$

припустимо, що $|a_k| \le a$, $b_k \le b$ і рівняння

$$u\left(1 - \frac{m}{1 - \beta L\left((2+a+b)u + (a+b)\alpha\right)} \right) - \eta = 0 \qquad (3.20)$$

має хоча б один додатний корінь, причому R – найменший додатний. Якщо

$$\beta L\left((2+a+b)R + (a+b)\alpha\right) < 1,\ M = \frac{m}{1 - \beta L\left((2+a+b)R + (a+b)\alpha\right)} < 1,$$

тоді послідовність $\{x_k\}$, утворена ітераційним процесом (3.17), коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку $x_* \in \overline{S}_0$ рівняння (3.16).

Доведення теореми 3.4 проводять аналогічно до доведення теореми 3.3.

3.7 Чисельні експерименти

Для чисельного дослідження ми використали тестові приклади з [68].

Приклад 3.1. Розширена погано маштабована функція Пауелла

$$
\begin{aligned}
&f_k = 10000 x_k x_{k+1} - 1, && \mathrm{mod}(k,2)=1,\\
&f_k = \exp(-x_{k-1}) - \exp(-x_k) - 1.0001, && \mathrm{mod}(k,2)=0,\\
&\overline{x}_k = 0, \quad \mathrm{mod}(k,2)=1,\\
&\overline{x}_k = 1, \quad \mathrm{mod}(k,2)=0.
\end{aligned}
$$

Приклад 3.2. Тригонометрично–експоненціальна функція

$$
\begin{aligned}
&f_k = 3x_k^3 + 2x_{k+1} - 5 + \sin(x_k - x_{k+1})\sin(x_k + x_{k+1}), && k=1,\\
&f_k = 3x_k^3 + 2x_{k+1} - 5 + \sin(x_k - x_{k+1})\sin(x_k + x_{k+1}) +\\
&\qquad + 4x_k - x_{k-1}\exp(x_{k-1} - x_k) - 3, && 1<k<m,\\
&f_k = 4x_k - x_{k-1}\exp(x_{k-1} - x_k) - 3, && k=m,\\
&\overline{x}_k = 0, \quad k=\overline{1,m}.
\end{aligned}
$$

Приклад 3.3. Дискретизована крайова задача

$$
\begin{aligned}
&h = 1/(m+1)\\
&f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k+1}, && k=1,\\
&f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k-1} - x_{k+1}, && 1<k<m,\\
&f_k = 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k-1}, && k=m,\\
&\overline{x}_k = kh(kh-1), \quad k=\overline{1,m}.
\end{aligned}
$$

Для зручності подамо відомі методи у таблицях 3.1, 3.2, а потім у таких же таблицях наведемо результати обчислень.

Таблиця 3.1 – Однокроковий метод

$b\backslash a$	–1	–0.5	0	0.5	1
–1					м–д Курчатова
–0.5					
0			м–д Ньютона		м–д хорд
0.5					
1	м–д Курчатова		м–д хорд		

Таблиця 3.2 – Двокроковий метод

$b\backslash a$	**–1**	**–0.5**	**0**	**0.5**	**1**
–1					мод. м–д Курчатова
–0.5					
0					різн. м–д $1+\sqrt{2}$
0.5				м–д $1+\sqrt{2}$	
1	мод. м–д Курчатова		різн. м–д $1+\sqrt{2}$		

Зупинка обчислювального процесу відбувалася при виконанні умов $\left\|x_{n+1}-x_n\right\|_\infty \le \varepsilon$ і $\left\|F\left(x_{n+1}\right)\right\|_\infty \le \varepsilon$. Також умова виходу з ітераційного процесу містила обмеження на кількість ітерацій (для передбачення розбіжності методу). Програма була реалізована в середовищі Delphi. Обчислення проводили при різних початкових наближеннях:

1) $x_0 = x_0 \cdot d,\ d = 1,\ 10,\ 100$;
2) $x_{-1} = y_0 = x_0 - 10^r,\ r = -2,\ -4,\ -8$

та при різних значеннях точності ε: $\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-15}$.

При такому виборі x_{-1} та y_0 кількість ітерацій суттєво не змінюється, проте зміна x_0 приводить до збільшення кількості ітерацій, а іноді й до

розбіжності методу. Отримані результати показали, що розмірність задачі на кількість ітерацій суттєво не впливає.

У наступних таблицях подамо кількість ітерацій, затрачених для розв'язування прикладів 3.1 – 3.3 розглянутими методами при різних фіксованих значеннях числових параметрів a та b та при $m=100$, $\varepsilon=10^{-15}$, $x_0=\overline{x}$, $x_{-1}=y_0=x_0-10^{-4}$.

У таблицях 3.3 – 3.5 у лівому стовпці наведено результати отримані однокроковим методом типу хорд, а у правому – двокроковим методом.

Таблиця 3.3а – Приклад 3.1

b \ a	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	–	–	15	14	16	15
–0.5	–	14	13	19	18	13
0	15	13	14	17	19	14
0.5	14	15	17	19	21	17
1	16	18	19	21	22	19
(15)	15	13	14	17	19	14

Таблиця 3.3б – Приклад 3.1

b \ a	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	18	17	16	15	14	16
–0.5	17	16	15	14	13	17
0	16	15	14	13	12	14
0.5	15	14	13	12	14	15
1	14	14	12	13	11	12
(15)	16	15	14	13	12	14

Таблиця 3.4а – Приклад 3.2

a / b	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	–	11	9	8	8	9
–0.5	11	9	8	8	9	8
0	9	8	7	9	9	7
0.5	8	8	9	9	10	9
1	8	9	9	10	10	9
(15)	9	8	7	9	9	7

Таблиця 3.4б – Приклад 3.2

a / b	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	8	8	8	8	7	8
–0.5	8	8	7	7	7	7
0	8	7	7	7	6	7
0.5	8	7	7	6	6	7
1	7	7	6	6	6	6
(15)	8	7	7	7	6	7

Таблиця 3.5а – Приклад 3.3

b \ a	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	6	6	6	5	5	6
–0.5	6	6	5	5	5	5
0	6	5	5	5	6	5
0.5	5	5	5	6	6	5
1	5	5	6	6	6	6
(15)	6	5	5	5	6	5

Таблиця 3.5б – Приклад 3.3

b \ a	–1	–0.5	0	0.5	1	(3.21)
–1	5	5	5	5	5	5
–0.5	5	5	5	5	4	5
0	5	5	5	4	4	5
0.5	5	5	4	4	4	4
1	5	4	4	4	5	4
(15)	5	5	5	4	4	5

Також проведено обчислення при фіксованому одному з параметрів і при змінному іншому параметрі за одним із законів $10^{-p}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|^q$, $10^{-p}\left\|F\left(x_n\right)\right\|^q$, $p = 2,\ 4,\ 6$, $q = 1,\ 2$. Для однокрокового методу найкращим виявився вибір фіксованого параметра нульовим і змінного параметра у вигляді

$$10^{-2}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|^2, \tag{3.21}$$

тобто коли узагальнений метод хорд прямує до методу Ньютона. Серед двокрокових методів найшвидшу збіжність показують методи з одним

фіксованим параметром, який дорівнює одиниці, й іншим змінним параметром, який прямує до нуля. У цьому випадку двокроковий метод прямує до відомого різницевого методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$.

Нижче подано результати для таких інтегральних рівнянь.

Приклад 3.4. [57].

$$x(s)=s-s\int_0^1 \frac{\cos(x(t))}{2}dt. \tag{3.22}$$

Приклад 3.5. [69].

$$x(s)=3+0.6625s+\int_0^1 0.05stx^2(t)dt. \tag{3.23}$$

Приклад 3.6.

$$x(s)=\frac{s}{10}\int_0^1 \frac{1+x^2(t)}{1+t^2}dt. \tag{3.24}$$

Для усіх методів було використано однаковий критерій зупинки ітераційного процесу:

$$\max_{0\le i\le m}\left|x_{k+1}^i-x_{k+1}^i\right|\le\varepsilon \text{ і } \max_{0\le i\le m}\left|F_i(x_{k+1})\right|\le\varepsilon,\ \varepsilon=10^{-10}.$$

Додаткове початкове наближення обирали так: $x_{-1}^i=y_0^i=x_0^i+10^{-4}$, $i=\overline{0,m}$. Для наближеного обчислення інтегралу застосовували формулу трапецій з кроком $h=\frac{1}{m}$

$$\int_0^1 K(s,t,x(t))dt\approx\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}K(s,t_0,x^0)+\sum_{i=1}^{m-1}K(s,t_i,x^i)+\frac{1}{2}K(s,t_m,x^m)\right)$$

де $x^i\approx x(ih)$.

У табл. 3.6 подано кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв’язку інтегрального рівняння (3.22): у лівій колонці – однокроковим методом, у правій – двокроковим. Числові експерименти проводилися при кількості точок інтегрування $m=100$, початкове наближення

$x_0(s)=1.5$, $s\in[0,1]$. Як видно з отриманих результатів, двокрокові методи збігаються швидше, ніж однокрокові, що узгоджується з теоретичними результати.

Таблиця 3.6а – Кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв’язку.

a / b	–1	–0.5	0	0.5	1
–1	7	7	6	6	5
–0.5	7	6	6	5	6
0	6	6	5	6	6
0.5	6	5	6	7	7
1	5	6	6	7	7

Таблиця 3.6а – Кількість ітерацій, потрібних для знаходження наближеного розв’язку.

a / b	–1	–0.5	0	0.5	1
–1	6	6	5	5	5
–0.5	6	5	5	5	5
0	5	5	5	5	5
0.5	5	5	5	5	5
1	5	5	5	5	5

Таблиця 3.7 – Розв'язок рівняння (11) в точці $s=1$ та значення поправки на k–й ітерації.

Номер ітерації	Однокроковий метод $a_k=0,\ b_k=1$		Двокроковий метод $a_k=0,\ b_k=1$	
	$x_k(s),\ s=1$	$\lVert x_k-x_{k-1}\rVert$	$x_k(s),\ s=1$	$\lVert x_k-x_{k-1}\rVert$
0	3	10^{-4}	3	10^{-4}
1	3.98611842	0.98611842	3.98611842	0.98611842
2	3.99981154	0.01369313	4.00000708	0.01388866
3	4.00000710	0.00019556	4.00000714	6.46402709×10^{-8}
4	4.00000714	3.88053692×10^{-8}	4.00000714	1.92587459×10^{-18}
5	4.00000714	1.08443671×10^{-13}		

Знайдемо R, за якого виконуються умови теореми 3.8. Обчислення проведемо для інтегрального рівняння (3.24). Приймемо $x_0(s)=0$, $s\in[0,1]$, $a_k=a=const$, $b_k=b=const$. Ядро інтегрального рівняння (3.17) при $k=0$ і $a\neq b$ набуває вигляду

$$H_0(s,t)=\frac{s}{10\left(1+t^2\right)}\frac{u_0^2(t)-v_0^2(t)}{u_0(t)-v_0(t)}=\frac{s}{10\left(1+t^2\right)}\left(u_0(t)+v_0(t)\right)$$

$$=\frac{s}{1+t^2}\frac{\left(2\cdot x_0(t)+10^{-4}(a+b)\right)}{10}=B\frac{s}{1+t^2}.$$

Якщо

$$\frac{B\ln(2)}{2}<1,$$

то резольвента цього рівняння з ядром $H_0(s,t)$ набуває вигляду

$$G_0(s,t)=\frac{2B}{2-B\ln(2)}\frac{s}{1+t^2}.$$

Обчислимо значення констант, які зазначені в теоремі 3.6 і входять в рівняння (3.20).

1) $\alpha = 10^{-4}$;

2) $\left|\dfrac{2B}{2-B\ln(2)}\right| \max\limits_{0\le s\le 1} \int\limits_0^1 \left|\dfrac{s}{1+t^2}\right| dt \le$;

$$\le \left|\frac{2B}{2-B\ln(2)}\right| \max_{0\le s,t\le 1} \left|\frac{s}{1+t^2}\right| = \left|\frac{2B}{2-B\ln(2)}\right| = C$$

3) $(C+1)\max\limits_{0\le s\le 1}\left|\dfrac{s}{10}\int\limits_0^1 \dfrac{\left(1+x_0^2(t)\right)}{1+t^2}dt - x_0(s)\right| = \eta$;

4) $\dfrac{s}{10}\left\{\int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{x^2(t)-y^2(t)}{x(t)-y(t)}dt - \int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{u^2(t)-v^2(t)}{u(t)-v(t)}dt\right\} =$

$$= \frac{s}{10}\left\{\int_0^1 \frac{x(t)+y(t)}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{u(t)+v(t)}{1+t^2}dt\right\} = \frac{s}{10}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left\{\left(x(t)-u(t)\right)+\left(y(t)-v(t)\right)\right\}dt,$$

$$\max_{0\le s\le 1}\left|\frac{s}{10}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left\{\left(x(t)-u(t)\right)+\left(y(t)-v(t)\right)\right\}dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{10}\max_{0\le s\le 1}\int_0^1 \left|\frac{s}{1+t^2}\right| dt\left(\max_{0\le t\le 1}\left|x(t)-u(t)\right| + \max_{0\le t\le 1}\left|y(t)-v(t)\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{10}\int_0^1 \max_{0\le s,t\le 1}\left|\frac{s}{1+t^2}\right| dt\left(\max_{0\le s\le 1}\left|x(s)-u(s)\right| + \max_{0\le s\le 1}\left|y(s)-v(s)\right|\right).$$

Отже, $L = 0.1$.

Таблиця 3.8 – Значення констант, які зазначені в теоремі 3.8, для методу хорд і методу Курчатова

Позначення	Метод (3.17) з параметрами $a=0$, $b=1$	Метод (3.17) з параметрами $a=-1$, $b=1$
B	0.000010	0
C	0.000001	0
β	1.000001	1
η	0.078540	0.078540
m	0.006169	0.015708

З умови $\beta L\left(\left(2+a+b\right)R+\left(a+b\right)\alpha\right)<1$ отримуємо обмеження на значення радіуса збіжності: для методу хорд – $0<R<3.3333$, для методу Курчатова – $0<R<2.49995$. Розв'язавши рівняння (3.20), знаходимо значення радіуса R як найменший додатний корінь. Для методу хорд отримаємо $R=0.07983$, для методу Курчатова – $R=0.08050$. Також маємо, що $\eta<R$ та $M<1$.

3.8 Висновки

Отже, запропоновано однокроковий і двокроковий двопараметричні ітераційні методи для розв'язування нелінійних рівнянь. Частковими випадками цих методів є низка відомих ітераційних методів. Введення числового параметра дало підстави застосувати єдиний підхід до теоретичного і практичного дослідження різних методів. Проведено теоретичне дослідження однокрокового методу типу хорд. Розглянуто застосування двопараметричних однокрокового і двокрокового методів типу хорд для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Сформульовано теорему про напівлокальну збіжність однокрокового методу типу хорд для розв'язування нелінійного інтегрального

рівняння. На тестових прикладах досліджено вплив параметрів методів на швидкість і величину області збіжності методів і зроблено перевірку виконання умов теореми.

4 АПОСТЕРІОРНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

4.1 Апостеріорні оцінювачі похибок методу скінченних елементів для задач дифузії–адвекції–реакції: лінійні апроксимації на трикутниках

В праці Абрамов–Ліпіна–Шинкаренко–Ямелинець [72] запропоновано спосіб побудови апостеріорного оцінювача похибок (АОП) кусково лінійних апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) для крайових задач зі звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Основною особливістю цього кусково визначеного АОП є можливість обчислення розподілу наближених значень похибок знайденої апроксимації МСЕ послідовним розв’язуванням локальних варіаційних задач про лишок на кожному окремо взятому скінченному елементі поділу. До цих пір для еліптичних крайових задач більшої вимірності подібного результату вдалося досягнути, починаючи з квадратичних апроксимацій МСЕ, див. Квасниця–Шинкаренко [75, 76].

З точки зору компютерного моделювання мета цієї праці – побудувати частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки частинно лінійних апроксимацій на трикутних скінченних елементах поділу двовимірної області в такий спосіб, щоб його значення можна було обчислити на окремо взятому скінченному елементі незалежно від решти елементів поділу.

У зв’язку з цим розділ організований в такий спосіб. У п.4.1.1 ми формулюємо модельну крайову та відповідну їй варіаційну задачі для рівняння дифузії–адвекції–реакції. Для спрощення викладу ми обмежуємося розглядом лише однорідної крайової умови Діріхле, хоча результати нашої побудови АОП залишаються правильними для коректно поставлених задач як з умовами

Неймана, так і змішаними крайовими умовами. Ми наводимо достатні умови однозначної розв'язуваності варіаційної задачі і відзначаємо найважливіші часткові випадки, коли ця задача стає сингулярно збуреною і, отже, важкою для успішного розв'язування класичними схемами МСЕ. В пп. 4.1.2–4 з позицій методу Гальоркіна подано загальну схему дискретизації варіаційної задачі для відшукання апроксимації МСЕ та похибки цієї апроксимації. Тут же показано, що енергетична норма похибки апроксимації співпадає із нормою функціоналу лишку знайденої апроксимації. Знову ж на основі методу Гальоркіна тут сформульовано дискретизовану задачу для відшукання наближень актуальної похибки апроксимації МСЕ. В п.4.1.5 ми завершуємо конструювання загальної схеми наближеного обчислення апостеріорної оцінки похибки апроксимації МСЕ без жодних обмежень на вибір базисів просторів апроксимацій та їхніх доповнень і в п.4.1.6 подаємо детальні обчислення квадратичного АОП для лінійних апроксимацій МСЕ на трикутних скінченних елементах. Тут же приведено основні результати статті – правила відшуковування значень АОП в центрах ваг та правила обчислення енергетичної норми АОП на кожному елементі тріангуляції. П.4.1.7 доповнює теоретичні положення підрозділу результатами числових експериментів, які свідчать про надійність та ефективність запропонованого тут апостеріорного оцінювача похибок апроксимацій МСЕ.

4.1.1 Формулювання задачі та допоміжні результати

Скрізь нижче ми припускаємо, що Ω – обмежена зв'язна область точок $x = (x_1, \dots, x_d)$ евклідового простору R^d, яка має неперервну за Ліпшицем межу $\Gamma \equiv \partial\Omega$.

Розглянемо крайову задачу для рівняння дифузії–адвекції–конвекції

$$\begin{cases} \textit{знайти } u = u(x) \textit{ таку, що} \\ -\nabla.[\mu\nabla u] + \beta.\nabla u + \sigma u = f \quad \textit{в} \quad \Omega \subset R^d, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma \equiv \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

варіаційне формулювання якої має вигляд

$$\begin{cases} \textit{задано } V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega):\ v = 0 \ \ \textit{на} \ \ \Gamma\} \ \textit{та} \\ a_\Omega(w,v) := \int_\Omega [\mu\nabla w.\nabla v + w\beta.\nabla u + \sigma wv]dx, \\ < l_\Omega, v > := \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\ v, w \in V; \\ \textit{знайти} \ \ u \in V \ \ \textit{такий, що} \\ a_\Omega(u,v) = < l_\Omega, v > \quad \forall\ v \in V\ . \end{cases} \tag{4.2}$$

Тут $\nabla u := \{\partial u / \partial x_i\}_{i=1}^d$ та $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$, $\beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^d$,, $\sigma = \sigma(x)$ і $f = f(x)$ – задані функції із такими властивостями:

$$\begin{cases} \mu_{ij}(x) = \mu_{ji}(x), \\ \sum_{i,j=1}^d \mu_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu_0 \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \quad \mu_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R, \\ \nabla.\beta(x) := \sum_{i=1}^d \partial\beta_i(x) / \partial x_i = 0, \\ \sigma(x) \ge 0 \qquad \textit{майже скрізь в } \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\mu_{ij}, \beta_i, \sigma \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \tag{4.4}$$

Можна довести [75], що за умов (4.3), (4.4) білінійна форма $a_\Omega(\,.\,,.\,): V \times V \to R$ варіаційної задачі (4.2) є неперервною $V-$еліптичною і породжує (енергетичну) норму

$$\| v \|_V := \sqrt{a_\Omega(v,v)} \quad \forall v \in V, \tag{4.5}$$

яка еквівалентна на просторі допустимих функцій V нормі $| v |_{1,\Omega} := \sqrt{(\nabla v, \nabla v)}$, точніше,

$$\mu_0 \,|\, v \,|^2_{1,\Omega} \le \| v \|^2_V \le \mu_0 \left[\frac{\| \mu \|_\infty}{\mu_0} + Pe(1+Sh) \right] | \, v \,|^2_{1,\Omega} \quad \forall v \in V, \tag{4.6}$$

де

$$Pe := \frac{\| \beta \|_\infty \operatorname{diam}\Omega}{\mu_0}, \quad Sh := \frac{\| \sigma \|_\infty \operatorname{diam}\Omega}{\| \beta \|_\infty}, \quad Fo := \frac{\mu_0}{\| \sigma \|_\infty (\operatorname{diam}\Omega)^2} = \frac{1}{Pe\,Sh}. \tag{4.7}$$

добре відомі в механіці суцільного середовища критерії подібності Пеклє, Струхаля та Фур'є відповідно,

$$\| \sigma \|_\infty := ess \sup_{x \in \Omega} | \sigma(x) |, \quad \| \beta \|_\infty := \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{d} \| \beta_i \|^2_\infty}, \quad \| \mu \|_\infty := \sqrt{\sum\nolimits_{i,j=1}^{d} \| \mu_{ij} \|^2_\infty}.$$

Зауваження 4.1. Критерії подібності (4.7) природним чином виникають у постановці крайової задачі (4.1), якщо у її рівнянні перейти до нових незалежних змінних вигляду

$$x'_i := x_i / \operatorname{diam}\Omega, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Тоді після масштабування решти даних згідно правил

$$\mu'_{ij} := \mu_{ij} / \mu_0, \quad \beta'_i := \beta_i / \| \beta \|_\infty, \quad \sigma' := \sigma / \| \sigma \|_\infty, \quad f' := f / \| \sigma \|_\infty$$

задача (4.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти } u = u(x') \textit{ таку, що} \\ -\nabla.[\mu' \nabla u] + Pe[\beta'.\nabla u + Sh(\sigma' u - f')] = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega' \subset R^d, \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \textit{на} \;\; \Gamma' \equiv \partial\Omega'. \end{cases} \tag{4.8}$$

Із останнього запису легко зауважити, що крайова задача для рівняння дифузії–адвекції–реакції стає сингулярно збуреною, якщо значення критерію Пеклє $Pe \to \infty$ або\та значення критерію Струхаля $Sh \to \infty$.◊

З огляду на нерівність Буняковського–Шварца та припущення (4.4) лінійний функціонал $l : V \to R$, визначений у варіаційній задачі (4.2), є неперервним або, що еквівалентне, обмеженим. Тому згідно теореми Лакса–

Мільграма–Вишика задача (4.2) коректно поставлена, іншими словами, має єдиний розв'язок $u \in V$ і

$$\| u \|_V \leq \| l \|_*,$$

де $\| . \|_*$ –норма спряженого простору V'.

4.1.2 Дискретизована задача

Скрізь нижче ми припускаємо, що область $\Omega \subset R^d$ поділена на скінченні елементи K так, що результуюча тріангуляція $\Im_h = \{K\}$, $h := \max_{K \in \Im_h} h_K$, $h_K := \operatorname{diam} K$, має властивості:

(i) $\Omega = \bigcup_{K \in \Im_h} K;$

(ii) $K \cap K' = \varnothing \ \ \forall K, K' \in \Im_h : K \neq K';$

(iii) $$\bar{K} \cap \bar{K}' = \begin{cases} S := \{\textit{спільна сторона } K \textit{ та } K'\}, \\ A := \{\textit{спільна вершина } K \textit{ та } K'\}, \\ \varnothing \end{cases} \quad \forall K, K' \in \Im_h. \tag{4.9}$$

Побудувавши в той чи інший спосіб на тріангуляції $\Im_h = \{K\}$ скінченновимірний простір апроксимацій $V_h \subset V, \dim V_h = N(h) = N < +\infty$, ми, наслідуючи процедуру Гальоркіна, дискретизуємо задачу (4.2) перенесенням її розв'язування до цього підпростору:

$$\begin{cases} \textit{задано } \Im_h = \{K\} \textit{ та } V_h \subset V, \dim V_h = N(h) = N < +\infty; \\ \textit{знайти } u_h \in V_h \textit{ такий, що} \\ a_\Omega(u_h, v) = < l_\Omega, v > \quad \forall\, v \in V_h. \end{cases} \tag{4.10}$$

Тепер, вибираючи зручний з точки зору обчислень базис $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$ простору апроксимацій V_h, ми конкретизуємо задачу (4.10) до алгебричного вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано } \Im_h = \{K\} \textit{ та базис } \{\phi_i(x)\}_{i=1}^N \textit{ простору } V_h \subset V; \\ \textit{знайти коефіцієнти } q_m \in R \textit{ розвинення } u_h(x) := \sum_{m=1}^{N(h)} q_m \phi_m(x) \in V_h \\ \textit{такі, що задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь} \\ \qquad \sum_{m=1}^{N(h)} a_\Omega(\phi_m, \phi_i) q_m = < l_\Omega, \phi_i > \quad i = 1, \ldots, N(h). \end{cases} \tag{4.11}$$

Отже, процедура Гальоркіна надає конструктивний спосіб знаходження апроксимації $u_h \in V_h$ розв'язку $u \in V$ варіаційної задачі (4.2), а технологія побудови базису $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$ методом скінченних елементів надає можливості ефективної компютерної реалізації обчислень за цією схемою.

У кожному разі після відшукання апроксимації $u_h \in V_h$ стає актуальним аналіз її похибки

$$e(x) := u(x) - u_h(x) = u(x) - \sum_{m=1}^{N(h)} q_m \phi_m(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.12}$$

За сучасних вимог до методик проведення кваліфікованих обчислювальних експериментів результатами такого аналізу повинні бути апостеріорні оцінки похибок (4.12), характеристики яких надавали б рецепти конструктивного обчислення апроксимацій з наперед заданою точністю.

Нижче ми обговорюємо згадану проблему та її вирішення в контексті можливостей методу скінченних елементів, беручи за основу результати праць [74, 75].

4.1.3 Задача про похибку апроксимації МСЕ

З огляду на варіаційну задачу (4.2) та її дискретизований варіант (4.10) неважко сформулювати варіаційну задачу такого гатунку

$$\begin{cases} \textit{задано поділ } \Im_h = \{K\} \textit{ і обчислена на ньому} \\ \textit{частинами визначена апроксимація } u_h \in V_h; \\ \textit{знайти похибку } e := u - u_h \in E := V \setminus V_h \textit{ таку, що} \\ a_\Omega(e,v) = <\rho(u_h), v> \quad \forall\, v \in E, \\ \textit{де функціонал джерел похибки апроксимації МСЕ} \\ <\rho(w), v> := <l_\Omega, v> - a_\Omega(w,v) > \quad \forall w, v \in V. \end{cases} \tag{4.13}$$

Щойно визначений в задачі (4.13) функціонал можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} <\rho(u_h), v> &= <l_\Omega, v> - a_\Omega(u_h, v) = a_\Omega(u,v) - a_\Omega(u_h, v) \\ &= a_\Omega(u - u_h, v) \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

який приводить до таких висновків щодо його властивостей [75]:

1) $<\rho(u_h), v> = a_\Omega(u - u_h, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h \subset V;$

2) $<\rho(u_h), u - u_h> = a_\Omega(u - u_h, u - u_h) = \|u - u_h\|_V^2.$

Тепер з огляду на визначення норми функціоналу приходимо до оцінки

$$\|\rho(u_h)\|_* = \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|<\rho(u_h), v>|}{\|v\|_V} = \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|a_\Omega(u - u_h, v)|}{\|v\|_V} \le \|u - u_h\|_V,$$

яка разом із (ii) приводить нас до точного значення норми функціоналу похибки обчисленої апроксимації МСЕ

$$\|\rho(u_h)\|_* = \|u - u_h\|_V \qquad \forall h > 0. \tag{4.14}$$

4.1.4 Задача про оцінювач похибки апроксимації МСЕ

Щоб розв’язати задачу про похибку апроксимації МСЕ (4.13), ми знову вдамося до процедури Гальоркіна з використанням деякого скінченновимірного підпростору із простору E:

$$\begin{cases} \textit{задано поділ } \Im_h = \{K\}, \textit{ обчислену на ньому апроксимацію } u_h \in V_h \\ \textit{та підпростір } E_h \subset E := V \setminus V_h, \quad \dim E_h = M(h) < +\infty; \\ \textit{знайти оцінювач похибки } e_h \in E_h \subset E := V \setminus V_h \textit{ такий, що} \\ a_\Omega(e_h, v) = <\rho(u_h), v> \quad \forall\, v \in E_h. \end{cases} \tag{4.15}$$

Задача (4.15) коректно поставлена і на додаток її розв'язок $e_h \in E_h$ (званий як *апостеріорний оцінювач похибки апроксимації* u_h) характеризується властивістю

$$\|e_h\|_V^2 = a_\Omega(e_h, e_h) = <\rho(u_h), e_h> \le \|\rho(u_h)\|_* \|e_h\|_V = \|u - u_h\|_V \|e_h\|_V,$$

звідки

$$\|e_h\|_V \le \|u - u_h\|_V \qquad \forall h > 0. \tag{4.16}$$

Тепер, вибираючи зручний з точки зору обчислень базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{M(h)}$ простору похибок E_h, ми конкретизуємо задачу (4.10) до алгебричного вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано } \Im_h = \{K\} \textit{ та базис } \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{M(h)} \textit{ простору } E_h \subset E; \\ \textit{знайти коефіцієнти } \lambda_m \in R \textit{ розвинення } e_h(x) := \sum_{m=1}^{M(h)} \lambda_m \varphi_m(x) \in E_h \\ \textit{такі, що задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь} \\ \qquad \sum_{m=1}^{M(h)} a_\Omega(\varphi_m, \varphi_i)\lambda_m = <\rho(u_h), \varphi_i> \quad i = 1, \ldots, M(h). \end{cases} \tag{4.17}$$

Цілком зрозуміло, що якість обчисленого в такий спосіб оцінювача $e_h \in E_h$ буде залежати, в першу чергу, від 'повноти' підпростору E_h в просторі $E = V / V_h$. З іншого боку, базис підпростору E_h повинен бути зручним для компютерних обчислень і МСЕ, за своєю суттю, надає можливості будувати 'майже' ортогональні системи базисних функцій на тріангуляціях $\Im_h = \{K\}$. З огляду на цей факт нижче ми подаємо один із таких способів побудови базисних функцій із E та результати виконаних числових експериментів.

4.1.5 Розв'язання задачі про АОП апроксимації МСЕ

Щоб розв'язати задачу (4.15) в економний з погляду обчислень спосіб, обчислимо кількість $card\ \Im_h$ скінченних елементів тріангуляції $\Im_h$ і побудуємо лінійно незалежну систему функцій $\{\varphi_K\}_{K\in\Im_h}$ згідно таких правил:

$$\begin{cases} \varphi_K \in V / V_h, \\ \operatorname{supp} \varphi_K := K \quad \forall K \in \Im_h. \end{cases} \tag{4.18}$$

З огляду на те, що кожна із функцій $\varphi_K \notin V_h$ та їхня множина утворює ортогональну систему в просторі допустимих функцій V, приймемо їх сукупність за базис простору E_h, $\dim E_h := M(h) = card\ \Im_h$. У цьому разі структура шуканого розв'язку $e_h \in E_h$ задачі (4.17) природно окреслюється виразом

$$e_h(x) := \sum\nolimits_{K\in\Im_h} \lambda_K \varphi_K(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{4.19}$$

з невідомими коефіцієнтами $\lambda_K \in \Re$. Останні обчислюються із системи лінійних алгебричних рівнянь (4.17) особливо простої структури – внаслідок природної ортогональності системи функцій $\{\varphi_K\}_{K\in\Im_h}$ її матриця є діагональною. Детальніше, кожне з них має вигляд

$$a_\Omega(\varphi_K, \varphi_K)\lambda_K = <\rho(u_h), \varphi_K> \quad \forall K \in \Im_h \tag{4.20}$$

і коефіцієнти розвинення (4.19) АОП апроксимації $u_h \in V_h$ обчислюються згідно правила:

$$\lambda_K = \frac{<\rho(u_h), \varphi_K>}{a_\Omega(\varphi_K, \varphi_K)} = \frac{<l_\Omega, \varphi_K> - a_\Omega(u_h, \varphi_K)}{a_\Omega(\varphi_K, \varphi_K)} \qquad \forall K \in \Im_h. \tag{4.21}$$

Теорема 4.1 про апостеріорний оцінювач похибки апроксимацій МСЕ.

На тріангуляції $\Im_h = \{K\}$, $h_K := diam\, K$, $h := \max_{K\in\Im_h} h_K$, *визначимо*

(i) *звуження апроксимації* $u_h \in V_h$ *розв'язку* $u \in V$ *варіаційної задачі* (4.2) *вигляду*

$$u_K(x) := u_h(x) \quad \forall x \in \overline{K} \quad \forall K \in \Im_h ; \tag{4.22}$$

(ii) *декомпозицію білінійної форми і лінійного функціоналу задачі (4.2)*

$$\begin{cases} a_\Omega(w,v) = \sum\limits_{K \in \Im_h} \int_K [\mu \nabla w . \nabla v + w\beta . \nabla u + \sigma w v] dx =: \sum\limits_{K \in \Im_h} a_K(w,v), \\ < l_\Omega, v >= \sum\limits_{K \in \Im_h} \int_K f v \, dx =: \sum\limits_{K \in \Im_h} < l_K, v > \qquad \forall\ v, w \in V . \end{cases} \tag{4.23}$$

Нехай на додаток до цього для оцінки похибки апроксимації МСЕ $e := u - u_h \in E := V \setminus V_h$ *використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач у вигляді розвинення:*

$$e_h(x) := \sum\nolimits_{K \in \Im_h} \lambda_K \varphi_K(x) =: \sum\nolimits_{K \in \Im_h} e_K(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{4.24}$$

за системою функцій $\{\varphi_K\}_{K \in \Im_h}$ *з властивостями (4.18).*

Тоді коефіцієнти λ_K *оцінювача похибки апроксимації МСЕ (4.24) обчислюються в процесі послідовного перегляду елементів тріангуляції згідно правила*

$$\lambda_K = \frac{< \rho(u_h), \varphi_K >}{a_K(\varphi_K, \varphi_K)} = \frac{< l_K, \varphi_K > - a_K(u_h, \varphi_K)}{\| \varphi_K \|_V^2} \quad \forall K \in \Im_h . \tag{4.25}$$

Більше цього, розподіл енергетичних норм апостеріорного оцінювача похибок між елементами тріангуляції описується виразами

$$\begin{aligned} \| e_K \|_V &= < \rho(u_h), \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K > \\ &= | < l_K, \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K > - a_K(u_h, \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K) | \quad \forall K \in \Im_h . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Доведення. Оскільки кожна базисна функція φ_K простору апроксимацій похибки E_h набуває згідно визначення (4.18) ненульових значень лише на

скінченному елементі K, то (4.21)–(4.23) безпосередньо приводять до правильності твердження (4.25).

Більше цього, ланцюжок обчислень із застосуванням (4.25)

$$\begin{aligned} \| e_h \|_V^2 &= \| \sum\nolimits_{K\in\Im_h} e_K \|_V^2 = \sum\nolimits_{K\in\Im_h} \| e_K \|_V^2 = \sum\nolimits_{K\in\Im_h} \lambda_K^2 \| \varphi_K \|_V^2 \\ &= \sum\nolimits_{K\in\Im_h} \frac{|< l_K, \varphi_K > - a_K(u_h, \varphi_K)|^2}{\| \varphi_K \|_V^2} \\ &= \sum\nolimits_{K\in\Im_h} |< l_K, \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K > - a_K(u_h, \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K)|^2 \end{aligned} \tag{4.27}$$

доводить (4.26).▲

Таким чином, щойно доведена теорема вказує загальний спосіб наближеного обчислення апостеріорної оцінки похибки апроксимації МСЕ без жодних обмежень на вибір базисів скінченновимірних просторів апроксимацій V_h та їхніх доповнень E_h.

Тепер ми подамо процедуру побудови АОП за допущення, що ми розглядаємо двовимірний випадок ($d = 2$) задачі (4.1) з поділом $\Im_h = \{K\}$, елементами K якого будуть трикутники. Щоб мати можливість обговорити цю процедуру в деталях, ми будемо опиратися на найпростіші способи побудови інтерполяційних базисів просторів апроксимацій V_h.

4.1.6 Деталізована структура АОП на трикутнику

4.1.6.1 Лінійні апроксимації МСЕ на трикутнику.

Скрізь нижче ми припускаємо, що область $\Omega \subset \Re^2$ точок $x = (x_1, x_2)$ поділена на трикутні елементи $K = A_i A_j A_k$ так, що одержана тріангуляція $\Im_h = \{K\}$ має властивості (i)–(iii) та через $\mathrm{A}_h = \{A_i\}_{i=1}^n$ і $\mathrm{E}_h = \{S_m\}$ позначатимо множини всіх її вершин $A_{i:} := (x_1^i, x_2^i)$ і ребер S_m відповідно. Припустимо також,

що для розв'язку $u \in V = H_0^1(\Omega)$ задачі (4.2) обчислено апроксимацію МСЕ $u_h \in V_h := \{v \in C(\Omega) : v|_K \in \mathrm{P}_1(K) \quad \forall K \in \Im_h\}$ вигляду:

$$u_h(x)\big|_K = \sum_{m=i,j,k} u_m L_m(x) \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in K \quad \forall K \in \Im_h \,, \tag{4.28}$$

де $\mathrm{P}_1(K)$ – простір поліномів першого порядку, визначених на трикутнику K, функції $L_m = L_m(x)$ є барицентричними координатами трикутника $K = A_i A_j A_k$,

$$\begin{cases} L_i(x) := \dfrac{a_i + b_i x_1 + c_i x_2}{2|K|}, \\ a_i := x_1^k x_2^j - x_1^j x_2^k,\ b_i := x_2^j - x_2^k,\ c_i := -x_1^j + x_1^k, \qquad i \to j \to k \to i\,. \end{cases} \tag{4.29}$$

4.1.6.2 Апостеріорний оцінювач похибки на трикутнику.

Для оцінки точності апроксимації (4.28) на трикутнику K будемо шукати апостеріорний оцінювач

$$e_h(x) := \sum\nolimits_{K \in \Im_h} e_K(x) = \sum\nolimits_{K \in \Im_h} \lambda_K \varphi_K(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{4.30}$$

її похибки $e = u(x) - u_h(x)$ у вигляді квадратичного полінома:

$$e_K(x) := \lambda_K \varphi_K(x) \tag{4.31}$$

такої структури

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \varphi_K := K, \\ \varphi_K(x) := 3[L_i(x)L_j(x) + L_j(x)L_k(x) + L_k(x)L_i(x)] \quad \forall x \in K \quad \forall K \in \Im_h\,, \end{cases} \tag{4.32}$$

$\lambda_K \in R$ – коефіцієнт цього полінома, величина якого співпадає із невідомим значенням оцінювача в центрі ваги трикутника $x^K = \left(\frac{1}{3}(x_1^i + x_1^j + x_1^k), \frac{1}{3}(x_2^i + x_2^j + x_2^k)\right)$, іншими словами:

$$\lambda_K = e_K(x^K) \quad \forall K \in \Im_h . \tag{4.33}$$

Зауваження 4.2. Оскільки $\varphi_K(A_m) = \varphi_K(x_1^m, x_2^m) = 0,\ m = i, j, k,$ то вибір структури апостеріорного оцінювача похибок у вигляді (4.30) передбачає, що вузлові значення апроксимації МСЕ $u_m = u_h(x_1^m, x_2^m) = 0,\ m = i, j, k,$ обчислено на цей час із достатною точністю. ◊

4.1.6.3 Обчислення характеристик АОП на трикутнику

Тепер ми готові конкретизувати правила обчислення коефіцієнтів λ_K розвинення оцінювача $e_h(x)$, а саме, приймаючи до уваги (4.25) та(4.28), для кожного $K \in \Im_h$ маємо

$$\lambda_K = \frac{< l_K, \varphi_K > - a_K(u_h, \varphi_K)}{a_K(\varphi_K, \varphi_K)} = \frac{< l_K, \varphi_K > - \sum\limits_{m=i,j,k} a_K(L_m, \varphi_K) u_m}{a_K(\varphi_K, \varphi_K)} =$$
$$= \frac{\int_K f \varphi_K dx_1 dx_2 - \sum\limits_{m=i,j,k} u_m \int_K [\mu \nabla L_m . \nabla \varphi_K + \varphi_K \beta . \nabla L_m + \sigma L_m \varphi_K] dx_1 dx_2}{\int_K [\mu \nabla \varphi_K . \nabla \varphi_K + \varphi_K \beta . \nabla \varphi_K + \sigma \varphi_K \varphi_K] dx_1 dx_2}. \tag{4.34}$$

Важливі властивості базисних функцій вибраних підпросторів V_h та E_h подано наступними лемами.

Лема 4.1 *про інтегральні характеристики базисної функції.*

Нехай базисна функція φ_K *на трикутнику* $K = A_i A_j A_k$ *визначена виразом* (4.32).

Тоді будуть правильними такі твердження стосовно її інтегральних характеристик:

1. $\int\limits_K \varphi_K dxdy = \frac{3}{4}|K|;$
2. $\int\limits_K \varphi_K^2 dxdy = \frac{9}{15}|K|;$

3. $\int\limits_K L_m \varphi_K dxdy = \frac{3}{12}|K| \quad m = i, j, k.$

Доведення правильності вищенаведених тверджень виконується безпосереднім застосуванням добре відомого правила обчислення інтегралів від добутку степенів барицентричних координат вигляду

$$\int\limits_K L_i^r L_j^s L_k^t dxdy = 2|K| \frac{r!s!t!}{(r+s+t+2)!}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad r,s,t \geq 0 . \blacktriangle \qquad (4.35)$$

Лема 4.2 *про інтегральні характеристики похідних базисної функції.*

Якщо виконано умови попередньої леми, то будуть правильними такі твердження:

$$\int_K \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_K dx_1 dx_2 = \int_K \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_K dx_1 dx_2 = 0 , \qquad (4.36)$$

$$\int_K |\nabla \varphi_K|^2 \, dx_1 dx_2 = \int_K \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_K \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_K \right)^2 \right] dx_1 dx_2 = \frac{9}{48|K|} \sum_{m=i,j,k} (b_m^2 + c_m^2) , \qquad (4.37)$$

$$\int_K \varphi_K \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_K dx_1 dx_2 = \int_K \varphi_K \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_K dx_1 dx_2 = 0 \qquad \forall K \in \Im_h . \qquad (4.38)$$

Доведення. Безпосередні обчислення на підставі означення (4.32) показують, що

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_K = 3 \frac{\partial}{\partial x_1} (L_i L_j + L_j L_k + L_k L_i) = -\frac{3}{2|K|} \sum_{m=i,j,k} b_m L_m ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_K = -\frac{3}{2|K|} \sum_{m=i,j,k} c_m L_m ,$$

оскільки

$$\sum_{m=i,j,k} b_m = 0 = \sum_{m=i,j,k} c_m .$$

Тому з огляду на (4.35), наприклад, знайдемо, що

$$\int_K \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_K dx_1 dx_2 = -\frac{3}{2|K|}\sum_{m=i,j,k} b_m \int_K L_m dx_1 dx_2 = -\frac{3}{2|K|}\sum_{m=i,j,k} b_m \frac{2|K|}{3!} = -\frac{1}{2}\sum_{m=i,j,k} b_m = 0\,.$$

Подібним чином, після невеликої алгебри

$$\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_K\right)^2 dx_1 dx_2 = \left(\frac{3}{2|K|}\right)^2 \int_K \left(\sum_{m=i,j,k} b_m L_m\right)^2 dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{9}{2|K|}\frac{1}{4!}\left(2b_i^2 + 2b_i b_j + 2b_j^2 + 2b_j b_m + 2b_m^2 + 2b_m b_i\right) = \frac{9}{48|K|}\left(\sum_{m=i,j,k} b_m^2\right).$$

Далі, із використанням інтегрування частинами

$$\int_K \varphi_K \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_K dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int_K \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_K^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int_{\partial K} \varphi_K^2 \cos(n, x_1) d\gamma =$$

$$= -\frac{b_k}{|A_i A_j|}\int_{A_i}^{A_j} \varphi_K\big|_{A_i A_j} d\gamma - \frac{b_i}{|A_j A_k|}\int_{A_j}^{A_k} \varphi_K\big|_{A_j A_k} d\gamma - \frac{b_j}{|A_k A_i|}\int_{A_k}^{A_i} \varphi_K\big|_{A_k A_i} d\gamma = (4.39)$$

$$= -\frac{b_k}{|A_i A_j|}\int_{A_i}^{A_j} L_i L_j d\gamma - \frac{b_i}{|A_j A_k|}\int_{A_j}^{A_k} L_j L_k d\gamma - \frac{b_j}{|A_k A_i|}\int_{A_k}^{A_i} L_k L_i d\gamma = 0\,,$$

де $n = (n_1, n_2)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂K; наприклад, на стороні $A_i A_j \in \partial K$ його компоненти знаходяться згідно правила

$$n_1 := \cos(n, x_1)\big|_{A_i A_j} = -\frac{b_m}{|A_i A_j|}, \quad n_2 := \cos(n, x_2)\big|_{A_i A_j} = -\frac{c_m}{|A_i A_j|}. \qquad (4.40)$$

Нарешті, після застосування формул вигляду

$$\int_{A_i}^{A_j} L_i L_j d\gamma = \tfrac{1}{6}\,|\,A_i A_j\,|$$

до (4.39) приходимо до результату, задекларовано в твердженні (4.38).▲

Тепер з огляду на доведені леми приходимо до такого наслідку теореми 4.1.

Теорема 4.2 про АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ.

Нехай виконано гіпотези теореми 4.1, леми 4.1 і на додаток до цього на кожному із трикутників тріангуляції обчислено лінійну апроксимацію $u_h = u_h(x)$ *вигляду* (4.28). *Тоді коефіцієнти* λ_K *оцінювача похибки апроксимації МСЕ (4.24) обчислюються в процесі послідовного перегляду елементів тріангуляції* $\Im_h = \{K\}$ *згідно правила*

$$\begin{aligned}\lambda_K \equiv e_h(x_K) &= \frac{< l_K, \varphi_K > - a_K(u_h, \varphi_K)}{\| \varphi_K \|_V^2} \\ &\cong 2|K| \frac{6|K| f - \sum_m u_m [3(\beta_1 b_m + \beta_2 c_m) + 2|K|\sigma]}{\mu \sum_m (b_m^2 + c_m^2) + \frac{16}{5}|K|^2 \sigma}\Big|_{x=x^K} \quad \forall K \in \Im_h .\end{aligned} \tag{4.41}$$

Більше цього, розподіл енергетичних норм апостеріорного оцінювача похибок між елементами тріангуляції описується виразами

$$\begin{aligned}\| e_K \|_V^2 &= < \rho(u_h), \| \varphi_K \|_V^{-1} \varphi_K > \\ &\cong 3|K| \frac{\left\{ |K| f - \frac{1}{6} \sum_m u_m [3(\beta_1 b_m + \beta_1 c_m) + 2|K|\sigma] \right\}^2}{\mu \sum_m u_m (b_m^2 + c_m^2) + \frac{16}{5}|K|^2 \sigma}\Big|_{x=x^K} \quad \forall K \in \Im_h .\end{aligned} \tag{4.42}$$

Доведення. Повертаючись до подання коефіцієнтів розвинення АОП у вигляді (4.34), наші міркування стосовно обчислення інтегралів на трикутнику K будуть грунтуватися на наближеннях із послідовним використанням теореми про середнє і результатів лем 4.1 та 4.2, наприклад,

$$< l_K, \varphi_K > = \int_K f \varphi_K dx_1 dx_2 \cong f(x^K) \int_K \varphi_K dx_1 dx_2 = \frac{1}{4}|K| f(x_1^K, x_2^K) \equiv \frac{1}{4}|K| f|_{x=x^K} . \tag{4.43}$$

У тій же манері,

$$\begin{aligned}\int_K \mu \nabla L_m . \nabla \varphi_K \, dx_1 dx_2 &\cong \mu(x^K) \int_K \nabla L_m . \nabla \varphi_K \, dx_1 dx_2 = \\ &= \mu(x^K) \frac{1}{2|K|} [b_m \int_K \frac{\partial}{\partial x} \varphi_K \, dx_1 dx_2 + c_m \int_K \frac{\partial}{\partial x} \varphi_K \, dx_1 dx_2] = 0 ,\end{aligned}$$

$$\int_K \sigma L_m \varphi_K \, dx_1 dx_2 \cong \sigma(x^K) \int_K L_m \varphi_K \, dx_1 dx_2 = \tfrac{1}{12}|K| \sigma(x^K) ,$$

$$\int_K \varphi_K \beta.\nabla L_m \, dx_1 dx_2 \equiv \frac{1}{2|K|}[\beta_1(x^K) b_m \int_K \varphi_K \, dx_1 dx_2 + \beta_2(x^K) c_m \int_K \varphi_K \, dx_1 dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2|K|}[\beta_1(x^K) b_m + \beta_2(x^K) c_m] \frac{1}{4}|K| =$$
$$= \tfrac{1}{8}[\beta_1(x^K) b_m + \beta_2(x^K) c_m].$$

Підсумовуючи виконані обчислення, приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} a_K(L_m, \varphi_K) &= \int_K [\mu \nabla L_m.\nabla \varphi_K + \varphi_K \beta.\nabla L_m + \sigma L_m \varphi_K] dx_1 dx_2 \\ &\cong \tfrac{1}{8}[\beta_1(x^K) b_m + \beta_2(x^K) c_m] + \tfrac{1}{12}|K| \sigma(x^K) \end{aligned} \tag{4.44}$$

і

$$\begin{aligned} a_K(\varphi_K, \varphi_K) \equiv \| \varphi_K \|_V^2 &= \int_K [\mu \nabla \varphi_K.\nabla \varphi_K + \varphi_K \beta.\nabla \varphi_K + \sigma \varphi_K \varphi_K] dx_1 dx_2 \\ &\cong \frac{1}{|48K|} \mu(x^K) \sum_m (b_m^2 + c_m^2) + \tfrac{1}{15} |K| \sigma(x^K). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Нарешті, підставивши (4.43)–(4.45) до (4.25) та (4.26) після невеликої алгебри прийдемо до рівностей (4.41) та (4.42).▲

Зауваження 4.3. Якщо коефіцієнти і права частина рівняння дифузії–адвекції–реакції задачі (4.1) є сталими на скінченному елементі K, то наближені значення складових апостеріорного оцінювача похибок в (4.41) та (4.42) набувають своїх точних величин.

4.1.7 Результати обчислювальних експериментів

В наших експериментах за модельні задачі вибрано крайові задачі Діріхле

1. з *рівнянням Гельмгольца* ($\sigma < 0$), яке описує амплітуди усталених вимушених коливань із заданою круговою частотою $\omega = \sqrt{-\sigma}$; з великими значеннями таких частот (більших від перших резонансних) розв'язки цього рівняння мають складні структури, що можуть бути задовільно відтворені лише на достатньо густих тріангуляціях скінченних елементів;

більш точно, достатньою умовою стійкості для вжитих нами частинами лінійних апроксимацій МСЕ є така:

$$-\sigma h \le 1; \tag{4.46}$$

2. з *рівнянням дифузії–реакції* ($\sigma > 0$), яке описує, зокрема, хімічні реакції першого порядку, наприклад, розпад радіонуклідів; за умови, що $\sigma \to \infty$, розв'язки таких задач містять так звані примежеві шари – тонкі прикордонні зони, в яких їхні градієнти досягають величезних значень.

Таким чином, розв'язування обраних крайових задач апріорі складає неординарне випробування як самим класичним схемам МСЕ, так і аналізованим тут апостеріорним оцінювачам похибок їхніх апроксимацій.

У цьому зв'язку ми, в першу чергу, обчислюємо апроксимації МСЕ на послідовності регулярно згущуваних сіток $\Im_h = \{K\}$ з трикутних елементів, і після цього знаходимо порядки швидкості збіжності їхніх характеристик. Наприклад, порядок швидкості збіжності АОП e_h в нормі простору $H^1(\Omega)$ ми оцінюємо згідно такого правила

$$P[H^1(\Omega), e_h^{ij}] := \log_2 \frac{\| e_h^{ij} \|_{1,\Omega} - \| e_{h/2}^{ij} \|_{1,\Omega}}{\| e_{h/2}^{ij} \|_{1,\Omega} - \| e_{h/4}^{ij} \|_{1,\Omega}}. \tag{4.47}$$

4.1.7.1 Сингулярно збурена задача з рівнянням Гельмгольца

Нижче подано результати обчислень, див. таблиця 4.2, 4.3, одержані розв'язуванням крайової задачі (4.1) з даними, що винесені до таблиця 4.1.

Таблиця 4.1 – Дані крайової задачі

μ	$\beta = (\beta_1, \beta_2)$	σ	$f(x, y)$	Ω
$\{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^2$	(0,0)	–10	$100x^2y^2$	$(-1,+1)\times(-1,+1)$

Як можна зауважити після перегляду перших рядків таблиця 4.2, монотонна збіжність середньоквадратичної норми кусково лінійних апроксимацій МСЕ розпочинається із третього кроку згущення (поділом кожного трикутника на чотири подібні однакової площі), тріангуляція на якому налічує 256 трикутників, $\mathrm{card}\,\Im_h = 256, h = 1/8$. Це свідчить про неспроможність просторів кусково лінійних апроксимацій V_h меншої вимірності відтворювати структуру шуканого розв'язку розглядуваної задачі.

Принагідно відзначимо, що відсутність монотонної збіжності певної характеристики апроксимацій не дозволяє скористатися правилом (4.47) для обчислення її швидкості збіжності. Цим пояснюється наявність деяких незаповнених клітинок двох останніх колонок таблиця 4.2 і, отже, вірогідними значеннями порядків швидкості збіжності можна вважати ті, що відповідають $card\,\Im_h \geq 16384$ і такі, що

$$P[L^2(\Omega), u_h] \cong P[H^1(\Omega), u_h] \cong 2. \tag{4.48}$$

Другий порядок збіжності послідовності кусково лінійних апроксимацій МСЕ передбачають апріорні оцінки теорії МСЕ в нормі простору $H := L^2(\Omega)$. В нормі простору $W := H^1(\Omega)$ на відміну від (4.48) ця теорія передбачає перший порядок збіжності і цей факт вимагає додаткового пояснення.

В той же час дані таблиця 4.3 показують стійку тенденцію прямування показників швидкості збіжності апостеріорних оцінювачів похибки до одиниці, що цілком відповідає нашим очікуванням і говорить про надійність аналізованого тут АОП.

Таблиця 4.2 – Збіжність кусково лінійних апроксимацій МСЕ, обчислених на послідовності рівномірно згущуваних сіток трикутних скінченних елементів; тут $H := L^2(\Omega)$, $W := H^1(\Omega)$

$card\,\Im_h$	$nod\,\Im_h$	$\|u_h\|_H$	$\|u_h\|_W$	$P[H,u_h]$	$P[W,u_h]$
16	13	3.12530	9.29378	–	–
64	41	1.63183	5.90272	–	–
256	145	1.53647	6.28932	3.97	–
1024	545	1.54065	6.55562	–	0.54
4096	2113	1.54364	6.63797	0.48	1.69
16384	8321	1.54451	6.65992	1.78	1.91
65536	33025	1.54473	6.66551	1.98	1.97

Таблиця 4.3 – Збіжність АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ, обчислених на послідовно згущуваних рівномірних сітках із трикутних скінченних елементів

$card\,\Im_h$	$\|e_h\|_V$	$\max\limits_{K\in\Im_h}\|e_K\|_V$	$P[V,e_h]$
64	0.65622	0.16187	–
256	0.25143	0.05537	–
1024	0.05929	0.00801	2.41
4096	0.01460	0.00109	2.10
16384	0.00364	0.00014	2.03
65536	0.00091	0.00002	2.01

4.1.7.2 Сингулярно збурена задача з рівнянням дифузії–реакції.

Нижче ми аналізуємо результати обчислень, одержані розв'язуванням задачі (4.1) з даними, взятими із таблиця 4.4. Ця задача є сингулярно збуреною з $Sh = 10^3$.

Таблиця 4.4 – Дані крайової задачі

$\mu(x,y)$	$\beta_1(x,y) = \beta_2(x,y)$	$\sigma(x,y)$	$f(x,y)$
0.001	0	1	1

В таблиця 4.5 та 4.6 подано характеристики збіжності норм кусково лінійних апроксимацій та їхніх апостеріорних оцінювачів похибок.

Таблиця 4.5 – Збіжність кусково лінійних апроксимацій МСЕ, обчислених на послідовності рівномірно згущуваних сіток трикутних скінченних елементів; тут $H := L^2(\Omega)$, $W := H^1(\Omega)$

$card\,\Im_h$	$nod\,\Im_h$	$\|u_h\|_H$	$\|u_h\|_W$	$P[H,u_h]$	$P[W,u_h]$
16	13	1.7255	6.13626	–	–
64	41	1.81443	8.24078	–	–
256	145	1.86567	9.76355	0.80	0.47
1024	545	1.89128	10.32196	1.00	1.45
4096	2113	1.90172	10.75257	1.29	0.37
16384	8321	1.90455	11.04272	1.88	0.57
65536	33025	1.90522	11.14424	2.08	1.52

Таблиця 4.6 – Збіжність АОП кусково лінійних апроксимацій МСЕ, обчислених на послідовно згущуваних рівномірних сітках із трикутників

$card\,\Im_h$	$\| e_h \|_V$	$\max\limits_{K\in\Im_h} \| e_K \|_V$	$P[V, e_h]$
64	3.45024	0.50412	–
256	3.18029	0.22297	–
1024	2.27892	0.07607	0.48
4096	1.05555	0.01700	1.11
16384	0.33491	0.00269	1.66
65536	0.08976	0.00036	1.90

4.1.8 Висновки та заключні зауваження

У цьому розділі викладена теоретична основа концепції побудови апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) для кусково–визначених апроксимацій МСЕ розв’язку крайових задач дифузії–адвекції–реакції. Головним атрибутом цієї концепції є здатність класичної схеми Гальоркіна аналізувати похибку апроксимації тільки на вибраному скінченому елементі крім інших елементів триангуляції. Такий підхід до побудови АОП детально продемонстровано для двовимірного випадку, коли потрібний АОП має вигляд квадратичного полінома з нульовими значеннями у вершинах трикутного скінченного елемента, і є апроксимацією МСЕ уточненого розв’язку задачі на цьому скінченному елементі. За припущення, що коефіцієнти рівняння дифузії–адвекції–реакції є постійними на кожному трикутнику, знаходимо розподіли енергетичної норми на кожному скінченному елементі і точкові значення АОП в центрах мас цих скінченних елементів. Властивості пропонованих АОП доповнюються даними обчислювальних експериментів.

4.2 Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини

Даний підрозділ присвячений побудові та аналізу однокрокової рекурентної схеми (ОРС) інтегрування в часі поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній ньютонівській рідині. В основу згаданої схеми покладено змішану варіаційну задачу для системи лінеаризованих рівнянь гідротермодинаміки у термінах переміщення і температури та процедура Петрова–Гальоркіна з покроковою частинами квадратичною апроксимацією зміщень і частинами лінійною апроксимацією температури. З огляду на обчислювальні аспекти відзначено, що розв'язування системи рекурентних рівнянь ОРС еквівалентне відшуканню сідлової точки певного квадратичного функціоналу. Для аналізу стійкості ОРС використано рівняння балансу енергії дискретизованої задачі і подано достатній критерій безумовної її стійкості. Апроксимативність ОРС охарактеризовано апостеріорними оцінками похибок, які з огляду на теорему Лакса–Філіпова і встановлюють порядки швидкості збіжності пропонованої схеми

4.2.1 Початково–крайова та відповідна їй варіаційна задача акустики в термінах зміщень та температури

З огляду на гіпотези акустичного наближення руху в'язкої теплопровідної рідини розглянемо лінеаризовану початково–крайову задачу в термінах зміщень та температури такого ґатунку [85]:

$$
\begin{cases}
\textit{знайти вектор акустичних зміщень } \mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^{d} \\
\textit{та приріст температури } \theta = \theta(\mathbf{x},t) \textit{ такі, що задовольняють рівняння} \\
\rho u_i'' - \sigma_{ij,j}(\mathbf{u},\theta) = 0, \\
\sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta) := [-\pi(\mathbf{u},\theta) + \zeta e_{ij}(\mathbf{u}')]\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}(\mathbf{u}'), \\
\pi(\mathbf{u},\theta) := c^2 \rho \gamma^{-1}[-\nabla.\mathbf{u} + \alpha\theta],\ e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\
\rho c_v \theta_0^{-1}\theta' + \nabla.\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) = 0, \\
\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) := -\chi\nabla(\theta_0^{-1}\theta) + \alpha c^2 \rho \gamma^{-1}\mathbf{u}' \qquad \textit{в } \Omega \times (0,T], \\
\textit{крайові умови} \\
\mathbf{u} = 0 \ \textit{ на } \Gamma_u \times [0,T], \Gamma_u \subset \Gamma, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta) n_j = \hat{\sigma}_i \ \textit{ на } \Gamma_\sigma \times [0,T],\ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\
\theta = 0 \ \textit{ на } \Gamma_\theta \times [0,T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \quad \mathbf{n}.\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) = \hat{q} \ \textit{ на } \Gamma_q \times [0,T],\ \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\theta, \\
\textit{та початкові умови} \\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}'|_{t=0} = \boldsymbol{\upsilon}_0,\ \theta|_{t=0} = \theta_0 \qquad \textit{в } \Omega.
\end{cases}
\tag{4.49}
$$

Тут і далі ми припускаємо, що рідина в кожен момент часу $t \in [0,T],\ 0 < T < +\infty$, займає обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ, одиничний вектор зовнішньої нормалі до якої оηписується вектором $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^{d},\ n_i := \cos(\mathbf{n}, x_i)$, на додаток $w' := \partial w / \partial t,\ w_{,i} := \partial w / \partial x_i,\ \ \nabla.\mathbf{u} := \partial u_i / \partial x_i$, за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d (в застосуваннях $d = 1,2$ або 3). Символами $\{\sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta)\}_{i,j=1}^{d}, \{e_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^{d}$ ми позначаємо тензор напружень та деформацій, $\pi(\mathbf{u},\theta)$ – акустичний тиск, δ_{ij} – символ Кронекера.

Фізичні характеристики рідини характеризуються густиноc_vю маси ρ, коефіцієнтами теплоємності при постійному об’ємі та при постійному тиску c_π, $\gamma = c_\pi / c_v$, коефіцієнтом теплопровідності χ, швидкістю поширення звуку c, коефіцієнтом температурного розширення α, коефіцієнтами зсувної та об’ємної в’язкості та ζ відповідно. За деталями побудови цієї моделі див., напр. [85–88].

Нижче нам буде потрібним варіаційне формулювання задачі акустики (4.49) такої структури:

$$\begin{cases} \textit{задано } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V},\ \boldsymbol{\upsilon}_0 \in \mathbf{H},\ \theta_0 \in G,\ (l,\mu) \in L^2(0,T;\mathbf{V}' \times G'); \\ \textit{знайти пару } \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u},\theta) \in L^2(0,T;\mathbf{V} \times G) \textit{ таку, що} \\ m(\mathbf{u}''(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) - b(\theta(t),\mathbf{v}) = < l(t),\mathbf{v} >, \\ s(\theta'(t),g) + k(\theta(t),g) + b(g,\mathbf{u}'(t)) = < \mu(t),g > \qquad \forall t \in (0,T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \boldsymbol{\upsilon}_0,\mathbf{v}) = 0,\ a(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0,\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \qquad s(\theta(0) - \theta_0,g) = 0 \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{4.50}$$

Не вдаючись до деталей загальновживаної техніки побудови варіаційних задач (див., напр. [82]), відзначимо, що

(i) неперервні симетричні білінійні форми

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \int_\Omega \rho \mathbf{u}.\mathbf{v} dx \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{H} := [L^2(\Omega)]^d, \\ s(\theta,g) &:= \int_\Omega \rho c_v \theta_0^{-1} \theta g dx \quad \forall\ \theta,g \in H := L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{4.51}$$

є скалярними добутками на просторах H та $\mathbf{H}$ відповідно і, як наслідок, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} &:= \sqrt{m(\mathbf{v},\mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \|g\|_H &:= \sqrt{s(g,g)} \quad \forall\ \theta \in H, \end{aligned} \tag{4.52}$$

еквівалентні нормам просторів $[L^2(\Omega)]^d$ та $L^2(\Omega)$ відповідно;

(ii) подібно, неперервні симетричні білінійні форми

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \int_\Omega [2\eta e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + \zeta(\nabla.\mathbf{u})(\nabla.\mathbf{v})] dx \\ &\qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \ \textit{на}\ \Gamma_{\mathbf{u}}\}, \\ k(\theta,g) &:= \theta_0^{-1} \int_\Omega \chi \theta_{,i}\, g_{,i}\, dx \qquad \forall \theta,g \in G := \{g \in H^1(\Omega) : g = 0 \ \textit{на}\ \Gamma_\theta\} \quad , \end{aligned} \tag{4.53}$$

є скалярними добутками на просторах $\mathbf{V}$ та $\mathbf{G}$ відповідно і, як наслідок, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{V}} := \sqrt{a(\mathbf{v},\mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \{\textit{еквівалентна} \ \| \ . \|_{[H^1(\Omega)]^d}\}, \\ &\| g \|_G := \sqrt{k(g,g)} \quad \forall \theta \in G \quad \{\textit{еквівалентна} \ \| \ . \|_{H^1(\Omega)} \}; \end{aligned} \tag{4.54}$$

(iii) неперервна симетрична білінійна форма

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega c^2 \rho \gamma^{-1} (\nabla.\mathbf{u})(\nabla.\mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{4.55}$$

утворює на просторі допустимих зміщень **V** напівнорму

$$| \mathbf{v} |_{\mathbf{V}} := \sqrt{c(\mathbf{v},\mathbf{v})} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}; \tag{4.56}$$

(iv) неперервна білінійна форма

$$b(g,\mathbf{v}) := \int_\Omega g c^2 \rho \gamma^{-1} \alpha \nabla.\mathbf{v} dx \quad \forall g \in G \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \tag{4.57}$$

визначає механізм взаємодії теплового та механічного полів в процесі поширення акустичних хвиль;

(v) лінійні неперервні функціонали

$$\begin{aligned} &< l, \mathbf{v} > := \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i \, ds \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ &< \mu, g > := \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q} g \, ds, \quad \forall g \in G \end{aligned} \tag{4.58}$$

описують зовнішні джерела надходження механічної та теплової енергії до акустичного поля рідини;

(vi) рівняння балансу енергій цієї задачі має таку будову

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\| \mathbf{u}'(t) \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{u}(t) |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta(t) \|_H^2] + \int_0^t [\| \mathbf{u}'(t) \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta(\tau) \|_G^2] d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}[\| \mathbf{\upsilon}_0 \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{u}_0 |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta_0 \|_H^2] + \int_0^t [< l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) > + < \mu(\tau), \theta(\tau) >] d\tau \qquad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.59}$$

4.2.2 Дискретизація варіаційної задачі за часовою змінною

Поділимо відрізок часу $[0,T]$ на N рівних (хоча, як це буде зрозуміло пізніше, не обов'язково) частин. Величину $\Delta t := T / N$ називатимемо параметром дискретизації в часі або кроком інтегрування в часі задачі (4.50), а точки $t_j = j\,\Delta t,\ j = 0, \dots, N$, та проміжки $[t_j, t_{j+1}]$ будемо називати вузлами часової сітки та кроками інтегрування в часі відповідно.

4.2.2.1 Частинами визначена апроксимація та характеризація її коефіцієнтів

З огляду на змішану структуру задачі (4.50) на кожному відрізку часу $[t_j, t_{j+1}]$ її розв'язок $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ будемо наближати парою $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = \{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\}$ такого вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\Delta t}(t) := [1-\omega_j^2(t)]\mathbf{u}^j + \Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^j + \omega_j^2(t)\mathbf{u}^{j+1}, \\ \theta^{\Delta t}(t) := [1-\omega_j(t)]\theta^j + \omega_j(t)\theta^{j+1}, \\ \omega_j(t) := \Delta t^{-1}(t - t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0, \dots, N-1, \end{cases} \tag{4.60}$$

де векторні функції $\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^{j+1}, \boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{j}} \in \mathbf{V}$ та скалярні функції $\theta^{\mathrm{j}}, \theta^{\mathrm{j+1}} \in \mathrm{G}$ підлягатимуть визначенню.

Щоб з'ясувати фізичний зміст шуканих коефіцієнтів, розглянемо значення компонент апроксимації $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t)$ та їхніх похідних у вузлах сітки, а саме,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\Delta t}(t_j) = \mathbf{u}^j, \ \ \mathbf{u}^{\Delta t}(t_{j+1}) = \mathbf{u}^{j+1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]\Big|_{t_j} = [\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'\Big|_{t_j} = \boldsymbol{\upsilon}^j, \\ \theta^{\Delta t}(t_j) = \theta^j, \ \ \theta^{\Delta t}(t_{j+1}) = \theta^{j+1}. \end{cases} \tag{4.61}$$

Таким чином, частинами визначена у (4.60) апроксимація $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = (\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t))$ володіє такими властивостями:

(i) $$\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t_j) = (\mathbf{u}^j, \theta^j),\ \boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t_{j+1}) = (\mathbf{u}^{j+1}, \theta^{j+1}), \tag{4.62}$$

тобто, частина шуканих коефіцієнтів апроксимації (4.49) є *значеннями зміщень* та *температури* у вузлах сітки;

(ii) останній із коефіцієнтів, а саме, $\boldsymbol{\upsilon}^j$ є значенням апроксимації *швидкості зміщення* в вузлі $t = t_j$; таким чином, якщо до (4.49) на місця трійки $\{\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{u}^{j+1}\} \subset \mathbf{V}$ підставити точні значення зміщення $\{\mathbf{u}(t_j), \boldsymbol{\upsilon}(t_j), \mathbf{u}(t_{j+1})\} \subset \mathbf{V}$, то апроксимація $\mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ перетвориться у *інтерполяційний поліном Ерміта* другого порядку;

(iii) $$[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'' = \frac{1}{\Delta t}[2\Delta t^{-1}(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j) - 2\boldsymbol{\upsilon}^j],$$

тому вектор

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} := \frac{2}{\Delta t}\left[\frac{\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j}{\Delta t} - \boldsymbol{\upsilon}^j\right] \tag{4.63}$$

визначає наближене значення *пришвидшення*, яке є сталим на кожному кроці інтегрування в часі.

Лема 4.3 *про апроксимацію приросту температури.*

Нехай апроксимація температури $\theta^{\Delta t} = \theta^{\Delta t}(t)$ *описується поліномом першого порядку вигляду*

$$\begin{cases} \theta^{\Delta t}(t) := [1 - \omega_j(t)]\theta^j + \omega_j(t)\theta^{j+1}, \\ \omega_j(t) := \Delta t^{-1}(t - t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{4.64}$$

Тоді, ввівши позначення

$$\begin{cases} \theta^{j+1/2} := \frac{1}{2}(\theta^{j+1} + \theta^j) \quad \{ = \theta^{\Delta t}(t_{j+1/2}),\ t_{j+1/2} := \frac{1}{2}(t_{j+1} + t_j)\}, \\ \dot{\theta}^{j+1/2} := (\theta^{j+1} - \theta^j)\Delta t^{-1} \ \{ = [\theta^{\Delta t}(t)]' \}, \end{cases} \tag{4.65}$$

цю апроксимацію температури можна подати виразом

$$\theta^{\Delta t}(t)=\theta^{j}+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}=\theta^{j+1/2}+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\dot{\theta}^{j+1/2}\quad \forall t\in[t_j,t_{j+1}],\ j=0,...,N-1. \quad (4.66)$$

Доведення. Ланцюжок наведених нижче перетворень доводить дане твердження:

$$\theta^{\Delta t}(t)=[1-\omega_j(t)]\theta^{j}+\omega_j(t)\theta^{j+1}=\theta^{j}+\omega_j(t)(\theta^{j+1}-\theta^{j})=\theta^{j}+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}=$$
$$=\tfrac{1}{2}[\theta^{j+1}+\theta^{j}]-\tfrac{1}{2}[\theta^{j+1}-\theta^{j}]+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}=\theta^{j+1/2}+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\dot{\theta}^{j+1/2} \quad (4.67)$$
$$\forall t\in[t_j,t_{j+1}].\ \blacktriangle$$

Пропозиція 4.1 *про апроксимацію акустичного зміщення*

Нехай вектор апроксимації акустичного зміщення $\mathbf{u}^{\Delta t}=\mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ *є поліномом другого порядку, який описується виразом*

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{\Delta t}(t)=[1-\omega_j^2(t)]\mathbf{u}^{j}+\Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\omega_j^2(t)\mathbf{u}^{j+1},\\ \omega_j(t)=(t-t_j)\Delta t^{-1}\qquad \forall t\in[t_j,t_{j+1}],\qquad j=0,\ ...\ ,N-1.\end{cases} \quad (4.68)$$

Тоді, якщо запровадити позначення

$$\begin{cases}\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}:=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}+\boldsymbol{\upsilon}^{j}), & \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}:=(\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}-\boldsymbol{\upsilon}^{j})\Delta t^{-1},\\ \mathbf{u}^{j+1}:=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, & \\ \mathbf{u}^{j+1/2}:=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})-\tfrac{1}{8}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, & \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}:=(\mathbf{u}^{j+1}-\mathbf{u}^{j})\Delta t^{-1},\end{cases} \quad (4.69)$$

то будуть вірними такі

(!) *тотожності*

$$\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}=\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}=\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \quad (4.70)$$

(!!) *форми запису апроксимації зміщення*

$$\mathbf{u}^{\Delta t}(t)=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\qquad \forall t\in[t_j,t_{j+1}] \quad (4.71)$$

або

$$\mathbf{u}^{\Delta t}(t)=\mathbf{u}^{j+1/2}+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\quad \forall t\in[t_j,t_{j+1}]. \quad (4.72)$$

Доведення. Після диференціювання $\mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ зауважимо , що

$$[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'|_{t=t_{j+1}} = 2\Delta t^{-1}\left[\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^{j} - \Delta t\boldsymbol{\upsilon}^{j}\right] + \boldsymbol{\upsilon}^{j} = \boldsymbol{\upsilon}^{j+1};$$

звідси одержимо $\Delta t^{-1}(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^{j}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\upsilon}^{j+1} + \boldsymbol{\upsilon}^{j}),$ що з огляду на (4.69) є іншим записом першої із тотожностей (4.70).

Звертаючись до (4.68), маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{\Delta t}(t) &:= \mathbf{u}^{j} + \omega_j^2(t)(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^{j}) + \Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} = \\
&= \mathbf{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \Delta t\omega_j^2(t)[\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} - \boldsymbol{\upsilon}^{j}] = \\
&= \mathbf{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \Delta t\omega_j^2(t)[\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} - \boldsymbol{\upsilon}^{j}] = \\
&= \mathbf{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\omega_j^2(t)\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}.
\end{aligned}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{\Delta t}(t) &= \mathbf{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \frac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1} + \mathbf{u}^{j}) - \frac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} + \Delta t\omega_j(t)\left[\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} - \frac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\right] + \frac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1} + \mathbf{u}^{j}) + \Delta t\left[\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^2\omega_j(t)[\omega_j(t) - 1]\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} = \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1} + \mathbf{u}^{j}) - \frac{1}{8}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} + \Delta t\left[\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^2\left[\omega_j^2(t) - \omega_j(t) + \frac{1}{4}\right]\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} = \\
&= \mathbf{u}^{j+1/2} + \Delta t\left[\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^2\left[\omega_j(t) - \frac{1}{2}\right]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}. \blacktriangle
\end{aligned}$$

4.2.2.2 Апроксимація початкових умов задачі

Оскільки апроксимація акустичного зміщення на кожному кроці інтегрування в часі вибрана нами у формі інтерполяційного полінома Ерміта, то виконання початкових умов задачі (4.50) перетворюється у рутинну процедуру, а саме, на першому кроці $[t_0, t_1]$ апроксимація зміщення та температури вибирається у вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\Delta t}(t) = \mathbf{u}_0 + \Delta t\omega_0(t)\boldsymbol{\upsilon}_0 + \frac{1}{2}[\Delta t\omega_0(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{1/2}, \\ \theta^{\Delta t}(t) = \theta_0 + \Delta t\omega_0(t)\dot{\theta}^{1/2} \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{4.73}$$

Таким чином, здійснений тут вибір ґатунку апроксимації розв'язку задачі акустики гарантує *точне виконання її початкових умов.*

З іншого боку, у правій частині (4.73) залишилася пара невідомих $\left\{\dot{\upsilon}^{1/2}, \dot{\theta}^{1/2}\right\} \in \mathbf{V} \times G$, яка відтворює акустичне пришвидшення та швидкість зміни температури на цьому часовому кроці аналізу задачі. Для визначення останніх маємо ще незадіяну систему двох варіаційних рівнянь, яку в певний спосіб потрібно перетворити до належної системи алгебричних рівнянь. З цією метою ми нижче використаємо проекційну процедуру Петрова–Гальоркіна.

Нарешті, після підстановки обчисленої в той чи інший спосіб пари $\left\{\dot{\upsilon}^{1/2}, \dot{\theta}^{1/2}\right\} \in \mathbf{V} \times G$ ми з огляду на (4.73) простим перерахунком обчислюємо

$$\begin{cases} \upsilon^1 = \upsilon^0 + \Delta t\dot{\upsilon}^{1/2} & \{[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'\big|_{t=t_1} \cong \mathbf{u}'(t_1)\}, \\ \mathrm{u}^1 = \mathrm{u}^0 + \frac{1}{2}\Delta t(\upsilon^1 + \upsilon^0) & \{[\mathbf{u}^{\Delta t}(t_1)] \cong \mathbf{u}(t_1)\}, \\ \theta^1 = \theta^0 + \Delta t\dot{\theta}^{1/2} & \{[\theta^{\Delta t}(t_1)] \cong \theta(t_1)\}, \end{cases} \tag{4.74}$$

і тим самим залишаючи в (4.71) для чергового кроку інтегрування з $j = 1$ нову пару невідомих $\left\{\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \dot{\theta}^{j+1/2}\right\} \in \mathbf{V} \times G$. Таким чином створюються передумови конструювання *алгоритму покрокових рекурентних обчислень наближеного розв'язку* задачі акустики (4.50).

4.2.3 Проекційні рівняння дискретизованої в часі задачі акустики

Підставляючи апроксимації (4.60) у варіаційну задачу (4.50) будемо вимагати, щоб на проміжку часу $[t_j, t_{j+1}]$ нев'язки цих підстановок були ортогональні до функцій $\varepsilon(t) \geq 0$ таких, що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)dt = 1. \tag{4.75}$$

Теорема 4.3 про дискретизовану в часі систему варіаційних рівнянь акустики.

Нехай для апроксимації розв'язку $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ *варіаційної задачі акустики (4.50) використовується частинами визначене наближення* $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = \{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\}$, *яке описується виразами (4.71) і (4.66) відповідно. Припустимо також, що лінійні функціонали правих частин рівнянь цієї задачі наближаються в частинно лінійний спосіб згідно правила*

$$\begin{cases} < l(t), \mathrm{v} > \cong [1-\omega(t)] < l(t_j), \mathrm{v} > + \omega(t) < l(t_{j+1}), \mathrm{v} >, \\ < \mu(t), \mathrm{v} > \cong [1-\omega(t)] < \mu(t_j), \mathrm{v} > + \omega(t) < \mu(t_{j+1}), \mathrm{v} >, \\ \omega(t) := \Delta t^{-1}(t - t_j) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad j = 0, \dots, N-1. \end{cases} \tag{4.76}$$

Тоді для кожного відрізка часу $[t_j, t_{j+1}]$ *проекційні рівняння Петрова–Гальоркіна, обчислені за допомогою тестової функції* $\varepsilon(t) \geq 0$ *з властивістю (4.75), матимуть вигляд*

$$\begin{cases} m(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + a(\upsilon^j + \Delta t\gamma\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + c(\mathrm{u}^j + \Delta t\gamma\upsilon^j + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) \\ \qquad\qquad - b(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathrm{v}) = < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + b(g, \upsilon^j + \Delta t\gamma\dot{\upsilon}^{j+1/2}) = < \mu_{j+\gamma}, g > \qquad \forall g \in G, \end{cases} \tag{4.77}$$

де значення параметрів γ *та* β *обчислюються згідно таких правил*

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)\,dt, \quad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\,\omega^2(t)\,dt \tag{4.78}$$

та

$$\begin{cases} < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > := (1-\gamma) < l(t_j), \mathbf{v} > + \gamma < l(t_{j+1}), \mathbf{v} > \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ < \mu_{j+\gamma}, \mathbf{v} > := (1-\gamma) < \mu(t_j), \mathbf{v} > + \gamma < \mu(t_{j+1}), \mathbf{v} > \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{4.79}$$

Доведення. Підставимо апроксимації (4.71), (4.66) і (4.76) у рівняння варіаційної задачі (4.50), результат домножимо на вибрану функцію $\varepsilon(t)$ і проінтегруємо на проміжку часу $[t_j, t_{j+1}]$, тоді

$$m(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \upsilon) + a(\upsilon^j, \mathrm{v}) + c(\mathrm{u}^j, \mathrm{v}) - b(\theta^j, \mathrm{v}) +$$
$$+ \Delta t[a(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + c(\upsilon^j, \mathrm{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathrm{v})]\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)dt + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 c(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v})\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[\omega(t)]^2 dt =$$
$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[[1-\omega(t)] < l(t_j), \mathrm{v} > + \omega(t) < l(t_{j+1}), \mathrm{v} >]dt \qquad \forall \mathbf{v} \in V,$$
$$s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^j, g) + b(g, \upsilon^j) + \Delta t[k(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + b(g, \dot{\upsilon}^{j+1/2})]\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)dt =$$
$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[[1-\omega(t)] < \mu(t_j), \mathrm{v} > + \omega(t) < \mu(t_{j+1}), \mathrm{v} >]dt \quad \forall g \in G.$$

Якщо тепер ввести позначення (4.78) та (4.79) і згрупувати доданки за відповідними білінійними формами, то прийдемо до задекларованого в (4.77) результату. ▲

4.2.4 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі

Для скорочення запису проекційних рівнянь (4.77) введемо симетричні білінійні форми $M(\Delta t, \gamma, \beta; \ .\ ,\ .\ ) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathrm{R}$ та $S(\Delta t, \gamma; \ .\ ,\ .\ ) : G \times G \to \mathrm{R}$ згідно правил

$$M(\Delta t, \gamma, \beta; \mathbf{w}, \mathbf{v}) := m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \Delta t \gamma a(\mathbf{w}, \mathrm{v}) + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 \beta c(\mathbf{w}, \mathrm{v}) \qquad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{4.80}$$

та

$$S(\Delta t, \gamma; \vartheta, g) := s(\vartheta, g) + \Delta t \gamma k(\vartheta, g) \qquad \forall \vartheta, g \in G \tag{4.81}$$

відповідно, і визначимо лінійні неперервні функціонали

$$\begin{aligned} &< X_{j+\gamma}, \mathbf{v} > := < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > - [a(\upsilon^j, \mathrm{v}) + c(\mathrm{u}^j + \Delta t\gamma\upsilon^j, \mathrm{v}) - b(\theta^j, \mathrm{v})] \quad \forall \mathrm{v} \in \mathbf{V}, \\ &< Y_{j+\gamma}, g > := < \mu_{j+\gamma}, g > - [k(\theta^j, g) + b(g, \upsilon^j)] \qquad \forall g \in G. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Тепер на підставі теореми 4.3 ми готові сформулювати

Теорема 4.4 про однокрокову рекурентну схему розв'язування задачі акустики.

Нехай розв'язок $\{\mathrm{u}(t), \theta(t)\} \in \mathbf{V} \times G$ *варіаційної задачі (4.50) на кожному кроці* $[t_j, t_{j+1}]$, $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, *апроксимується поліномами вигляду (4.71), (4.66).*

Тоді процедура Петрова–Гальоркіна породжує однокрокову рекурентну схему вигляду:

$$\begin{cases} \textit{задано } \{\mathrm{u}^0, \upsilon^0, \theta^0\} \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G \textit{ та параметри } \Delta t > 0, \ \gamma, \beta \in [0,1]; \\ \textit{знайти } \{\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \dot{\theta}^{j+1/2}\} \in \mathbf{V} \times G \textit{ та } \{\mathrm{u}^{j+1}, \upsilon^{j+1}, \theta^{j+1}\} \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G \textit{ такі, що} \\ M(\Delta t, \gamma, \beta; \dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathbf{v}) - \Delta t\gamma b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathrm{v}) = < X_{j+\gamma}, \mathbf{v} > \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \quad S(\Delta t, \gamma; \dot{\theta}^{j+1/2}, g) + \Delta t\gamma b(g, \dot{\upsilon}^{j+1/2}) = < Y_{j+\gamma}, g > \qquad \forall g \in G, \\ \quad \upsilon^{j+1} = \upsilon^j + \Delta t\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \qquad \mathrm{u}^{j+1} = \mathrm{u}^j + \tfrac{1}{2}\Delta t(\upsilon^{j+1} + \upsilon^j), \\ \quad \theta^{j+1} = \theta^j + \Delta t\dot{\theta}^{j+1/2} \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{4.83}$$

Доведення. Повертаючись до системи рівнянь (4.77), залишимо в лівій частині рівнянь лише доданки з індексом $j + 1/2$, в результаті одержимо

$$\begin{cases} m(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + \Delta t\gamma a(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 \beta c(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) - \Delta t\gamma b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathrm{v}) \\ \qquad = < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > - [a(\upsilon^j, \mathrm{v}) + c(\mathrm{u}^j + \Delta t\gamma\upsilon^j, \mathrm{v}) - b(\theta^j, \mathrm{v})] \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \qquad s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + \Delta t\gamma k(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + \Delta t\gamma b(g, \dot{\upsilon}^{j+1/2}) \\ \qquad = < \mu_{j+\gamma}, g > - [k(\theta^j, g) + b(g, \upsilon^j)] \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{4.84}$$

На завершення доведення залишилося застосувати визначення (4.80)–(4.82). ▲

4.2.5 Абстрактна форма проекційних рівнянь ОРС та їх розв'язуваність

На декартовому добутку $Q := \mathbf{V} \times G$ введемо білінійну форму та лінійні функціонали згідно таких правил

$$B(\pi,\phi) := M(\Delta t\gamma,\beta;\,\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{v}) + S(\Delta t,\gamma;\theta,g) - \Delta t\gamma[b(g,\boldsymbol{\upsilon}) - b(\theta,\mathrm{v})] \qquad \forall\,\pi = \{\boldsymbol{\upsilon},\theta\},\ \phi = \{\mathbf{v},g\}\mathbf{v} \in Q \tag{4.85}$$

та

$$< Z_{j+\gamma},\phi > := < X_{j+\gamma},\mathbf{v} > + < Y_{j+\gamma},g > \qquad \forall\,\phi = \{\mathbf{v},g\} \in Q = \mathbf{V} \times G. \tag{4.86}$$

В такому разі однокрокова рекурентна схема (4.83) на кожному етапі свого застосування передбачає розв'язування варіаційних задач вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти}\ \ \pi^{j+1/2} = \left\{\dot{\upsilon}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\right\} \in Q\ \textit{таке, що} \\ B(\pi^{j+1/2},\phi) = < Z_{j+\gamma},\phi > \qquad \forall\,\phi = \{\mathbf{v},g\} \in Q. \end{cases} \tag{4.87}$$

Теорема 4.5 про коректність формулювання варіаційних рівнянь ОРС.

Нехай виконано умови теореми 4.3.

Тоді для кожного $j = 0,1,\ \ldots\ ,N-1$ *система варіаційних рівнянь (4.87) однокрокової рекурентної схеми (4.83) має єдиний розв'язок* $\pi^{j+1/2} = \left\{\dot{\upsilon}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\right\} \in Q$ *такий, що*

$$\|\,\pi^{j+1/2}\,\|_Q \le \|\,\mathrm{Z}_{j+\gamma}\,\|_*\,, \tag{4.88}$$

де $\|\,\phi\,\|_Q = \sqrt{B(\phi,\phi)}\ \ \forall\,\phi \in Q$.

Доведення. Щоб дати відповідь на питання стосовно розв'язуваності системи рівнянь (4.77) або, що еквівалентно, задачі (4.87), достатньо перевірити виконання гіпотез теореми Лакса–Мільграма–Вишика. У зв'язку з цим зауважимо, що з огляду на відзначені в п.4.2.1 властивості білінійних форм

(4.51)–(4.58) можна стверджувати, що білінійна форма $B(\,.\,,.\,):Q\times Q\to R$ є неперервною та $Q-$еліптичною, оскільки

$$\begin{aligned}\Re(\phi,\phi) &= M(\Delta t,\gamma,\beta;\,\mathbf{v},\mathbf{v})+S(\Delta t,\gamma;g,g)\\ &=\|\,\mathbf{v}\,\|_{\mathbf{H}}^2+\Delta t\gamma\,\|\,\mathrm{v}\,\|_{\mathbf{V}}^2+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta\,|\,\mathrm{v}\,|_{\mathbf{V}}^2+\|\,g\,\|_H^2+\Delta t\gamma\,\|\,g\,\|_G^2 \qquad \forall\phi=\{\mathbf{v},g\}\in Q.\end{aligned}$$

Знову ж таки на підставі (4.51)–(4.58) неважко показати, що лінійний функціонал $Z_{j+\gamma}:Q\to\mathbb{R}$ є неперервним на просторі Q. Таким чином, з огляду на теорему Лакса–Мільграма–Вишика задача (4.87) однозначно розв'язується і є правильною оцінка (4.88). ▲

4.2.6 Еквівалентна задача про сідлову точку квадратичного функціоналу

Специфіку структури варіаційних рівнянь ОРС (4.83) та їхніх розв'язків характеризує

Теорема 4.6 про сідлову точку лагранжиану дискретизованої в часі варіаційної задачі акустики**.**

Розв'язок $\{\dot{\upsilon}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\}\in\mathbf{V}\times G$ *системи варіаційних рівнянь однокрокової рекурентної схеми (4.83) є одночасно і розв'язком задачі про сідлову точку такого ґатунку*

$$\begin{cases}\textit{задано}\ \left\{\mathrm{u}^j,\upsilon^j,\theta^j\right\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G\ \textit{та параметри}\ \Delta t>0,\ \ \gamma,\beta\in[0,1];\\ \textit{знайти пару}\ \left\{\dot{\upsilon}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\right\}\in\mathbf{V}\times G\ \textit{таку, що}\\ \quad L(\dot{\upsilon}^{j+1/2},g)\le L(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2})\le L(\mathbf{v},\dot{\theta}^{j+1/2}) \qquad \forall\phi=\{\mathbf{v},g\}\in Q,\\ \textit{де}\\ \quad L(\mathbf{v},g):=\tfrac{1}{2}[M(\Delta t\gamma,\beta;\,\mathbf{v},\mathbf{v})-S(\Delta t\gamma;g,g)]\\ \qquad\qquad +[\Delta t\gamma b(g,\mathbf{v})+<X_{j+\gamma},\mathbf{v}>-<Y_{j+\gamma},g>] \quad \forall\phi=\{\mathbf{v},g\}\in Q.\end{cases} \tag{4.89}$$

і навпаки, розв'язок задачі (4.89) задовольняє варіаційні рівняння ОРС (4.83).

Доведення здійснюється загальновживаною технікою варіаційного числення. ▲

4.2.7 Енергетичне рівняння напівдискретизованої задачі

Ключову роль у нашому аналізі однокрокової рекурентної схеми (4.83) відіграє

Теорема 4.7 про рівняння балансу енергії дискретизованої в часі задачі акустики.

Нехай апроксимація $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\right\} \in \mathbf{V} \times G$ *розв'язку варіаційної задачі (4.50) описується частинами визначеними поліномами вигляду (4.71) і (4.66), коефіцієнти яких обчислюються за допомогою ОРС (4.82) зі значенням параметра* $\gamma = \frac{1}{2}$

Тоді рівняння балансу енергії дискретизованої задачі акустики мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\| \upsilon^{n+1} \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathrm{u}^{n+1} |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{n+1} \|_H^2\right] + \Delta t \sum_{j=0}^{n}\left[\| \upsilon^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{j+1/2} \|_G^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta - \frac{1}{2}\right) | \upsilon^{n+1} |_{\mathbf{V}}^2 = \frac{1}{2}\left[\| \upsilon^0 \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathrm{u}^0 |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^0 \|_H^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta - \frac{1}{2}\right) | \upsilon^0 |_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\quad + \Delta t \sum_{j=0}^{n}\left[< l_{j+1/2}, \upsilon^{j+1/2} > + < \mu_{j+1/2}, \theta^{j+1/2} >\right] \qquad n = 0,1, \ldots .
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Доведення:За умови, що $\gamma = \frac{1}{2}$, рівняння дискретизованої варіаційної задачі (4.77) набудуть вигляду

$$\begin{cases} m\left(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}\right)+a\left(\upsilon^{j+1/2},\mathrm{v}\right)+c\left(\mathbf{u}^{j+1/2}+\frac{1}{2}[\Delta t]^2\left(\beta-\frac{1}{4}\right)\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\mathrm{v}\right)- \\ \qquad -b\left(\theta^{j+1/2},\mathrm{v}\right)=<l_{j+1/2},\mathrm{v}> \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \\ s\left(\dot{\theta}^{j+1/2},g\right)+k\left(\theta^{j+1/2},g\right)+b\left(g,\upsilon^{j+1/2}\right)=<\mu_{j+1/2},g> \quad \forall g\in G. \end{cases} \tag{4.91}$$

Покладемо в них $\mathrm{v}=\upsilon^{j+1/2}$, $g=\theta^{j+1/2}$ та додамо їх, в результаті одержимо

$$m\left(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}\right)+a\left(\upsilon^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}\right)+c\left(\mathbf{u}^{j+1/2}+\frac{1}{2}[\Delta t]^2\left(\beta-\frac{1}{4}\right)\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}\right)+$$
$$+s\left(\dot{\theta}^{j+1/2},\theta^{j+1/2}\right)+k\left(\theta^{j+1/2},\theta^{j+1/2}\right)=<l_{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>$$

або, згадуючи визначення енергетичних норм,

$$\begin{aligned} &m(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2})+\|\upsilon^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+c(\mathbf{u}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2})+\frac{1}{2}[\Delta t]^2\left(\beta-\frac{1}{4}\right)c(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2})+ \\ &+s(\dot{\theta}^{j+1/2},\theta^{j+1/2})+\|\theta^{j+1/2}\|_G^2=<l_{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Решту доданків цього рівняння перетворимо в один і той самий спосіб, наприклад,

$$\begin{aligned} m(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\upsilon^{j+1/2})&=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}m(\upsilon^{j+1}-\upsilon^{j},\upsilon^{j+1}+\upsilon^{j})=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[m(\upsilon^{j+1},\upsilon^{j+1})-m(\upsilon^{j},\upsilon^{j})] \\ &=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\upsilon^{j+1}\|_{\mathbf{H}}^2-\|\upsilon^{j}\|_{\mathbf{H}}^2]. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Зауважимо, що з огляду на тотожність (4.70) пропозиції 4.1

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}^{j+1/2},\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2})&=c\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})-\frac{1}{8}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}\right)= \\ &=c\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})-\frac{1}{8}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\dot{\mathrm{u}}^{j+1/2}\right)= \\ &=\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[|\mathrm{u}^{j+1}|_{\mathrm{V}}^2-\|\mathrm{u}^{j}|_{\mathrm{V}}^2]-\frac{1}{16}\Delta t[|\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}|_{\mathrm{V}}^2-|\boldsymbol{\upsilon}^{j}|_{\mathrm{V}}^2]. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Зібравши тотожності вигляду (4.93) та (4.94) у (4.92), одержимо

$$\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\upsilon^{j+1}\|_{\mathbf{H}}^2-\|\upsilon^{j}\|_{\mathbf{H}}^2]+\|\upsilon^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[|\mathrm{u}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2-|\mathrm{u}^{j}|_{\mathbf{V}}^2]+$$
$$+\frac{1}{4}\Delta t\left(\beta-\frac{1}{2}\right)[|\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2-|\boldsymbol{\upsilon}^{j}|_{\mathbf{V}}^2]+\frac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\theta^{j+1}\|_{H}^2-\|\theta^{j}\|_{H}^2]+ \tag{4.95}$$
$$+\|\theta^{j+1/2}\|_{G}^2=<l_{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>.$$

Нарешті, додавши тотожності (4.95) з індексами $j=0,1,\dots,n$, після очевидних спрощень приходимо до такого виразу

$$\frac{1}{2}[\|\upsilon^{n+1}\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathrm{u}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{n+1}\|_{H}^2]+\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\upsilon^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{j+1/2}\|_{G}^2]+$$
$$+\frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)|\upsilon^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2=\frac{1}{2}[\|\upsilon^{0}\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathrm{u}^{0}|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{0}\|_{H}^2]+\frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)|\upsilon^{0}|_{\mathbf{V}}^2+ \tag{4.96}$$
$$+\Delta t\sum_{j=0}^{n}[<l_{j+1/2},\upsilon^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>]\ n=0,1,\ \dots\ .$$

Враховуючи тепер початкові умови задачі, знайдемо тотожність, задекларовану в (4.90). ▲

4.2.8 Аналіз стійкості однокрокової рекурентної схеми

Порівнюючи рівняння балансу енергії дискретизованої задачі (4.96) та цього ж рівняння неперервної задачі (див.(4.59)), відзначимо, що вжита нами дискретизація в часі задачі акустики вносить збурення з доданками, пропорційними значенням множника $\left(\beta-\frac{1}{2}\right)$; більше цього, згадані доданки з $\beta<\frac{1}{2}$ мають нефізичний зміст. Отже, на перший погляд, допустимими значеннями параметрів однокрокової рекурентної схеми (4.83) є такі, що задовольняють умови

$$\gamma=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\le\beta\le 1. \tag{4.97}$$

Це вступне зауваження показує, що конструювання схем дискретизації задач за часовою змінною є нетривіальною задачею і потребує ґрунтовного аналізу, в першу чергу, стійкості таких схем.

4.2.8.1 Апріорні оцінки

З огляду на обмеженість лінійних функціоналів l і μ скористаємося оцінками вигляду

$$\left|< l_{j+1/2}, \upsilon^{j+1/2} >\right| \le \frac{1}{2} \| \upsilon^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} C \| l_{j+1/2} \|_{\mathbf{V}'}^2 \quad C = const > 0$$

та

$$\left|< \mu_{j+1/2}, \theta^{j+1/2} >\right| \le \frac{1}{2} \| \theta^{j+1/2} \|_G^2 + \frac{1}{2} C \| \mu_{j+1/2} \|_{G'}^2,$$

де $\mathbf{V}'$ та G' – простори, спряжені до $\mathbf{V}$ та G відповідно. Тут і нижче одним і тим же символом C ми позначаємо різні додатні сталі, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять.

Підставимо щойно наведені оцінки до енергетичного рівняння (4.90) та після приведення подібних отримаємо нерівності вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\| \upsilon^{n+1} \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathrm{u}^{n+1} |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{n+1} \|_H^2] + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{j=0}^{n} [\| \upsilon^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{j+1/2} \|_G^2] + \\
&+ \frac{1}{4} \Delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) | \upsilon^{n+1} |_{\mathbf{V}}^2 \le \frac{1}{2} [\| \boldsymbol{\upsilon}_0 \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{u}_0 |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta_0 \|_H^2] + \frac{1}{4} \Delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) | \upsilon_0 |_{\mathbf{V}}^2 + \qquad (4.98) \\
&+ \frac{1}{2} \Delta t\, C \sum_{j=0}^{n} [\| l_{j+1/2} \|_{\mathbf{V}'}^2 + \| \mu_{j+1/2} \|_{G'}^2] \qquad n = 0, 1, \ldots N-1.
\end{aligned}$$

Оскільки праві частини нерівностей (4.98) залежать лише від даних варіаційної задачі акустики, то звідси приходимо до висновку, що буде правильною

Теорема 4.8 про достатню умову стійкості однокрокової рекурентної схеми.

Нехай апроксимація $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *розв'язку варіаційної задачі (4.50) описується частинами визначеними поліномами вигляду (4.71) і (4.66), коефіцієнти яких обчислюються однокроковою рекурентною схемою (4.83) зі значеннями параметрів* γ *та* β*, що задовольняють умовам*

$$\gamma=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\le\beta\le 1 \tag{4.99}$$

Тоді однокрокова рекурентна схема (4.83) є безумовно стійкою стосовно вибору довжини кроку інтегрування і, більше цього, для знайдених наближень $\{\mathrm{u}^{n+1},\upsilon^{n+1},\theta^{n+1}\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G$ будуть правильними такі апріорні оцінки

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\|\upsilon^{n+1}\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathrm{u}^{n+1}|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta^{n+1}\|^2_{H}]+\frac{1}{2}\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\upsilon^{j+1/2}\|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta^{j+1/2}\|^2_{G}]+\\
&+\frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)|\upsilon^{n+1}|^2_{\mathbf{V}}\le\frac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}_0\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathbf{u}_0|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta_0\|^2_{H}]+\\
&+\frac{1}{2}\Delta t\,C\sum_{j=0}^{n}[\|l_{j+1/2}\|^2_{\mathbf{V}'}+\|\mu_{j+1/2}\|^2_{G'}]+\frac{1}{4}\Delta t^2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)|\upsilon_0|^2_{\mathbf{V}}\\
&\qquad\qquad n=0,1,\ \dots\ N-1.\ \blacktriangle
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Зауваження 4.4. Якщо $\gamma=\frac{1}{2}$ і $0\le\beta<\frac{1}{2}$, то доданки з множником $\left(\beta-\frac{1}{2}\right)$ в (4.100) є величинами порядку $O(\Delta t^2)$, тому за достатньо малих значень Δt схема (4.83) може залишатися стійкою. ▲.

4.2.9 Апостерірні оцінки похибок апроксимації в часі

4.2.9.1 Варіаційна задача про похибку апроксимації в часі

З огляду на декомпозицію розв'язку $\boldsymbol{\psi}(t)=\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}$ вигляду

$$\begin{cases} \mathrm{u}(t) = \mathrm{u}^{\Delta t}(t) + \mathrm{e}(t) = \mathrm{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\upsilon}^{j+1/2} + \mathrm{e}(t), \\ \theta(t) = \theta^{\Delta t}(t_j) + \varepsilon(t) = \theta^{j} + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2} + \varepsilon(t) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{cases} \tag{4.101}$$

та його похідні за змінною часу

$$\begin{cases} \mathrm{u}'(t) = [\mathrm{u}^{\Delta t}(t) + \mathrm{e}(t)]' = \boldsymbol{\upsilon}^{j} + [\Delta t\omega_j(t)]\dot{\upsilon}^{j+1/2} + \mathrm{e}'(t), \\ \mathrm{u}''(t) = [\mathrm{u}^{\Delta t}(t) + \mathrm{e}(t)]'' = \dot{\upsilon}^{j+1/2} + \mathrm{e}''(t) \\ \theta'(t) = [\theta^{\Delta t}(t_j) + \varepsilon(t)]' = \dot{\theta}^{j+1/2} + \varepsilon'(t) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0,1, \ldots \end{cases} \tag{4.102}$$

після невеликої алгебри варіаційну задачу акустики (4.50) переформулюємо у задачу про похибку апроксимації її розв’язку

$$\begin{cases} m(\mathrm{e}''(t), \mathrm{v}) + a(\mathrm{e}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathrm{e}(t), \mathrm{v}) - b(\varepsilon(t), \mathrm{v}) = \\ =< l(t), \mathrm{v} > -[m(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}) + a(\boldsymbol{\upsilon}^{j} + [\Delta t\omega_j(t)]\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + \\ + c\left(\mathrm{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j} + \dfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathrm{v}\right) - b(\theta^{j} + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathrm{v})], \\ s(\varepsilon'(t), g) + k(\varepsilon(t), g) + b(g, \mathrm{e}'(t)) = \\ =< \mu(t), g > -[s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^{j} + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + \\ + b(g, \boldsymbol{\upsilon}^{j} + [\Delta t\omega_j(t)]\dot{\upsilon}^{j+1/2})] \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \ldots, \\ m(\mathrm{e}'(0), \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathrm{e}(0), \mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\varepsilon(0), g) = 0 \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{4.103}$$

Пропозиція 4.2 *стосовно задачі про похибку апроксимації в часі.*

Нехай виконано умови теореми 4.3.

Тоді похибка апроксимації зміщення та температури

$$\mathbf{E}(t) := \{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\} \equiv \left\{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta(t) - \theta^{\Delta t}(t)\right\} \in \mathbf{V} \times G \tag{4.104}$$

є розв’язком такої варіаційної задачі

$$
\begin{cases}
\textit{задано } \left\{\mathrm{e}(t_j), \mathrm{e}'(t_j), \varepsilon(t_j)\right\} \in \mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G \ \textit{та} \quad \Delta t>0, \quad \gamma,\beta\in[0,1]; \\
\textit{знайти } \left\{\mathrm{e}(t), \varepsilon(t)\right\} \in \mathbf{V}\times G \ \textit{такі, що} \\
m(\mathrm{e}''(t),\mathrm{v}) + a(\mathrm{e}'(t),\mathbf{v}) + c(\mathrm{e}(t),\mathrm{v}) - b(\varepsilon(t),\mathrm{v}) = < l(t) - l_{j+\gamma}, \mathrm{v} > \\
\quad -\Delta t[\omega_j(t)-\gamma][a(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathrm{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2},\mathrm{v})] \\
\qquad\qquad -\frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j^2(t)-\beta]\, c(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) \qquad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \\
s(\varepsilon'(t),g) + k(\varepsilon(t),g) + b(g,\mathrm{e}'(t)) = < \mu(t) - \mu_{j+\gamma}, g > \\
\quad -\Delta t[\omega_j(t)-\gamma][k(\dot{\theta}^{j+1/2},g) + b(g,\dot{\upsilon}^{j+1/2})] \qquad \forall g\in G \quad \forall t\in[t_j,t_{j+1}] \quad j=0,1,\ \ldots .
\end{cases}
\tag{4.105}
$$

Доведення. З огляду на систему рівнянь (4.77) дискретизованої задачі проаналізуємо джерела можливих похибок спочатку рівняння руху, а пізніше теплопровідності. Для наочності спочатку випишемо в квадратних дужках доданки, що зустрічаються у відповідних рівняннях із(4.77).

Таким чином, з огляду на перше із рівнянь (4.77)

$$
\begin{aligned}
& m(\mathrm{e}''(t),\mathrm{v}) + a(\mathrm{e}'(t),\mathbf{v}) + c(\mathrm{e}(t),\mathrm{v}) - b(\varepsilon(t),\mathrm{v}) = \\
& = [< l_{j+\gamma},\mathrm{v} > - m(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) - a(\boldsymbol{\upsilon}^j + \Delta t\gamma\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) - c(\mathrm{u}^j + \Delta t\gamma\boldsymbol{\upsilon}^j + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) + \\
& + b(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2},\mathrm{v})] + < l(t),\mathrm{v} > - < l_{j+\gamma},\mathrm{v} > - a(\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) - \\
& - c(\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\boldsymbol{\upsilon}^j + \frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)^2-\beta]\,\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) + b(\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot{\theta}^{j+1/2},\mathrm{v}) = \\
& = < l(t) - l_{j+\gamma},\mathrm{v} > - \Delta t[\omega_j(t)-\gamma][a(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathrm{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2},\mathrm{v})] - \\
& - \frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j^2(t)-\beta]\, c(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathrm{v}).
\end{aligned}
$$

Подібно

$$
\begin{aligned}
& s(\varepsilon'(t),g) + k(\varepsilon(t),g) + b(g,\mathrm{e}'(t)) \\
& = [< \mu_{j+\gamma},g > - s(\dot{\theta}^{j+1/2},g) - k(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2},g) - b(g,\boldsymbol{\upsilon}^j + \Delta t\gamma\dot{\upsilon}^{j+1/2})] + \\
& + < \mu(t),g > - < \mu_{j+\gamma},g > - k(\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot{\theta}^{j+1/2},g) - b(g,\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot{\upsilon}^{j+1/2}) = \\
& = < \mu(t) - \mu_{j+\gamma},g > - \Delta t[\omega_j(t)-\gamma][k(\dot{\theta}^{j+1/2},g) + b(g,\dot{\upsilon}^{j+1/2})].
\end{aligned}
$$

Отже, після скорочення подібних маємо рівняння для обчислення похибок апроксимації в часі (4.105). ▲

Зауваження 4.5. Праві частини рівнянь (4.105) явно показують, що джерелами похибок однокрокової схеми інтегрування в часі є похибки апроксимації функціоналів правих частин варіаційних рівнянь задачі (4.50) та деякі характеристики швидкості змін її апроксимацій та пришвидшення з множниками $w(t) := \Delta t[\omega_j(t) - \gamma]$ та $z(t) := \frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)^2 - \beta]$ відповідно. ▲

4.2.9.2 Рівняння балансу задачі про похибку апроксимації в часі

Підставимо до рівнянь задачі (4.105) v=e′(t) та $g = \varepsilon(t)$, додамо їх і результати проінтегруємо на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$, тоді одержимо рівняння балансу такого вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{j+1})\|_{\mathbf{H}}^2 + |\mathbf{e}(t_{j+1})|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varepsilon(t_{j+1})\|_H^2] + \int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau = \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|\mathbf{e}'(t_j)\|_{\mathbf{H}}^2 + |\mathbf{e}(t_j)|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varepsilon(t_j)\|_H^2\Big] + \\
&+ \int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big[< l(\tau) - l_{j+\gamma}, \mathbf{e}'(\tau) > + < \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma}, g >\Big]d\tau - \\
&- \left\{\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)\Big[a(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau)) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{e}'(\tau)) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau))\Big]d\tau\right\} - \\
&- \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(\tau)c(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau))d\tau - \\
&- \left\{\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)[k(\dot{\theta}^{j+1/2}, \varepsilon(\tau)) + b(\varepsilon(\tau), \dot{\upsilon}^{j+1/2})]d\tau\right\} \qquad j = 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{4.106}$$

де

$$w(\tau) := \Delta t[\omega_j(\tau) - \gamma], \qquad z(\tau) := \tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(\tau)^2 - \beta].$$

З огляду на присутність у рівності (4.106) дисипативних складових похибки

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\varepsilon(\tau)\|_G^2\Big]d\tau$$

зробимо оцінки її правої частини з використанням нерівності Коші–Буняковського–Шварца та елементарної нерівності такого вигляду

$$|ab| = |(\sqrt{2\lambda}a)(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}b)| \le \lambda a^2 + \frac{1}{4\lambda}b^2 \quad \forall \lambda > 0 \qquad \forall a,b \in R.$$

Отже, наприклад,

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} < l(\tau) - l_{j+\gamma}, \mathbf{e}'(\tau) > d\tau &\le C\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| l(\tau) - l_{j+\gamma} \|_* \| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}\, d\tau \\ &\le \lambda C^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \| l(\tau) - l_{j+\gamma} \|_*^2\, d\tau + \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}^2\, d\tau .\end{aligned} \tag{4.107}$$

Тут і далі одним і тим же символом C ми позначаємо різні додатні сталі, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять, і які в різних місцях можуть набувати різних значень.

Більш громіздких обчислень потребує доданок правої частини (4.106) з множником $w(\tau) := \Delta t[\omega_j(\tau) - \gamma]$:

$$\begin{aligned}&\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)[a(\dot{\upsilon}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau)) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{e}'(\tau)) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau))]d\tau \le \\ &\le C\int_{t_j}^{t_{j+1}} | w(\tau) | \left[\| \dot{\upsilon}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}} + \| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}} + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \right] \| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}\, d\tau \le \\ &\le C^2\lambda \left[\| \dot{\upsilon}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}} + \| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}} + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \right]^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} w^2(\tau) d\tau + \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}^2\, d\tau = \\ &= \Delta t^3[(\gamma - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{12}]C^2\lambda \left[\| \dot{\upsilon}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}} + \| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}} + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}^2\, d\tau \quad \forall \lambda > 0.\end{aligned} \tag{4.108}$$

В цьому ж стилі зробимо оцінку доданку з множником $z(\tau) := \frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j^2(\tau) - \beta]$:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} z(\tau)c(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathbf{e}'(\tau))d\tau \le \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\, z(\tau)\,||\, c(\dot{\upsilon}^{j+1/2},\mathbf{e}'(\tau))\,|\, d\tau \le$$
$$\le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[C^2\lambda |z(\tau)|^2 \|\, \dot{\upsilon}^{j+1/2} \,\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{4\lambda} \|\, \mathbf{e}'(\tau)\,\|_{\mathbf{V}}^2 \right] d\tau = \tag{4.109}$$
$$= \frac{1}{4}\Delta t^5 \left[(\beta - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{4}{45} \right] C^2\lambda \|\dot{\upsilon}^{j+1/2}\,\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \mathbf{e}'(\tau)\,\|_{\mathbf{V}}^2\, d\tau \quad \forall \lambda > 0.$$

Застосовуючи ту саму техніку, знайдемо, що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)[k(\dot{\theta}^{j+1/2},\varepsilon(\tau)) + b(\varepsilon(\tau),\dot{\upsilon}^{j+1/2})]d\tau \le \alpha\Delta t^3[(\gamma - \tfrac{1}{2})^2 +$$
$$+ \frac{1}{12}]C\left[\|\, \dot{\theta}^{j+1/2}\,\|_G^2 + \|\, \dot{\upsilon}^{j+1/2}\,\|_{\mathbf{V}}^2 \right] + \frac{1}{4\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \varepsilon(\tau)\,\|_G^2\, d\tau \qquad \forall \alpha > 0 \tag{4.110}$$

та

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} < \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma}, \varepsilon(\tau) > d\tau \le \alpha C^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma}\,\|_*^2\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \varepsilon(\tau)\,\|_G^2\, d\tau \,\forall \alpha > 0. \tag{4.111}$$

Отже, збираючи (4.107)–(4.111) в рівнянні (4.106), приходимо до оцінки енергетичних норм похибок апроксимації на кожному кроці інтегрування в часі такого ґатунку

$$\frac{1}{2}[\|\, \mathbf{e}'(t_{j+1})\,\|_{\mathbf{H}}^2 + |\, \mathbf{e}(t_{j+1})\,|_{\mathbf{V}}^2 + \|\, \varepsilon(t_{j+1})\,\|_H^2] + \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\|\, \mathbf{e}'(\tau)\,\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\, \varepsilon(\tau)\,\|_G^2] d\tau \le$$
$$\le \frac{1}{2}[\|\, \mathbf{e}'(t_j)\,\|_{\mathbf{H}}^2 + |\, \mathbf{e}(t_j)\,|_{\mathbf{V}}^2 + \|\, \varepsilon(t_j)\,\|_H^2] + \frac{3}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \mathbf{e}'(\tau)\,\|_{\mathbf{V}}^2\, d\tau + \frac{1}{2\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\, \varepsilon(\tau)\,\|_G^2\, d\tau +$$
$$+ C\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\lambda \|\, l(\tau) - l_{j+\gamma}\,\|_*^2 + \alpha \|\, \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma}\,\|_*^2 \right] d\tau + \tag{4.112}$$
$$+ \Delta t^3 C(\alpha + \lambda)\left[\|\, \dot{\upsilon}^{j+1/2}\,\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\, \boldsymbol{\upsilon}^j\,\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\, \dot{\theta}^{j+1/2}\,\|_G^2 \right] \qquad \forall \lambda, \alpha > 0.$$

Вибравши тепер $\lambda = 3/2, \alpha = 1$ і звівши подібні, ми надамо енергетичній нерівності остаточного вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{j+1})\|_{\mathbf{H}}^2+\|\mathbf{e}(t_{j+1})\|_V^2+\|\varepsilon(t_{j+1})\|_H^2]+\frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[|\mathbf{e}'(\tau)|_V^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\le\\
&\le\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_j)\|_{\mathbf{H}}^2+\|\mathbf{e}(t_j)\|_V^2+\|\varepsilon(t_j)\|_H^2]+\\
&+C\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2]d\tau+\\
&+\Delta t^2C\left[|\boldsymbol{\upsilon}^j|_V^2+|\dot{\upsilon}^{j+1/2}|_V^2+\|\dot{\theta}^{j+1/2}\|_G^2\right]\qquad j=0,1,\dots.
\end{aligned}\tag{4.113}$$

Нарешті, додамо почленно перші з цього списку нерівностей з номерами $j=0,1,\dots,n$; результати підсумовування матимуть такий вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{n+1})\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_{n+1})|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_{n+1})\|_H^2]+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\le\\
&\le C\left\{\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2]d\tau+\right.\\
&\left.+\Delta t^3\sum_{j=0}^{N}\left[\|\boldsymbol{\upsilon}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\upsilon}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\theta}^{j+1/2}\|_G^2\right]\right\}\quad n=0,1,\dots,N-1.
\end{aligned}\tag{4.114}$$

Теорема 4.9 стосовно апроксимативності однокрокової рекурентної схеми.

Нехай апроксимація $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *розв'язку* s *варіаційної задачі дисипативної акустики* (4.50) *описується частинами визначеними поліномами вигляду*

$$\begin{cases}\mathrm{u}^{\Delta t}(t)=\mathrm{u}^j+\Delta t\omega_j(t)\upsilon^j+\frac{1}{2}\left[\Delta t\omega_j(t)\right]^2\dot{\upsilon}^{j+1/2},\\ \theta^{\Delta t}(t)=\theta^j+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}\quad\forall t\in[t_j,t_{j+1}]\quad j=0,1\ \dots\ N-1,\end{cases}\tag{4.115}$$

коефіцієнти яких обчислюються однокроковою рекурентною схемою(4.83) . На додаток до цього припустимо, що послідовність частинами визначених наближень $\{l_{j+\gamma}\}_{j\ge0}\subset\mathbf{V}'$ *та* $\{\mu_{j+\gamma}\}_{j\ge0}\subset G'$ *апроксимує функціонали даних варіаційних рівнянь* $l(t)\in\mathbf{V}'$ *та* $\mu(t)\in G'$ *в тому сенсі, що знайдуться такі сталі* $C>0$ *та* $p\ge1$ *такі, що допускають оцінку*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2\right]d\tau\le C\Delta t^{2p+1}\quad j=0,1,\ \dots.\tag{4.116}$$

Тоді однокрокова рекурентна схема (4.83) апроксимує варіаційну задачу (4.50) і, більше цього, для похибок апроксимації зміщення та температури

$$\mathbf{E}(t) := \{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\} = \{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta(t) - \theta^{\Delta t}(t)\} \in \mathbf{V} \times G$$

будуть правильними такі апостеріорні оцінки

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[\| \mathbf{e}'(t_{n+1}) \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{e}(t_{n+1}) |_{\mathbf{V}}^2 + \| \varepsilon(t_{n+1}) \|_H^2] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}^2 + | \varepsilon(\tau) \|_G^2] d\tau \\ &\le CT\left\{\Delta t^{2p} + \Delta t^2 \max_{j=0,\dots,n}\left[\| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\upsilon}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G^2\right]\right\} \quad n = 0,1,\dots,N-1, \end{aligned} \tag{4.117}$$

де $C = const > 0$, *значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.*

Доведення. Достатньо підставити (4.116) до (4.114). ▲

4.2.10 Збіжність однокрокової рекурентної схеми

Теорема 4.10 про збіжність однокрокової рекурентної схеми.

Нехай для кожного $N \in \mathbb{N}$ *послідовності трійок* $U_{\Delta t} = \left\{\mathrm{u}^j, \upsilon^j, \theta^j\right\}_{j=0}^{N} \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G$, $N\Delta t = T$, *обчислюються однокроковою рекурентною схемою (4.83) зі значеннями параметрів* γ *та* β, *які задовольняють умови*

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \le \beta \le 1. \tag{4.118}$$

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. *Обчислені таким способом послідовності* $U_{\Delta t} = \left\{\mathrm{u}^j, \upsilon^j, \theta^j\right\}_{j=0}^{N}$ *є обмеженими в нормі простору* $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G$; *знайдеться* $C = const > 0$ *така, що*

$$\frac{1}{2}[\|\upsilon^{n+1}\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathrm{u}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{n+1}\|_H^2]+\frac{1}{2}\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\upsilon^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{j+1/2}\|_G^2]\le$$

$$\le\frac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}_0\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}_0|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta_0\|_H^2]+\frac{1}{2}\Delta t\,C\sum_{j=0}^{n}[\|l_{j+1/2}\|_{\mathbf{V}'}^2+\|\mu_{j+1/2}\|_{G'}^2]+\frac{1}{4}\Delta t^2|\upsilon_0|_{\mathbf{V}}^2 \quad (4.119)$$

$$n=0,1,\ \dots\ N-1.\ \blacktriangle$$

2. *Кожна з послідовностей* $U_{\Delta t}=\left\{\mathrm{u}^j,\upsilon^j,\theta^j\right\}_{j=0}^{N}$ *генерує частинами визначену вектор–функцію* $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in C^1(0,T;\mathbf{V})\times C^0(0,T;G)$, *кожна ланка якої набуває вигляду*

$$\begin{cases}\mathrm{u}^{\Delta t}(t)=\mathrm{u}^j+\Delta t\omega_j(t)\upsilon^j+\frac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\upsilon}^{j+1/2},\\ \theta^{\Delta t}(t)=\theta^j+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}\ \forall t\in[t_j,t_{j+1}]\quad j=0,1\ \dots\ N-1.\end{cases} \quad (4.120)$$

На додаток до цього, якщо послідовності $\{l_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1}\subset\mathbf{V}'$ *та* $\{\mu_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1}\subset G'$ *наближають функціонали* $l(t)\subset\mathbf{V}'$ *та* $\mu(t)\subset G'$ *варіаційної задачі (4.50) так, що*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\|l(\tau)-l_{j+1/2}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+1/2}\|_*^2\right]d\tau\le C\Delta t^{2p+1},\ j=0,1,\ \dots N-1, \quad (4.121)$$

то знайдена пара $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *апроксимує розв'язок* $\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *задачі (4.50) і її похибка* $\mathbf{E}(t):=\{\mathbf{e}(t),\varepsilon(t)\}=\{\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}^{\Delta t}(t),\theta(t)-\theta^{\Delta t}(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *характеризується такою оцінкою*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{n+1})\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_{n+1})|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_{n+1})\|_H^2]+\frac{1}{2}\int_0^{t_{n+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\le\\ &\le CT\left\{\Delta t^{2p}+\Delta t^2\max_{j=0,\dots,n}\left[\|\boldsymbol{\upsilon}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\upsilon}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\theta}^{j+1/2}\|_G^2\right]\right\}\ n=0,1,\dots,N-1.\end{aligned} \quad (4.122)$$

3. *Послідовність апроксимацій* $\left\{\mathrm{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *збігається до розв'язку* $\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *варіаційної задачі (4.50) разом із* $\Delta t\to 0$ *і в нормі*

$$\|\{\mathrm{u}^{\Delta t},\theta^{\Delta t}\}\|^2:=\left[\|\mathbf{u}'(T)\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}(T)|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta(T)\|_H^2\right]+\int_0^T\left[\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\theta(\tau)\|_G^2\right]d\tau \quad (4.123)$$

порядок швидкості збіжності цих похибок буде не меншим від

$$q = \sqrt{\min\{1, p\}} \tag{4.124}$$

точніше,

$$\| \{\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\Delta t}, \theta - \theta^{\Delta t}\} \| \le \Delta t^q \left\{ CT \left[\Delta t^{p-2q} + \Delta t^{2(1-q)} \max_{j=0,\dots,n} (\| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G^2) \right] \right\}^{1/2}.$$

Доведення. Два перших твердження визначають стійкість та апроксимативність однокрокової рекурентної схеми (4.83) і становлять незначне переформулювання теорем 4.8 та 4.9. Третє твердження з огляду на теорему Лакса–Філіпова (див., наприклад [82]), є безпосереднім наслідком теорем 4.8 та 4.10. ▲

4.2.11 Висновки

Побудувано числову схему інтегрування в часі лінійної початково–крайової задачі акустики в’язкої теплопровідної рідини, поводження хвиль в якій характеризується взаємозв’язаністю теплового та механічного полів, що відображено у фундаментальних рівняннях початково–крайової задачі (4.50) так її варіаційному варіанті (4.60). Подібні моделі процесу поширення акустичних хвиль у рідині розглядалися в працях [86, 88], а також в статті [85], де додатково припускали безвихрову структуру поля акустичних зміщень рідини. Іншою відмінністю цитованої статті [85] є побудова та аналіз двокрокових схем інтегрування за часовою змінною, які, на противагу пропонованій нами однокроковій схемі, потребують певної апроксимації початкових умов задачі та дослідження її властивостей у просторах $H(div, \Omega)$. Побудована рекурентна схема (4.83) грунтується на частинами визначених поліноміальних апроксимаціях (4.105), структура яких дозволяє точно задовольняти початкові умови задачі (4.50) і, з тих чи інших міркувань,

змінювати величину кроку інтегрування в часі без порушення однорідності рекурентних обчислень, за деталями див. [84]. Якщо аналіз збіжності цієї схеми в цілому засновано на традиційних енергетичних міркуваннях [82–84], то її апроксимативність виконано за допомогою конструювання апостеріорних оцінок похибок, що містять показники швидкості збіжності в явному вигляді. Цей інструмент закладає ґрунтовну основу для розробки $\Delta t-$адаптивних схем інтегрування в часі задач акустики та споріднених з ними, зокрема, задач термопружності.

Зрештою, природа варіаційної задачі (4.50) дає змогу вживати для її дискретизації за просторовими змінними класичні простори апроксимацій методу скінченних елементів, а отже, й великі можливості виконання комп'ютерних експериментів із застосуванням добре розвинутих програмних реалізацій його схем, зокрема, і $h-$адаптивних.

5 АДАПТИВНІ АПРОКСИМАЦІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

5.1 Змішані апроксимації МСЕ для методу найменших квадратів та їхні апостеріорні оцінювачі похибок

Класичні реалізації МСЕ на базі методу Гальоркіна, погано справляються з цим класом задач, якщо в них присутні великі значення чисел Пекле та Струхаля. За певного набору початкових та крайових умов, крайові задачі для таких рівнянь стають сингулярно збуреними і їхні розв'язки породжують примежові та внутрішні шари. Загальновживані апроксимації МСЕ розв'язків таких задач характеризуються втратою стійкості і за розумних обчислювальних затрат навіть не відтворюють структуру розв'язку [72].

З огляду на ці обставини тут сконструйовано схеми МСЕ на підставі методу найменших квадратів (МНК) для розв'язування задач міграції домішок. Цей підхід зараз інтенсивно розвивається [94, 96, 98] і має певні переваги порівняно з класичними МСЕ, зокрема: 1) система лінійних алгебраїчних рівнянь МСЕ для відшукання коефіцієнтів апроксимації розв'язку завжди симетрична і додатно–визначена; 2) зменшуються паразитичні осциляції розв'язків [96]; 3) дозволяє знайти не тільки концентрацію домішок, але і їх потоки з однаковою точністю, що в деяких задачах є більш цінною характеристикою.

В даній роботі розглянуто застосування МНК для одновимірної та двовимірної задач конвекції–дифузії–реакіці. У 1D випадку використано кусково–лінійні та кусково–кубічні апроксимації Ерміта як для апроксимації розв'язку так і потоку. У випадку 2D вжито кусково–квадратичні апроксимації та кусково–лінійні вектор–функції Рав'яра–Тома [97] для апроксимації потоку.

5.1.1 Постановка крайової задачі

5.1.1.1 Рівняння конвекції–дифузії

Задачі конвекції–дифузії є базовими для проектування числових схем, які здатні переборювати складнощі математичних моделей механіки рідини і газу. Принципові особливості фізико–хімічних процесів в механіці рідини і газу породжені з урахуванням руху середовищ під дією тих чи інших сил подано в монографії [89]. Зокрема, відзначається, що при розгляді нестаціонарних процесів конвекції–дифузії в дивергентній формі, базовим виступає рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.(\mathbf{a}(x,t).u) - \nabla.(k(x)\nabla u) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega, \quad 0 \le t \le T. \tag{5.1}$$

Якщо розглядати процес конвекції–дифузії без урахування часу, то рівняння (5.1) можна записати в такому вигляді

$$-\nabla.(k(x)\nabla u(x)) + \mathbf{a}(x)\nabla.u = f(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{5.2}$$

5.1.1.2 Формулювання крайової задачі

Нехай Ω є зв'язною обмеженою множиною точок $x = \{x_i\}_{i=1}^{d}$, $d = 1,2$, евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею $\Gamma := \partial\Omega$. Розглянемо крайову задачу для еліптичного рівняння такого вигляду:

знайти функцію таку, що є розв'язком рівняння

$$-\nabla.(k\nabla u) + \mathbf{a}.\nabla u + \sigma u = f \text{ в } \Omega \tag{5.3}$$

і задовольняє крайову *умову*

$$\begin{aligned} &u = g \text{ на } \Gamma_u, \Gamma_u \subset \Gamma, mes\,\Gamma_u > 0, \\ &-k\nabla u.\mathbf{n} = \alpha(u - u_*) \text{ на } \Gamma_p = \Gamma \backslash \Gamma_u. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Тут $k = k(x)$, $\mathbf{a} = (a_1(x), a_2(x))^T$, $\sigma = \sigma(x)$, $f = f(x)$ є заданими функціями такими, що

$$k(x) > 0 \text{ і } \sigma(x) \geq 0 \text{ майже скрізь в області } \Omega, \tag{5.5}$$

$$k, a_1, a_2, \sigma \in L^\infty(\Omega),\ f \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Omega). \tag{5.6}$$

Щодо фізичних змісту коефіцієнтів рівняння, то вони є наступними: $k = k(x) > 0$ – коефіцієнт дифузії, $\mathbf{a} = (a_1(x), a_2(x))^T$ – вектор швидкості конвективного перенесення, $\sigma = \sigma(x)$ – коефіцієнт біохімічного розпаду і $f = f(x)$ є інтенсивність розподілених джерел субстанції.

Щоб розв'язати задачу (5.3), (5.4) ми вводимо поряд з невідомою функцією її потік $\mathbf{p} = -k\nabla u + u\mathbf{a}$, в результаті чого приходимо до задачі вигляду:

$$\begin{aligned} &-k\nabla u + \mathbf{p} - u\mathbf{a} = 0,\ \ \nabla.\mathbf{p} + (\sigma - \nabla.\mathbf{a})u = f \ \ в \ \ \Omega \\ &u = g \ \ на \ \ \Gamma_u, \Gamma_u \subset \Gamma, mes\,\Gamma_u > 0, \\ &\mathbf{p}.\mathbf{n} = (\alpha + \mathbf{a}.\mathbf{n})u - \alpha u_* \ \ на \ \ \Gamma_p = \Gamma \backslash \Gamma_u. \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.2 Постановка варіаційної задачі

5.1.2.1 Задача мінімізації функціоналу найменших квадратів

В двовимірному випадку простори допустимих функцій мають наступну структуру:

$$u \in V := H^1(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to R : \int_\Omega [|v|^2 + |\nabla u|^2] dx < \infty,\ v|_\Gamma = g \right\},$$

$$\mathbf{p}(x) \in Q := \mathrm{H}(div, \Omega) := \left\{ v = \{v_1, v_2\} : v_i, div\, v \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Введемо добуток цих просторів $\Phi := V \times Q$.

Для розв'язування задачі (5.7) скористаємося методом найменших квадратів (МНК), він полягає в тому, щоб мінімізувати на $\Phi = V \times Q$ квадратичний функціонал такого вигляду:

$$J(u,\mathbf{p}) := \int_{\Omega} \{[\nabla.\mathbf{p} + (\sigma - \nabla.\mathbf{a})u - f]^2 + (\mathbf{p} + k\nabla u - u\mathbf{a})^2\}dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_u} (u-g)^2 d\gamma + \int_{\Gamma_p} [\mathbf{n}.\mathbf{p} - (\alpha + \mathbf{a}.\mathbf{n})u + \alpha u_*]^2 d\gamma \qquad (5.8)$$
$$\forall \{p,u\} \in \Phi = V \times Q.$$

Коротко задача мінімізації функціоналу J запишеться так:

$$\begin{cases} \textit{Знайти вектор } \omega = (u,\mathbf{p}) \in \Phi \textit{ такий, що} \\ J(\omega) \le J(\psi) \qquad \forall \psi = (v,\mathbf{q}) \in \Phi. \end{cases} \qquad (5.9)$$

Цілком зрозуміло, що найменше значення функціоналу $J(\omega)$ дорівнює нулеві і розв'язок $\omega = (u,\mathbf{p})$ задачі (5.7) надає цьому функціоналу найменшого значення. З цього випливає, що задачі (5.9) і (5.7) є еквівалентними.

5.1.2.2 Варіаційні рівняння найменших квадратів

Задачу (5.9) можна переписати в наступній, еквівалентній її, варіаційній постановці:

$$\begin{cases} \textit{Знайти } \omega = (u,\mathbf{p}) \in \Phi \textit{ такий, що} \\ B(\omega;\psi) = L(\psi) \;\; \forall \psi = (v,\mathbf{q}) \in \Phi, \end{cases} \qquad (5.10)$$

де

$$B(\psi;\varphi) := (\nabla.\mathbf{p} + (\sigma - \nabla.\mathbf{a})\, u, \nabla.\mathbf{q} + (\sigma - \nabla.\mathbf{a})\, v)_0 +$$
$$+ (\mathbf{p} + k\nabla u - u\mathbf{a}, \mathbf{q} + k\nabla v - v\mathbf{a})_0,$$
$$L(\varphi) := (f, \nabla.\mathbf{q} + (\sigma - \nabla.\mathbf{a})v)_0,$$
$$(u,v)_0 := \int_{\Omega} uv\,dx, \;\; (\mathbf{p},\mathbf{v})_0 := \int_{\Omega} \mathbf{p}.\mathbf{v}\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} p_i v_i\,dx.$$

Ця варіаційна задача є коректно поставленою тому, що виконуються умови теореми Лакса–Мільграма–Вишика [98]. Задовольняючи ці умови, білінійна форма $B(\cdot,\cdot):\Phi\times\Phi\to R$ варіаційної задачі (5.10) визначає норму в просторі допустимих функцій Φ, її ще називають енергетичною нормою розв'язку:

$$\left|\omega\right|_{\Phi} := \sqrt{B(\omega,\omega)}\ \forall\omega\in\Phi. \tag{5.11}$$

Зауваження. Повертаючись до задачі (5.9), запишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} J(u,\mathbf{p}) &\le J(u+\varepsilon v,\mathbf{p}+\varepsilon\mathbf{q}) = J(u,\mathbf{p}) = \\ &= 2\varepsilon\int_{\Omega}[(\nabla.\mathbf{p}+a.\nabla u+\sigma u-f)(\nabla.\mathbf{q}+a.\nabla v+\sigma v)+ \\ &+(\mathbf{p}+k\nabla u)(\mathbf{q}+k\nabla v)]dx+ \\ &+\varepsilon^2\int_{\Omega}[(\nabla.\mathbf{q}+a.\nabla v+\sigma v)^2+(\mathbf{q}+k\nabla v)^2]dx. \end{aligned} \tag{5.12}$$

або з огляду на (5.10)

$$0\le 2\varepsilon[B(\omega,\phi)-L(\phi)]+\varepsilon^2 B(\phi,\phi)\ \forall\varepsilon\in R,\ \forall\phi=(v,\mathbf{q})\in\Phi. \tag{5.13}$$

Звідси випливає, що

(!) якщо пара $\omega=(u,\mathbf{p})\in\Phi$ є розв'язком задачі мінімізації (5.9), то вона одночасно є розв'язком варіаційної задачі (5.10),

(!!) якщо пара $\omega=(u,\mathbf{p})\in\Phi$ є розв'язком (5.10), то на основі (5.12)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[J(u+\varepsilon v,\mathbf{p}+\varepsilon\mathbf{q})-J(u,\mathbf{p})]}{\varepsilon}=\int_{\Omega}[(\nabla.\mathbf{q}+a.\nabla v+\sigma v)^2+(\mathbf{q}+k\nabla v)^2]dx=0.$$

Отже пара $\omega=(u,\mathbf{p})\in\Phi$ є точкою мінімального значення функціоналу $J(v,\mathbf{q})$.

5.1.3 Апроксимація розв'язку і потоку

5.1.3.1 Одновимірний випадок

В одновимірному випадку наша область Ω є відрізком, тому надалі ми будемо використовувати в цьому розділі відрізок $[b;c]$ замість Ω.

Візьмемо натуральне число N і поділимо відрізок $[b;c]$ на скінченні елементи $K_i := [x_i, x_{i+1}]$ однакової довжини $h := (c-b)/N$, $i = 0,1,..,N-1$, де $b = x_0 < x_1 < ... < x_N = c$. Для знаходження розв'язку задачі (5.10) використано кусково–лінійні функції Куранта і кусково–кубічні функції Ерміта.

5.1.3.1.1 Кусково–лінійні апроксимації

Для того щоб знайти розв'язок задачі (5.10) ми функцію u і потік $\mathbf{p}$ апроксимуємо і переписуємо в наступному вигляді $u \approx u_h = \sum_{i=0}^{N} c_i \phi_i(x)$, $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_h = \sum_{i=0}^{N} d_i \phi_i(x)$. На кожному скінченному елементі K_i складові шуканого розв'язку ω, функція u і її потік $\mathbf{p}$, задачі (5.10) приймають такі значення:

$$\begin{aligned} &u(x) \approx u_h(x) := c_i \phi_i(x) + c_{i+1} \phi_{i+1}(x) \\ &\mathbf{p}(x) \approx \mathbf{p}_h(x) := d_i \phi_i(x) + d_{i+1} \phi_{i+1}(x) \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \end{aligned} \tag{5.14}$$

де ϕ_i – це функції–капелюшки Куранта.

5.1.3.1.2 Кусково–кубічні апроксимації Ерміта

Також для апроксимації функції u і її потоку $\mathbf{p}$ були використані кусково–кубічні апроксимації Ерміта. В цьому випадку функція u і її потік $\mathbf{p}$ набуває такого вигляду $u \approx u_h = \sum_{i=0}^{N}[c_i\phi_i(x) + c_i^{'}\psi_i]$, $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_h = \sum_{i=0}^{N}[d_i\phi_i(x) + d_i^{'}\psi_i]$, де

$$\phi_i(x) = \begin{cases} H_{i-1}^2(x)(1+2H_i(x)) \; x \in [x_{i-1}; x_i] \\ H_i^2(x)(1+2H_{i-1}(x)) \; x \in [x_i; x_{i+1}] \\ 0, \; \textit{інакше}, \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} hH_{i-1}^2(x)H_i(x) \quad x \in [x_{i-1}; x_i] \\ -hH_i^2(x)H_{i-1}(x) \; x \in [x_i; x_{i+1}] \\ 0, \; \textit{інакше}, \end{cases}$$

$$H_{i-1} = -\frac{x - x_i}{h} \quad H_i = \frac{x - x_{i-1}}{h} \quad h := \frac{c-b}{N}.$$

5.1.3.2 Двовимірний випадок

5.1.3.2.1 Тріангуляція області та інтерполювання на трикутниках

В двовимірному випадку ми ділимо область Ω на N трикутників, як це зображено на рисунок 5.1, $T_h = \{K_i\}_{i=1}^{N}$ – поділ області Ω:

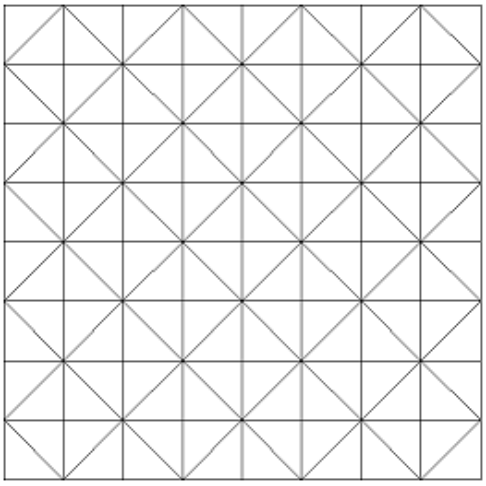


Рисунок 5.1 – Тріангуляція області Ω.

Розділимо кожну із сторін S_i $(i = 1,2,3)$ трикутника K на m рівних частин і з'єднаємо одержані точки поділу відрізками, паралельними до сторін так, щоб утворилось N^2 подібних трикутників (див. рисунок 5.2). Вершини усіх цих трикутників і вибираються за вузли інтерполювання.

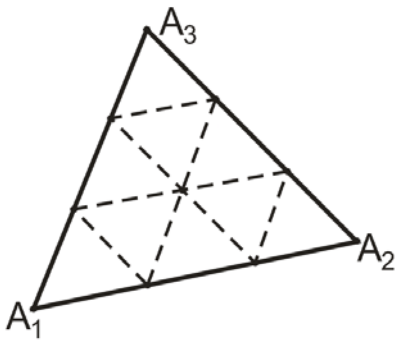


Рисунок 5.2 – Вузли інтерполювання ($m = 3$).

Позначимо через $P_m(K)$ $P_m(K)$ простір всеможливих поліномів m–го порядку, визначених на трикутнику K. Очевидно, що розмірність цього простору

$$\dim P_m(K) = N = (m+1)(m+2)/2. \quad dim P_m(K) = N = (m+1)(m+2)/2 \tag{5.15}$$

Нижче для апроксимації концентрації використано базиси з простору $P_2(K)$ $P_1(K)$.

5.1.3.2.2 Барицентричні координати

Нехай трикутник K Kутворено вершинами $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1,2,3)$ $A_i(x_i, y_i), i = 1,2,3,$ які занумеровано в порядку їх обходу проти годинникової стрілки. Сторону трикутника, яка лежить навпроти вершини A_i, позначатимемо S_i.

Введемо до розгляду на цьому трикутнику набір сталих

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad s_i = -(x_j - x_m) \\ 2|K| \equiv J_k := s_j b_i - s_i b_j, \; i \to j \to m \to i, \quad i, j, m = 1,2,3. \end{cases} \tag{5.16}$$

та лінійних функцій

$$L_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2|K|} \qquad \forall x, y \in K. \tag{5.17}$$

Сукупність функцій $\{L_i(x, y)\}_{i=1}^{3}$ $\{L_i(x, y)\}_{i=1}^{3}$ називають системою барицентричних координат на трикутнику K. Вони володіють такими властивостями

$$1 = \sum_{i=1}^{3} L_i, \quad x = \sum_{i=1}^{3} x_i L_i, \quad y = \sum_{i=1}^{3} y_i L_i \quad \forall (x, y) \in K. \tag{5.18}$$

5.1.3.2.3 Апроксимація розв'язку

На сітці із N трикутних скінченних елементів, як зображено на рисунок 5.1 будуються кусково–квадратичні апроксимації функції u_h задачі (5.10) так,

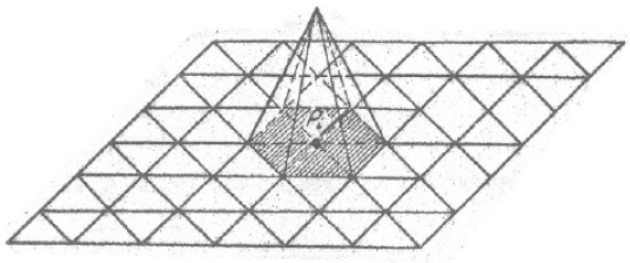
що на трикутнику з барицентричними координатами $\{L_i(x,y)\}_{i=1}^{3}$, функція u набуває такого вигляду:

$$u(x,y) \approx u_h(x,y) := \sum_{i=1}^{6} c_i \phi_i(x,y), \tag{5.19}$$

де квадратичні базисні функції ϕ_i записуються наступним чином:

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1(2L_1 - 1), \ \ \phi_2 = L_2(2L_2 - 1), \ \phi_3 = L_3(2L_3 - 1) \\ \phi_4 = 4L_1L_2, \qquad \phi_5 = 4L_2L_3, \qquad \phi_6 = 4L_1L_3. \end{cases} \tag{5.20}$$

Для цих базисних функцій крім вершин трикутника вводяться додаткові вузли на серединах сторін трикутника рисунок 5.4



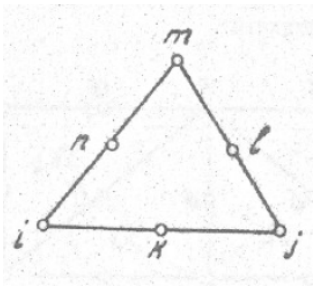


Рисунок 5.3 – Базисна функція. Рисунок 5.4 – Квадратичні апроксимації.

5.1.3.2.4 Апроксимація потоку

Для апроксимації потоку **p** використано кусково–лінійні векторні функції Рав'яра–Тома [97]. На кожному трикутному скінченому елементі з барицентричними координатами потік **p** задачі (5.10) набуває такого вигляду:

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_h := \sum_{j=1}^{3} d_j \boldsymbol{\psi}_j \,. \tag{5.21}$$

Позначимо через s_i сторону трикутника K, яка лежить навпроти вершини $A_i(x_i, y_i)$ (рисунок 5.6), тоді

$$n\Big|_{s_i} := \frac{1}{l_i}(-b_i, -c_i), \quad |s_i| \equiv l_i := (b_i^2 + c_i^2)^{1/2}. \tag{5.22}$$

Неважко переконатися, що вектор $\tau_i := (-c_i, b_i)$ описує вектор дотичної до сторони s_i (рисунок 5.5).

Отже інтерполяційний базис простору $H\ (div;\Omega)$ становлять функції

$$\psi_i(x,y) := \frac{l_i}{2|K|}(L_k\tau_j - L_j\tau_k) \quad \left(i \to j \to k \to i\right) \tag{5.23}$$

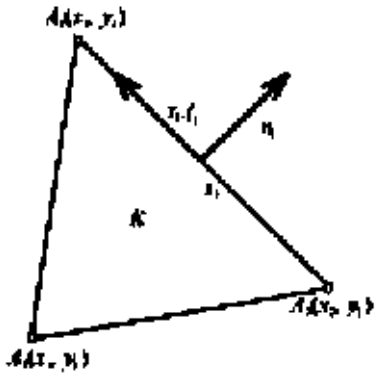


Рисунок 5.5 – Вектор дотичної до сторони s_i.

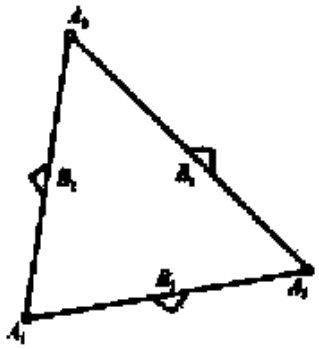


Рисунок 5.6 – Апроксимації Рав’яра – Тома.

5.1.4 Обчислення на скінченному елементі

Для відшукання коефіцієнтів c_i і d_j з (5.19) і (5.21) методом найменших квадратів будується відповідна система лінійних алгебричних рівнянь з матрицею стрічкового вигляду, тому для її розв'язування використовується модифікований алгоритм Гаусса для стрічкових матриць.

5.1.4.1 Одновимірний випадок

Проміжок $[b;c]$ ми покриваємо сіткою вузлів $b = x_0 < x_1 < ... < x_N = c$ з кроком $h = (b - c) / h$ і використовуємо раніше описані базисні функції МСЕ.

5.1.4.1.1 Кусково–лінійні апроксимації

Для формування СЛАР обчислюємо похідні від $J(\omega)$ по d_i і c_i, які приводять до системи лінійних алгебричних рівнянь з матрицею $A = \left\{a_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{2N-2}$ та вектором правої частини $B = \left\{b_i\right\}_{i=1}^{2N-2}$ з ненульовими коефіцієнтами вигляду

$$\begin{cases} a_{i,i} := \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\frac{k^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} + \frac{2a\sigma\phi_i}{h} + \sigma^2\phi_i^2]dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [\frac{k^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{2a\sigma\phi_i}{h} + \sigma^2\phi_i^2]dx,\ i \bmod 2 = 1 \\ a_{i,i} := \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\phi_i^2 + \frac{1}{h^2}]dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [\phi_i^2 + \frac{1}{h^2}]dx,\ i \bmod 2 = 0 \\ a_{i,i+2} \equiv a_{i+2,i} := \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [-\frac{k^2}{h^2} - \frac{a^2}{h^2} + \frac{a\sigma\phi_i}{h} - \frac{\sigma a\phi_{i+1}}{h} + \sigma^2\phi_i\phi_{i+1}]dx, i \bmod 2 = 1 \\ a_{i,i+2} \equiv a_{i+2,i} := \frac{h}{6} - \frac{1}{h}, i \bmod 2 = 0 \\ b_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\frac{a}{h} f + \phi_i\sigma \times f]dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [-\frac{a}{h} f + \sigma\phi_i \times f]dx, i \bmod 2 = 1 \\ b_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f}{h}dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f}{h}dx, i \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

5.1.4.1.2 Кусково–кубічні апроксимації

У випадку коли ми апроксимуємо функцію u і її потік **p** кусково–кубічними базисними функціями Ерміта, то кількість невідомих збільшується вдвічі тому, що ми ще шукаємо крім значення самої функції і її похідну тому для формування СЛАР ми беремо похідні від $J(\omega)$ по d_i, d_i', c_i і c_i', $i = 1, 2, ..., N-1$.

5.1.4.1.3 Застосування квадратурних формул Гаусса

Для обчислення визначених інтегралів при побудові матриць використовуються квадратурні формули Гаусса.

Для апроксимації розв’язку задачі (5.10) використовуються кусково–лінійні та кусково–кубічні базисні функції. В інтегралах, які формують СЛАР, максимальний степінь підінтегральної функції для кусково–лінійних

апроксимацій є два і шість для кусково–кубічних. Тому для обчислення застосовуються квадратурні формули Гаусса з використанням чотирьох точок на які розбивається відрізок $[b;c]$.

5.1.4.2 Двовимірний випадок

На кожному трикутному елементі K нам потрібно розв'язати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline B^T & A \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ < r,\phi_k > \\ \\ \\ \\ \\ \hline \\ < l,\psi_m > \\ \\ \end{array}\right], \qquad (5.24)$$

де

$$C_{i,j} = \int_\Omega [\mathbf{a}.\nabla\phi_i \times \mathbf{a}.\nabla\phi_j + \mathbf{a}.\nabla\phi_i \times \sigma\phi_j + \sigma\phi_i \times \mathbf{a}.\nabla\phi_j + \sigma\phi_i \times \sigma\phi_j + k\nabla\phi_i \times k\nabla\phi_j]dx$$

$$B_{i,j} = \int_\Omega [\nabla.\boldsymbol{\psi}_i \times \mathbf{a}.\nabla\phi_j + \nabla.\boldsymbol{\psi}_i \times \sigma\phi_j + \boldsymbol{\psi}_i \times k\nabla\phi_j]dx$$

$$A_{i,j} = \int_\Omega [\nabla.\boldsymbol{\psi}_i \times \nabla.\boldsymbol{\psi}_j + \boldsymbol{\psi}_i \times \boldsymbol{\psi}_j]dx$$

$$< r,\phi_k > = \int_\Omega [f \times \mathbf{a}.\nabla\phi_k + f \times \sigma\phi_k]dx$$

$$< l,\psi_m > = \int_\Omega [f \times \nabla.\boldsymbol{\psi}_m]dx\,.$$

5.1.4.2.1 Застосування квадратурних формул Гаусса

Для обчислення визначених інтегралів при побудові локальних матриць використовуються квадратурні формули Гаусса. Оскільки обчислення на кожному скінченному елементі зводяться до обчислень на базовому елементі, то для інтегрування використовуємо формулу

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f\left(L_1, L_2, L_3\right) dL_1 dL_2 \approx \sum_{i=1}^{p} c_i f\left(x_i\right), \quad L_3 = 1 - L_1 - L_2. \tag{5.25}$$

де C_i – вагові коефіцієнти квадратурної формули, а x_i – відповідні точки на базовому скінченному елементі.

Для апроксимації розв’язку задачі (5.10) були вибрані квадратичні базисні функції, а для його потоку лінійні і в інтегралах, які формують СЛАР (5.24) максимальний степінь підінтегральної функції є чотири. Тому для обчислення застосовуються квадратурні формули Гаусса п’ятого порядку, щоб забезпечити якомога більшу точність при розумних обчислювальних затратах.

5.1.5 Апостеріорний оцінювач похибки

Для оцінки похибки апроксимації використовується апостеріорний оцінювач похибки (АОП).

5.1.5.1 Одновимірний випадок

В одновимірному випадку в якості апостеріорного оцінювача похибки використовується розв’язок задачі (5.10) на вдвічі згущеній сітці, $\omega_{h/2}$. Знайшовши розв’язок задачі (5.10) на даній сітці, ω_h і на вдвічі згущеній $\omega_{h/2}$,

ми можемо обчислити відносну похибку розв'язку ω_h за допомогою наступної формули:

$$\rho = \frac{\left\| \omega_h - \omega_{h/2} \right\|_{\Phi}}{\left\| \omega_{h/2} \right\|_{\Phi}} \times 100\% . \qquad (5.26)$$

5.1.5.2 Двовимірний випадок

На кожному трикутному елементі *K*, в центрі ваги трикутника, для функції u_h вживається кусково – кубічний АОП такого вигляду:

$$\gamma_{\mathrm{K}} = \lambda_K b_K(x,y),\ b_K(x,y) = 27 L_1 L_2 L_3 \quad \forall K \in T_h . \qquad (5.27)$$

А для вектор – функцій $\mathbf{p}_h$ АОП визначений у вершинах трикутника і має такий вигляд:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = 3(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) \begin{pmatrix} \varepsilon_k^1 \\ \varepsilon_k^2 \end{pmatrix} \qquad \forall K \in T_h . \qquad (5.28)$$

Варіаційне формулювання задачі для АОП є наступним:

$$\begin{cases} \textit{Знайти}\ \zeta_K = (\gamma_K, \varepsilon_K) \in E_h \subset \Phi \setminus \Phi_{\mathrm{h}}\ \textit{такий, що} \\ \mathrm{B}(\zeta_h;\theta) = L(\theta) - \mathrm{B}(\omega_h,\theta)\ \forall \theta \in E_h . \end{cases} \qquad (5.29)$$

Для знаходження коефіцієнтів $\lambda_K, \varepsilon_K^1, \varepsilon_K^2$ будується відповідна СЛАР на основі варіаційної задачі (5.29). Знайшовши АОП, ми використовуємо його для оцінки відносної похибки знайденого розв'язку

$$\rho_h = \frac{\sqrt{\sum_{K \in T_h} \left\| \zeta_K \right\|_{\Phi}^2}}{\left\| \omega_h \right\|_{\Phi}} \times 100\% . \qquad (5.30)$$

5.1.6 Збіжність апроксимації

5.1.6.1 Двовимірний випадок

Проаналізуємо збіжність апроксимаційної послідовності $\{\omega_h\}$ до точного розв'язку ω задачі (5.10), покладаючись на значення норми похибки, яка накопичується на ітераційному кроці:

$$\left\|\zeta_h^j\right\|_\Phi := \sqrt{\sum_{K\in T_h}\left\|\zeta_K\right\|^2}\,, \tag{5.31}$$

де j – номер ітераційного кроку.

Тоді, використовуючи норму (5.11), можемо оцінити якість ітераційного процессу, порахувавши апостеріорний порядок збіжності:

$$C := 2\frac{\ln\left\|\zeta_h^0\right\|_\Phi - \ln\left\|\zeta_h^j\right\|_\Phi}{\ln N^j - \ln N^0}, \qquad j = 1,2,3,\ldots\,, \tag{5.32}$$

де N – це кількість вузлів.

5.1.7 Програмна реалізація

Програмна частина роботи реалізована у середовищі програмування Microsoft Visual Studio 2005 на мові програмування високого рівня C#.

Основу алгоритму становить набір класів для зберігання всіх необхідних структур (внутрішніх та граничних вузлів сітки, скінченних елементів, розв'язків), методів для ініціалізації цих структур та методів для ініціалізації СЛАР. Для розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь використовується модифікований стрічковий метод Гаусса, що

характеризується високою ефективністю та економією пам’яті для сильно розріджених систем великої розмірності.

Робочий простір програми поділяється на дві частини: вікно ініціалізації задачі та вікно результатів.

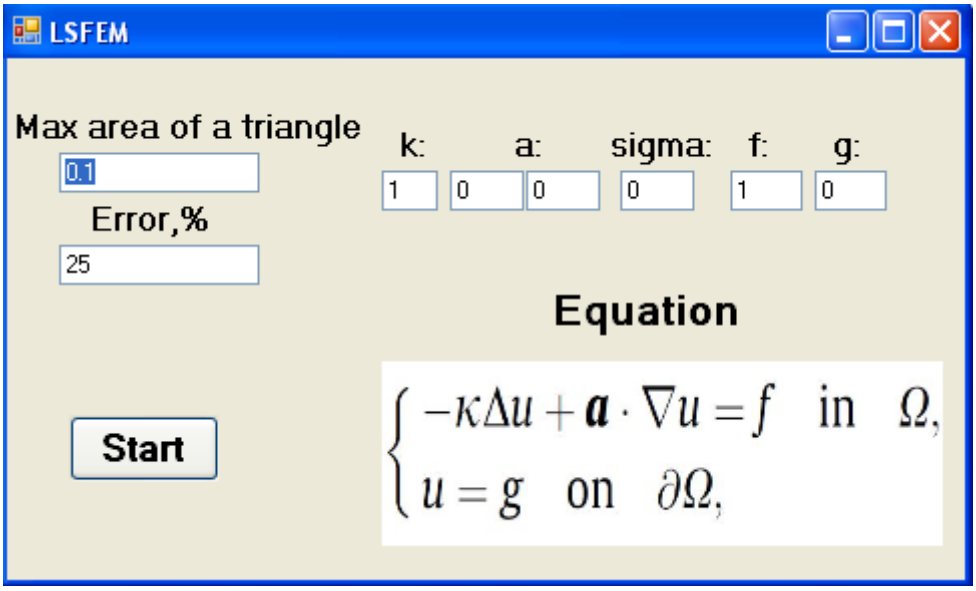


Рисунок 5.7 – Вигляд вікна ініціалізації задачі

У вікні ініціалізації задачі розміщені поля для введення вхідних даних. В лівому верхньому TextBox ми можемо ввести максимальну площу трикутника, на які будемо розбивати нашу область Ω. Нижче вводиться відносна похибка, з якою ми хочемо розв’язати дану задачу, яка зображена в “Equation”. В моїй програмі можна задавати значення функцій k, f, σ і вектора $\boldsymbol{a}$, якщо вони є сталими, безепосередньо у вікні ініціалізації. Якщо функції k, f і вектор $\boldsymbol{a}$ не є сталими, а якісь складніші, то ми можемо їх змінити в коді програми, якщо в нас виникне така потреба. Після того, як ми ввели всі початкові дані, ми можемо запускати ітераційний процес, натиснувши кнопку “Start”, і перед нами з’явиться вікно результатів (рисунок 5.8).

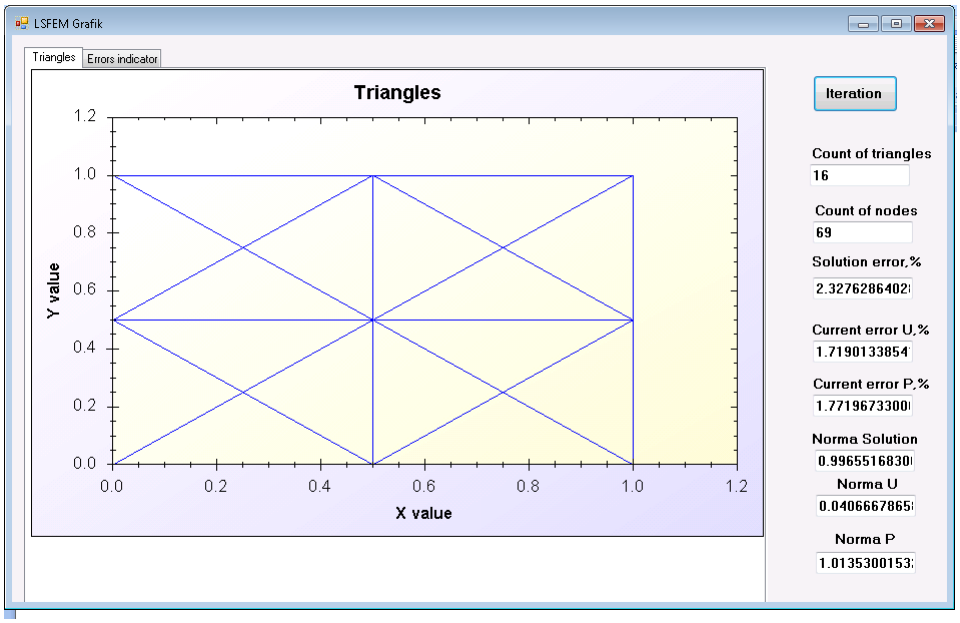


Рисунок 5.8 – Вікно результатів

У вікні з результатами розміщені отримані розрахунки і графіки тріангуляції області Ω та індикаторів похибок на скінченних елементах. В правих верхніх TextBox виводиться кількість скінчених елементів і кількість вузлів на даній ітерації. Нижче виводиться відносна похибка комплексного розв'язку ω_h та її компонент, функції u_h і потоку $\mathbf{p}_h$. Ще нижче зображено енергетичну норму розв'язку ω_h, функції $u_h(x)$ в просторі $H(\Omega)$, потоку $\mathbf{p}_h(x)$ в просторі $H(div,\Omega)$.

5.1.8 Аналіз числових результатів

5.1.8.1 Одновимірний випадок

Приклад 5.1.

$$-u''+100u'=100, \qquad u(1)=0,\, u(0)=0.$$

Графік точного розв’язку зображено на рисунок 5.9. На рисунок 5.10 зображено графіки кусково–лінійних апроксимацій (функції – зліва, потоку – справа), які мають відносну похибку не більше $\rho = 15\%$ на сітці із 128 елементів. На рисунок 5.11 подано графіки кусково–кубічних апроксимацій Ерміта з подібною похибкою на сітці із 32 скінчених елементів.

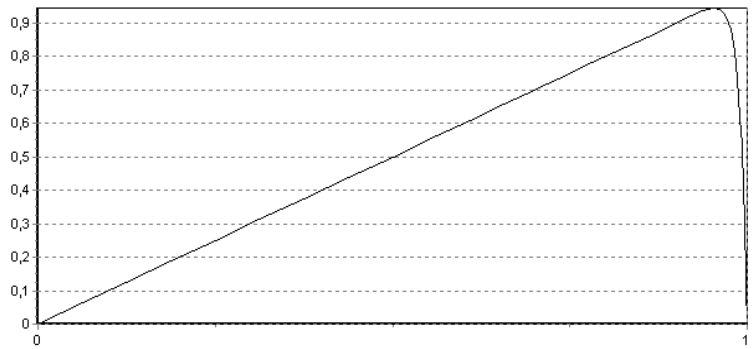


Рисунок 5.9 – Точний розв’язок (приклад 5.1)

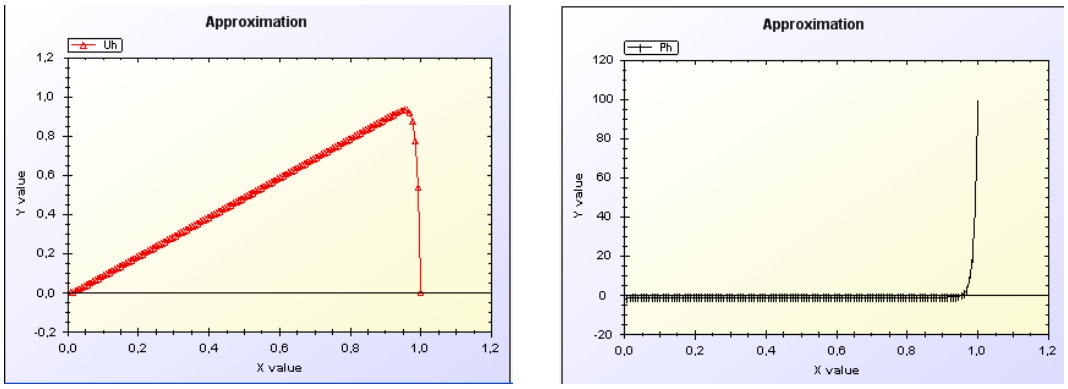


Рисунок 5.10 – Графіки кусково–лінійних апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.1). Сітка із 128 скінченних елементів.

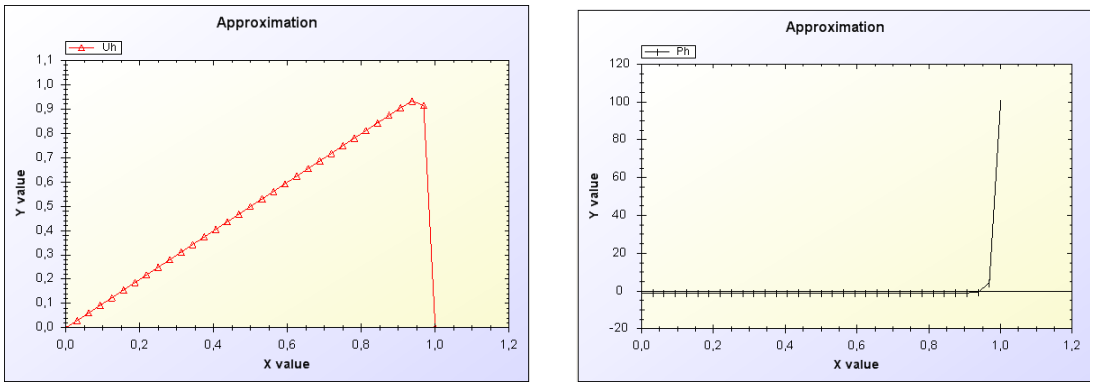


Рисунок 5.11 – Графіки кусково–кубічних апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.1). Сітка із 32 скінченних елементів.

Таблиця 5.1 – Збіжність кусково–кубічних апроксимацій (*приклад 5.1*).

Ітераційний крок	Кількість вузлів	$\|u_h\|_{H^1([a;b])}$	$\|\mathbf{p}_h\|_{H^1([a;b])}$	$\|\omega_h - \omega_{h/2}\|_{\Phi}$	$\rho(\omega_h)$, %
1	8	0,1929	0,8419	0,12238	72,3
2	16	0,2034	0,7103	0,056521	27,2
3	32	0,2041	0,7072	0,024514	13,78

В таблиці 5.1 подано значення норм u_h та потоків $\mathbf{p}_h$ в просторі $H^1([0;1])$, та енергетичну норму різниці комплексного розв'язку ω_h на даній та в двічі згущеній сітці. А також зображено відносну похибку комплексного розв'язку ω_h на даній ітерації.

Приклад 5.2.

$$-u''+1000u=1000, \quad u(1)=0,\ u(0)=0\,.$$

На рисунок 5.12 зображено графіки кусково–лінійних апроксимацій (функції зліва, потоку справа), які задовольняють відносну похибку $\rho = 5\%$ на сітці із 256 елементів. та з використанням кусково–лінійних апроксимацій. На рисунок 5.12 зображено графіки (функції зліва, потоку справа) на сітці із 64 скінчених елементів з використанням кусково–кубічних апроксимацій Ерміта.

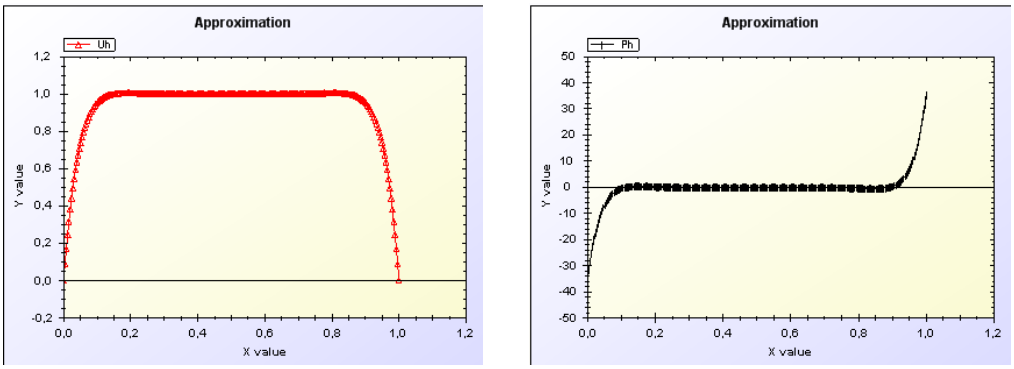


Рисунок 5.12 – Графіки кусково–лінійних апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.2). Сітка із 256 скінченних елементів.

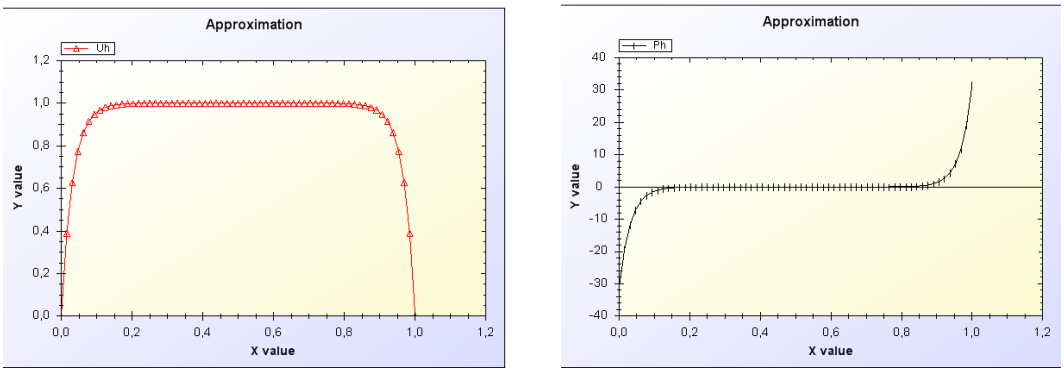


Рисунок 5.13 – Графіки кусково–кубічних апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.2). Сітка із 64 скінченних елементів.

Таблиця 5.2 – Збіжність кусково кубічних апроксимацій (приклад 5.2).

Ітераційний крок	Кількість вузлів	$\|u_h\|_{H^1([a;b])}$	$\|\mathbf{p}_h\|_{H^1([a;b])}$	$\|\omega_h - \omega_{h/2}\|_{\Phi}$	$\rho(\omega_h),\%$
1	8	0,6719	3,9807	0,0929	65,2
2	16	0,6723	3,9759	0,0355	25,1
3	32	0,6727	3,9763	0,0108	8,3
4	64	0,6726	3,9764	0,0029	3,01

В таблиці 5.2 подано норми функції u_h та її потоку $\mathbf{p}_h$ в просторі $H^1([0;1])$, та енергетичну норму різниці комплексного розв'язку ω_h на даній та в двічі згущеній сітці. А також зображено відносну похибку розв'язку ω_h на даній ітерації.

З отриманих результатів видно, що використання кусково–кубічних апроксимацій себе виправдовує і апроксимації u_h та $\mathbf{p}_h$ значно швидше збігаються до точного розв'язку, ніж у випадку з кусково–лінійними апроксимаціями.

5.1.8.2 Двовимірний випадок

Приклад 5.3.

$$-\Delta u + 10u = 10, \quad u\big|_{\Gamma} = 0.$$

Даний приклад розв'язано в області $\Omega = (0;1)^2$ із заданою відносною похибкою $\rho = 5\%$ для комплексного розв'язку ω_h, який складається з функції u_h та її потоку $\mathbf{p}_h$. На рисунках 5.14 та 5.15 зображено графічні розв'язки (функції зліва, потоку справа) при кількості скінченних елементів 16 та 62. На рисунку 5.16 зображено тріангуляцію області Ω на ітерації, на якій досягається

бажана точність апроксимаційного розв'язку ω_h. А на рисунку 5.17 зображено графіки функції u_h та її потоку $\mathbf{p}_h$ на даній ітерації.

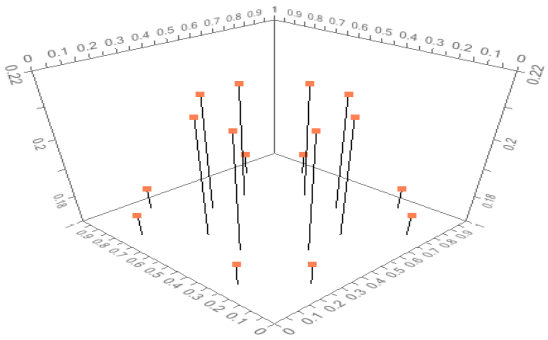


Рисунок 5.14 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.3). Сітка із 16 скінченних елементів.

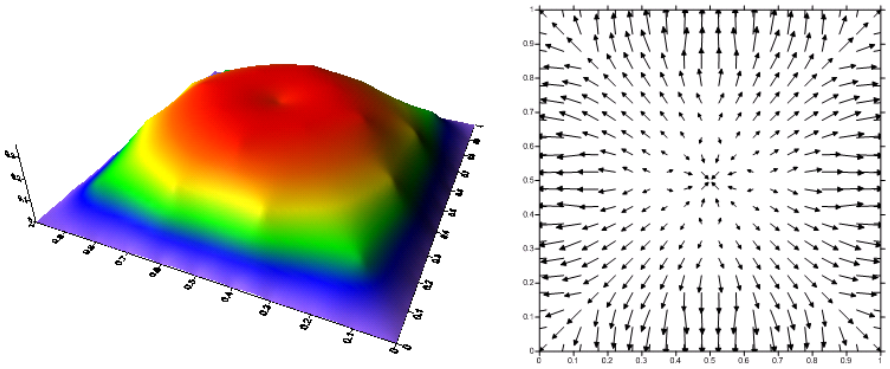


Рисунок 5.15 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.3). Сітка із 16 скінченних елементів.

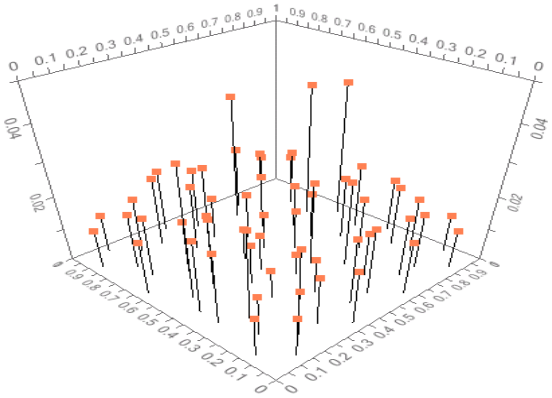


Рисунок 5.16 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.3). Сітка із 62 скінченних елементів.

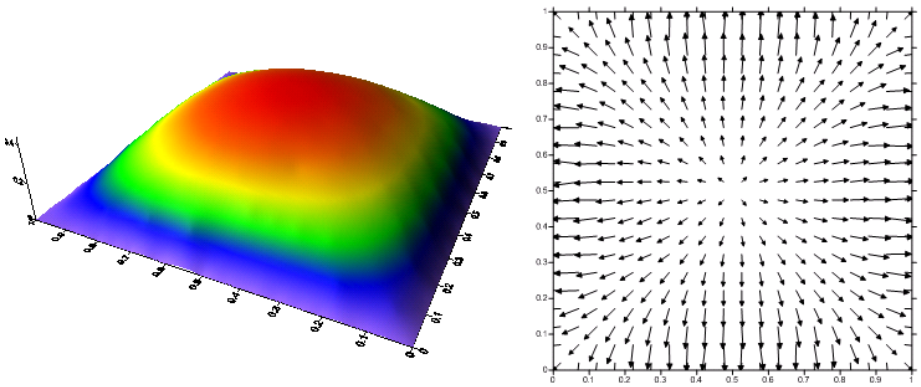


Рисунок 5.17 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.3). Сітка із 62 скінченних елементів.

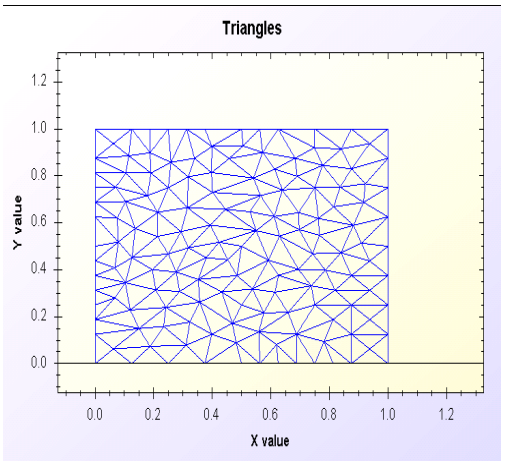


Рисунок 5.18 – Тріангуляція області Ω на останній ітерації (приклад 5.3). Сітка із 257 скінченних елементів.

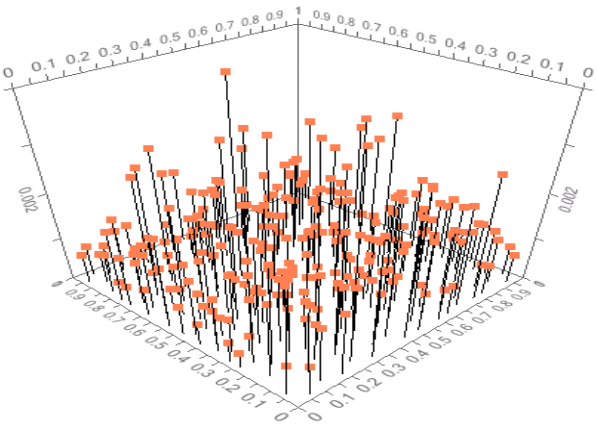


Рисунок 5.19 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.3). Сітка із 257 скінченних елементів.

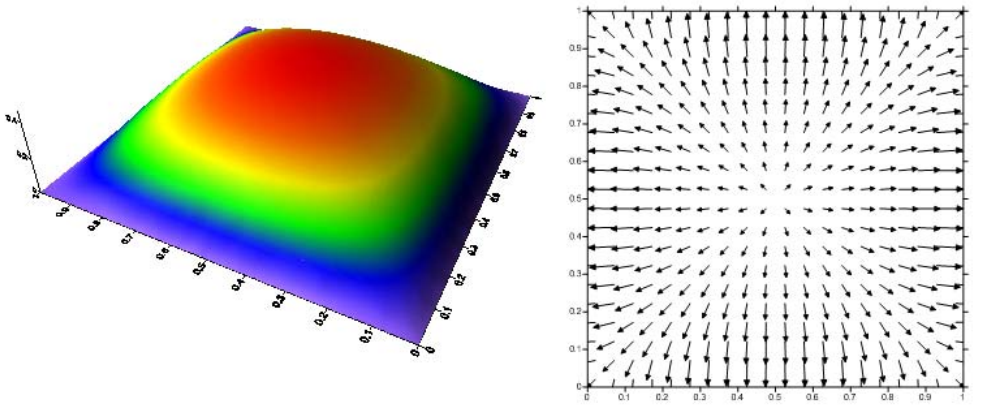


Рисунок 5.20 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.3). Сітка із 257 скінченних елементів.

Таблиця 5.3 – Збіжність апроксимацій (приклад 5.3).

ер	Кількість елементів	Кількість вузлів	$\|u_h\|_{H(\Omega)}$	$\|\mathbf{p}_h\|_{H(div;\Omega)}$	$\|\omega_h\|_{\Phi}$	$\|\zeta_h\|_{\Phi}$	C(ω_h
	16	69	0,24	8,04	9,95	1,76	
	62	245	0,26	7,94	9,98	1,04	0,91
	257	965	0,27	7,87	9,99	0,53	1,01

В таблиці 5.3 зображено чисельні обрахунки норм функції u_h в просторі $H(\Omega)$ та її потоку $\mathbf{p}_h$ в просторі $\mathrm{H}(div;\Omega)$, енергетичну норму комплексного розв'язку ω_h та апостеріорного оцінювача пихибки. Також пораховані і наведені в таблиці порядок збіжності даної схеми та відносна похибка комплексного розв'язку ω_h.

Приклад 5.4.

$$-\Delta u + (10;10).\nabla u = 100, \quad u\big|_{\Gamma} = 0 .$$

Даний приклад розв'язано в області $\Omega = (0;1)^2$ із заданою відносною похибкою $\rho = 5\%$ для комплексного розв'язку ω_h, який складається з функції

u_h та її потоку $\mathbf{p}_h$. На рисунках 5.22 та 5.24 зображено графічні розв'язки (функції зліва, потоку справа) при кількості скінченних елементів 62 та 257. На рисунку 5.25 зображено тріангуляцію області Ω на ітерації, на якій досягається бажана точність апроксимаційного розв'язку ω_h. А на рисунку 5.27 зображено графіки функції u_h та її потоку $\mathbf{p}_h$ на даній ітерації.

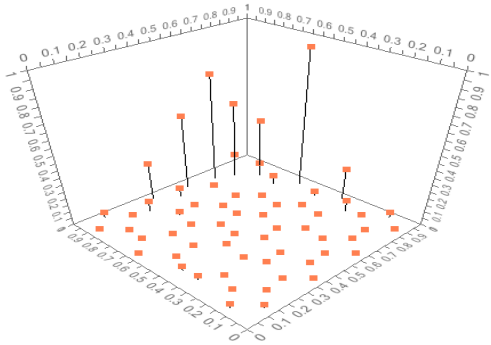


Рисунок 5.21 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.4). Сітка із 62 скінченних елементів.

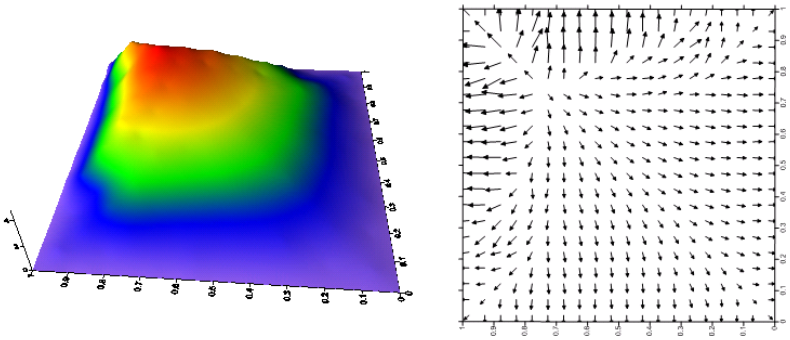


Рисунок 5.22 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.4). Сітка із 62 скінченних елементів.

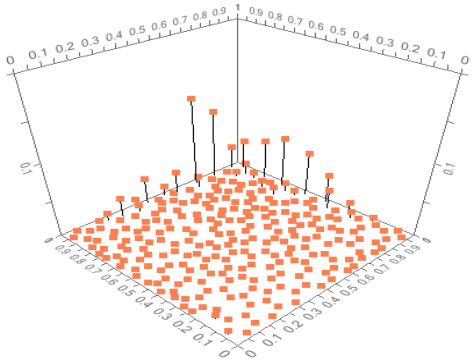


Рисунок 5.23 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.4). Сітка із 257 скінченних елементів.

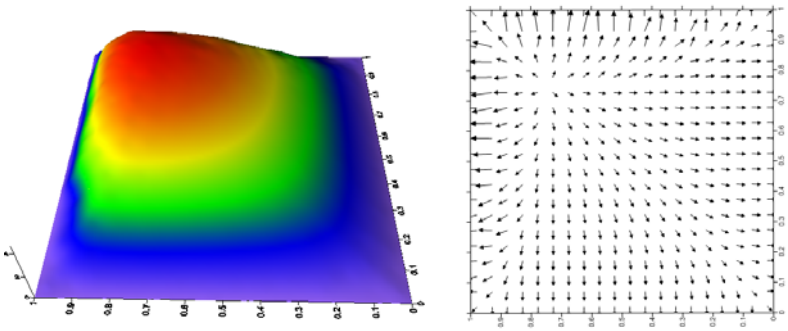


Рисунок 5.24 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.4). Сітка із 257 скінченних елементів.

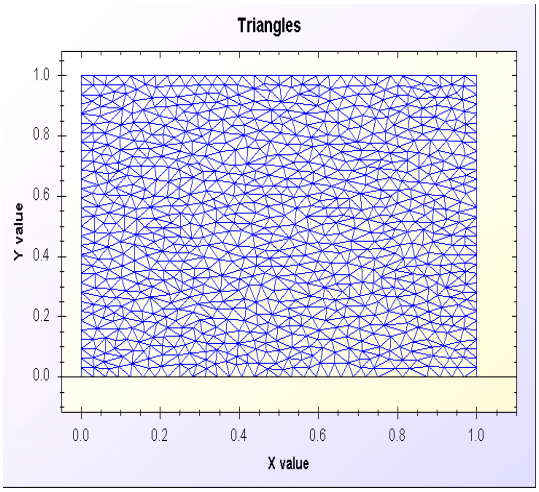


Рисунок 5.25 – Тріангуляція області Ω на останній ітерації (приклад 5.4). Сітка із 1748 скінченних елементів.

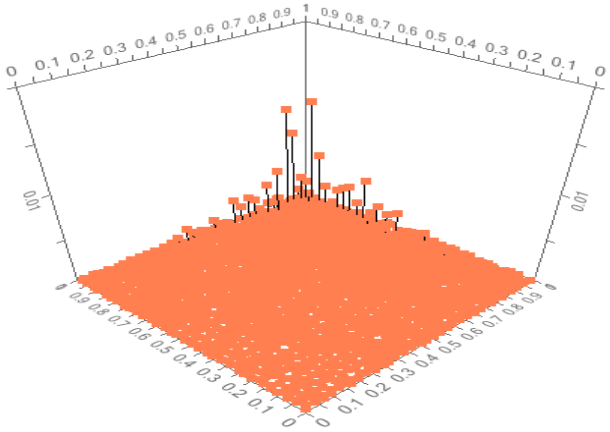


Рисунок 5.26 – Графік індикаторів похибок на скінченних елементах, (приклад 5.4). Сітка із 1748 скінченних елементів.

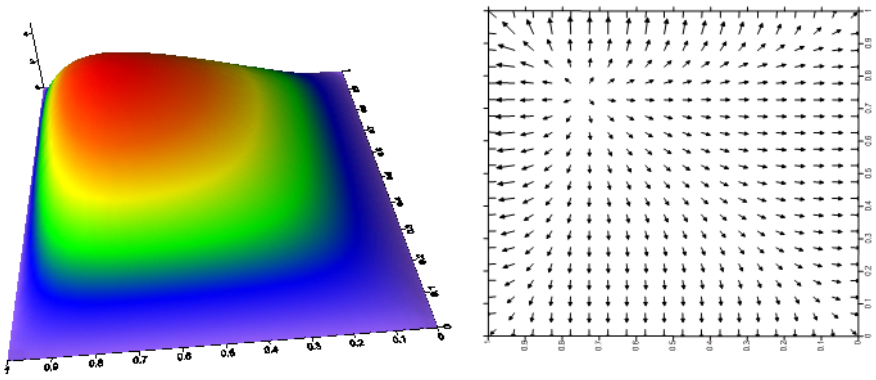


Рисунок 5.27 – Графіки апроксимацій функції (зліва) та потоку (справа), (приклад 5.4). Сітка із 1748 скінченних елементів.

Таблиця 5.4 – Збіжність апроксимацій (приклад 5.4).

Номер ітерації	Кількість елементів	Кількість вузлів	$\|u_h\|_{H(\Omega)}$	$\|\mathbf{p}_h\|_{H(div;\Omega)}$	$\|\omega_h\|_{\Phi}$	$\|\zeta_h\|_{\Phi}$	$C(\omega_h)$	$\rho(\omega_h)$, %
1	16	69	1,63	134,56	99,03	3,53		77,1
2	62	245	1,96	147,28	99,49	2,19	0,96	52,2
3	257	965	2,29	164,54	99,83	0,96	1,09	18,6
4	991	3582	2,42	171,86	99,56	0,51	0,98	9,5
5	1748	6305	2,43	173,05	99,98	0,39	0,98	4,7

В таблиці 5.4 зображено чисельні обрахунки норм функції u_h в просторі $H(\Omega)$ та її потоку $\mathbf{p}_h$ в просторі $\mathrm{H}(div;\Omega)$, енергетичну норму комплексного розв'язку ω_h та апостеріорного оцінювача пихибки. Також пораховані і наведені в таблиці порядок збіжності даної схеми та відносна похибка комплексного розв'язку ω_h.

5.1.9 Висновки

Дана робота присвячена застосуванню МСЕ для розв'язування крайових задач конвекції–дифузії–реакції. Основу запропонованого підходу становить застосування МНК та процедура МСЕ з просторами апроксимацій, породжуваними кусково–лінійними, кусково–квадратичними, кусково–кубічними та лінійними векторними базисними функціями на рівномірних сітках скінченних елементів.

Особливістю даної роботи є те, що запропонована схема дозволяє знайти з однаковою точністю не тільки концентрацію домішок, але і їх потік, який в деяких задачах є більш цінним.

Як відомо, за певних умов розв’язки задач, що розглядаються, містять внутрішні та примежові шари, а процеси, які описують ці задачі, є сингулярно збуреними. Класичні апроксимації МСЕ характеризуються втратою стійкості, та за певних умов взагалі не відтворюють структуру розв’язку. Тому в даній роботі і був вибраний МНК, який дозволяє уникнути осциляцій розв’язку, згладжуючи його.

Щоб дослідити обчислювальні аспекти запропонованої схеми МСЕ та оцінювача похибок її апроксимацій проведено ряд числових експериментів на послідовності рівномірно згущуваних сіток. З отриманих результатів видно, що дана схема є збіжною і бажаний результат досягається за невеликих згущень.

5.2 Числове моделювання взаємодії механічного й електричного полів у п’єзоелектрику

У сучасній обчислювальній математиці для розв’язування змішаних початково–крайових задач теорії п’єзоелектриків часто застосовують метод розділення змінних. Це дозволяє, для прикладу, без втрати точності обчислень застосувати метод скінченних елементів (МСЕ) для напівдискретизації за просторовою змінною, а далі для знаходження невідомих розв’язків за часовою змінною застосувати, для прикладу, метод скінченних різниць та побудувати відповідну однокрокову рекурентну схему [89–104]. З точки зору математичного моделювання важливо з’ясувати чи побудована модель та знайдені відповідні їй числові розв’язки відповідають очікуваній фізичній поведінці процесу, що моделюється. Вхідними параметрами, які безпосередньо впливають на фізику процесу є, зокрема, властивості досліджуваного матеріалу п’єзоелектрика, характеристики зовнішньої та внутрішньої дії. Тому, у цій роботі, було досліджено вплив характеру навантаження на стійкість числових розв’язків і з’ясовано яким чином енергетичні характеристики залежать від

типу навантаження та його тривалості в недисипативному середовищі. Зауважимо, що при виборі параметрів навантаження (як і відомостей щодо теорії п'єзоелектриків) бралися до уваги роботи [106–110].

Отож, для знаходження розв'язків початково–крайової задачі теорії п'єзоелектриків побудуємо у п.5.2.1–3 даного підрозділу однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Обчислення енергетичних характеристик (п.5.2.4) здійснюватимемо, використовуючи структурні елементи сформульованої варіаційної задачі (п. 5.2.1). Об'єктом дослідження буде кварцовий стрижень. Дослідження опирається на результати отримані в працях [109, 110].

5.2.1 Постановка початково–крайової задачі

Нехай анізотропне п'єзоелектричне тіло займає обмежену зв'язну область Ω, що складається з точок $\mathbf{x}=\left(x_1,...,x_d\right)$ евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею Γ та одиничним вектором зовнішньої нормалі до неї $\mathbf{n}=\left(n_1,...,n_d\right)$, де $n_i=\cos(n,x_i)$. Нехай t – час, $t\in\left[0,T\right]$, $0<T<+\infty$. Необхідно знайти вектор пружних переміщень $\mathbf{u}=\left\{u_i\left(x,t\right)\right\}_{i=1}^{d}$ та електричний потенціал $p=p\left(x,t\right)$ за умови що тіло піддається зовнішнім/внутрішнім механічним(тиск) або електричним(струм) навантаженням та є закріплене та заземлене на певних частинах його межі, що можна записати наступними рівняннями (тут і далі у межах одного доданку проводиться підсумовування за індексами, які повторюються) [103]

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\ddot{u}_i - f_i\right) - \sigma_{ij,j} = 0,\\
&\dot{D}_{k,k} + J_{k,k} = 0,\\
&\sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u) + a_{ijkm}\varepsilon_{km}(\dot{u}) - e_{kij}E_k\left(p\right),\\
&D_k = g_{km}E_m(p) + e_{kij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),\\
&\varepsilon_{ij}(u) = 0{,}5\cdot(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad в\ \Omega\times(0,T],\\
&J_k = z_{km}E_m(p),\ E_k(p) = -p_{,k} \quad в\ \Omega\times(0,T],
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

і відповідним крайовим умовам

$$
\begin{aligned}
&u_i = 0 \qquad на\ \ \Gamma_u,\ \ \Gamma_u \subset \Gamma,\ \ \ mes\left(\Gamma_u\right) > 0,\\
&\sigma_{ij}n_j = \widehat{\sigma}_i \ \ на\ \ \Gamma_\sigma,\ \ \ \ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = 0 \quad на\ \ \Gamma_p,\ \ \Gamma_p \subset \Gamma,\ mes\left(\Gamma_p\right) > 0,\\
&\left(D_k' + J_k\right)n_k = 0\ на\ \Gamma_d \times \left[0,T\right],\ \Gamma_d \subset \Gamma,\ \Gamma_d \cap \Gamma_p = \varnothing,\\
&\int\limits_{\Gamma_e}\left(D_k' + J_k\right)n_k d\gamma = I \ \ на\ \Gamma_e \times \left[0,T\right],\ \Gamma_e = \Gamma \setminus \left(\Gamma_d \cap \Gamma_p\right),\\
&E_k\left(p\right) - n_k E_m\left(p\right)n_m = 0\ \ на\ \ \Gamma_e \times \left[0,T\right],
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

та початковим умовам

$$
\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u_0},\ \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=0} = \mathbf{v_0},\ p\big|_{t=0} = p_0 \ \ в\ \ \Omega. \tag{5.36}
$$

Тут ρ – густина маси п’єзоелектрика, $f = \left\{f_i(x)\right\}$ – вектор об’ємних сил, $\sigma_{ij}\left(x,t\right)$ і $\varepsilon_{ij}\left(x,t\right)$ – компоненти симетричних тензорів напружень і деформацій відповідно, $D_k\left(x,t\right)$, $E_k\left(x,t\right)$ і $J_k\left(x,t\right)$ компоненти векторів індукції, напруженості електричного поля і струму зміщення відповідно, a_{ijkm} і c_{ijkm} – компоненти тензорів в’язкості та пружних модулів п’єзоелектрика, e_{kij}, z_{km} та g_{ij} визначають компоненти тензорів п’єзоелектричних коефіцієнтів, електричної провідності та діелектричної проникності відповідно, $\widehat{\sigma} = \left\{\widehat{\sigma}_i\left(x,t\right)\right\}$ та $I = I\left(t\right)$ – задані вектори поверхневих зусиль та струму на електроді $\dot{u} = \partial u/\partial t$, $\ddot{u} = \partial^2 u/\partial t^2$.

Введемо простори допустимих пружних переміщень та електричних потенціалів

$$V=\left\{\mathbf{v}\in\left[H^1(\Omega)\right]^d:\ \mathbf{v}=0\ на\ \Gamma_u\right\},$$
$$Q=\left\{q\in H^1(\Omega):\ q=0\ \ на\ \Gamma_p,\ q=const\ на\ \Gamma_e\right\}$$

відповідно. Нехай $\Phi:=V\times Q$, а спряжений до нього простір $\Phi':=V'\times Q'$. Сформулюємо відповідну варіаційну постановку початково–крайової задачі

$$\begin{aligned}
&задано\ \psi_0=(\mathbf{u_0},p_0)\in\Phi,\ \mathbf{v_0}\in H\ та\ (l,r)\in L^2(0,T;\Phi')\\
&знайти\ пару\ \psi=(\mathbf{u},p)\in L^2(0,T;\Phi)\ таку,\ що\\
&m(\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}),\mathbf{v})+a(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}),\mathbf{v})+c(\mathbf{u}(\mathbf{t}),\mathbf{v})-e(p(t),\mathbf{v})=\langle l(t),\mathbf{v}\rangle,\\
&\quad g(\dot{p}(t),q)+e(q,\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}))+z(p(t),q)=\langle r(t),q\rangle\ \ \forall t\in(0,T]\\
&m(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{0})-\mathbf{v_0},\mathbf{v})=0,\ c(\mathbf{u}(\mathbf{0})-\mathbf{u_0},\mathbf{v})=0\ \forall\,\mathbf{v}\in V,\\
&\quad g(p(0)-p_0,q)=0\ \ \forall\ q\in Q,
\end{aligned}\tag{5.37}$$

де білінійні і лінійні форми визначені такими виразами

$$m(u,v)=\int_\Omega \rho u_i v_i dx,\qquad c(u,v)=\int_\Omega c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,$$

$$a(u,v)=\int_\Omega a_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,\qquad e(q,v)=\int_\Omega e_{kij}E_k(q)\varepsilon_{ij}(v)dx\qquad \forall\,v\in V,$$

$$g(p,q)=\int_\Omega g_{km}E_k(p)E_m(q)dx,\qquad z(p,q)=\int_\Omega z_{km}E_k(p)E_m(q)dx\qquad \forall\,q\in Q,$$

$$\langle l,v\rangle=\int_\Omega \rho f_i v_i dx+\int_{\Gamma_\sigma}\widehat{\sigma}_i v_i d\gamma\ \forall\,v\in V,\qquad \langle r,q\rangle=-Iq|_{\Gamma_e}\ \forall\,q\in Q.$$

5.2.2 Напівдискретизація варіаційної задачі

Виділимо в просторі допустимих функцій Φ послідовність скінченновимірних підпросторів апроксимацій $\Phi_h = V_h \times Q_h$ ($\dim \Phi_h \to \infty$, якщо $h \to 0$). Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h)$ задачі

$$\begin{cases} \textit{задано } h = const > 0,\ \boldsymbol{\psi}_\mathbf{0} = (\mathbf{u}_\mathbf{0}, p_0) \in \Phi, \\ \mathbf{v}_\mathbf{0} \in H,\ \ell = (l, r) \in L^2(0,T;\Phi'); \\ \textit{знайти вектор } \boldsymbol{\psi}_\mathbf{h} = (\mathbf{u}_\mathbf{h}, p_h) \in L^2(0,T;\Phi_h) \textit{ такий, що} \\ m(\ddot{\mathbf{u}}_\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{v}) + a(\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{v}) - e(p_h(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ \quad g(\dot{p}_h(t), q) + e(q_h, \dot{\mathbf{u}}_\mathbf{h}(\mathbf{t})) + z(p_h(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ m(\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{h}(\mathbf{0}) - \mathbf{v}_\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0,\ c(\mathbf{u}_\mathbf{h}(\mathbf{0}) - \mathbf{u}_\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0, \\ \quad g(p_h(0) - p_0, q) = 0\ \ \forall\ \phi = (\mathbf{v}, q) \in \Phi_h \end{cases} \tag{5.38}$$

будемо називати напівдискретизованою апроксимацією Гальоркіна для розв'язку $\psi = (u, p)$. Якщо зафіксувати деякі базиси $\{v_i\}$, $\{q_i\}$ у просторах апроксимацій V_h, Q_h відповідно, то можна отримати таку задачу Коші для визначення коефіцієнтів $U(t) = \{U_i(t)\}$, $P(t) = \{P_i(t)\}$ розвинення компонент напівдискретизованої апроксимації u_h, p_h за цими базисам

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{E}^\mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{t}) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{t}) \\ R(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0,T], \\ &\mathbf{M}\mathbf{U}'(\mathbf{0}) = \mathbf{V}^\mathbf{0},\ \mathbf{C}\mathbf{U}(\mathbf{0}) = \mathbf{U}^\mathbf{0},\ \mathbf{G}\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}^\mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.39}$$

де $\mathbf{M} = \{m(v_i, v_j)\}$, $\mathbf{A} = \{a(v_i, v_j)\}$, $\mathbf{C} = \{c(v_i, v_j)\}$, $\mathbf{G} = \{g(q_i, q_j)\}$, $\mathbf{Z} = \{z(q_i, q_j)\}$, $\mathbf{E} = \{e(q_i, v_j)\}$, $\mathbf{L} = \{\langle l_i, v_i \rangle\}$, $\mathbf{R} = \{\langle r_i, q_i \rangle\}$.

5.2.3 Однокрокова рекурентна схема інтегрування за часом

Щоб побудувати однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом скористаємося [103].

Для фіксованого натурального N розглянемо рівномірний поділ відрізку часу $[0,T]$ вузлами $t_j = j\Delta t,\ \ j = 0,\ldots,N+1,\ T = (N+1)\Delta t$. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ для апроксимації розв'язку $\psi_h(t) = (\mathbf{u_h}(\mathbf{t}), p_h(t))$ напівдискретизованої задачі будемо використовувати такі наближення

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u_h}(\mathbf{t}) \cong \left[1-\omega^2(t)\right]u^j + \Delta t\omega(t)\left[1-\omega(t)\right]v^j + \omega^2(t)u^{j+1}, \qquad \omega(t) = \frac{t-t_j}{\Delta t},\\
&\mathbf{p_h}(\mathbf{t}) \cong \left[1-\omega(t)\right]p^j + \omega(t)\,p^{j+1},\ \forall\ t \in \left[t_j, t_{j+1}\right],
\end{aligned} \tag{5.40}$$

тобто на кожному кроці інтегрування в часі для апроксимації зміщення ми використовуємо квадратичні апроксимації, а для електричного потенціалу – лінійні.

На основі співвідношень (5.40) побудуємо однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі (5.39) по часу:

$$\begin{cases}
\textit{задано}\ \Delta t > 0,\ \alpha \in [0,1],\ y^j = \left(v^j, \psi^j\right) \in V_h \times \Phi_h,\ \ell_j = \left(l_j, r_j\right) \in \Phi' \\
\textit{знайти}\ y^{j+1} = \left(v^{j+1}, \psi^{j+1}\right) \in V_h \times \Phi_h\ \textit{таке, що} \\
m\left(\dot{v}^{j+1/2}, v\right) + a\left(v^{j+\alpha}, v\right) + c\left(u^{j+\alpha}, v\right) - e\left(p^{j+1/2}, v\right) = \left\langle l_j, v\right\rangle, \\
g\left(\dot{p}^{j+1/2}, q\right) + e\left(q, v^{j+1/2}\right) + z\left(p^{j+\alpha}, q\right) = \left\langle r_j, q\right\rangle, \\
\forall\ \phi = (v,q) \in \Phi_h,\ v^{j+1/2} = \dot{u}^{j+1/2},\ j = 0,\ldots,N.
\end{cases} \tag{5.41}$$

Тут використано позначення

$$w^{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(w^{j+1} - w^j\right), \dot{w}^{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t}\left(w^{j+1} - w^j\right), w^{j+\alpha} = w^{j+1/2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta t\dot{w}^{j+1/2}. \tag{5.42}$$

Підстановкою співвідношень (5.40) у початкові умови задачі (5.38) отримаємо рівняння

$$m\left(\mathbf{v^0}-\mathbf{v_0},\mathbf{v}\right)=0,\quad c\left(\mathbf{u^0}-\mathbf{u_0},\mathbf{v}\right)=0,\quad g\left(p^0-p_0,q\right)=0\qquad \forall\,\phi=(\mathbf{v},q)\in\Phi_h \tag{5.43}$$

для визначення вектора $y^0=\left(\mathbf{v^0},\psi^0\right)$.

Застосування схем МСЕ дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для однокрокової рекурентної схеми (5.41)

$$\begin{pmatrix} M+\alpha\Delta t\left[A+\frac{1}{2}\Delta tC\right] & -\frac{1}{2}\Delta tE^T \\ \frac{1}{2}\Delta tE & G+\alpha\Delta tZ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{j+1/2} \\ P^{j+1/2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\Delta t\begin{pmatrix} L_j \\ R_j\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix} M+\Delta\tilde{t}A & -\frac{1}{2}\Delta tC & 0 \\ 0 & 0 & G+\Delta\tilde{t}Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^j \\ U^j \\ P^j\end{pmatrix}, \tag{5.44}$$

де $\Delta\tilde{t}=\left(\alpha-1/2\right)\Delta t$, $V^{j+1/2}=2V^{j+1/2}-V^j$, $U^{j+1}=U^j+\Delta tV^{j+1/2}$, $P^{j+1}=2P^{j+1/2}-P^j$, $j=0,\ldots,N$.

5.2.4 Визначення енергетичних характеристик

Введені в задачі (5.37) білінійні форми дозволяють запровадити еквівалентні енергетичні норми в просторах V і Q

$$\begin{aligned} &\|u\|_V=\sqrt{c(u,u)},\ |u|_V=\sqrt{a(u,u)}\ \forall u\in V,\\ &\|p\|_Q=\sqrt{g(p,p)},\ |p|_Q=\sqrt{z(p,p)}\ \forall\, p\in Q, \end{aligned} \tag{5.45}$$

які застосовуються для обчислень енергетичних характеристик, зокрема:

$\Pi(t)=[\|\mathbf{u(t)}\|_V^2+\|p(t)\|_Q^2]/2$ – потенціальна енергія,

$D(t)=|\dot{\mathbf{u}}\mathbf{(t)}|_V^2+|p(t)|_Q^2$ – енергія дисипації,

$K(t)=m\left(\dot{u}(t),\dot{u}(t)\right)/2$ – кінетична енергія,

$E(t) = \Pi(t) + K(t)$ – повна енергія.

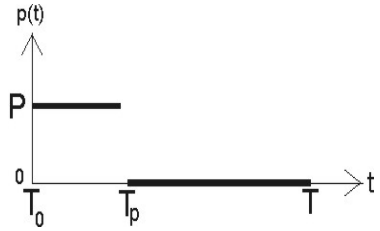
Слід зазначити, що складник $\|\mathbf{u(t)}\|_V^2 / 2$ визначає механічну потенціальну енергію, а $\|p(t)\|_Q^2 / 2$ – потенціальну енергію електричного поля. Відповідно вирази $|\dot{\mathbf{u}}\mathbf{(t)}|_V^2$ та $|p(t)|_Q^2$ визначають енергію дисипації механічного та електричного полів. Також зауважимо, що функція $k = k(t) = e(p(t), \dot{u}(t))$ детермінує динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) полів в п'єзоелектрику, що визначає відносну кількість енергії, яка в даний момент може перетворитися з механічної в електричну і навпаки.

5.2.5 Числові експерименти

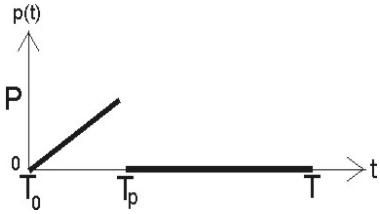
Розглянемо кварцовий стрижень довжини $L = 0{,}005\ м$ з густиною маси $\rho = 2651 кг / м^3$, модулем пружності $c_{1111} = 8{,}67 \cdot 10^{10}\ Н / м^2$, п'єзоелектричним коефіцієнтом $e_{111} = -0{,}195\ К / м$, діелектричною проникливістю $g_{11} = 4{,}41\ Ф / м$, який в початковий момент часу $t = 0$ вільний від навантаження $u_0 = 0,\ v_0 = 0,\ p_0 = 0\ \forall x \in [0, L]$. Припустимо, що лівий кінець стрижня ($x = 0$) закріплено і заземлено на весь час спостереження $T = 5 \cdot 10^{-6}\ с$, $u(0,t) = p(0,t) = 0\ \ \forall\ t \in [0, T]$, а правий кінець ($x = L$) контактує з ізолятором . Незакріплений кінець стержня, який контактує з діелектричним ізолятором $D_1(L,t) = 0\ \ \forall\ t \in [0, T]$ і піддається короткочасній дії тиском $\sigma_{11}(L,t) = p(t)$ $\forall\ t \in [0, T]$. В обчислювальному експерименті було прийнято, що крок інтегрування в часі $\Delta t = 10^{-9}\ с$, кількість кроків інтегрування $N = 5000$, параметр рекурентної схеми $\alpha = 1/2$, кількість скінченних елементів 300.

Будемо досліджувати реакцію п’єзоелектрика (зокрема його енергетичних характеристик) під дією короткочасного динамічного навантаження (тиску) одного з трьох ґатунків, зображених на рисунок 5.28.

1) $$p(t)=\begin{cases} P,\ 0<t\le T_p \\ 0,\ t>T_p \end{cases}$$



2) $$p(t)=\begin{cases} \dfrac{t\cdot P}{T_p},\ 0<t\le T_p \\ 0,\ t>T_p \end{cases}$$



3) $$p(t)=\begin{cases} \dfrac{t\cdot P}{T_p},\ 0<t\le \dfrac{T_p}{2} \\ \dfrac{1-t\cdot P}{T_p},\ \dfrac{T_p}{2}<t\le T_p \\ 0,\ t>T_p \end{cases}$$

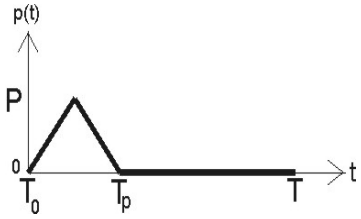


Рисунок 5.28 – Типи навантаження, $P=5\cdot 10^6\ H$.

У експериментах накладатимемо ще дві умови

a) величина $T_p=3\cdot 10^{-7}\,c$ – час менший ніж час необхідний для хвилі переміщення, щоб пройти віддаль L;

b) величина $T_p=2{,}5\cdot 10^{-6}\,c$ – час, необхідний хвилі переміщення, щоб пройти віддаль 2L.

Аналізуючи стійкість отриманих числових результатів, робимо висновок, що розриви в навантаженнях типу 1), 2) спричиняють збурення, які видно на графіках енергій та КЕМЗ, див рисунок 5.29–30. Відмітимо, що для лінійно

зростаючого навантаження 2) ці збурення є на порядок менші ніж для кусково–постійного 1).

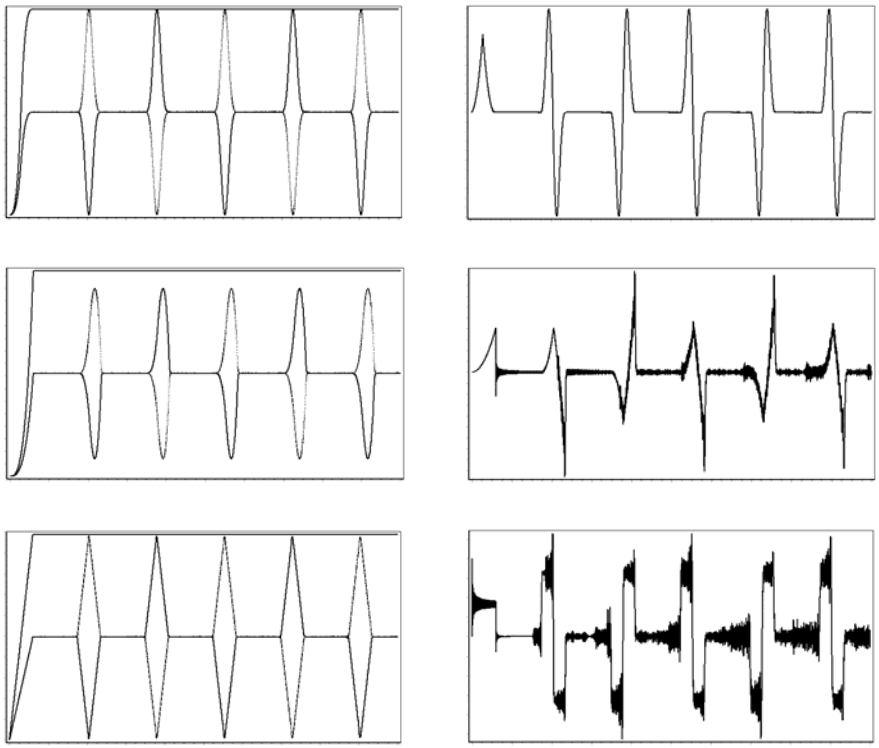


Рисунок 5.29 – Значення енергій і КЕМЗ для T_p = 3· 10 – 7 с, випадок а)

Другою відмінністю розв’язків отриманих при навантажені 2) та тривалості $T_p = 3 \cdot 10^{-7}\, c$ є інший характер перетворення енергій, при досягненні хвилі переміщення закріпленого або навантаженого кінця. Відбувається не повне перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки відповідно. Поясненням цього є різниця між значеннями тиску на початку та в кінці дії навантаження.

Якщо тривалість навантаження $T_p = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\, c$, то незважаючи на відсутність як природної так і штучної в’язкості, для кусково–постійного та неперервного навантажень, ми отримуємо зменшення значення повної енергії. Це пояснюється тим, що хвиля переміщення спричинена навантаженням

поглинається хвилею з пропорційною енергію, що рухається їй назустріч. Тобто, діючи на кінець стрижня розтягуючим навантаженням, ми, в результаті, отримуємо його скорочення. Щодо лінійно зростаючого навантаження, зважаючи на різницю між початковим та кінцевим тиском, зменшення енергій відсутнє.

Відносно значень КЕМЗ, то для навантажень 2), 3) помітне сповільнення процесів перетворення між електричною та механічною енергіями.

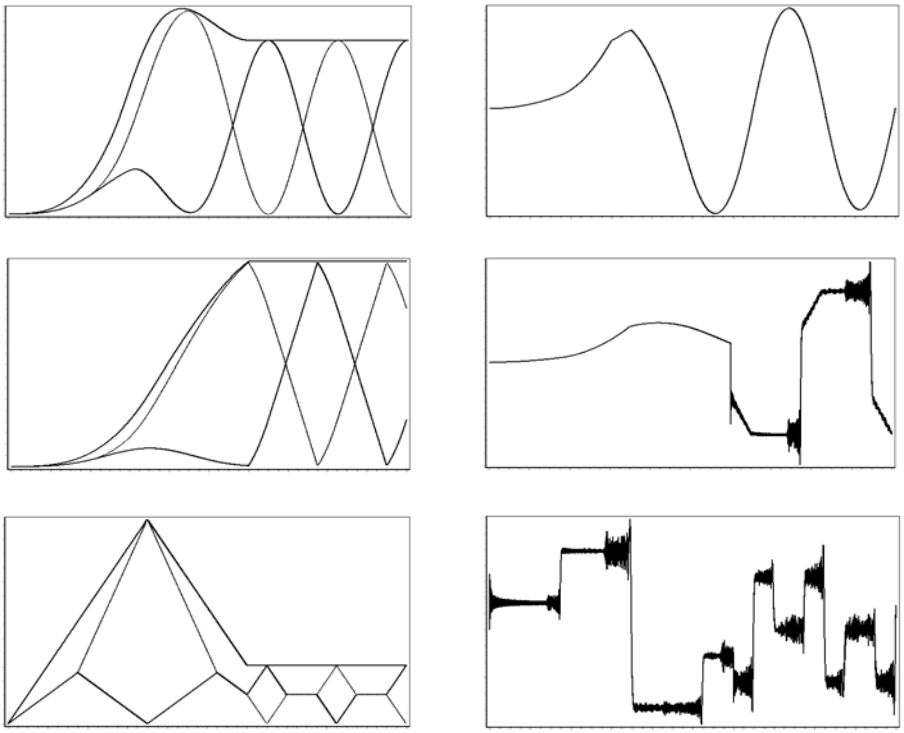


Рисунок 5.30 – Значення енергій і КЕМЗ для Тр = 2,5·10 – 6 с, випадок б)

5.2.6 Висновки.

У роботі розглянуто застосування МСЕ для розв’язування одновимірних нестаціонарних задач теорії п’єзоелектрики. Для цих задач сформульовано варіаційну постановку, виконано напівдискретизацію Гальоркіна та побудовано

однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом. Отримані схеми реалізовано у вигляді програмного забезпечення.

Аналіз впливу характеру та тривалості навантажень за відсутності дисипативних процесів на поведінку енергетичних характеристик дозволяє зробити висновок, що оптимальним способом задання тиску є задання його у вигляді лінійно зростаючої функції.

6 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ) В ЗАДАЧАХ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ

6.1 Дослідження стійкої рівноваги тонких оболонок податливих на зсув і стиснення

Сучасна нелінійна теорія оболонок, головним чином, використовує класичну гіпотезу Кірхгофа – Лява та гіпотезу Тимошенка – Міндліна (п'ятимодальний варіант) [119, 122, 123] та ін. Проблемі дослідження нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант), присвячено праці [115, 118, 121].

У цьому розділі записано ключові співвідношення для визначення початкового післякритичного стану гнучких оболонок, податливих на зсув і стиснення, методом скінченних елементів. Особливість такої моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндліна вектора зміщень пружного тіла за змінною товщиною зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні.

6.1.1 Основні припущення та співвідношення

Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, що в недеформованому стані відноситься до криволінійної ортогональної системи координат α_i, $i = 1,2,3$. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні Ω співпадають з лініями головних кривин, а товщина h є істотно меншою від інших розмірів оболонки. При деформуванні оболонки її елементи, які є ортогональними до серединної поверхні, залишаються прямолінійними і до деформованої серединної поверхні. При цьому може змінюватися довжина елементів і кут повороту нормалі.

Вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту в матричній формі з точністю до $o(h)$ подамо у вигляді [115]

$$e_{\mathrm{L}} = C_{\mathrm{L}} u, \qquad \omega = C_{\Omega} u, \tag{6.1}$$

де $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\top}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні і кутів повороту нормалі;

$$e_{\mathrm{L}} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, æ_{11}, æ_{22}, æ_{12}, æ_{13}, æ_{23})^{\top}, \ \omega = \left(\overset{0}{\omega}_1, \overset{0}{\omega}_2, \overset{0}{\omega}_3, \overset{1}{\omega}_1, \overset{1}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3 \right)^{\top}$$

– відповідно матриці–стовпці лінійних деформацій та поворотів: e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, $\overset{0}{\omega}_1$, $\overset{0}{\omega}_2$, $\overset{0}{\omega}_3$ – компоненти тангенціальних, а $æ_{11}$, $æ_{22}$, $æ_{12}$, $æ_{13}$, $æ_{23}$, $\overset{1}{\omega}_1$, $\overset{1}{\omega}_2$, $\overset{1}{\omega}_3$ – компоненти згинних лінійних деформацій і поворотів; C_{L}, C_{Ω} – матриці диференціальних операторів.

Деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо таким чином:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_2^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2, \qquad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_1^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}{}_3^2, \quad \varepsilon_{33} = e_{33},,$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \qquad \varepsilon_{13} = e_{13} - \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3, \qquad \varepsilon_{23} = e_{23} - \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3,,$$

$$\chi_{11} = æ_{11} + \overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_2 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2} k_1 \overset{0}{\omega}{}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{22} = æ_{22} + \overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_1 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2} k_2 \overset{0}{\omega}{}_1^2 - \frac{1}{2}(2k_1 + k_2)\overset{0}{\omega}{}_3^2,$$

$$\chi_{12} = æ_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_2 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \qquad \chi_{13} = æ_{13} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3 + k_2 \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$\chi_{23} = æ_{23} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3 + k_1 \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3.$$

Позначивши $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23}\}^{\top}$, наведені вище нелінійні співвідношення запишемо як

$$\varepsilon = e_{\mathrm{L}} + e_{\mathrm{N}}, \tag{6.2}$$

де e_{N} в матричній формі має вигляд [113]

$$e_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}(C_{\Omega}u)_{11}^{\top} E_{\Omega} C_{\Omega} u \ .$$

Тут $E_{\Omega} = (E_1, E_2, \ldots, E_{11})^{\top}$ – матриця–стовпець, компонентами якої є підібрані відповідним чином матриці E_i розміру 6×6 (див. [113]). Тоді деформаційні співвідношення теорії оболонок (6.2) визначаємо як

$$\varepsilon(u) = C_{\mathrm{L}} u + \frac{1}{2}(C_{\Omega}u)_{11}^{\top} E_{\Omega} C_{\Omega} u. \tag{6.3}$$

Розгорнутий вигляд матриць C_{L}, C_{Ω} та E_{Ω} можна знайти в праці [113]. Зауважимо, що, відкинувши другий доданок у формулі (6.3), отримаємо лінійні деформаційні співвідношення [116].

Матрична форма закону пружності для лінійно пружних оболонок має вигляд

$$\sigma = B\varepsilon, \tag{6.4}$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^{\top}$ – матриця–стовпець симетричних зусиль і моментів; B – матриця пружних сталих [116].

Рівняння рівноваги оболонок є наступними:

$$C_{\sigma}\sigma^{*} + P = 0, \tag{6.5}$$

де P – матриця–стовпець, що складається з компонент зовнішнього навантаження; C_{σ} – матриця диференціальних операторів; $\sigma^{*} = (N_{11}^{*}, N_{22}^{*}, N_{33}^{*}, N_{12}^{*}, N_{21}^{*}, N_{13}^{*}, N_{31}^{*}, N_{23}^{*}, N_{32}^{*}, M_{11}^{*}, M_{22}^{*}, M_{12}^{*}, M_{21}^{*}, M_{13}^{*}, M_{23}^{*})^{\top}$ – матриця–стовпець

нововведених зусиль і моментів, які пов'язані з симетричними зусиллями і моментами залежністю [115]

$$\sigma^* = F\sigma. \tag{6.6}$$

Тут F – матриця, компоненти якої залежать від матриці–стовпця ω.

Систему (6.5) доповнюємо статичними

$$G_\sigma \sigma^* = \sigma_g, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_\sigma, \tag{6.7}$$

та кінематичними

$$G_u u = u_g, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_u \tag{6.8}$$

граничними умовами. Тут $\sigma_g = (N_n, N_s, N_z, M_n, M_s, M_z)^\top$ – матриця–стовпець крайових зусиль–моментів, а $u_g = (u_n^{\mathrm{b}}, u_s^{\mathrm{b}}, u_z^{\mathrm{b}}, \gamma_n^{\mathrm{b}}, \gamma_s^{\mathrm{b}}, \gamma_z^{\mathrm{b}})^\top$ – матриця–стовпець крайових зміщень. Через G_σ, G_u позначено матриці змінних коефіцієнтів.

6.1.2 Стаціонарність потенціальної енергії

Серед усіх геометрично можливих переміщень, що задовольняють умови (6.3)–(6.8), істинними будуть ті переміщення, які надають функціоналу повної потенціальної енергії

$$\ell(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^\top(u) E_0 B \varepsilon(u)\, d\Omega - \int_\Omega u^\top P\, d\Omega - \int_{\Omega_\sigma} (G_u u)^\top \sigma_g\, d\Omega_\sigma \tag{6.9}$$

стаціонарного значення, тобто

$$\delta\ell(u) = 0. \tag{6.10}$$

У рівності (6.9) E_0 – матриця розміру 11×11 з елементами

$$E_{ij} = 0, \quad i \neq j, \qquad E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{77} = E_{88} = 1,,$$

$$E_{44} = E_{55} = E_{66} = E_{99} = E_{10,10} = E_{11,11} = 2 .$$

З умови (6.10) стаціонарності функціонала повної потенціальної енергії отримуємо рівняння рівноваги (6.5) і статичні крайові умови (6.7).

6.1.3 Квазілінеаризація

Розвинемо в ряд вираз (6.9) для потенціальної енергії $\ell(u)$ в околі її i–го наближення до стаціонарного значення і, нехтуючи величинами, вище другого порядку, отримаємо

$$\ell(u_i + \Delta u) = \ell(u_i) + \delta\ell(u_i) + \frac{1}{2}\delta^2\ell(u_i).$$

Тоді приріст потенціальної енергії

$$\Delta\ell(u_i;\Delta u) = \ell(u_i + \Delta u) - \ell(u_i) = \delta\ell(u_i) + \frac{1}{2}\delta^2\ell(u_i)$$

з урахуванням (6.9) запишемо так:

$$\begin{aligned}\Delta\ell(u_i;\Delta u) = &-\int_{\Omega}(\Delta u)^{\top} P\, d\Omega - \int_{\Omega_\sigma}(G_u\Delta u)^{\top}\sigma_g\, d\Omega_\sigma + \\ &+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))^{\top} E_0 B(\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))\, d\Omega + \\ &+\int_{\Omega}(\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i))^{\top} E_0 B\varepsilon(u_i)\, d\Omega.\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon(u_i + \Delta u) - \varepsilon(u_i) = C_{\mathrm{L}}\Delta u + (C_\Omega u_i)_{11}^{\top} E_\Omega C_\Omega \Delta u + \frac{1}{2}(C_\Omega \Delta u)_{11}^{\top} E_\Omega C_\Omega \Delta u ,$$

і нехтуючи величинами з порядком малості, вище другого, отримуємо для приросту потенціальної енергії остаточний вираз:

$$\begin{aligned}
\Delta\ell(u_i;\Delta u) &= -\int_\Omega (\Delta u)^\top P\, d\Omega - \int_\Omega (G_u \Delta u)^\top \sigma_g\, d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega (C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i,\Delta u))^\top E_0 B(C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i,\Delta u))\, d\Omega + \\
&+ \int_\Omega (C_{\mathrm{L}}\Delta u + C_{\mathrm{N}}(u_i,\Delta u))^\top E_0 B\left(C_{\mathrm{L}} u_i + \frac{1}{2} C_{\mathrm{N}}(u_i,u_i)\right) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega (C_{\mathrm{N}}(\Delta u,\Delta u))^\top E_0 B(C_{\mathrm{L}} u_i + C_{\mathrm{N}}(u_i,u_i))\, d\Omega\,.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Тут $C_{\mathrm{N}}(a,b) = (C_\Omega a)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega b$.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію, шуканий вектор переміщень подамо у вигляді

$$u = \mathsf{N} q\,, \tag{6.12}$$

де q – матриця–стовпець невідомих вузлових переміщень і поворотів, N – блочно–діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральний вираз останнього інтеграла в формулі (6.11). Для цього введемо матрицю–стовпець

$$T(u_i) = (T_1,\ldots,T_{11})^\top = E_0 B(C_{\mathrm{L}} u_i + C_{\mathrm{N}}(u_i,u_i))$$

і, використовуючи формули для апроксимації переміщень (6.12), отримаємо

$$\begin{aligned}
&(C_{\mathrm{N}}(\Delta\mathsf{N}q,\Delta\mathsf{N}q))^\top E_0 B(C_{\mathrm{L}}\mathsf{N}q_i + C_{\mathrm{N}}(\mathsf{N}q_i,\mathsf{N}q_i)) = \\
&\qquad = (C_{\mathrm{N}}(\Delta\mathsf{N}q,\Delta\mathsf{N}q))^\top T(\mathsf{N}q_i) = \\
&\qquad = (\Delta q)^\top \left(\sum_{k=1}^{11} T_k(\mathsf{N}q_i)(C_\Omega\mathsf{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathsf{N} \right) \Delta q\,.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Тоді умова стаціонарності функціонала набуде вигляду

$$\delta\ell(u_i + \Delta u) = \delta(\Delta\ell(u_i;\Delta u)) = 0\,.$$

Звідси випливає умова стаціонарності квадратичної функції (6.11), яку запишемо як

$$\frac{\partial \Delta \ell(q_i;\Delta q)}{\partial \Delta q} = K_T(q_i)\Delta q + K(q_i)q_i - \mathsf{R} = 0\,.. \qquad (6.14)$$

Тут введено такі позначення:

$$K(q_i) = \int_\Omega ((C_\mathrm{L} + (C_\Omega \mathsf{N} q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathsf{N})^\top E_0 B\left(\left(C_\mathrm{L} + \frac{1}{2}(C_\Omega \mathsf{N} q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega\right)\mathsf{N}\right) d\Omega$$

– матриця січної жорсткості; $K_T = K_U + G$ – матриця тангенціальної жорсткості, де

$$K_U(q_i) = \int_\Omega ((C_\mathrm{L} + (C_\Omega \mathsf{N} q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathsf{N})^\top E_0 B((C_\mathrm{L} + (C_\Omega \mathsf{N} q_i)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega)\mathsf{N})\, d\Omega$$

– матриця переміщень і

$$G(q_i) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{11} T_k(\mathsf{N} q_i)(C_\Omega \mathsf{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathsf{N}\, d\Omega$$

– геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень;

$$\mathsf{R} = \int_\Omega \mathsf{N}^\top P\, d\Omega + \int_{\Omega_\sigma} (G_u \mathsf{N})^\top \sigma_g\, d\Omega_\sigma$$

– матриця–стовпець зовнішнього вузлового навантаження.

6.1.4 Початковий післякритичний стан

У випадку деформування оболонок під дією зовнішніх навантажень, пропорційних одному параметру λ, повні переміщення у початковому післякритичному стані u_* визначаємо як суму переміщень початкового (докритичного) стану u_0 і збурених переміщень u [120]:

$$u_* = u_0 + \alpha u, \qquad 0 < \alpha \ll 1.$$

Деформації в докритичному стані визначаємо за лінійними залежностями

$$e_\mathrm{L}(u_0) = C_\mathrm{L} u_0\,. \qquad (6.15)$$

Інтегральні характеристики напружень у початковому стані визначаємо із закону пружності (6.4):

$$\sigma_0 = Be_{\mathrm{L}}(u_0).$$

Деформаційні співвідношення в початковому післякритичному стані визначаємо у вигляді суми початкових деформацій (6.15) і нелінійних деформацій, зумовлених збуреними переміщеннями:

$$\varepsilon_* = e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u)..$$

Зусилля–моменти в цьому випадку подаємо наступним чином:

$$\sigma_* = B\varepsilon_* = B(e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u)) = \sigma_0 + \alpha\sigma_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2\sigma_{\mathrm{N}}(u).$$

Енергію деформації в початковому післякритичному стані запишемо так:

$$\begin{aligned} U(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_*^\top(u) E_0 B\varepsilon_*(u)\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega (e_{\mathrm{L}}(u_0) + \alpha e_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2 e_{\mathrm{N}}(u))^\top \times \\ &\times E_0(\sigma_0 + \alpha\sigma_{\mathrm{L}}(u) + \alpha^2\sigma_{\mathrm{N}}(u))\, d\Omega = \\ &= U_0 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \dots . \end{aligned}$$

Тут

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega e_{\mathrm{L}}^\top(u_0) E_0\sigma_0\, d\Omega, \qquad U_1 = \int_\Omega e_{\mathrm{L}}^\top(u) E_0\sigma_0\, d\Omega,$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_\Omega (e_{\mathrm{L}}^\top(u) E_0\sigma_{\mathrm{L}}(u) + 2e_{\mathrm{N}}^\top(u) E_0\sigma_0)\, d\Omega.$$

Квадратичний функціонал U_2, який залежить від збурених переміщень, подамо у вигляді суми

$$U_2 = U_2^* + U_2^{**},$$

де

$$U_2^* = \frac{1}{2}\int_\Omega e_{\mathrm{L}}^\top(u) E_0 B e_{\mathrm{L}}(u)\, d\Omega, \qquad U_2^{**} = \int_\Omega C_{\mathrm{N}}^\top(u,u) E_0\sigma_0\, d\Omega.$$

Оскільки функціонал U_0 визначає енергію докритичних деформацій, а функціонал U_1 містить тільки лінійні члени післякритичних переміщень, то

$$\delta^2(U_0) = \delta^2(U_1) = 0.$$

Функціонали U_2^* і U_2^{**} містять квадратичні члени від збурених переміщень, а їхня друга варіація приводить до рівняння стійкості.

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію (6.12) і перетворення (6.13), функціонали U_2^* і U_2^{**} подамо у вигляді

$$U_2^* = \frac{1}{2}\int_\Omega q^\top (C_\mathrm{L}\mathsf{N})^\top E_0 B (C_\mathrm{L}\mathsf{N}) q \, d\Omega, \tag{6.16}$$

$$U_2^{**} = \int_\Omega q^\top \left(\sum_{k=1}^{11} (E_0\sigma_0)_k (C_\Omega \mathsf{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathsf{N} \right) q \, d\Omega. \tag{6.17}$$

При варіюванні функціонала U_2^{**} інтегральні характеристики σ_0 вважаємо константами. Оскільки докритичний стан визначається за лінійною теорією, то інтегральні характеристики σ_0 змінюються пропорційно до параметра навантаження λ:

$$\sigma_0 \simeq \lambda\sigma_0 \,. \tag{6.18}$$

Враховуючи (6.18), з виразів (6.16) і (6.17) отримуємо рівняння стійкості

$$\int_\Omega (C_\mathrm{L}\mathsf{N})^\top E_0 B C_\mathrm{L}\mathsf{N} d\Omega + \lambda \int_\Omega \sum_{k=1}^{11} (E_0\sigma_0)_k (C_\Omega \mathsf{N})_{11}^\top E_k C_\Omega \mathsf{N} d\Omega = 0 \,. \tag{6.19}$$

Використовуючи вирази (6.14), рівняння стійкості (6.19) запишемо у такому матричному вигляді:

$$K_U(0) + \lambda G(q_0) = 0 \,.. \tag{6.20}$$

Тоді найменше власне значення рівняння (6.20) визначає критичний параметр навантаження λ^*, при якому оболонка з початкового стану рівноваги переходить у суміжний.

6.1.5 Чисельний приклад

Досліджували стійкість затиснутої по контуру круглої пластинки з радіусом R і товщиною h, яка знаходиться під дією радіальних рівномірно розподілених уздовж контуру стискуючих зусиль P. Вважали, що точки контуру можуть вільно зміщуватися в площині пластини, а її зігнута поверхня є осесиметричною. Аналітичний розв'язок цієї задачі за теорією Кірхгофа – Лява наведено у роботі [117].

Наведемо порівняння результатів чисельного розрахунку для цієї задачі критичного навантаження $P_{\text{кр}}$ у випадку, коли модуль Юнга матеріалу пластинки $E = 0.625 \cdot 10^{11}$ Н/м2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.22$ і $\dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{20}$:

- за теорією Кірхгофа – Лява (аналітичний розв'язок [117])

  $P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00439$;

- за теорією Тимошенка – Міндліна (п'ятимодальний варіант)

  $P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00210$;

- за теорією Тимошенка – Міндліна (шестимодальний варіант)

  $P_{\text{кр}} \cdot 10^{-8} = 1.00159$.

З аналізу наведених результатів бачимо, що навантаження, знайдене за шестимодальною теорією оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю, є меншим порівняно з обчисленими за іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску зменшує жорсткість оболонки, тому для того, щоб оболонка втратила стійкість, достатньо меншого навантаження.

6.2 До моделювання біомеханічних конструкцій з м'якими прошарками

Головним мотивом використання м'яких елементів у жорстких конструкціях є розділення та демпфування взаємодії твердих працюючих поверхонь, які при безпосередньому контакті схильні до взаєморуйнування. У більшості створених людиною матеріалів та механізмів демпфувальні елементи мають прості геометричні форми, для яких у теорії пружності, зокрема у механіці композитів, вдалось знайти доволі ефективні схеми просторового усереднення модулів пружності різних за твердістю шарів. Однак використані там підходи принципово опираються на класичність форм досліджуваних об'єктів, наприклад, шаруватих пластин та оболонок. Складна неканонічна геометрія біологічних конструкцій дає змогу визначати лише локальні залежності модулів пружності від просторових координат. Це зумовлює потребу у використанні числових методів, які допомагають достатньо точно відтворювати внутрішню шарувату будову об'єкта.

Практично важливим напрямом складних задач біомеханіки є сфера стоматології. Висока твердість функціональних компонент зубощелепної системи людини дає підстави розраховувати на ефективне застосування вже добре розвиненого апарата механіки твердого тіла. Втім, перші ж спроби залучення до аналізу цих задач співвідношень теорії опору матеріалів і теорії пружності виявили критичну залежність отримуваних розв'язків від точності моделювання геометрії досліджуваних об'єктів. Через це серед сіткових підходів найбільшу популярність отримали скінчено–елементні моделі, які добре відтворюють нерегулярні форми людського зуба. Значні труднощі становлять лише їхня надзвичайна громіздкість і трудозатратність, які треба узгоджувати з наявними потужностями обчислювальної техніки.

Окрему проблему в моделюванні зубощелепної системи становить прошарок періодонту, за допомогою якого корінь зуба утримується в

альвеолярній лунці. У живому зубі його матеріал доволі м’який, що захищає пористий матеріал кістки від руйнування значно твердішим дентином кореня. Попри відносну тонкість шару періодонту його вплив на загальний розподіл внутрішніх напружень у системі загальновизнаний. Значення цього впливу з використанням різноманітних підходів оцінюється у багатьох працях, наприклад [126, 127, 132]. Суттєві розходження у висновках свідчать про значну залежність розв’язків від вибору певної математичної моделі. Отож, адекватні оцінки варто очікувати лише при досягненні моделлю деякого на сьогодні ще остаточно не виявленого критичного рівня складності. Наша праця – один із кроків на цьому шляху.

В умовах тривимірної моделі теорії пружності досить детально відтворено геометрію внутрішньої багатошарової структури зуба. На відміну від багатьох сучасних праць з цієї тематики, котрі застосовують готові універсальні програмні комплекси, дослідження проведено на власному програмному забезпеченні. Це дало змогу спеціалізувати якісні параметри скінчено–елементної моделі системи зуб–щелепа в напрямі використання високоточних апроксимацій МСЕ на сітках, які спрямовано згущувались в місцях концентрацій напруженого стану.

З достатньою точністю оцінено вплив періодонту саме з позицій внутрішньої взаємодії шарів зуба, що особливо важливо в умовах значної різниці в їхній твердості.

Отримані в роботі результати ставлять під сумнів будь–які висновки досліджень математичних моделей, які не враховують малу жорсткість прошарку періодонту.

6.2.1 Матеріал і методи досліджень

6.2.1.1 Фізична модель

За допомогою прямокутного паралелепіпеда виділимо область, що охоплює різець і частину верхньої щелепи, яка безпосередньо з ним контактує (див. рисунок 6.1).

Висоту паралелепіпеда підберемо так, щоб він вирізав область кістки щелепи (далі кореня) на висоту приблизно в третину його довжини. Фронтальну та лінгуальну частину альвеолярного відростка паралелепіпед охоплюються повністю, а його боками зубна дуга ділиться по серединах відстані до сусідніх зубів.

Взаємодію вирізаного сегмента з рештою області змоделюємо умовами відсутності переміщень у напрямі осі зубної дуги на бокових гранях паралелепіпеда та жорстким закріпленням його нижньої грані.

Внутрішня структура досліджуваної системи охоплює емаль коронки зуба, дентин, пульпу, альвеолярну частину кістки щелепи та шар періодонту. Матеріали фізичної моделі приймаємо ізотропними з такими пружними показниками:

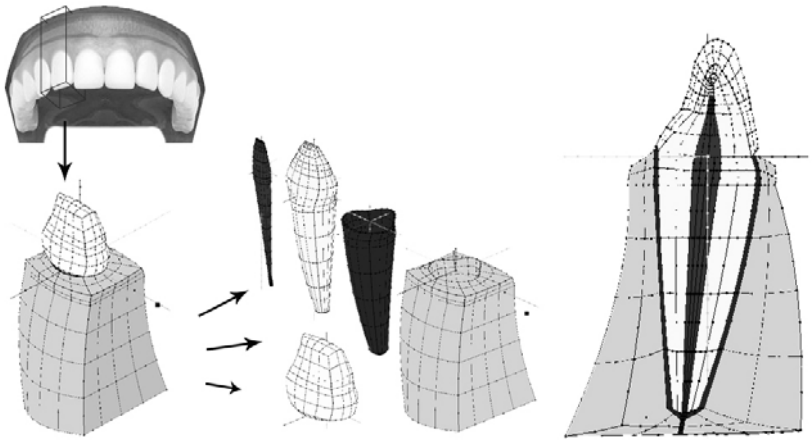


Рисунок 6.1 – Конструктивна схема фізичної моделі різця

Таблиця 6.1 – Пружні характеристики складових елементів зубо–щелепної системи.

Шари зуба	Модуль Юнга (MPa)	Стала Пуасона
Кістка	2x103	0,3
Емаль	8x104	0,3
Дентин	2x104	0,3
Пульпа	2,03	0,45
Періодонт	$5 \times 10^0 - 2 \times 10^4$	0,45

Абсолютна більшість відомих публікацій із застосування МСЕ для розрахунку напруженого стану стоматологічних об’єктів опирається на використання вже готових програмних МСЕ–пакетів: ANSYS, SOLIDWorks, COSMOSWorks та ін. Втім, за доволі широку їхню універсальність щодо геометрії досліджуваних об’єктів доводиться платити надмірними затратами на відтворення скінчено–елементними моделями специфічних форм зубощелепної системи. Через це відповідність моделей деталям реальної геометрії (особливо внутрішних шарів) у багатьох дослідженнях могла б бути ліпшою. Частково проблему вирішують за допомогою технологій 3D сканування, але значною перепоною на цьому шляху залишається недоступність для нього внутрішніх структур багатошарової конструкції зуба. Особливого загострення питання побудови сітки скінчених елементів набуває за потреби проведення низки числових експериментів для пошуку оптимальних геометрій протезних конструкцій. Автори зробили висновок, що комплексний аналіз задач біомеханіки в стоматології потребує наявності спеціалізованого під цю область інструментарію. Отож, всі наведені результати отримали з використанням власного програмного забезпечення.

6.2.1.2 Математична модель

Нехай досліджувана система займає тривимірну зв'язну область Ω з кусково–гладкою границею $\Gamma = \Gamma_\sigma \bigcup \Gamma_u$. Використання співвідношень теорії пружності приводить до такої крайової задачі: знайти вектор переміщень $u = \left(u_x, u_y, u_z \right) \in \Omega$, компоненти тензорів напружень і деформацій $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ такі, що задовольняють:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{в } \Omega \qquad \text{рівняння рівноваги}$$

$$\sigma_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} \qquad \text{в } \Omega \qquad \text{закон Гука}$$

$$\sigma_{ij} \cos\left(n, x_i\right) = F_j \qquad \text{на } \Gamma_\sigma \qquad \text{умови навантаження}$$

$$u_{x_i} = 0 \qquad \text{на } \Gamma_u \qquad \text{умови закріплення.}$$

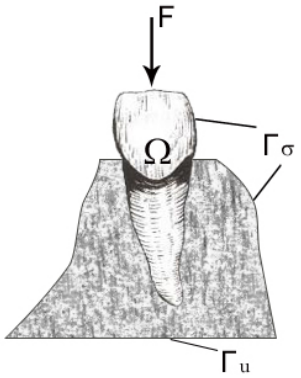


Рисунок 6.2 – Схема поперечного перерізу зубо–щелепної системи.

Умови контакту емалі з їжею забезпечують абсолютне переважання нормальних напружень на її поверхні над дотичними, тому зазначені умови навантаження на зуб моделюють нормальний до поверхні контакту тиск.

Умови закріплення охоплюють повну відсутність переміщень точок нижнього зрізу розглядуваної області та нульові переміщення точок бокових зрізів у напрямі нормалі до їхньої площини.

Для застосування МСЕ з використанням методу Гальоркіна побудовано відповідний варіаційний аналог цієї задачі. Апроксимацію переміщень у ньому виконано з використанням ізопараметричних сирендипових апроксимацій другого порядку на криволінійних шестигранниках [125].

6.2.1.3 Програмне забезпечення

Принципова задача, яку розв’язували для отримання результатів, що публікуються, – це розробка спеціалізованого до складної геометрії стоматологічних об’єктів алгоритму побудови сітки скінчених елементів. Він повинен враховувати специфічні для цієї області проблеми.

1. Мінімально достатні скінчено–елементні моделі багатошарових тривимірних конструкцій балансують на грані можливостей доступних на сьогодні обчислювальних установок.
2. Жорсткі обмеження на густину сітки призводять до вимушеного збільшення розмірів деяких скінчених елементів в окремих напрямах, що робить апроксимацію розв’язків на них надто чутливою до форми елементів.
3. Нестійкість просторових апроксимацій внаслідок грубої дискретизації є джерелом появи несправжніх концентрацій напруженого стану. В тривимірних тілах їхній пошук і перевірка украй затратні, найбільше через необхідність рекурентної процедури корекції сітки скінчених елементів.

В основу гнучкості алгоритму просторової дискретизації у розробленому авторами спеціалізованому програмному забезпеченні DENTA–FEM.3D покладено властивість ізопараметричності використаних у ньому сирендипових

апроксимацій. Вони забезпечують простий і надійний механізм поділу довільного криволінійного шестигранника (суперелемента) на скінчені елементи. Це дає змогу подати досліджуваний об’єкт у вигляді простого набору суперелементів, а алгоритм їхнього об’єднання в єдину сітку зробити рекурсивним. Задача спеціалізації вхідних під геометрію стоматологічних об’єктів на рівні інтерфейсу користувача автоматизується. Крім того, сирендипові апроксимації завдяки серединним вузлам легко *h*–адаптують сітку елементів до структури напруженого стану, що вкрай важливо в умовах дефіциту обчислювальних ресурсів.

Ми подали результати дослідження системи стоматологічних шарів, яка засобами DENTA–FEM.3D описується множиною з 65 суперелементів (рисунок 6.3, а), на основі яких згенеровано сітку з 1264 скінчених елементів (5756 вузлів) (рисунок 6.3, б). Передбачена можливість згущення сітки для уточнення результатів у потрібних областях: максимальні напруження, тонкі стінки твердих шарів, стики різних середовищ тощо.

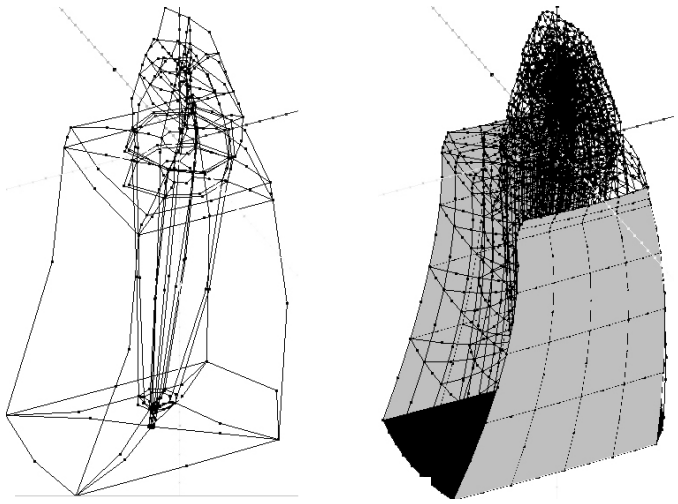


Рисунок 6.3 – Опис системи: *а)* множина з 65 суперелементів; *б)* сітка з 1264 скінчених елементів

Експериментуватимемо з двома головними напрямами прикладення зусиль, які репрезентують фізіологічні процеси жування: вертикальні та

горизонтальні. Для цього на відповідних ділянках оклюзивної області емалі (рисунок 6.4) задаватимемо нормальний тиск P. Інтенсивність тиску всюди братимемо одиничною, оскільки в умовах лінійності моделі результати легко перерахувати на його довільну величину.

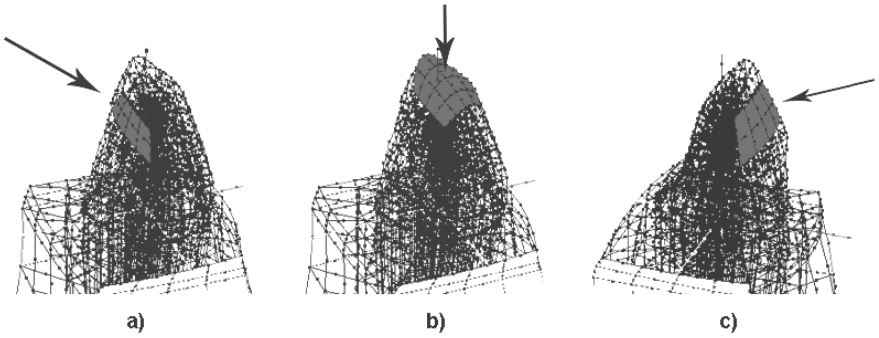


Рисунок 6.4 – Функціональне навантаження: *а)* лінгуальне; *б)* вертикальне; *с)* фронтальне

Складна фіброволоконна будова періодонту зумовлює нерегулярність його фізико–механічних параметрів: нелінійність величини жорсткості вздовж волокон і добре виражена анізотропія, зміна характеристик з часом (зокрема, відомо, що разом з відмиранням тканин зуба періодонт твердішає). Далі ми дослідимо залежність напружено–деформованого стану зуба саме від рівня твердості періодонту. Для абстрагування від впливу інших чинників, що можуть маскувати шукану залежність, дослідження проводитимемо за припущення лінійності та ізотропності параметрів всіх тканин зуба.

В умовах описаної моделі провели низку числових експериментів для різних значень модуля Юнга періодонту в інтервалі від 5 МПа до 2·104 МПа. Найменше значення інтервалу відповідає його пружності у живому зубі, а найбільше – модулю Юнга дентину, тобто моделі, яка, фактично, вже не враховує наявність прошарку періодонту.

Для порівняння, крім крайніх випадків досліджуваного інтервалу, з його проміжних значень розглядатимемо величину модуля Юнга в 2·102 МПа, яку вважатимемо відповідною жорсткості періодонту у мертвому зубі.

Всюди далі напружено–деформований стан досліджуваної системи ілюструється розподілом головних нормальних напружень у поперечному (до зубного ряду) осьовому січенні зуба. Світлішим відтінком зображатимемо більші за величиною напруження, темним – слабко напружений стан. Розташування зон стискальних і розтягувальних зусиль всюди зрозуміле з контексту зображення.

6.2.2 Результати експериментування

В умовах лінгуального навантаження (рисунок 6.4, а) за трьох зазначених значень модуля Юнга періодонту отримано такі розподіли головних нормальних напружень:

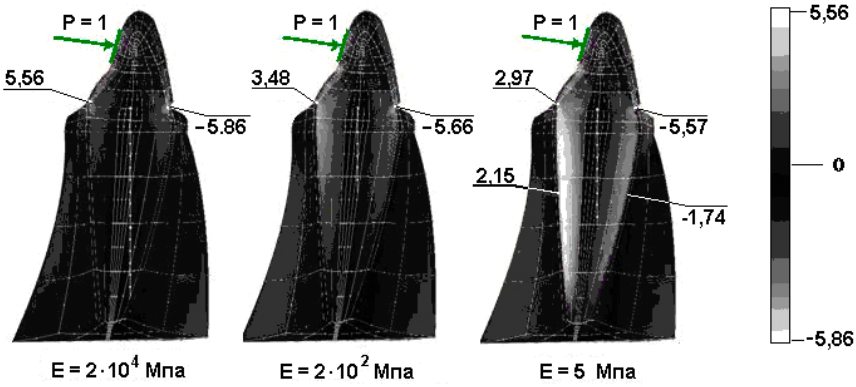


Рисунок 6.5 – Розподіли головних нормальних напружень у випадку лінгуального навантаження

Як і очікувалось, зменшення твердості періодонту приводить до розвантаження пришийкових ділянок зуба внаслідок перенесення частини внутрішніх зусиль на глибші приповерхневі шари дентину кореня, які контактують з періодонтом.

Показово, що зміна напряму навантаження з горизонтального на здебільшого вертикальне (рисунок 6.4, б) суттєвих змін у якісну картину

головних нормальних напружень не вносить. Стискальні та розтягувальні напруження чітко розподіляються по обидва боки дентину зуба, біфуркаційно швидко міняючись місцями під час переходу напряму навантаження через вертикальну його вісь. Для порівняння з рисунком 6.5 на рисунку 6.6 показана картина тих самих напружень у випадку нормального тиску на зображену на рисунку 6.4, в фронтальну ділянку зуба.

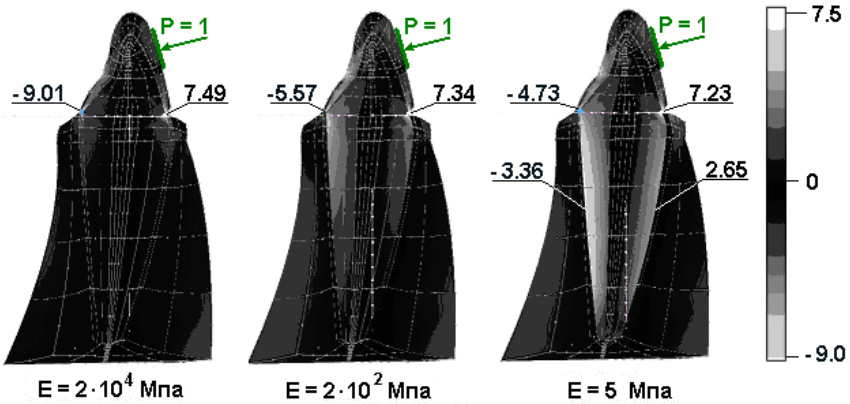


Рисунок 6.6 – Розподіли головних нормальних напружень у випадку нормального тиску.

У всіх випадках навантаження характеристики “живого” періодонту забезпечують доволі близький до рівномірного розподіл максимальних напружень вздовж поверхні кореня. Цікаво, що ці характеристики природою підібрані таким способом, який не допускає значні концентрації НДС в область апексу кореня, утримуючи основні напруження в масивніших ділянках дентину. Отож, ставиться під сумнів поширена думка, що апекс кореня у “живому” зубі є однією з областей концентрації НДС.

Отримані результати дають змогу окремо зробити висновки щодо природи так званого клиновидного дефекту, який у багатьох працях [131] пов’язується з локалізацією напружень у пришийкових ділянках. Слабке місце цієї гіпотези – чисельно отримувані практично однакові концентрації напружень на внутрішній і на зовнішній стороні зуба, тоді як у реальних умовах клиновидний дефект простежується лише з лицевого боку. Порівняння результатів на

рисункуку 6.5 та рисунку 6.6 свідчить про те, що незалежно від напряму навантаження саме за рахунок малої жорсткості періодонт у більшій мірі розвантажує внутрішні пришийкові ділянки, залишаючи практично незмінними концентрації в справжніх місцях появи клиновидного дефекту.

6.2.3 Висновки

- Модель “живого” зуба без врахування м’яких властивостей прошарку періодонту приводить до якісно неправильної картини розподілу НДС.
- Напруження від пришийкових ділянок саме періодонт рівномірно розподіляє по приповерхневих областях дентину кореня.
- Попри свою малість, жорсткість парадонтальних тканин живого зуба все ж залишається достатньою для недопущення концентрацій внутрішніх зусиль у район апексу кореня.

Значно ефективніше періодонт розвантажує пришийкові ділянки з внутрішнього боку зуба, що підтверджує силову гіпотезу походження клиновидного дефекту.

6.3 Проекційно сіткова схема розв’язування еволюційних задач окиснення чадного газу на поверхні платини

Використання процесів окиснення чадного газу на поверхні платини в автомобільних каталізаторах – це лише один з багатьох прикладів, що демонструють масштаби практичного застосування хімічних реакції на твердих поверхнях. Не менш важливе місце вони займають і в гетерогенному каталізі, мікроелектроніці та багатьох інших сферах .

Перспективи оптимізації затрат для підтримки таких реакцій зумовлюють значний інтерес до їхнього вивчення, зокрема засобами математичного

моделювання [138]. Втім, складна поведінка реагентів приводить до нелінійних початково–крайових задач [134]. У класичних схемах їхнього чисельного аналізу це означає необхідність виконання на кожному кроці інтегрування у часі низки ітерацій методу Ньютона, що накладає жорсткі обмеження на параметри просторової дискретизації задачі, особливо враховуючи наявність кількох шуканих значень у кожному вузлі сітки.

У роботі використано запропонований в [137] метод напівдискретизації задачі за часом, ітераційний процес якого суміщається з її лінеаризацією. За рахунок збереження однакових порядків збіжності у часі врівноважено похибки напівдискретизації та лінеаризації.

Дискретизацію задачі за просторовими змінними виконано методом скінчених елементів з використанням кусково–лінійних апроксимацій Куранта та біквадратичних серендипових апроксимацій на криволінійних чотирикутниках.

Запропонована схема розв’язування задачі покладена в основу програмного забезпечення, з допомогою якого на низці модельних задач здійснено апробацію побудованих чисельних схем, перевірку їх на точність та швидкість збіжності. Практичний результат дали дослідження однієї з вживаних моделей трикомпонентної автокаталітичної реакції окиснення чадного газу на поверхні платини. Зокрема, виявлено шлях уточнення моделі, яка допускає важливі для практики незатухаючі автоколивні режими роботи [139].

6.3.1 Постановка задачі

Відкриття Г.Ертлем автоколивного процесу окиснення чадного газу $2CO + O_2 = 2CO_2$ на поверхні платини Pt започаткувало вивчення принципово нового виду автоколивних хімічних реакцій, у яких каталізуючою компонентою

виступає не хімічний реагент, а структура твердої поверхні металу. Він зауважив, що на вільній поверхні атоми Pt утворюють шестигранну кристалічну гратку, яка сприяє активній адсорбції чадного газу CO з оточуючого середовища. За умови досягнення чадним газом деякої критичної концентрації поверхневі атоми платини стрибкоподібно перебудовуються у квадратну структуру. Нова форма кристалічної гратки підвищує адсорбцію молекул кисню O_2, котрі безпосередньо вступають у реакцію з чадним газом, очищаючи від нього поверхню платини. Зниження концентрації CO до певної критичної позначки ініціює зворотну стрибкоподібну реконструкцію квадратної гратки у початковий гексагональний вигляд і цикл реакції починається від початку.

У праці [134] описаний вище процес модельовано такою обезрозміреною початково–крайовою задачею дифузії–реакції:

знайти вектор концентрацій складників $\mathbf{u} = \{a(\mathbf{x},t),\ n(\mathbf{x},t),\ b(\mathbf{x},t)\}$ *такий, що*

$$\begin{cases} \partial_t a - \nabla_{\mathbf{x}}.\nabla_{\mathbf{x}} a = f_1(\mathbf{u}) := p_A\left(1-a\right)s_A - d_A a - rB_S\, ab \\ \qquad\qquad = -[p_A s_A + d_A + rB_S\, b]a + p_A s_A, \\ \partial_t n - \nabla_{\mathbf{x}}.(\eta\nabla_{\mathbf{x}} n) = f_2(\mathbf{u}) := n\left(1-n\right)\theta\left(a - a_c^1\right)a - \gamma n\left(1-a\right)^2 \\ \qquad\qquad = n[\left(1-n\right)\theta\left(a-a_c^1\right)a - \gamma\left(1-a\right)^2]n \qquad в \quad \Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{6.21}$$

$$\partial_t b = f_3(\mathbf{u}) := p_B\, n\left(1-a-b\right)^2\theta(1-b) - rA_S\, ab \qquad на \quad (0,T], \tag{6.22}$$

$$\mathbf{v}.\nabla a = \mathbf{v}.\nabla n = 0 \quad на \quad \Gamma\times[0,T], \tag{6.23}$$

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u}^0 \quad в \quad \Omega\,. \tag{6.24}$$

Тут, окрім безрозмірних (в межах інтервалу [0,1]) поверхневих концентрацій чадного газу $a = a(\mathbf{x},t)$ та кисню $b = b(\mathbf{x},t)$, окремою фазовою змінною є $n = n(\mathbf{x},t)$ – ступінь реконструкції поверхні, яка займає область $\Omega \subset R^2$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ; $\mathbf{v} = \{\nu_i\}_{i=1}^2$, $\nu_i = \cos(\mathbf{v}, x_i)$, є одиничним вектором зовнішньої нормалі до межі Γ; $\partial_t w = \partial w / \partial t$,

$\nabla_{\mathbf{x}} w = \{\partial w / \partial x_i\}_{i=1}^{2}$ – градієнт скалярної функції $w = w(\mathbf{x}, t)$ за просторовими змінними $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$, t часова змінна $[0, T]$, $0 < T < +\infty$,

$$\mathbf{w}.\mathbf{z} := \sum_{i=1}^{d} w_i z_i \qquad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in R^d.$$

Реакція на плоскій поверхні Ω проходить при температурі T_K із швидкістю $r = 2 \cdot 10^{10} e^{-121 T_K^{-1}}$. Параметри $p_A = 0.225 p_A^0$ та $p_B = p_B^0 a_K^0 B_s^{-1}$ відповідають парціальним тискам чадного газу (CO) та кисню (O_2) відповідно. $S_A = S_A^0 (1 - n) + S_A^1 n$ – коефіцієнт поглинання чадного газу на поверхні, де $S_A^0 = 0.75$, $S_A^1 = 0.34$, $d_A = d_A^0 (1 - n) + d_A^1 n$ – значення поверхневої дифузії чадного газу, де $d_A^0 = 4 \cdot 10^{13} e^{-138 T_K^{-1}}$, $d_A^1 = 3 \cdot 10^{15} e^{-174 T_K^{-1}}$. Коефіцієнт $\gamma = \dfrac{\gamma_{10}}{\gamma_{01}}$ є відношенням швидкості поверхневого переходу кристалічної гратки з квадратної структури у гексагональну γ_{10} до швидкості зворотного переходу γ_{01}, d_A – коефіцієнт десорбції CO з поверхні, A_s та B_s – коефіцієнти насичення поверхні покриттям молекулами CO та O_2 відповідно, η–дифузія CO. Моделювання стрибкоподібної перебудови кристалічної гратки виконується за допомогою функції

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Фізичний зміст цих та інших коефіцієнтів моделі (6.21)–(6.24) більш детально описано в [134].

Маючи за мету створення комп’ютерних засобів числового аналізу цієї та подібних задач автокаталізу узагальнимо описану вище математичну модель до наступної початково–крайової задачі:

$$\begin{cases} \textit{задано} \quad \mathbf{u}^0 = \{u_i^0(\mathbf{x})\}_{i=1}^p, \quad \mu^k = \{\mu_{ij}^k(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^2, \\ \rho = \{\rho_i(\mathbf{x})\delta_{ij}\}_{i,j=1}^p, \sigma = \{\sigma_i(\mathbf{x})\delta_{ij}\}_{i,j=1}^p, \mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{u})\}_{i=1}^p; \\ \textit{знайти вектор} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^p \textit{ такий, що} \\ \rho_k \partial_t u_k - \nabla_{\mathbf{x}}.(\mu^k \nabla_{\mathbf{x}} u_k) + \sigma_k u_k = f_k(\mathbf{u}) \quad \textit{в} \quad \Omega \times (0,T], \\ -(\mu^k \nabla_{\mathbf{x}} u_k).\mathbf{v} = \psi_k(\mathbf{u}) \quad \textit{на} \quad \Gamma_q \times [0,T], \Gamma_q \subset \Gamma, \\ mes(\Gamma_q) > 0, \ k = 1, \dots, p, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \textit{на} \quad \Gamma_u \times [0,T], \ \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_q, \\ \mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u}^0 \quad \textit{в} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.25}$$

Нижче нам буде потрібне варіаційне формулювання початково–крайової задачі (6.25). З цією метою помножимо рівняння з (6.25) скалярно на довільну допустиму функцію

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^p : \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \textit{на} \quad \Gamma_u\}$$

та проінтегруємо результат по області Ω з використанням формули Гріна. В результаті прийдемо до еволюційної варіаційної задачі, яка становитиме основний об’єкт нашого дослідження,

$$\begin{cases} \textit{знайти} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^p \in L^\infty\left(0,T;[L^2(\Omega)]^p\right) \cap L^2\left(0,T;\mathbf{V}\right) \\ \textit{такий, що задовольняє рівняння} \\ m(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}) + B(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = <\Pi[\mathbf{u}(t)],\mathbf{v}> \quad \forall t \in \left(0,T\right], \\ m(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{cases} \tag{6.26}$$

Тут і нижче білінійні форми лівої частини рівняння та нелінійний (відносно першого аргумента) функціонал визначено в наступний спосіб

$$\begin{cases} m(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega (\rho\mathbf{u}).\mathbf{v}\, dx \\ B(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int\limits_\Omega [\sum_{k=1}^p (\mu^k \nabla_{\mathbf{x}} u_k).\nabla_{\mathbf{x}} v_k + (\sigma\mathbf{u}).\mathbf{v}] dx \\ <\Pi[\mathbf{w}],\mathbf{v}> := \int\limits_\Omega \mathbf{v}.\mathbf{f}(\mathbf{w})\, dx + \int\limits_{\Gamma_q} \mathbf{v}.\boldsymbol{\psi}(\mathbf{w})\, d\gamma \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{V}. \end{cases} \tag{6.27}$$

Для розв'язування варіаційної задачі (6.25), з огляду на праці [136, 137], пропонуємо проекційно–сіткову схему, в основу якої покладено такі головні компоненти:

(i) дискретизація Петрова–Гальоркіна за часовою змінною з використанням частинами лінійної апроксимації розв'язку, яка приведе нас до необхідності рекурентного розв'язування послідовності стаціонарних варіаційних задач на кожному кроці довжини Δt поділу відрізка часу $[0,T]$;

(ii) апроксимація нелінійного механізму перебігу хімічної реакції, який описується заданими векторами $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{u})\}_{i=1}^{p}$ та $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_i(\mathbf{u})\}_{i=1}^{p}$ моделі, в такий спосіб, що її точність за порядком величини кроку інтегрування в часі Δt співпадатиме із порядком апроксимації згаданої вище дискретизації Петрова–Гальоркіна ;

(iii) дискретизація Гальоркіна за просторовими змінними, яка допускає використання на вибір будь–якого із класичних підпросторів апроксимацій методу скінчених елементів в просторі $\mathbf{V} \in [H^1(\Omega)]^p$.

6.3.2 Напівдискретизація в часі та лінеаризація

Підходи до побудови рекурентних процедур інтегрування початково–крайових задач у часі на сьогодні є доволі різноманітними та розвинутими. Нижче ми послуговуватимемось технікою з [84]. В частині ж боротьби з нелінійністю задачі надзбіжність методу Ньютона і його різноманітних модифікацій залишає небагато простору для використання інших підходів. Отож класична схема вимагає на кожному кроці дискретизації у часі виконання кількох ітерацій Ньютона. З огляду на обчислювальну затратність просторових апроксимацій МСЕ зменшення загальної кількості ітерацій є критично важливим завданням.

Нижче, з використанням техніки з [84, 137, 141], ми побудуємо схему, у якій процес лінеаризації задачі суміщено з ітераціями дискретизації задачі в часі. При цьому похибка апроксимації в часі врівноважується з похибкою лінеаризації.

6.3.2.1 Апроксимація за часовою змінною

Поділимо відрізок часу $[0,T]$ на M рівних проміжків $[t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots \mathrm{M}-1,$ на кожному з яких апроксимуємо шуканий розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ задачі (6.25) лінійними виразами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}_{\Delta t}(t) &:= \mathbf{u}^j + \omega_j\left(t\right)(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j) \\ &= \mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j\left(t\right)\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0,1, \dots, \mathrm{M}-1, \end{aligned} \tag{6.28}$$

де

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} := \Delta t^{-1}(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j), \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j, \\ &\omega_j(t) := \Delta t^{-1}(t - t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

З огляду на початкову умову задачі (6.25) далі будемо вважати, що вектор $\mathbf{u}^j = \mathbf{u}_{\Delta t}(t_j) \cong \mathbf{u}(t_j)$ знайдено з попередніх кроків інтегрування в часі так, що у (6.28) невідомим лишається вектор $\mathbf{u}^{j+1} \in \mathbf{V}$ або $\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \in \mathbf{V}$. Власне останній ми й приймемо за шукане невідоме.

6.3.2.2 Лінеаризація функціоналу задачі дифузії–реакції

Поряд з цим на проміжку часу $[t_j, t_{j+1}]$ лінеаризуємо праву частину

$$< \Pi[\mathbf{u}(t)], \mathbf{v} > = \int_{\Omega} \mathbf{f}[\mathbf{u}(t)].\mathbf{v}\, dx + \int_{\Gamma_q} \boldsymbol{\psi}[\mathbf{u}(t)].\mathbf{v} d\gamma\,. \tag{6.30}$$

рівняння варіаційної задачі (6.25). Для цього припустимо, що довільна задана функція $g(\mathbf{u}): R^p \to R$ є достатньо регулярною, щоб можна було скористатися розвиненням за формулою Тейлора в околі точки $\mathbf{u}^j$, а саме, її найпростішим варіантом вигляду

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) &= g\left(\mathbf{u}^j\right) + \sum_{s=1}^{p}[(u_s - u_s^j)\frac{\partial}{\partial u_s} g(\mathbf{u}^j)] + \mathrm{O}\left(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^j \|^2\right) \\ &= g\left(\mathbf{u}^j\right) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^j).\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}^j) + \mathrm{O}\left(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^j \|^2\right) \\ &\cong g\left(\mathbf{u}^j\right) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^j).\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}^j) \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad j = 0,1, \ldots, \mathrm{M} \ , \end{aligned} \tag{6.31}$$

або після заміни вектора невідомих $\mathbf{u}(t)$ на його апроксимацію $\mathbf{u}_{\Delta t}(t)$

$$\begin{aligned} g\left(\mathbf{u}_{\Delta t}(t)\right) &= g\left(\mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}\right) \\ &= g(\mathbf{u}^j) + \Delta t \omega_j(t) \sum_{s=1}^{p} \dot{u}_s^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial u_s} g(\mathbf{u}^j) + [\Delta t \omega_j(t)]^2 \mathrm{O}\left(\| \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \|^2\right) \\ &= g(\mathbf{u}^j) + \Delta t \omega_j(t) \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}^j) + [\Delta t \omega_j(t)]^2 \mathrm{O}\left(\| \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \|^2\right) \\ &\cong g(\mathbf{u}^j) + \Delta t \omega_j(t) \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{u}^j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Використаємо розвинення (6.32) для апроксимації значень векторних функцій $\mathbf{f}[\mathbf{u}_{\Delta t}(t)]$ та $\boldsymbol{\psi}[\mathbf{u}_{\Delta t}(t)]$ з правої частини (6.30) на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$. В результаті одержимо, що

$$\begin{aligned} &< \Pi[\mathbf{u}(t)], \mathbf{v} > \cong < \Pi[\mathbf{u}_{\Delta t}(t)], \mathbf{v} > \\ &\quad = \int_{\Omega} \mathbf{f}[\mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}].\mathbf{v}\, dx + \int_{\Gamma_q} \boldsymbol{\psi}[\mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}].\mathbf{v} d\gamma \cong \\ &\quad \cong \int_{\Omega} \mathbf{f}[\mathbf{u}^j].\mathbf{v}\, dx + \int_{\Gamma_q} \boldsymbol{\psi}[\mathbf{u}^j].\mathbf{v} d\gamma + \\ &\quad + \Delta t \omega(t) \sum_{k,m=1}^{p} \left\{ \int_{\Omega} \dot{u}_k^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial u_k} f_m(\mathbf{u}^j) v_m dx + \int_{\Gamma_q} \dot{u}_k^{j+1/2} \frac{\partial}{\partial u_k} \psi_m(\mathbf{u}^j) v_m d\gamma \right\} \\ &\quad = < \Pi[\mathbf{u}^j], \mathbf{v} > \\ &\quad + \Delta t \omega(t) \left\{ \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\mathbf{f}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}] dx + \int_{\Gamma_q} \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}] d\gamma \right\}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Якщо тепер ввести функціонал

$$\Re(\mathbf{u}^j;\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v}) := \int_\Omega \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\mathbf{f}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}]dx + \int_{\Gamma_q} \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}]d\gamma\,, \qquad (6.34)$$

то можна зауважити, що він є білінійною формою відносно двох останніх аргументів: шуканої швидкості зміни апроксимації розв'язку $\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \in \mathbf{V}$ та, як і раніше, допустимого вектора $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Відтак, структуру функціоналу $<\Pi[\mathbf{u}(t)],\mathbf{v}>$ із (6.30) остаточно характеризує

Пропозиція 6.1 *про розвинення нелінійного функціоналу.*

Нехай задані вектори $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{u})\}_{i=1}^p$ *та* $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_i(\mathbf{u})\}_{i=1}^p$ *є настільки регулярними, що допускають розвинення за формулою Тейлора вигляду (6.31).*

Тоді на кожному кроці інтегрування в часі значення функціоналу (6.30) на напівдискретній апроксимації розв'язку $\mathbf{u}_{\Delta t}(t)$ *із (6.28) обчислюються згідно правила*

$$\begin{aligned} <\Pi[\mathbf{u}_{\Delta t}(t)],\mathbf{v}> &= <\Pi[\mathbf{u}^j + \Delta t\omega(t)\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}],\mathbf{v}> \\ &= <\Pi[\mathbf{u}^j],\mathbf{v}> + \Delta t\omega(t)\Re(\mathbf{u}^j;\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v}) \\ &\quad + O(\Delta t^2) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]\,, \end{aligned} \qquad (6.35)$$

де лінійна складова має наступний вигляд

$$\Re(\mathbf{u}^j;\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v}) := \int_\Omega \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\mathbf{f}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}]dx + \int_{\Gamma_q} \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}^j).\mathbf{v}]d\gamma \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\,. \qquad (6.36)$$

6.3.2.3 Напівдискретизація за часовою змінною

Підставляючи апроксимацію $\mathbf{u}_{\Delta t}(t)$ із (6.28) у рівняння варіаційної задачі (6.25) та нехтуючи доданками порядку $O(\Delta t^2)$ в розвиненні (6.35) ми одержимо лінеаризоване рівняння

$$m(\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})+B(\mathbf{u}^{j},\mathbf{v})+\Delta t\omega(t)B(\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})$$
$$=<\Pi[\mathbf{u}^{j}],\mathbf{v}>+\Delta t\omega(t)\Re(\mathbf{u}^{j};\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})\quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}\quad \forall t\in[t_j,t_{j+1}]; \tag{6.37}$$

домноживши його на функцію $\zeta(t)$ з властивістю

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\zeta(t)dt=1$$

та, інтегруючи одержаний результат на проміжку часу $[t_j,t_{j+1}]$ приходимо до послідовності рекурентно розв'язуваних стаціонарних варіаційних задач:

$$\begin{cases} \textit{задано}\ \ \mathbf{u}^0\in\mathbf{V},\ \ \Delta t>0,\quad \theta\in[0,1]; \\ \textit{знайти}\ \ \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}\in\mathbf{V}\ \ \textit{та}\ \ \mathbf{u}^{j+1}\in\mathbf{V}\ \ \textit{такі, що} \\ m(\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})+\Delta t\theta\left[B(\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})-\Re(\mathbf{u}^{j};\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\mathbf{v})\right]= \\ \qquad\qquad =<\Pi[\mathbf{u}^{j}],\mathbf{v}>-B(\mathbf{u}^{j},\mathbf{v})\qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \\ \mathbf{u}^{j+1}=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2},\quad j=1,\ \dots,\mathrm{M}-1\ . \end{cases} \tag{6.38}$$

Тут параметр θ запроваджено з використанням теореми про інтегральне середнє в такий спосіб

$$\theta:=\int_{t_j}^{t_{j+1}}\omega(t)\zeta(t)dt=\omega(\tau)\int_{t_j}^{t_{j+1}}\zeta(t)dt\cong\omega(\tau)\in[0,1]\,.$$

6.3.3 . Дискретизація за просторовими змінними

Поділимо область $\Omega\subset R^d$ на скінченні елементи K так, щоб результуюча тріангуляція $\Im_h=\{K\}$, $h:=\max_{K\in\Im_h}h_K$, $h_K:=\operatorname{diam}K$, володіла властивостями

(i) $$\bar{\Omega}=\bigcup_{K\in\Im_h}\bar{K};$$

(ii) $$K\cap K'=\varnothing\ \ \forall K,K'\in\Im_h:\ K\neq K'; \tag{6.39}$$

(iii) $$\bar{K} \cap \bar{K}' = \begin{cases} S := \{\textit{спільна сторона } K \textit{ та } K'\}, \\ A := \{\textit{спільна вершина } K \textit{ та } K'\}, \\ \varnothing \end{cases} \qquad \forall K, K' \in \Im_h .$$

6.3.3.1 Повністю дискретизована задача дифузії–реакції

Побудувавши в той чи інший спосіб (який буде окреслено пізніше) на тріангуляції $\Im_h = \{K\}$ скінченновимірний простір апроксимацій $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, $\dim \mathbf{V}_h = \mathrm{N}(h) = \mathrm{N} < +\infty$, ми, слідуючи підходу Гальоркіна, дискретизуємо задачу (6.38) перенесенням її розв'язування до цього підпростору:

$$\begin{cases} \textit{задано } \Im_h = \{K\} \textit{ та } \mathbf{V}_h \subset V, \ \dim \mathbf{V}_h = \mathrm{N}(h) = \mathrm{N} < +\infty, \\ \textit{та } \ \mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}_h, \ \Delta t > 0, \ \ \theta \in [0,1]; \\ \textit{знайти } \ \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} \in \mathbf{V}_h \ \textit{та } \ \mathbf{u}^{j+1} \in \mathbf{V}_h \ \textit{такі, що} \\ m(\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}, \mathbf{v}) + \Delta t \theta \left[B(\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}, \mathbf{v}) - \Re(\mathbf{u}_h^j; \dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}, \mathbf{v}) \right] \\ \qquad\qquad = < \Pi[\mathbf{u}_h^j], \mathbf{v} > - B(\mathbf{u}_h^j, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \\ \mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}, \quad j = 1, \ldots, \mathrm{M}-1 \ . \end{cases} \tag{6.40}$$

Тепер, вибираючи зручний для обчислень базис $\{\boldsymbol{\upsilon}_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$ підпростору апроксимацій $\mathbf{V}_h$, ми конкретизуємо задачу (6.40) до алгебричного вигляду:

$$\begin{cases} \textit{задано } \Im_h = \{K\}, \textit{ базис } \{\boldsymbol{\upsilon}_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{\mathrm{N}} \textit{ простору } \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}; \\ \textit{та } \ \mathbf{u}_h^0(\mathbf{x}) := \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} q_m^0 \boldsymbol{\upsilon}_m(\mathbf{x}) \ \in \mathbf{V}_h, \ \ \Delta t > 0, \quad \theta \in [0,1]; \\ \textit{знайти коефіцієнти } s_m \in R \textit{ розвинення за базисом} \\ \dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}(\mathbf{x}) := \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} s_m \boldsymbol{\upsilon}_m(\mathbf{x}) \ \textit{такі, що задовольняють} \\ \textit{систему лінійних алгебричних рівнянь} \\ \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} \left\{ m(\boldsymbol{\upsilon}_m, \boldsymbol{\upsilon}_i) + \Delta t\theta [B(\boldsymbol{\upsilon}_m, \boldsymbol{\upsilon}_i) - \Re(\mathbf{u}_h^j; \boldsymbol{\upsilon}_m, \boldsymbol{\upsilon}_i)] \right\} s_m = \\ \qquad\qquad = < \Pi[\mathbf{u}_h^j], \boldsymbol{\upsilon}_i > - B(\mathbf{u}_h^j, \boldsymbol{\upsilon}_i) = < l_\Omega, \boldsymbol{\upsilon}_i > \qquad i = 1, \ \dots \ , \mathrm{N} \\ \textit{та обчислити нові значення вектора концентрацій згідно правила} \\ \mathbf{u}_h^{j+1}(\mathbf{x}) := \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} q_m^{j+1} \boldsymbol{\upsilon}_m(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} (q_m^j + \Delta t s_m) \boldsymbol{\upsilon}_m(\mathbf{x}) \qquad j = 0, 1, \ \dots \ . \end{cases} \tag{6.41}$$

6.3.3.2 Конкретизація алгоритму обчислення систем рівнянь повністю дискретизованої задачі дифузії–реакції

Кожен елемент **v** простору **V** (а, відповідно, й $\mathbf{V}_h$) є вектором з p компонент $\mathbf{v} = \left\{ v_i \in H^1(\Omega) \right\}_{i=1}^{p}$ (зокрема, у вихідній задачі компонентами є кисень, чадний газ, та рівень реконструкції поверхні, тобто $p = 3$). Отож, однакова гладкість усіх компонент дає змогу для їх апроксимації обмежитись єдиним набором функцій:

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \varphi_i\left(\mathbf{x}^m\right) = \delta_{im}, \quad \forall \mathbf{x}^m \in X_h, \tag{6.42}$$

де X_h множина вузлів тріангуляції $\Im_h$, $X_h = \{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^{N}$, а $\mathrm{N} = N \cdot p$.

Отож, із врахуванням структури $\mathbf{V}_h$, на основі функцій (6.42) побудуємо його базис, який з міркувань зручності реалізації чисельних алгоритмів складатиметься з векторів вигляду

$$\boldsymbol{\upsilon}_i^1(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\upsilon}_{p(i-1)+1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{\upsilon}_i^p(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\upsilon}_{p(i-1)+p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad i = 1, \ldots, N. \quad (6.43)$$

На такому базисі шукані вектори з простору $\mathbf{V}_h$ подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2} &= \sum_{i=1}^{N} s_i \boldsymbol{\upsilon}_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} s_i^k \boldsymbol{\upsilon}_i^k(\mathbf{x}), \quad s_i^k \in R, \\ \mathbf{u}_h^j &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} q_i^k \boldsymbol{\upsilon}_i^k(\mathbf{x}), \quad q_i^k \in R, \end{aligned} \quad (6.44)$$

Підстановка векторів (6.44) та векторів базису (6.43) у задачу (6.41) приводить до результуючої СЛАР, яку можна подати у такому матричному записі:

$$\left(\mathbf{M} + \Delta t\theta\left[\mathbf{B} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_h^j)\right]\right)\mathbf{s} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}_h^j) - \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (6.45)$$

Система (6.45) складається з $N \cdot p$ рівнянь, окремі компоненти якої обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} m(\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}, \boldsymbol{\upsilon}_m^r) &= \int_\Omega (\rho \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} s_i^k \boldsymbol{\upsilon}_i^k) . \boldsymbol{\upsilon}_m^r dx = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} s_i^k \int_\Omega (\rho \boldsymbol{\upsilon}_i^k) . \boldsymbol{\upsilon}_m^r dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} m(\boldsymbol{\upsilon}_i^k, \boldsymbol{\upsilon}_m^r) s_i^k = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} s_i^k \delta_{kr} \int_\Omega \rho_k \varphi_i \varphi_m dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} s_i^r \int_\Omega \rho_r \varphi_i \varphi_m dx, \quad r = 1, \ldots p, \quad m = 1, \ldots N, \end{aligned} \quad (6.46)$$

оскільки $\quad m(\boldsymbol{\upsilon}_i^k, \boldsymbol{\upsilon}_m^r) = \int_\Omega (\rho \boldsymbol{\upsilon}_i^k) . \boldsymbol{\upsilon}_m^r dx = \delta_{kr} \int_\Omega \rho_k \varphi_i \varphi_m dx$,

$$B(\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2},\boldsymbol{\upsilon}_m^r)=\int_\Omega[(\mu^r\nabla_{\mathbf{x}}\sum_{i=1}^N s_i^r\varphi_i).\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_m+(\sigma\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\boldsymbol{\upsilon}_i^k).\boldsymbol{\upsilon}_m^r]dx$$

$$=\sum_{i=1}^N s_i^r\int_\Omega[(\mu^r\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i).\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_m+(\sigma\boldsymbol{\upsilon}_i^r).\boldsymbol{\upsilon}_m^r]dx \tag{6.47}$$

$$=\sum_{i=1}^N s_i^r\int_\Omega[(\mu^r\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i).\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_m+\sigma_r\varphi_i\varphi_m]dx\,,$$

аналогічно $B(\mathbf{u}_h^j,\boldsymbol{\upsilon}_m^r)=\sum_{i=1}^N q_i^r\int_\Omega[(\mu^r\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i).\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_m+\sigma_r\varphi_i\varphi_m]dx$,

$$\Re(\mathbf{u}_h^j;\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2},\boldsymbol{\upsilon}_m^r)=\int_\Omega\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_h^j).\boldsymbol{\upsilon}_m^r]dx+\int_{\Gamma_q}\dot{\mathbf{u}}_h^{j+1/2}.\nabla_{\mathbf{u}}[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_h^j).\boldsymbol{\upsilon}_m^r]d\gamma$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\boldsymbol{\upsilon}_i^k\right).\nabla_{\mathbf{u}}[f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m]dx+\int_{\Gamma_q}\left(\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\boldsymbol{\upsilon}_i^k\right).\nabla_{\mathbf{u}}[\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m]d\gamma$$

$$=\int_\Omega\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\varphi_i\frac{\partial}{\partial u_k}f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m\,dx+\int_{\Gamma_q}\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\varphi_i\frac{\partial}{\partial u_k}\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m d\gamma \tag{6.48}$$

$$=\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^p s_i^k\left(\int_\Omega\frac{\partial}{\partial u_k}f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\varphi_m\,dx+\int_{\Gamma_q}\frac{\partial}{\partial u_k}\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\varphi_m\,d\gamma\right),$$

$$<\Pi[\mathbf{u}_h^j],\boldsymbol{\upsilon}_m^r>=\int_\Omega\mathbf{f}(\mathbf{u}_h^j).\boldsymbol{\upsilon}_m^r\,dx+\int_{\Gamma_q}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_h^j).\boldsymbol{\upsilon}_m^r\,d\gamma$$

$$=\int_\Omega f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m\,dx+\int_{\Gamma_q}\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_m\,d\gamma\,. \tag{6.49}$$

Перед формуванням СЛАР упорядкуємо шукані s_i^k, та відомі з попереднього кроку за часом q_i^k, $i=1,\ldots,N$, $k=1,\ldots,p$ коефіцієнти із розвинення (6.44) у вектори **s** та **q** відповідно, наступним чином:

$$\mathbf{s}=\begin{pmatrix}\mathbf{s}_1\\ \vdots\\ \mathbf{s}_N\end{pmatrix},\quad \mathbf{s}_i=\begin{pmatrix}s_i^1\\ \vdots\\ s_i^p\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1\\ \vdots\\ \mathbf{q}_N\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_i=\begin{pmatrix}q_i^1\\ \vdots\\ q_i^p\end{pmatrix}. \tag{6.50}$$

Отож, використовуючи співвідношення (6.45)–(6.50), можемо записати (6.40) у матричному вигляді:

$$\left(\mathbf{M} + \Delta t\theta\left[\mathbf{B} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_h^j)\right]\right)\mathbf{s} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}_h^j) - \mathbf{Bq}\ , \tag{6.51}$$

де

$$\mathbf{M} = \left\{\mathbf{M}_{im}\right\}_{i,m=1}^{N}, \quad \mathbf{M}_{im} = \left\{\delta_{kr}\int_{\Omega}\rho_k\varphi_i\varphi_m dx\right\}_{k,r=1}^{p},$$

$$\mathbf{B} = \left\{\mathbf{B}_{im}\right\}_{i,m=1}^{N}, \quad \mathbf{B}_{im} = \left\{\delta_{kr}\int_{\Omega}[(\mu^r\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i).\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_m + \sigma_k\varphi_i\varphi_m]dx\right\}_{k,r=1}^{p},$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_h^j) = \left\{\mathbf{R}_{im}(\mathbf{u}_h^j)\right\}_{i,m=1}^{N}, \tag{6.52}$$

$$\mathbf{R}_{im}(\mathbf{u}_h^j) = \left\{\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial u_k}f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\varphi_m\,dx + \int_{\Gamma_q}\frac{\partial}{\partial u_k}\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\varphi_m\,d\gamma\right\}_{k,r=1}^{p},$$

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{u}_h^j) = \left\{\mathbf{\Pi}_i(\mathbf{u}_h^j)\right\}_{i=1}^{N}, \quad \mathbf{\Pi}_i(\mathbf{u}_h^j) = \left\{\int_{\Omega}f_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\,dx + \int_{\Gamma_q}\psi_r(\mathbf{u}_h^j)\varphi_i\,d\gamma\right\}_{r=1}^{p}.$$

Просторова дискретизація (6.39) задачі окрім апроксимації шуканого розв’язку за його значеннями у вузлах сітки передбачає також подання області Ω у вигляді об’єднання скінчених елементів. Це дає змогу стандартним підходом МСЕ побудувати поелементну процедуру знаходження коефіцієнтів матриць (6.52) результуючої системи

6.3.4 Апробація числових схем

Запропонована вище схема суміщення ітераційних процесів дискретизації вихідної задачі у часі та лінеаризації варіаційних рівнянь моделі ніяк не опирається на спосіб дискретизації її просторових змінних. Це дає змогу розраховувати, що для перевірки її ефективності достатньо обмежитися вибором одновимірної геометрії задачі. Втім, навіть у цьому випадку складність вихідних співвідношень дає мало шансів на знаходження в явному вигляді бодай якогось часткового розв’язку, котрий був би придатним для

оцінки достовірності та ефективності запропонованих чисельних схем. Тому, як це робиться в стандартний спосіб, наперед задамося деяким зручним пробним розв'язком і підстановкою його в оператор моделі (6.25) отримаємо відповідну праву частину. Таким чином прийдемо до нової задачі з уже відомим аналітичним розв'язком. Зрозуміло, що для збереження рівня складності вихідної моделі (6.21), (6.22) пробний розв'язок слід вибирати не будь–яким, а з умов дотримання ним наступних вимог: 1) приводить до нелінійної (не нижче третього порядку) правої частини моделі, яка з міркувань фізичної адекватності має залишатися автономною; 2) права частина зв'язує рівняння моделі між собою; 3) поведінка компонент розв'язку у часі має коливний характер.

Вказаним вище вимогам відповідає наступний варіант розв'язку:

$$\mathbf{u}(x,t) = \left\{ a(x,t) = \frac{1}{\cos(x+t)+2};\ n(x,t) = \frac{a(x,t)}{b(x,t)};\ b(x,t) = \frac{1}{\sin(x+t)+2} \right\}, \quad (6.53)$$

який приводить до задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} - \nabla.\nabla a = f_1(\mathbf{u}) := -8a^3 - a + bn^2\left(1 - 2n + 8bn\right), \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} - \nabla.\nabla n = f_2(\mathbf{u}) := -28a^3 + a^2 - 4bn^3 + 22a^3b^{-1}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} - \nabla.\nabla b = f_3(\mathbf{u}) := -8b^3 + 4b^2 - b + an^{-2}(-1 - 2n^{-1} + 8an^{-1}) \qquad в \quad \Omega \times (0,T], \end{cases} \quad (6.54)$$

Складність моделі (6.54) нічим не поступається складності співвідношень (6.21), (6.22). На цій підставі будемо розраховувати, що порівняння її наближених розв'язків з точним (6.53) дасть змогу оцінити придатність застосованих нами чисельних схем.

Числовий аналіз моделі (6.54) розпочнемо з демонстрації просторового розподілу компонент її точного розв'язку (6.53) в області $\Omega = [0, 2\pi]$, наприклад, у момент часу $t = 10$, які зображено суцільними лініями на рисунку 6.7.

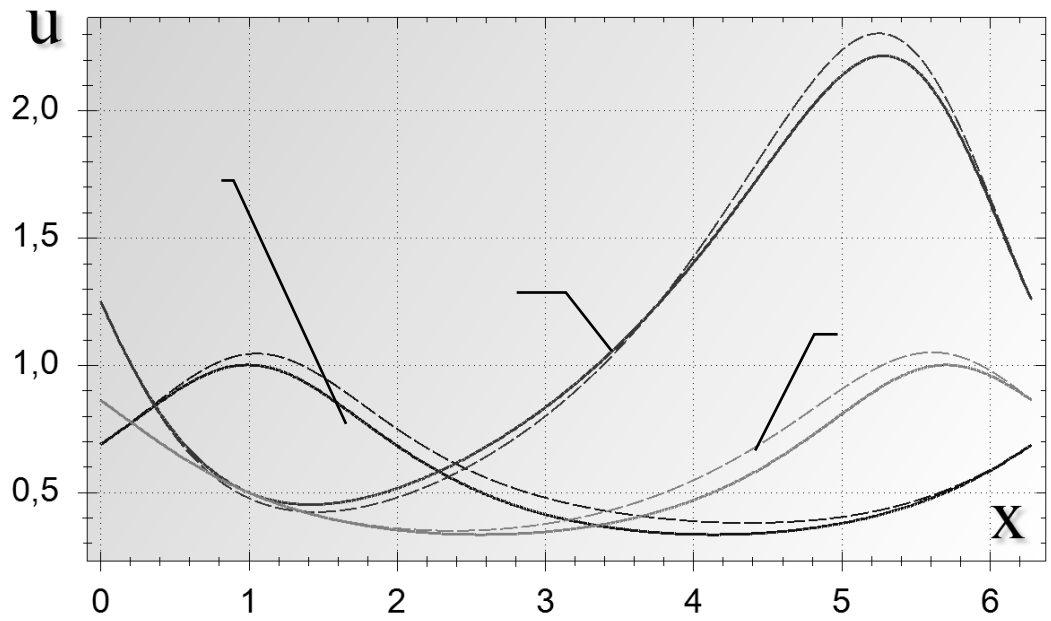


Рисунок 6.7 – Просторовий розподіл розв’язку задачі (6.54) при t=10.

Для порівняння пунктирними лініями тут же наведено відповідні числові результати, які отримані за побудованою вище методикою для сітки в 600 скінчених елементів та $\Delta t = 10^{-4}$. Як бачимо, за 10^5 кроків у часі наближений розв’язок досить добре повторює поведінку точного, що свідчить на користь принципової придатності використаних числових схем.

Для більш детального аналізу точності отримуваних наближених розв’язків необхідно оцінювати порядки їх збіжності за параметрами просторової та часової дискретизації. Для цього послуговуватимемось такими нормами:

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \|u\|^2_m = \sum_{\alpha \le m} \int_\Omega \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \right)^2 dx, \tag{6.55}$$

$$\|u\|^2_T = \tfrac{1}{2} \|u(T)\|^2_{H^0(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{H^0(\Omega)} dt, \tag{6.56}$$

$$\|\mathbf{u}\|^2_{V^m} = \sum_{r=1}^{p} \|u_r\|^2_{H^m(\Omega)}, \tag{6.57}$$

$$\|\mathbf{u}\|_T^2 = \sum_{r=1}^{p} \|u_r\|_T^2 . \tag{6.58}$$

Відповідно порядки збіжності за часом та просторовою змінною обчислюватимемо за формулами:

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}^m(u) &= \log_2 \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_m}{\|u_{\Delta t/2} - u_{\Delta t/4}\|_m}, \quad p_{\Delta t}(u) = \log_2 \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_T}{\|u_{\Delta t/2} - u_{\Delta t/4}\|_T}, \\ p_{\Delta t}^m(\mathbf{u}) &= \log_2 \frac{\|\mathbf{u}_{\Delta t} - \mathbf{u}_{\Delta t/2}\|_m}{\|\mathbf{u}_{\Delta t/2} - \mathbf{u}_{\Delta t/4}\|_m}, \quad p_{\Delta t}(\mathbf{u}) = \log_2 \frac{\|\mathbf{u}_{\Delta t} - \mathbf{u}_{\Delta t/2}\|_T}{\|\mathbf{u}_{\Delta t/2} - \mathbf{u}_{\Delta t/4}\|_T}, \end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned} p_h^m(u) &= \log_2 \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_m}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|_m}, \quad p_h(u) = \log_2 \frac{\|u_h - u_{h/2}\|}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|}, \\ p_h^m(\mathbf{u}) &= \log_2 \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|_m}{\|\mathbf{u}_{h/2} - \mathbf{u}_{h/4}\|_m}, \quad p_h(\mathbf{u}) = \log_2 \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|}{\|\mathbf{u}_{h/2} - \mathbf{u}_{h/4}\|}. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Результати обрахунків порядків швидкості збіжності для $\Omega = [0, 2\pi]$ подано у низці таблиць нижче. Всі обчислення виконано на часовому проміжку $[0,10]$.

6.3.4.1 Збіжність просторових апроксимацій

Для дослідження збіжності розв'язків задачі (6.54) використаємо послідовність рівномірних сіток з E, 2E, 4E, … скінчених елементів. Результати подаватимемо у момент часу $t = 10$ за завідомо достатньо дрібного кроку інтегрування в часі $\Delta t = 0.001$.

Для аналізу збіжності використовуватимемо норми (6.55)–(6.58), та показники абсолютної й відносної похибок у цих нормах:

$$e_h^m(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|_m \times 10^{-3}, \quad \varepsilon_h^m(\mathbf{u}) = \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|_m}{\|\mathbf{u}_h\|_m} \times 10^5\,\%, \quad e_h(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|_T \times 10^{-3},$$

$$\varepsilon_h(\mathbf{u}) = \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2}\|_T}{\|\mathbf{u}_h\|_T} \times 10^2\,\%.$$

Таблиця 6.2 – Збіжність просторових апроксимацій у нормах (6.55)–(6.58).

E $\times 10^{-2}$	$e_h^0(\mathbf{u})$	$e_h^1(\mathbf{u})$	$e_h(\mathbf{u})$	$p_h^0(\mathbf{u})$	$p_h^1(\mathbf{u})$	$p_h(\mathbf{u})$	$\varepsilon_h^0(\mathbf{u})$	$\varepsilon_h^1(\mathbf{u})$	$\varepsilon_h(\mathbf{u})$
1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	1584,8	2242,9	2,50538	–	–	–	37,19	46,86	38,35
4	408,6	540,9	0,55674	1,96	2,05	2,17	10,11	12,00	8,34
8	126,0	169,6	0,15331	1,70	1,67	1,86	3,18	3,85	2,31
16	32,2	43,5	0,04133	1,97	1,96	1,89	0,82	0,99	0,62
32	8,1	11,1	0,01263	1,99	1,96	1,71	0,21	0,25	0,19

Результати підтверджують сподівання, що запропонована схема суміщення ітераційних процесів дискретизації вихідної задачі у часі та лінеаризації варіаційних рівнянь моделі не впливає на ефективність навіть простих просторових апроксимацій.

Застосування норми (6.56) дозволяє запобігти випадковому попаданню у «зручний» для підтвердження попередніх висновків момент часу і відображає накопичення похибки просторової дискретизації за весь пройдений часовий період.

Незначне погіршення характеристик апроксимації на надгустих просторових сітках найімовірніше викликано початком впливу похибок часової дискретизації.

6.3.4.2 Збіжність у часі

Тепер за незмінної просторової сітки з N=600 елементів поспостерігаємо за збіжністю часової апроксимації розв’язку при зменшенні кроку інтегрування у часі вдвічі. Отримані показники збіжності у часі усіх (a,n,b) компонент

розв'язку є досить близькими за величиною, тому наведемо результати лише для першої з них.

У позначеннях: $e^m_{\Delta t}(\mathbf{u}) := \left\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h/2} \right\|_{\Delta t} \times 10^{-6}$, $\varepsilon^m_{\Delta t}(\mathbf{u}) = \dfrac{\left\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{\Delta t/2} \right\|_m}{\left\| \mathbf{u}_{\Delta t} \right\|_m} \times 10^5\,\%$,

$e_{\Delta t}(\mathbf{u}) := \left\| \mathbf{u}_{\Delta t} - \mathbf{u}_{\Delta t/2} \right\|_T \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{\Delta t}(\mathbf{u}) = \dfrac{\left\| \mathbf{u}_{\Delta t} - \mathbf{u}_{\Delta t/2} \right\|_T}{\left\| \mathbf{u}_{\Delta t} \right\|_T} \times 10^6\,\%$, отримано:

Таблиця 6.3 – Збіжність у часі норм розв'язку.

$\Delta t \times 10^{-5}$	$e^0_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$e^1_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$e_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$p^0_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$p^1_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$p_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$\varepsilon^0_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$\varepsilon^1_{\Delta t}(\mathbf{u})$	$\varepsilon_{\Delta t}(\mathbf{u})$
5000	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2500	2679164	4330764	4417806	–	–	–	633752	913377	1465427
1250	345463	461212	442950	3,0	3,2	3,3	85783	102813	147767
625	57276	77038	77684	2,6	2,6	2,5	14354	17351	27262
312,5	9111	12262	26720	2,7	2,7	1,5	2287	2766	9468,0
156,3	1607	2166	13166	2,5	2,5	1,0	403	489	4672,6
78,1	317	428	6653	2,3	2,3	1,0	80	97	2362
39,1	69	93	3346	2,2	2,2	1,0	17	21	1188
19,5	16	21	1677	2,1	2,1	1,0	4	5	596

Як і для просторової дискретизації застосування запропонованої у роботі методики попутної лінеаризації рівнянь моделі не зменшує ефективності використаної схеми часової апроксимації розв'язку.

6.3.5 Практичні результати

Фізичні параметри проходження реакції окиснення чадного газу на поверхні платини нижче взято з досліджень у даному напрямку, що ведуться за

участі одного з авторів цієї публікації в Інституті фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів). Разом з додатковим (у порівнянні з моделлю(6.21)) врахуванням дифузії кисню вихідні дані задачі є наступними:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} - \Delta a = f_1 = p_A(1-a)S_A - ad_A(n) - rB_S ab \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} - \eta\Delta n = f_2 = n\,(1-n)\;a\;\theta(a-a_c^1) - \gamma\, n\,(1-a)^2 \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} - 0.2\eta\Delta b = f_3 = p_B n\,(1-a-b)^2\theta(1-b) - rA_S ab \end{cases}$$
$$\eta = 0.5\cdot 10^{-2}, p_A = 1.47,\;\; p_B = 10.83,$$
$$S_A = S_A^0\left(1-n\right) + S_A^1 n, \quad S_A^0 = 0.75, S_A^1 = 0.34,$$
$$d_A(n) = d_A^0(1-n) + d_A^1 n, d_A^0 = 1.92, d_A^1 = 0.05,$$
$$B_S = 0.6,\, A_S = 0.5,\, a_c^1 = 0.1, \gamma = 0.5, r = 0.042,$$
$$t \in [0,T], \Delta t = 0.1,\; \psi_i \equiv 0\,,\; i = \overline{1,3}\,. \tag{6.61}$$

Наведені значення параметрів тут нормалізовано відповідно до способу обезрозмірення змінних вихідної моделі. Зокрема, часова змінна t пов’язана з реальним часом проходження процесу t* (сек) наступним чином:

$$t^* = t/\gamma_{01}, \quad \text{де} \quad \gamma_{01} = 10e^{-1/\Theta} \tag{6.62}$$

за зв’язку між приведеною T і реальною T^* (K) температурами проходження реакції:

$$T = RT^*, \tag{6.63}$$

(де R – універсальна газова стала) та приведеною x і фізичною x^*(μm) просторовими координатами:

$$x^* = xL_A, \quad \text{де}\; L_A = \sqrt{B_S/\gamma_{01}}\,. \tag{6.64}$$

Обмежимось випадком початково рівномірного просторового розподілу реагентів, який через рівність нулю дифузійної складової рівнянь моделі залишатиметься рівномірним і в усі подальші моменти часу. Числове

експериментування з вибраною моделлю показало, що завершенням нетривалого перехідного процесу за типових для практики рівнів початкових концентрацій реагентів є встановлення стаціонарного режиму (рисунок 6.7).

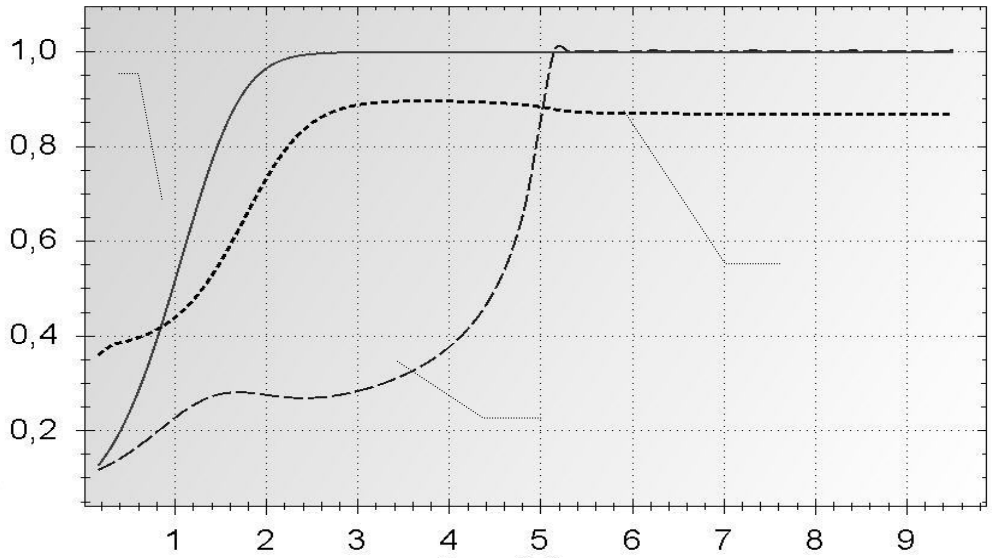


Рисунок 6.8 – Зміна у часі концентрацій чадного газу (a), кисню (b) та ступеню реконструкції поверхні платини (n).

Домогтися ж виходу такої системи на автоколивний режим роботи, який спостерігається в реальних умовах, вдається лише за вибору фізично недосяжних значень окремих параметрів задачі. Це свідчить про істотні вади моделі (6.61), а, відповідно, й необхідність подальшого її уточнення.

6.4 Квазістатичні задачі термопружності для оболонок податливих на зсув та стиснення

Під квазістатичною задачею термопружності розуміють таку задачу, в котрій не враховують вплив швидкостей пружних деформацій на температурне поле оболонки, а також сили інерції, обумовлені нестаціонарним температурним полем.

Перший етап розв’язування такої задачі полягає в знаходженні температурного поля оболонки, що в свою чергу зводиться до розв’язування початково–крайової задачі теплопровідності. Потім за відомим температурним полем в кожний момент часу визначають відповідний пружно–деформівний стан оболонки, що виникає під дією заданого силового навантаження в умовах нерівномірного нагріву оболонки.

Цей розділ присвячений дослідженню процесу геометрично нелінійного деформування ізотропних оболонок податних на зсув і стиснення під дією силових навантажень та нерівномірного нагріву.

У працях [144, 150, 151] побудовано початково–крайові та відповідні варіаційні задачі динаміки та статики оболонок під дією силових навантажень. Основна особливість використаного в цих працях підходу полягає в напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка–Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Вихідні співвідношення моделі містять як невідомі – зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі. Встановлено умови коректності варіаційних задач статики та динаміки лінійної шестимодальної теорії оболонок Тимошенка–Міндліна, побудовані оцінки збіжності чисельних розв’язків поставлених задач. Сукупність результатів праць [144, 150] служить ґрунтовною основою для продовження дослідження цього класу моделей оболонок.

У даному розділі сформульована задача термопружності для зсувних оболонок. Модель побудована на основі геометрично нелінійної теорії оболонок Тимошенка–Міндліна [121], що зберігає прямолінійність нормального елемента недеформованої оболонки після її навантаження, але може змінювати свою довжину і може бути неортогональним до деформованої серединної поверхні. Цю гіпотезу відображає шестимодальний варіант рівнянь переміщень точок облонки, який у поєднанні із співвідношеннями нелінійної теорії пружності, зв’язує переміщення серединної поверхні оболонки із

компонентами тензора деформацій Гріна. Для врахування, окрім силового навантаження, впливу температурного поля на деформацію тонкостінних конструкцій використано гіпотезу Дюгамеля–Неймана.

Сформульовано крайову задачу про статичну рівновагу оболонок податливих на зсув та стиснення та квазістатичну задачу термопружності багатошарових оболонок податливих на зсув та стиснення.

Варіаційні принципи термопружності, за допомогою яких розвинуті наближені методи розв'язування задач термопружності, аналогічні до відомих варіаційних методів розв'язування задач ізотермічної теорії пружності [155]. Вони базуються на узагальненому варіаційному принципі Лагранжа і виразах, що апроксимують можливі переміщення та можливі напруження, і принципі мінімуму енергії деформації. Доведено коректність варіаційних задач лінійного деформування зсувних оболонок довільної форми під дією термосилового навантаження.

Даний розділ містить також розв'язування геометрично нелінійних задач статики методом скінченних елементів та аналіз числових результатів модельних задач деформування зсувних оболонок під дією термосилового навантаження.

6.4.1 Побудова моделі оболонок податливих на зсув та стиснення

6.4.1.1 Основні припущення теорії гнучких тіл

Віднесемо оболонку постійної товщини $h = const > 0$ в початковому (недеформованому) стані до криволінійної ортогональної системи координат (α_1, α_2) і введемо ортогональну до неї змінну α_3 ($|\alpha_3| \le h/2$). Вважатимемо, що координатні лінії α_1, α_2 співпадають з лініями головних кривин, а товщина h істотно менша від решти характерних розмірів оболонки.

В евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ оболонка, як тривимірне тіло, займає обмежену область V з неперервною за Ліпшицем межею S. Позначимо через n одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, а межу серединної поверхні Ω – через Γ. У такому разі точки оболонки визначатимуться множиною

$$V = \Omega \times \left(-h/2, h/2\right).$$

Межа S складається з лицьових поверхонь

$$\Omega_{\pm} = \Omega \times \left\{\pm h/2\right\}$$

та бічної поверхні

$$\Sigma = \Gamma \times \left(-h/2, h/2\right).$$

У вибраній системі координат мають місце наступні рівності для параметрів Ляме [159] (в яких відкинуто члени o(h)):

$$\begin{aligned} &H_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right) = A_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\left(1+\alpha_3 k_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\right), \quad i=1,2, \\ &H_3\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right) = 1. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Тут $A_i = A_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми і $k_i = k_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ – головні кривини поверхні Ω відповідно.

Нехай вектор $U = \left\{U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right\}_{i=1}^{3}$ характеризує зміну положення точки оболонки в процесі її деформування, де U_i – проекція вектора повного переміщення точки в напрямку дотичної до координатної лінії α_i $\left(i=1,2,3\right)$ в цій точці. Так як і в [144, 146] співвідношення для компонент тензора Гріна $\mathcal{E}_{ij}$ згідно [156] запишемо через компоненти лінійних деформацій E_{ij} та кути поворотів ω_k $\left(i,j,k=1,2,3\right)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= E_{11} + \frac{1}{2}\left[E_{11}^2 + \left(\frac{1}{2}E_{12} + \omega_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}E_{13} - \omega_2\right)^2\right],\\
\mathcal{E}_{22} &= E_{22} + \frac{1}{2}\left[E_{22}^2 + \left(\frac{1}{2}E_{23} + \omega_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}E_{12} - \omega_3\right)^2\right],\\
\mathcal{E}_{33} &= E_{33} + \frac{1}{2}\left[E_{33}^2 + \left(\frac{1}{2}E_{13} + \omega_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}E_{23} - \omega_1\right)^2\right],\\
\mathcal{E}_{12} &= E_{12} + E_{22}\left(\frac{1}{2}E_{12} + \omega_3\right) + E_{11}\left(\frac{1}{2}E_{12} - \omega_3\right) +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}E_{23} + \omega_1\right)\left(\frac{1}{2}E_{13} - \omega_2\right),\\
\mathcal{E}_{13} &= E_{13} + E_{11}\left(\frac{1}{2}E_{13} + \omega_2\right) + E_{33}\left(\frac{1}{2}E_{13} - \omega_2\right) +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}E_{12} + \omega_3\right)\left(\frac{1}{2}E_{23} - \omega_1\right),\\
\mathcal{E}_{23} &= E_{23} + E_{33}\left(\frac{1}{2}E_{23} + \omega_1\right) + E_{22}\left(\frac{1}{2}E_{23} - \omega_1\right) +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}E_{13} + \omega_2\right)\left(\frac{1}{2}E_{12} - \omega_3\right).
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

Для визначення видовжень E_{ii}, зсувів E_{ij} $(i \neq j)$ та поворотів ω_k з (6.66), скористаємось наступними виразами [156]:

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{\partial_1 U_1}{H_1} + \frac{U_2}{H_1 H_2}\,\partial_2 H_1 + \frac{U_3}{H_1 H_3}\,\partial_3 H_1,\\
E_{22} &= \frac{\partial_2 U_2}{H_2} + \frac{U_3}{H_2 H_3}\,\partial_3 H_2 + \frac{U_1}{H_1 H_2}\,\partial_1 H_2,\\
E_{33} &= \frac{\partial_3 U_3}{H_3} + \frac{U_3}{H_1 H_3}\,\partial_1 H_3 + \frac{U_2}{H_2 H_3}\,\partial_2 H_3,\\
E_{12} &= \frac{H_2}{H_1}\,\partial_1 \frac{U_2}{H_2} + \frac{H_1}{H_2}\,\partial_2 \frac{U_1}{H_1},\\
E_{13} &= \frac{H_1}{H_3}\,\partial_3 \frac{U_1}{H_1} + \frac{H_3}{H_1}\,\partial_1 \frac{U_3}{H_3},\\
E_{23} &= \frac{H_3}{H_2}\,\partial_2 \frac{U_3}{H_3} + \frac{H_2}{H_3}\,\partial_3 \frac{U_2}{H_2},
\end{aligned}
\tag{6.67}
$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_1 &= (\partial_2 H_3 U_3 - \partial_3 H_2 U_2) / H_2 H_3 , \\
2\omega_2 &= (\partial_3 H_1 U_1 - \partial_1 H_3 U_3) / H_1 H_3 , \\
2\omega_3 &= (\partial_1 H_2 U_2 - \partial_2 H_1 U_1) / H_1 H_2 .
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

Під символом ∂_i у формулах (6.67) та (6.68) треба розуміти диференціювання за змінною α_i; а саме $\partial_i := \dfrac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1,2,3.$

За малих відносних деформацій гнучких тіл згідно теорії малих деформацій [156] вважатимемо малими у порівняні з одиницею не тільки подовження та зсуви, а й кути повороту елементарного об’єму. Тоді подовження та зсуви ототожнюються із відповідними компонентами деформацій E_{ij}, а середні повороти – із параметрами ω_k.

Зберігаючи у співвідношеннях (6.66) тільки перші степені деформацій і другі степені поворотів, нехтуємо величинами другого степеня для деформацій та четвертого для поворотів, як такими, що малі у порівняння із одиницею. В результаті переходимо до наступних виразів для компонент деформації

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= E_{11} + \frac{1}{2}\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right), \qquad \mathcal{E}_{12} = E_{12} - \omega_1\omega_2, \\
\mathcal{E}_{22} &= E_{22} + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right), \qquad \mathcal{E}_{13} = E_{13} - \omega_1\omega_3, \\
\mathcal{E}_{33} &= E_{33} + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right), \qquad \mathcal{E}_{23} = E_{23} - \omega_2\omega_3,
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

що справедливі з точністю до знехтування кутами повороту і компонентами деформацій у порівнянні з одиницею.

Вважатимемо також, що оболонка є лінійно пружною і знаходиться в нерівномірному температурному полі $T\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$. Тоді, згідно гіпотези Дюгамеля–Неймана, для ізотропного матеріалу оболонки компоненти тензорів напружень та деформацій будуть пов’язані між собою наступними залежностями [152, 160]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right] + \alpha_T\left(T - T_0\right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right] + \alpha_T\left(T - T_0\right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] + \alpha_T\left(T - T_0\right) \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\sigma_{ij}, \qquad i \neq j = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{6.70}$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення, T_0 – початкове значення температури.

6.4.1.2 Напівдискретизація переміщень: лінійні наближення за зміною товщини

З огляду на малу у порівнянні з іншими характерними розмірами оболонки товщину h

$$\frac{h}{diam\,\Omega} << 1, \tag{6.71}$$

розгорнемо вектор переміщень точок оболонки $U = \left\{U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right\}_{i=1}^{3}$ в ряд Маклорена в околі серединної поверхні, тобто $\alpha_3 = 0$, зі збереженням лінійних членів. Тоді

$$U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right) = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\gamma_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + O\left(h^2\right), \quad i = 1,2,3. \tag{6.72}$$

Тут $u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,0\right)$ описують переміщення точок серединної поверхні

Ω, а $\gamma_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \dfrac{\partial U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,0\right)}{\partial\alpha_3}$ визначають кут повороту нормалі незалежно від u_i. Оскільки $\gamma_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \neq 0$, то апроксимація (6.72) допускає зміну

(стиснення або розтягнення) довжини елемента нормалі при деформуванні. Співвідношення (6.72) відповідає кінематичній гіпотезі теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна, податних на зсув і стиснення [121, 157].

Отже, згідно наближення (6.72), переміщення точок оболонки повністю визначаються, якщо відомі компоненти $u_i(\alpha_1,\alpha_2)$ вектора переміщень її серединної поверхні та компоненти $\gamma_i(\alpha_1,\alpha_2)$ вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки:

$$\vec{\gamma} = -\gamma_2\vec{e}_1 + \gamma_1\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3 \,. \tag{6.73}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$– орти ортогональної системи координат $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Тут і далі вектор $\vec{e}_3$ буде завжди вважатися напрямленим в сторону опуклості серединної поверхні Ω.

Отже, для зручності введемо наступне позначення вектора узагальнених переміщень точок оболонки

$$\boldsymbol{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\ )^T \tag{6.74}$$

6.4.1.3 Деформації гнучких оболонок: обтиск та тензор деформації Гріна

Співвідношення для деформацій гнучких оболонок отримуються так само як і в [144, 146] шляхом підстановки в формули (6.67) тотожностей (6.65) для параметрів Ляме та закону зміни переміщень за товщиною (6.72). Тоді, відкидаючи величини порядку $O(h^2)$, співвідношення для компонент лінійної деформації мають наступний вигляд:

$$E_{11}=\frac{e_{11}+\alpha_3 K_{11}}{1+\alpha_3 k_1},\qquad E_{22}=\frac{e_{22}+\alpha_3 K_{22}}{1+\alpha_3 k_2},\qquad E_{33}=e_{33},$$
$$E_{12}=\frac{e_{12}+\alpha_3 2K_{12}}{(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)},\qquad E_{13}=\frac{e_{13}+\alpha_3 2K_{13}}{1+\alpha_3 k_1},\qquad E_{23}=\frac{e_{23}+\alpha_3 2K_{23}}{1+\alpha_3 k_2},\tag{6.75}$$

де e_{ij} та K_{ij} – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій записуються так:

$$e_{11}=\frac{\partial_1 u_1}{A_1}+\frac{\partial_2 A_1}{A_1A_2}u_2+k_1u_3,\qquad K_{11}=\frac{\partial_1 \gamma_1}{A_1}+\frac{\partial_2 A_1}{A_1A_2}\gamma_2+k_1\gamma_3,$$
$$e_{22}=\frac{\partial_2 u_2}{A_2}+\frac{\partial_1 A_2}{A_1A_2}u_1+k_2u_3,\qquad K_{22}=\frac{\partial_1 A_2}{A_1A_2}\gamma_1+\frac{\partial_2 \gamma_2}{A_2}+k_2\gamma_3,$$
$$e_{33}=\gamma_3,$$
$$e_{12}=\frac{A_1}{A_2}\partial_2\frac{u_1}{A_1}+\frac{A_2}{A_1}\partial_1\frac{u_2}{A_2},\tag{6.76}$$
$$2K_{12}=\frac{k_1}{A_2}\partial_2 u_1-\frac{k_2\partial_2 A_1}{A_1A_2}u_1+\frac{k_2}{A_1}\partial_1 u_2-\frac{k_1\partial_1 A_2}{A_1A_2}u_2+\frac{A_1}{A_2}\partial_2\frac{\gamma_1}{A_1}+\frac{A_2}{A_1}\partial_1\frac{\gamma_2}{A_2},$$
$$e_{13}=-k_1u_1+\frac{\partial_1 u_3}{A_1}+\gamma_1,\qquad 2K_{13}=\frac{\partial_1 \gamma_3}{A_1},$$
$$e_{23}=-k_2u_2+\frac{\partial_2 u_3}{A_2}+\gamma_2,\qquad 2K_{23}=\frac{\partial_2 \gamma_3}{A_2}.$$

Зауважимо, що на відміну від співвідношень класичної теорії оболонок Кірхгофа–Лява та теорії оболонок Тимошенка–Міндліна [121, 157] у запропонованій моделі наявні ненульові тангенціальні та згинні компоненти деформацій e_{33}, K_{13}, K_{23} , які відповідають деформаціям стиснення.

Позначимо матрицю–стовбець компонент тензора лінійної деформації так:

$$\boldsymbol{e}=\left(e_{11},\, e_{22},\, e_{33},\, e_{12},\, e_{13},\, e_{23},\, K_{11},\, K_{22},\, K_{33},\, K_{12},\, K_{13},\, K_{23}\right)^{\mathrm{T}}.\tag{6.77}$$

Тоді маємо матричний запис співвідношень (6.76), які визначають геометричні співвідношення теорії оболонок типу Тимошенка в лінійній постановці:

$$\boldsymbol{e}=C_l\,\boldsymbol{u}\,,\tag{6.78}$$

Тут C_l – матриця диференціальних операторів вигляду:

$$C_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial_1}{A_1} & \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2}{A_2} & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A_1}{A_2}\partial_2 \frac{\cdot}{A_1} & \frac{A_2}{A_1}\partial_1 \frac{\cdot}{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & \frac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_1}{A_1} & \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2}{A_2} & k_2 \\ \frac{1}{2}\left(k_1 \frac{\partial_2}{A_2} - k_2 \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}\right) & \frac{1}{2}\left(k_2 \frac{\partial_1}{A_1} - k_1 \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}\right) & 0 & \frac{A_1}{2A_2}\partial_2 \frac{\cdot}{A_1} & \frac{A_2}{2A_1}\partial_1 \frac{\cdot}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial_2}{A_2} \end{pmatrix}. \qquad (6.79)$$

Якщо підставити в (6.72) γ_i=0 отримаємо відомі співвідношення теорії оболонок [121, 157].

Аналогічно отримаємо вирази для поворотів ω_1, ω_2 та ω_3. Підставляючи в (6.68) формули (6.65) і (6.72) та, зберігаючи величини порядку *o(h)* приходимо до наступних виразів для поворотів:

$$\omega_1 = \frac{\overset{0}{\omega}_1 + \alpha_3 \overset{1}{\omega}_1}{1 + \alpha_3 k_2}, \quad \omega_2 = \frac{\overset{0}{\omega}_2 + \alpha_3 \overset{1}{\omega}_2}{1 + \alpha_3 k_1}, \quad \omega_3 = \frac{\overset{0}{\omega}_3 + \alpha_3 \overset{1}{\omega}_3}{\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right)}, \qquad (6.80)$$

де

$$\overset{0}{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_2 u_3}{A_2} - \gamma_2 - k_2 u_2\right), \qquad \overset{1}{\omega}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial_2 \gamma_3}{A_2} - k_2\gamma_2,$$

$$\overset{0}{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + k_1 u_1 - \frac{\partial_1 u_3}{A_1}\right), \qquad \overset{1}{\omega}_2 = k_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial_1 \gamma_3}{A_1}, \tag{6.81}$$

$$\overset{0}{\omega}_3 = \frac{\partial_1\left(A_2 u_2\right)}{A_1 A_2} - \frac{\partial_2\left(A_1 u_1\right)}{A_1 A_2}, \qquad \overset{1}{\omega}_3 = \frac{\partial_1\left(A_2\gamma_2\right)}{A_1 A_2} - \frac{\partial_2\left(A_1\gamma_1\right)}{A_1 A_2}.$$

Введемо матрицю–стовбець поворотів $\boldsymbol{\omega} = \left(\overset{0}{\omega}_1,\ \overset{0}{\omega}_2,\ \overset{0}{\omega}_3,\ \overset{1}{\omega}_1,\ \overset{1}{\omega}_2,\ \overset{1}{\omega}_3,\right)^T$ та матрицю диференціальних операторів

$$C_\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} & 0 & -1 & 0 \\ k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ -2\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1 A_2} & 2\frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1 A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1 A_2} & 2\frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1 A_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.82}$$

Співвідношення (6.80) між $\boldsymbol{\omega}$ та $\boldsymbol{u}$ можна представити в матричному вигляді

$$\boldsymbol{\omega} = C_\Omega\, \boldsymbol{u}. \tag{6.83}$$

Таким чином, враховуючи (6.73) та (6.78), від деформаційних співвідношень (6.69) приходимо до наступних:

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \alpha_3 \chi_{11}}{1 + \alpha_3 k_1}, \qquad \mathcal{E}_{22} = \frac{\varepsilon_{22} + \alpha_3 \chi_{22}}{1 + \alpha_3 k_2},$$

$$\mathcal{E}_{33} = \varepsilon_{33}, \qquad \mathcal{E}_{12} = \frac{2\varepsilon_{12} + \alpha_3 2\chi_{12}}{(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)}, \tag{6.84}$$

$$\mathcal{E}_{13} = \frac{2\varepsilon_{13} + \alpha_3 2\chi_{13}}{1 + \alpha_3 k_1}, \qquad \mathcal{E}_{23} = \frac{2\varepsilon_{23} + \alpha_3 2\chi_{23}}{1 + \alpha_3 k_2},$$

де

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2{}^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_3{}^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1{}^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_3{}^2,$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}, \qquad \varepsilon_{12} = e_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2,$$

$$\varepsilon_{13} = e_{13} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3, \qquad \varepsilon_{23} = e_{23} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega},$$

$$\chi_{11} = K_{11} + \overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_2 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_1 \overset{0}{\omega}_2{}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2)\overset{0}{\omega}_3{}^2,$$

$$\chi_{22} = K_{22} + \overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_1 + \overset{0}{\omega}_3 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}k_2 \overset{0}{\omega}_1{}^2 - \frac{1}{2}(2k_1 + k_2)\overset{0}{\omega}_3{}^2,$$

$$\chi_{12} = K_{12} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_2 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_2, \tag{6.85}$$

$$\chi_{13} = K_{13} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3 + k_2 \overset{0}{\omega}_1 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$\chi_{23} = K_{23} - \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2 \overset{1}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3 + k_1 \overset{0}{\omega}_2 \overset{0}{\omega}_3.$$

Ввівши матрицю–стовбець $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T$ співвідношення (6.84) з урахуванням (6.77) запишемо в матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C_l \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\omega_{11}^T E_\Omega \omega, \tag{6.86}$$

Тут ω_{11}^T – блочно–діагональна матриця, яка містить 11 ненульових діагональних блоків

$$\omega_{11}^{T} = \begin{pmatrix} \omega^{T} & & & & & & & & & & \\ & \omega^{T} & & & & & & & & & \\ & & \omega^{T} & & & & & & & & \\ & & & \omega^{T} & & & & & & & \\ & & & & \omega^{T} & & & & & & \\ & & & & & \omega^{T} & & & & & \\ & & & & & & \omega^{T} & & & & \\ & & & & & & & \omega^{T} & & & \\ & & & & & & & & \omega^{T} & & \\ & & & & & & & & & \omega^{T} & \\ & & & & & & & & & & \omega^{T} \end{pmatrix}.$$

Матрицю E_{Ω}, яка входить в (6.86) представимо у вигляді

$$E_{\Omega} = (\, E_1 \,,\, E_2 \,,\ldots,\, E_{11} \,)^{T}, \tag{6.87}$$

де E_i – матриці розмірності 6×6, відмінні від нуля компоненти яких відповідно рівні

$$E_1^{22} = E_1^{33} = 1; \qquad E_2^{11} = E_2^{33} = 1; \qquad E_4^{21} = E_4^{12} = -\frac{1}{2};$$

$$E_5^{31} = E_5^{13} = -\frac{1}{2}; \quad E_6^{32} = E_6^{23} = -\frac{1}{2}; \quad E_7^{22} = -k_1;$$

$$E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1; \qquad E_7^{33} = -(k_1 + 2k_2);$$

$$E_8^{11} = -k_2; \qquad E_8^{41} = E_8^{14} = E_8^{36} = E_8^{63} = 1;$$

$$E_8^{33} = -(2k_1 + k_2); \qquad E_9^{51} = E_9^{42} = E_9^{24} = E_9^{15} = -\frac{1}{2};$$

$$E_{10}^{31} = E_{10}^{13} = k_2; \qquad E_{10}^{61} = E_{10}^{43} = E_{10}^{16} = E_{10}^{34} = -\frac{1}{2};$$

$$E_{11}^{32} = E_{11}^{23} = k_1; \qquad E_{11}^{62} = E_{11}^{53} = E_{11}^{26} = E_{11}^{35} = -\frac{1}{2}.$$

Після підстановки (6.83) в (6.86) отримаємо матричне співвідношення

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C_l \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\left(C_{\Omega}\ \boldsymbol{u}\right)_{12}^{T} E_{\Omega}\ \left(C_{\Omega}\ \boldsymbol{u}\right), \tag{6.88}$$

яке показує, що в геометрично нелінійній постановці для гнучких оболонок типу Тимошенка податливих на стиснення та зсув має місце квадратична залежність компонент тензора деформацій Гріна від вектора узагальнених переміщень [144, 145, 146, 152].

Елемент об’єму оболонки в деформованому стані можна записати у вигляді

$$dV^* = JdV,$$

де dV – елемент цього об’єму до деформування. Відзначимо, що за умови малості видовжень відносно одиниці якобіан переходу $J = 1 + \Delta$, де Δ – величина одного порядку малості з деформаціями. Отже, якщо процес навантаження оболонки супроводжується малими деформаціями, то можна наближено прийняти

$$dV^* = dV.$$

6.4.1.4 Фізичні співвідношення гнучких оболонок

На відміну від математичних моделей оболонок Кіргофа–Лява та Тимошенка–Міндліна (п'ятимодальний варіант), припущення про податливість на стиснення оболонки $(\gamma_3 \neq 0)$ дозволяє моделювати пружно–деформований стан оболонки з врахуванням σ_{33}.

Введемо інтегральні характеристики напружень σ_{ij}

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right) d\alpha_3, \qquad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right)\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$N_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33}\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right) d\alpha_3, \quad M_{i3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right)\alpha_3 d\alpha_3, \qquad (6.89)$$

$$N_{i3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3}\left(1+\alpha_3 k_{3-i}\right) d\alpha_3, \qquad i, j = 1,2 .$$

Надалі, будемо використовувати умову рівності з точністю до $O\left(h^2\right)$ крутних моментів

$$H = M_{12} = M_{21}$$

та симетричне зусилля Новожилова [120]

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12} .$$

Тоді вектор внутрішніх зусиль і моментів оболонки можна записати наступним чином:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{N_{11}(\boldsymbol{u}), N_{22}(\boldsymbol{u}), N_{33}(\boldsymbol{u}), S(\boldsymbol{u}), N_{13}(\boldsymbol{u}), N_{23}(\boldsymbol{u}), M_{11}(\boldsymbol{u}), M_{22}(\boldsymbol{u}), H(\boldsymbol{u}), M_{13}(\boldsymbol{u}), M_{23}(\boldsymbol{u})\right\}. \qquad (6.90)$$

Для того, щоб отримати фізичні співвідношення гнучких оболонок при термосиловому навантаженні за умови ізотропного матеріалу, співвідношення (6.70) перетворимо у вирази, які пов’язують деформації з внутрішніми зусиллями і моментами. Розв'яжемо рівності (6.70) відносно напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ii} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right] - \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_T\left(T-T_0\right), \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{ij}, \qquad i \neq j = 1,2,3. \end{aligned} \qquad (6.91)$$

Далі, використовуючи (6.89) і (6.84), після інтегрування за змінною α_3 від $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ з врахуванням членів нульового $O\left(h^0\right)$ та першого порядку $O\left(h^2\right)$, подібно до [147, 157], будемо мати:

$$\begin{aligned}
&N_{11} = D_N\left((1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),\\
&N_{22} = D_N\left((1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),\\
&N_{33} = D_N\left((1-\nu)\varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),\\
&S = D_N(1-2\nu)\varepsilon_{12}, \quad N_{13} = D_N(1-2\nu)\varepsilon_{13}, \quad N_{23} = D_N(1-2\nu)\varepsilon_{23},\\
&N_{33} = D_N\left((1-\nu)\varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),\\
&M_{11} = D_M\left((1-\nu)\chi_{11} + \nu\chi_{22} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),\\
&M_{22} = D_M\left((1-\nu)\chi_{22} + \nu\chi_{11} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),\\
&H = D_M(1-2\nu)\chi_{12}, \quad M_{13} = D_M(1-2\nu)\chi_{13}, \quad M_{23} = D_M(1-2\nu)\chi_{23},
\end{aligned} \tag{6.92}$$

де $D_N = \dfrac{\mathrm{E}\,h}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $D_M = \dfrac{\mathrm{E}\,h^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}$ – тангенціальна та згинна жорсткість; $T_1 = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T-T_0)\,d\alpha_3$, $T_2 = \dfrac{12}{h^3}\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T-T_0)\,\alpha_3\,d\alpha_3$ – усереднені температурні характеристики, E – модуль Юнга та ν –коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки [156].

Якщо ввести вектор

$$\mathbf{F}_T = \left\{\mathbf{F}_T^i\right\}_{i=1}^{11} = \left\{hT_1, hT_1, h\,T_1, 0, 0, 0, \frac{h^3}{12}T_2, \frac{h^3}{12}T_2, 0, 0, 0\right\}, \tag{6.93}$$

то (6.92), буде мати вигляд:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu}\mathbf{F}_T. \tag{6.94}$$

Тут **B** – матриця пружних констант розмірності 11×11, ненульові компоненти обчислюються згідно правил:

$$B^{11}=B^{22}=B^{33}=\frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}h, \qquad B^{44}=B^{55}=B^{66}=\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}h,$$

$$B^{12}=B^{21}=B^{13}=B^{31}=B^{23}=B^{32}=\frac{\nu\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}h, \quad B^{77}=B^{88}=\frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{h^3}{12}, \tag{6.95}$$

$$B^{78}=B^{87}=\frac{\nu\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{h^3}{12}, \qquad B^{99}=B^{10\,10}=B^{1111}=\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}\frac{h^3}{12}.$$

Для того, щоб в довільній точці оболонки обчислити нормальні та зсувні напруження, користаємо з наступних формул:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{1}{h}\left[N_{ij}+\alpha_3\frac{12}{h^2}M_{ij}\right],\\
\sigma_{i3} &= \frac{1}{h}\left[N_{i3}+\alpha_3\frac{12}{h^2}M_{i3}\right],\\
\sigma_{33} &= \frac{1}{h}N_{33}, \qquad i,j=1,2.
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Останні отримано із співвідношень (6.91) із врахуванням (6.84) та (6.92) за лінійного розподілу температури:

$$T_1+\alpha_3T_2=\alpha_T\left(T-T_0\right). \tag{6.97}$$

6.4.1.5 Рівняння рівноваги гнучких оболонок

Рівняння рівноваги теорії гнучких оболонок одержимо із принципу можливих переміщень. Згідно нього, робота $\delta\Pi$ внутрішніх сил на варіаціях переміщень $\delta\boldsymbol{u}=\left(\delta u_1,\delta u_2,\delta u_3,\delta\gamma_1,\delta\gamma_2,\delta\gamma_3\right)^T$ дорівнює роботі $\delta\mathrm{A}$ зовнішніх сил на тих самих варіаціях:

$$\delta\Pi=\delta\mathrm{A}. \tag{6.98}$$

6.4.1.5.1 Робота внутрішніх сил

Перетворимо вираз для роботи внутрішніх сил

$$\delta\Pi=\Pi(\delta\boldsymbol{u})=\int_V\left(\sigma_{11}\delta\mathcal{E}_{11}+\sigma_{22}\delta\mathcal{E}_{22}+\sigma_{33}\delta\mathcal{E}_{33}+\sigma_{12}\delta\mathcal{E}_{12}+\sigma_{13}\delta\mathcal{E}_{13}+\sigma_{23}\delta\mathcal{E}_{23}\right)dV. \quad (6.99)$$

Підставляючи в (6.99) замість деформацій їх вирази (6.84), (6.85) та проінтегрувавши за змінною α_3 з використанням означень (6.89), отримаємо

$$\begin{aligned}\Pi(\delta\boldsymbol{u})=\iint_\Omega\Big[&N_{11}\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u})+M_{11}\chi_{11}(\delta\boldsymbol{u})+N_{22}\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u})+M_{22}\chi_{22}(\delta\boldsymbol{u})+\\&+N_{33}\varepsilon_{33}(\delta\boldsymbol{u})+M_{33}\chi_{33}(\delta\boldsymbol{u})+2S\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u})+2H\chi_{12}(\delta\boldsymbol{u})+2N_{13}\varepsilon_{13}(\delta\boldsymbol{u})+\\&+2M_{13}\chi_{13}(\delta\boldsymbol{u})+2N_{23}\varepsilon_{23}(\delta\boldsymbol{u})+2M_{23}\chi_{23}(\delta\boldsymbol{u})\Big]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\ .\end{aligned} \quad (6.100)$$

6.4.1.5.2 Робота зовнішніх сил

Припустимо, що оболонка піддається дії масової сили $F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\{F_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\}_{i=1}^3$ в області V, поверхневих навантажень $\sigma^+=\{\sigma_i^+(\alpha_1,\alpha_2)\}_{i=1}^3$, $\sigma^-=\{\sigma_i^-(\alpha_1,\alpha_2)\}_{i=1}^3$, що діють на поверхнях Ω_+,Ω_- відповідно, і поверхневого навантаження, прикладеного на частині $\Sigma_\sigma=\Gamma_\sigma\times\left]-h/2,h/2\right[$ бічної поверхні Σ,

$$\hat\sigma=\{\hat\sigma_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\hat\sigma_s(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\hat\sigma_z(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\}.. \quad (6.101)$$

Тут $\hat\sigma_n,\hat\sigma_s,\hat\sigma_z$ позначені як нормальна, дотична та перерізуюча складові поверхневого навантаження на Σ_σ, до того ж $\vec n,\vec s,\vec\alpha_3$ – орти правої трійки системи криволінійних координат на поверхні Σ_σ.

Робота зовнішніх сил є сумою робіт, виконаних масовою та поверхневою силами на варіаціях допустимих зміщень δU у загальному випадку.

$$\delta\mathrm{A} = \mathrm{A}\left(\delta U\right) = \iint\limits_{\Omega}\left[\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F^T \delta U(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)d\alpha_3\right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +$$
$$+\int\limits_{\Gamma_\sigma}\left[\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\hat{\sigma}\right)^T \delta U(1+\alpha_3 k_n)d\alpha_3\right] d\gamma +$$
$$+\iint\limits_{\Omega}\left(\sigma^+\right)^T \delta U^+\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \tag{6.102}$$
$$+\iint\limits_{\Omega}\left(\sigma^-\right)^T \delta U^-\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

Тут через k_n позначено нормальну кривину поверхні приведення в напрямку дотичної до кривої Г (контур серединної поверхні Ω), $d\gamma$ – елемент кривої Г; $U^{\pm}$ – переміщення на лицьових поверхнях оболонки.

Від запису вектора переміщень $U = \left\{U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right\}_{i=1}^{3} = \left\{u_i + \alpha_3\gamma_i\right\}_{i=1}^{3}$ у вибраній на початку криволінійній системі координат $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ перейдемо до запису через проекції на орти криволінійної системи $\left(\vec{n},\vec{s},\vec{\alpha}_3\right)$. Тоді можна записати рівність, що пов'язує складові компонент вектора $\begin{pmatrix} U_n \\ U_s \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + \alpha_3\gamma_n \\ u_s + \alpha_3\gamma_s \\ u_z + \alpha_3\gamma_z \end{pmatrix}$ із вектором узагальнених переміщень $\boldsymbol{u} = \left(u_1,\ u_2,\ u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\ \right)^T$.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_s \\ u_z \\ \gamma_n \\ \gamma_s \\ \gamma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n,\alpha_1) & \sin(n,\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(n,\alpha_1) & \cos(n,\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(n,\alpha_1) & \sin(n,\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(n,\alpha_1) & \cos(n,\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = G_2\boldsymbol{u}. \tag{6.103}$$

Тепер з огляду на перехід до координат $\left(\vec{n},\vec{s},\vec{\alpha}_3\right)$ на Σ_σ, розпишемо (6.102) у розгорнутому вигляді.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(\delta U) = & \iint_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_i\left(\delta u_i + \alpha_3\delta\gamma_i\right)(1+\alpha_3 k_1)(1+\alpha_3 k_2)d\alpha_3\right]A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{\Gamma_\sigma}\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\hat{\sigma}_n\left(\delta u_n + \alpha_3\delta\gamma_n\right) + \hat{\sigma}_s\left(u_s + \alpha_3\delta\gamma_s\right) + \hat{\sigma}_z\left(u_z + \alpha_3\delta\gamma_z\right)\right)(1+\alpha_3 k_n)d\alpha_3\right]d\gamma + \\
& + \iint_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{+}\left(\delta u_i + \frac{h}{2}\delta\gamma_i\right)\right]\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{-}\left(\delta u_i - \frac{h}{2}\delta\gamma_i\right)\right]\left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 .
\end{aligned}
\tag{6.104}
$$

Накінець, проінтегрувавши (6.104) за α_3, прийдемо до виразу:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathrm{A} = & \int_{\Gamma_\sigma}\left(\hat{N}_n\delta u_n + \hat{N}_s\delta u_s + \hat{N}_z\delta u_z + \hat{M}_n\delta\gamma_n + \hat{M}_s\delta\gamma_s + \hat{M}_z\delta\gamma_z\right)d\gamma + \\
& + \iint_{\Omega}\left(P_1\delta u_1 + P_2\delta u_2 + P_3\delta u_3 + m_1\delta\gamma_1 + m_2\delta\gamma_2 + m_3\delta\gamma_3\right)A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 ,
\end{aligned}
\tag{6.105}
$$

де

$$
\begin{aligned}
P_i = & \left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+} - \left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-} + \\
& + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_i\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)d\alpha_3, \\
m_i = & \frac{h}{2}\left[\left(1+\frac{h}{2}k_1\right)\left(1+\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+} - \left(1-\frac{h}{2}k_1\right)\left(1-\frac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-}\right] + \\
& + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_i\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)\alpha_3 d\alpha_3, \qquad i = 1,2,3,
\end{aligned}
\tag{6.106}
$$

та

$$\left[\hat{N}_n,\hat{M}_n\right]^T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\hat{\sigma}_n(1+\alpha_3k_t)\left[1,\alpha_3\right]^T d\alpha_3,\quad \left[\hat{N}_s,\hat{M}_s\right]^T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\hat{\sigma}_s(1+\alpha_3k_s)\left[1,\alpha_3\right]^T d\alpha_3,$$

$$\left[\hat{N}_z,\hat{M}_z\right]^T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\hat{\sigma}_z\left[1,\alpha_3\right]^T d\alpha_3. \tag{6.107}$$

У формулах (6.105) та (6.107) через N_n, N_s, N_z позначено нормальне, зсувне та перерізуюче зусилля; M_n , M_s , M_z – згинний, крутний та перерізуючий моменти, що діють на контурі Γ_σ серединної поверхні Ω.

6.4.1.5.3 Стан рівноваги

Перетворимо $\delta\Pi$ із (6.98), використовуючи (6.100) та виражаючи варіації деформацій через варіації переміщень згідно (6.85), (6.76), (6.81).

Підставляючи отриманий вираз для $\delta\Pi$ та (6.105) в рівність (6.98), і прирівнюючи коефіцієнти при незалежних варіаціях , а також, застосовуючи рівністю інтегралів по серединній поверхні Ω, перейдемо до рівності підінтегральних виразів. В результаті прийдемо до рівнянь стану рівноваги зсувних оболонок податливих на стиснення і зсув:

$$\partial_1\left(N_{11}A_2\right)-N_{22}\partial_1 A_2+\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\partial_2 A_1+\frac{1}{2}\partial_2\left(\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_1A_1\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_2\partial_2 A_1+k_1A_1A_2N_{13}^*+A_1\partial_2 N_{12}^*=-P_1A_1A_2,$$
$$\partial_2\left(N_{22}A_1\right)-N_{11}\partial_2 A_1+\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\partial_1 A_2+\frac{1}{2}\partial_1\left(\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_2A_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)k_1\partial_1 A_2+k_2A_1A_2N_{23}^*+A_2\partial_1 N_{21}^*=-P_2A_1A_2, \quad (6.108)$$
$$\partial_1\left(N_{13}^*A_2\right)+\partial_2\left(N_{23}^*A_1\right)-A_1A_2\left(N_{11}k_1+N_{22}k_2\right)=-A_1A_2P_3,$$
$$\partial_1\left(M_{11}A_2\right)-M_{22}\partial_1 A_2+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\partial_2 A_1-A_1A_2N_{31}^*+A_1\partial_2 M_{12}^*=-A_1A_2m_1,$$
$$\partial_2\left(M_{22}A_1\right)-M_{11}\partial_2 A_1+\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\partial_1 A_2-A_1A_2N_{32}^*+A_2\partial_1 M_{21}^*=-A_1A_2m_2,$$
$$\partial_1\left(A_2M_{13}^*\right)+\partial_2\left(A_1M_{23}^*\right)-A_1A_2\left(N_{33}+k_1M_{11}+k_2M_{22}\right)=-A_1A_2m_3,$$

де для скорочення записів вжито таких позначень:

$$N_{3\,i}^*=N_{i3}-\left(-1\right)^i\frac{1}{2}\left[\overset{0}{\omega}_{3-i}\left(N_{ii}+k_iM_{ii}\right)-\overset{1}{\omega}_{3-i}M_{ii}-\overset{0}{\omega}_i\left(S+2k_iH\right)-\right.$$
$$\left.-\overset{1}{\omega}_i H-\overset{0}{\omega}_3 N_{3-i\,3}-\overset{1}{\omega}_3 M_{3-i\,3}\right], \quad (6.109)$$

$$N_{i\,3-i}^*=S+\left(-1\right)^i\frac{1}{2}\left[\overset{0}{\omega}_3\left(N_{11}+N_{22}-\left[k_1+2k_2\right]M_{11}-\left[2k_1+k_2\right]M_{22}\right)+\overset{1}{\omega}_3\left(M_{11}+M_{22}\right)+\right.$$
$$\left.+\overset{0}{\omega}_1\left(2k_2M_{13}-N_{13}\right)-\overset{1}{\omega}_1 M_{13}+\overset{0}{\omega}_2\left(2k_1M_{23}-N_{23}\right)-\overset{1}{\omega}_2 M_{23}\right],$$
$$M_{i\,3-i}^*=H+\left(-1\right)^i\frac{1}{2}\left[\overset{0}{\omega}_3\left(M_{11}+M_{22}\right)-\overset{0}{\omega}_1 M_{13}-\overset{0}{\omega}_2 M_{23}\right], \quad (6.109)$$
$$M_{i3}^*=M_{i3}+\left(-1\right)^i\frac{1}{2}\left[\overset{0}{\omega}_{3-i}M_{ii}-\overset{1}{\omega}_i H-\overset{0}{\omega}_3 M_{3-i\,3}\right], \qquad i=1,2.$$

Формули (6.109) виражають зв’язок між симетричними зусиллями S, N_{13}, N_{23}, моментами H_{12}, M_{13}, M_{23} та номінальними N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{23}^*, N_{31}^*, N_{32}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*.

Представимо співвідношення (6.108) в матричному вигляді для зручності при подальшому використанні чисельних методів. Для цього введемо матрицю–

стовбець зовнішнього навантаження:

$$\mathbf{P}=\left(P_1,P_2,P_3,m_1,m_2,m_3\right)^T,$$

симетричних зусиль–моментів

$$\boldsymbol{\sigma}=\left(N_{11},N_{22},N_{33},S,N_{13},N_{23},M_{11},M_{22},H,M_{13},M_{23}\right)^T,$$

нововведених зусиль–моментів

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\left\{\sigma_i^*\right\}_{i=1}^{15}=\left(N_{11}^*,N_{22}^*,N_{33}^*,N_{12}^*,N_{21}^*,N_{13}^*,N_{31}^*,N_{23}^*,N_{32}^*,M_{11}^*,M_{22}^*,M_{12}^*,M_{21}^*,M_{13}^*,M_{23}^*\right)^T,$$

Тепер рівняння рівноваги теорії гнучких оболонок (6.108) записуються в матричному вигляді:

$$C_\sigma\,\boldsymbol{\sigma}^*+\mathbf{P}=0, \tag{6.110}$$

де $C_\sigma=\left\{C_\sigma^{ij}\right\}_{i=1,\,j=1}^{6,\ 15}$ – матриця диференціальних операторів з такими відмінними від нуля компонентами:

$$\begin{gathered}
C_\sigma^{1,1}=\frac{1}{A_1A_2}\partial_1\left(A_2\,\cdot\right),\quad C_\sigma^{1,2}=-\frac{\partial_1A_2}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{1,4}=\frac{\partial_2\left(A_1\cdot\right)}{A_1\,A_2},\quad C_\sigma^{1,5}=-\frac{\partial_2A_1}{A_1A_2},\\
C_\sigma^{1,6}=k_1,\quad C_\sigma^{1,12}=C_\sigma^{1,13}=\frac{1}{2A_1A_2}\left[\partial_2\left(A_1k_1\,\cdot\right)+k_2\partial_2A_1\right],\quad C_\sigma^{2,1}=-\frac{\partial_2A_1}{A_1A_2},\\
C_\sigma^{2,2}=\frac{\partial_2\left(A_1\,\cdot\right)}{A_1A_2},\qquad C_\sigma^{2,4}=\frac{\partial_1A_2}{A_1A_2},\qquad C_\sigma^{2,5}=\frac{\partial_1\left(A_2\,\cdot\right)}{A_1A_2},\qquad C_\sigma^{2,8}=k_2,\\
C_\sigma^{2,12}=C_\sigma^{2,13}=\frac{1}{2A_1A_2}\left[\partial_1\left(A_2k_2\,\cdot\right)+k_1\partial_1A_2\right],\quad C_\sigma^{3,1}=-k_1,\quad C_\sigma^{3,2}=-k_2,\\
C_\sigma^{3,6}=\frac{\partial_1\left(A_2\,\cdot\right)}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{3,8}=\frac{\partial_2\left(A_1\,\cdot\right)}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{4,7}=-1,\quad C_\sigma^{4,10}=\frac{\partial_1\left(A_2\,\cdot\right)}{A_1A_2},\\
C_\sigma^{4,11}=-\frac{\partial_1A_2}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{4,12}=\frac{\partial_2\left(A_1\,\cdot\right)}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{4,13}=\frac{\partial_2A_1}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{5,9}=-1,\\
C_\sigma^{5,10}=\frac{\partial_2A_1}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{5,11}=\frac{\partial_2\left(A_1\,\cdot\right)}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{5,12}=\frac{\partial_1A_2}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{6,3}=-1,\\
C_\sigma^{6,10}=-k_1,\quad C_\sigma^{6,11}=-k_2,\quad C_\sigma^{6,14}=\frac{\partial_1\left(A_2\,\cdot\right)}{A_1A_2},\quad C_\sigma^{6,15}=\frac{\partial_2\left(A_1\,\cdot\right)}{A_1A_2}.
\end{gathered} \tag{6.111}$$

Вирази зв'язку нововведених та симетричних зусиль–моментів (6.90) представимо формулою

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = F\boldsymbol{\sigma}, \tag{6.112}$$

де F – матриця розмірності 15×11, ненульові компоненти якої рівні

$$\begin{aligned}
&F^{1,1} = F^{2,2} = F^{3,3} = F^{4,4} = F^{5,4} = F^{6,5} = F^{7,5} = F^{8,6} = F^{9,6} = \\
&\quad = F^{10,7} = F^{11,8} = F^{12,9} = F^{13,9} = F^{14,10} = F^{15,11} = 1, \\
&F^{4,5} = -F^{5,5} = F^{6,4} = -F^{7,4} = F^{8,2} = -F^{9,2} = F^{12,10} = \\
&\quad = -F^{13,10} = F^{14,9} = F^{15,8} = \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1, \\
&F^{4,6} = -F^{5,6} = -F^{6,1} = F^{7,1} = -F^{8,4} = F^{9,4} = F^{12,11} = \\
&\quad = -F^{13,11} = -F^{14,7} = -F^{15,9} = \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_2, \\
&F^{4,1} = F^{4,2} = -F^{5,1} = -F^{5,2} = -F^{6,6} = F^{7,6} = F^{8,5} = -F^{9,5} = \\
&\quad = F^{12,7} = F^{12,8} = -F^{13,7} = -F^{13,8} = -\frac{1}{2}F^{14,11} = F^{15,10} = -\frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_3, \\
&F^{5,10} = -F^{4,10} = \frac{1}{2}\left(2k_2\overset{0}{\omega}_1 - \overset{1}{\omega}_1\right), \quad F^{6,9} = \frac{1}{2}\overset{0}{\omega}_1, \\
&F^{7,9} = -\frac{1}{2}\left(k_1\overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1\right), \quad F^{8,8} = -\frac{1}{2}\left(k_2\overset{0}{\omega}_1 - \overset{1}{\omega}_1\right), \\
&F^{9,8} = -\frac{1}{2}\left(k_2\overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1\right), \quad F^{5,11} = -F^{4,11} = \frac{1}{2}\left(2k_1\overset{0}{\omega}_2 - \overset{1}{\omega}_2\right), \\
&F^{6,7} = \frac{1}{2}\left(k_1\overset{0}{\omega}_2 - \overset{1}{\omega}_2\right), \quad F^{7,7} = \frac{1}{2}\left(k_1\overset{0}{\omega}_2 + \overset{1}{\omega}_2\right), \\
&F^{8,9} = \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_2, \quad F^{9,9} = \frac{1}{2}\left(2k_2\overset{0}{\omega}_2 + \overset{1}{\omega}_2\right), \\
&F^{4,7} = \frac{1}{2}\left[\left(k_1 + 2k_2\right)\overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3\right], \; F^{5,7} = -\left(\frac{k_1}{2} + k_2\right)\overset{0}{\omega}_3 + \frac{1}{3}\overset{1}{\omega}_3, \\
&F^{4,8} = -F^{5,8} = \frac{1}{2}\left[\left(2k_1 + k_2\right)\overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3\right], \quad F^{6,11} = -k_1\overset{0}{\omega}_3 + \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_3, \\
&F^{7,11} = -F^{9,10} = -\frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_3, \quad F^{8,10} = k_2\overset{0}{\omega}_3 - \frac{1}{2}\overset{1}{\omega}_3.
\end{aligned} \tag{6.113}$$

З огляду на (6.112) рівність (6.110) набуває вигляду:

$$C_\sigma F\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{P}=0, \tag{6.114}$$

6.4.1.6 Крайові умови

Із принципу можливих переміщень (6.98) разом із рівняннями рівноваги оболонок знаходяться крайові умови на напруження на частині Γ_σ контуру серединної поверхні Ω.

$$\begin{aligned}
&N_{11}\cos^2(n,\alpha_1)+N_{22}\sin^2(n,\alpha_1)+\frac{1}{2}\left(N_{12}^*+N_{21}^*\right)\sin 2(n,\alpha_1)+\\
&\qquad+\frac{1}{4}(k_1+k_2)\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\sin 2(n,\alpha_1)=\hat{N}_n,\\
&\frac{1}{2}(N_{22}-N_{11})\sin 2(n,\alpha_1)+N_{21}^*\cos^2 2(n,\alpha_1)-N_{12}^*\sin^2(n,\alpha_1)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left[k_2\cos^2(n,\alpha_1)-k_1\sin^2(n,\alpha_1)\right]\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)=\hat{N}_s,\\
&\qquad N_{13}^*\cos(n,\alpha_1)+N_{23}^*\sin(n,\alpha_1)=\hat{N}_z,\\
&M_{11}\cos^2(n,\alpha_1)+M_{22}\sin^2(n,\alpha_1)+\frac{1}{2}\left(M_{12}^*+M_{21}^*\right)\sin 2(n,\alpha_1)=\hat{M}_n,\\
&\frac{1}{2}(M_{22}-M_{11}))\sin 2(n,\alpha_1)+M_{21}^*\cos^2(n,\alpha_1)-M_{12}^*\sin^2(n,\alpha_1)=\hat{M}_s,\\
&\qquad M_{13}^*\cos(n,\alpha_1)+M_{23}^*\sin(n,\alpha_1)=\hat{M}_z \quad \text{на } \Gamma_\sigma .
\end{aligned} \tag{6.115}$$

Для замикання системи рівнянь теорії оболонок необхідно додати крайові умови на частині контуру $\Gamma_u=\Gamma\setminus\Gamma_\sigma$ в зміщеннях вигляду:

$$G_2\boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_u}=\hat{u}=\left(\hat{u}_n,\hat{u}_s,\hat{u}_z,\hat{\gamma}_n,\hat{\gamma}_s,\hat{\gamma}_z\right). \tag{6.116}$$

Крайові статичні умови (6.115) теж можна записати за допомогою матричних формул

$$G_1\,F\,\sigma\big|_{\Gamma_\sigma}=\hat{Q}=\left(\hat{N}_n,\hat{N}_s,\hat{N}_z,\hat{M}_n,\hat{M}_s,\hat{M}_z\right). \tag{6.117}$$

Тут G_1 та G_2 матриці розмірностей 6×15 та 6×6 відповідно, ненульові компоненти яких рівні

$$G_1^{1,1} = G_1^{2,5} = G_1^{5,13} = \cos^2(n,\alpha_1), \quad G_1^{1,2} = G_1^{2,4} = G_1^{4,11} = G_1^{5,12} = \sin^2(n,\alpha_1),$$
$$G_1^{1,4} = G_1^{1,5} = \frac{(k_1+k_2)}{2} G_1^{1,12} = \frac{(k_1+k_2)}{2} G_1^{1,13} = -G_1^{2,1} = G_1^{2,2} = G_1^{4,12} = G_1^{4,13} =$$
$$= -G_1^{5,10} = G_1^{5,11} = \frac{1}{2}\sin 2(n,\alpha_1), \qquad G_1^{3,6} = G_1^{6,15} = \sin(n,\alpha_1), \tag{6.118}$$
$$G_1^{2,12} = G_1^{2,13} = \frac{1}{2}\left[k_2\cos^2(n,\alpha_1) - k_1\sin^2(n,\alpha_1)\right], \quad G_1^{3,6} = G_1^{6,14} = \cos(n,\alpha_1),$$

$$G_2^{11} = G_2^{22} = G_2^{44} = G_2^{55} = \cos(n,\alpha_1), \qquad G_2^{12} = G_2^{45} = -G_2^{21} = -G_2^{54} = \sin(n,\alpha_1),$$
$$G_2^{33} = G_2^{66} = 1. \tag{6.119}$$

6.4.2 Підсумки напівдискретизації: крайова задача

На основі отриманих вище рівнянь, які утворюють замкнену систему можна говорити про крайову задачу термопружності оболонок. Сформулюємо задачу для визначення пружно–деформованого стану оболонки під дією термосилових навантажень:

$$
\begin{cases}
\textit{задано вектори:} \\
\textit{навантажень } \{P_i\}_{i=1}^{3},\ \{m_i\}_{i=1}^{3},\ \hat{Q}=\left(\hat{N}_n,\hat{N}_s,\hat{N}_z,\hat{M}_n,\hat{M}_s,\hat{M}_z\right), \\
\textit{переміщень } \hat{u}=\left(\hat{u}_n,\hat{u}_s,\hat{u}_z,\hat{\gamma}_n,\hat{\gamma}_s,\hat{\gamma}_z\right)^T, \\
\textit{температури } T=\left(T_1,T_2\ \right)^E \\
\textit{на серединній поверхні } \Omega \textit{ пружного тіла, що займає область } V\ ; \\
\textit{знайти вектор } \boldsymbol{u}=\left(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\ \right)^T \textit{ такий, що задовольняє на } \Omega : \\
\textit{рівняння рівноваги } C_\sigma F\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{P}=0\ , \\
\textit{деформаційні співвідношення } \boldsymbol{\varepsilon}=C_l\boldsymbol{u}+\dfrac{1}{2}\left(C_\Omega\ \boldsymbol{u}\right)_{12}^T E_\Omega\ \left(C_\Omega\ \boldsymbol{u}\right)\ , \\
\textit{фізичні співвідношення } \quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}-\dfrac{\alpha_T E}{1-2\nu}\mathbf{F}_T\ , \\
\textit{та крайові умови} \\
G_1\ F\boldsymbol{\sigma}\big|_{\Gamma_\sigma}=\hat{Q}\ \textit{на}\ \Gamma_\sigma, \\
G_2\ \boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_u}=\hat{u},\ \textit{на}\ \Gamma_u\ , \\
\textit{де матриці диференціальних операторів } C_\sigma,C_l,C_\Omega \textit{ визначено у (3.46),} \\
\textit{(3.15), (3.18), вектор } \mathbf{F}_T - \textit{ у (3.28), а матриці сталих } F,E_\Omega,\mathbf{B},G_1,G_2 \\
\textit{визначено у (3.48), (3.23), (3.30), (3.53), (3.54) відповідно}.
\end{cases}
\tag{6.120}
$$

6.4.2.1 Лінійна квазістатична задача термопружності оболонок

За припущення, що процес деформування досліджуваної оболонки під дією термосилових навантажень супроводжується малими кутами повороту ω довільного нескінченно малого об’ємного елементу оболонки, можна тоді знехтувати їх квадратами та добутками. Тому у (6.86) відкидаємо другий доданок $\frac{1}{2}\omega_{11}^T E_\Omega\,\omega$. У такому разі деформаційні співвідношення (6.88) збережуть саме перший доданок, який відповідає лінійній складовій деформаційних компонент, і набувають вигляду (6.78). Припускаючи, що кути повороту малі, із співвідношень між нововведеними та симетричними

зусиллями і моментами (6.112) отримаємо, що $N_{i3}^{*} = N_{3i}^{*} = N_{i3}$, $(i = 1,2)$, $N_{12}^{*} = N_{21}^{*} = S$, $M_{12}^{*} = M_{21}^{*} = H$, $M_{13}^{*} = M_{13}$, $M_{23}^{*} = M_{23}$. З огляду на лінійну форму запису рівнянь рівноваги (6.108) відносно нововведених зусиль та моментів, скориставшись граничним переходом отримуються рівняння рівноваги лінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення

$$
\begin{aligned}
&\partial_1\left(N_{11}A_2\right) - N_{22}\partial_1 A_2 + 2S\partial_2 A_1 + \partial_2\left(Hk_1A_1\right) + \\
&\qquad + Hk_2\partial_2 A_1 + k_1A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2 S = -P_1A_1A_2, \\
&\partial_2\left(N_{22}A_1\right) - N_{11}\partial_2 A_1 + 2S\partial_1 A_2 + \partial_1(Hk_2A_2) + \\
&\qquad + Hk_1\partial_1 A_2 + k_2A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1 S = -P_2A_1A_2, \\
&-A_1A_2\left(N_{11}k_1 + N_{22}k_2\right) + \partial_1(N_{13}A_2) + \partial_2(N_{23}A_1) = -P_3A_1A_2, \\
&\partial_1(M_{11}A_2) - M_{22}\partial_1 A_2 + 2S\partial_2 A_1 - A_1A_2N_{31} + A_1\partial_2 H = -A_1A_2m_1, \\
&\partial_2(M_{22}A_1) - M_{11}\partial_2 A_1 + 2H\partial_1 A_2 - A_1A_2N_{32} + A_2\partial_1 H = -A_1A_2m_2, \\
&\partial_1(A_2M_{13}) + \partial_2(A_1M_{23}) - A_1A_2(N_{33} + k_1M_{11} + k_2M_{22}) = -A_1A_2m_3.
\end{aligned}
\tag{6.121}
$$

Також, оскільки, йдеться про лінійну задачу теорії оболонок, зміняться крайові умови на напруження на частині Γ_σ контуру серединної поверхні Ω

$$
\begin{aligned}
&N_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right) + N_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right) + S\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)H\sin 2\left(n,\alpha_1\right) = \hat{N}_n, \\
&\frac{1}{2}\left(N_{22} - N_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + S\left[\cos^2 2\left(n,\alpha_1\right) - \sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right] + \\
&\qquad + H\left[k_2\cos^2\left(n,\alpha_1\right) - k_1\sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right] = \hat{N}_s, \\
&N_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + N_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right) = \hat{N}_z, \\
&M_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right) + M_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right) + H\sin 2\left(n,\alpha_1\right) = \hat{M}_n, \\
&\frac{1}{2}\left(M_{22} - M_{11}\right))\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + H\left[\cos^2\left(n,\alpha_1\right) - \sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right] = \hat{M}_s, \\
&M_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + M_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right) = \hat{M}_z \quad \text{на } \Gamma_\sigma.
\end{aligned}
\tag{6.122}
$$

Отже, тепер можна сформулювати лінійну квазістатичну задачу термопружності оболонок, податливих на зсув та стиснення

$$\begin{cases} \textit{задано вектори:} \\ \textit{навантажень } \{P_i\}_{i=1}^{3},\ \{m_i\}_{i=1}^{3},\ \hat{Q}=\left(\hat{N}_n,\hat{N}_s,\hat{N}_z,\hat{M}_n,\hat{M}_s,\hat{M}_z\right)^T, \\ \textit{переміщень } \hat{u}=\left(\hat{u}_n,\hat{u}_s,\hat{u}_z,\hat{\gamma}_n,\hat{\gamma}_s,\hat{\gamma}_z\right)^T, \\ \textit{температури } T=\left(T_1,T_2\ \right)^T \\ \textit{на серединній поверхні } \Omega \textit{ пружного тіла, що займає область } V\ ; \\ \textit{знайти вектор } \boldsymbol{u}=\left(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\ \right)^T \textit{ такий, що задовольняє на } \Omega : \\ \textit{рівняння рівноваги } (3.56), \\ \textit{деформаційні співвідношення } (3.14)\ , \\ \textit{фізичні співвідношення } \quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B}\boldsymbol{e}-\dfrac{\alpha_T E}{1-2\nu}\mathbf{F}_T\ , \\ \textit{та крайові умови (3.57) та (3.51)}\ , \\ \textit{де матрицю диференціальних операторів } C_l \textit{ визначено у (3.46),} \\ \textit{вектор } \mathbf{F}_T - \textit{ у (3.28), а матриці сталих } \mathbf{B}, G_2 \\ \textit{визначено у (3.30), (3.54) відповідно}. \end{cases} \tag{6.123}$$

6.4.3 Варіаційне формулювання задачі термопружності для зсувних оболонок, податливих на зсув та стиснення

Дане дослідження задачі термопружності передбачає застосування методу скінченних елементів, який базується на варіаційних принципах [121, 148, 160, 161, 163 та інш.]. У цьому розділі на основі принципу віртуальних робіт сформульовано варіаційні задачі квазістатичної термопружності для оболонок податливих на зсув та стиснення і встановлено умови їх коректності.

6.4.3.1 Варіаційна постановка задачі квазістатичної термопружності

Заради означеності, не зменшуючи загальності, допускатимемо, що частина Σ_u бічної поверхні оболонки – жорстко защемлена, тобто геометричні крайові умови (6.116) мають наступний вигляд:

$$G_2\boldsymbol{u}\big|_{\Gamma_u} = 0. \tag{6.124}$$

Враховуючи крайові умови на переміщення (6.124) та вигляд компонент деформацій (6.85), введемо простір кінематично допустимих векторів переміщень

$$W = \left\{ \boldsymbol{w} = \left(w_1, w_2, w_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \right) \in \left[W_2^1(\Omega) \right]^6 \;\middle|\; \boldsymbol{w} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u \right\} \tag{6.125}$$

з нормою

$$\|\boldsymbol{w}\|_W = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\|w_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\xi_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} \right)}. \tag{6.126}$$

Тут $W_2^1(\Omega)$ – простір Соболєва функцій, квадрати яких разом із всіма своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω.

Вважатимемо, що дані задачі (6.120) задовольняють такі умови регулярності:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3\} \in \left[L^2(\Omega) \right]^6, \\ &\hat{Q} = \left(\hat{N}_n, \hat{N}_s, \hat{N}_z, \hat{M}_n, \hat{M}_s, \hat{M}_z \right)^T \in \left[L^2(\Gamma_\sigma) \right]^6, \\ &T = \left(T_1, T_2 \right)^T \in \left[L^2(\Omega) \right]^2, \end{aligned} \tag{6.127}$$

та позначимо через W'– простір, спряжений до простору W.

Стандартно варіаційне рівняння можна отримати, помноживши скалярно рівняння рівноваги (6.114) на довільний вектор $\boldsymbol{w} \in W$ та інтегрувавши їх по області Ω, з використанням інтегрування частинами [140].

$$0 = \iint_{\Omega} \boldsymbol{w}^T \left[C_\sigma F \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P} \right] d\Omega = -\iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\boldsymbol{u} \right) E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{w} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \boldsymbol{w}^T \, \mathbf{P} \, d\Omega +$$

$$+ \iint_{\Omega} \boldsymbol{w}^T \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \mathbf{F}_T \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \left(G_2 \boldsymbol{w} \right)^T \hat{Q} \, d\gamma, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in W.$$

Результатом буде наступне варіаційне рівняння:

$$a_{н}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \right) = \left\langle l, \boldsymbol{w} \right\rangle \qquad \forall w \in W, \tag{6.128}$$

де форма $a_{н}\left(u, w \right)$ та лінійний функціонал $\left\langle l, w \right\rangle$ мають вигляд:

$$a_{н}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \right) = \iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\boldsymbol{u} \right) E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{w} \right) d\Omega, \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned} \left\langle l, \boldsymbol{w} \right\rangle = & \iint_{\Omega} \boldsymbol{w}^T \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \mathbf{F}_T \, d\Omega + \sum_{i=1}^{3} \iint_{\Omega} \left\{ P_i w_i + m_i \xi_i \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_n w_n + \hat{N}_s w_s + \hat{N}_z w_z + \hat{M}_n \xi_n + \hat{M}_s \xi_s + \hat{M}_z \xi_z \right) d\gamma. \end{aligned} \tag{6.130}$$

У (6.129) під E_0 треба розуміти таку діагональну матрицю:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & \\ & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Підсумовуючи вищевикладене, приходимо до

Твердження 6.1 *про варіаційну задачу термопружності*.

Нехай для крайової задачі (6.120) умови на переміщення мають вигляд (6.124)*, а вихідні дані задовольняють умови регулярності (6.127), тоді відповідна варіаційна задача термопружності має вигляд*:

$$\begin{cases} \text{задано } l \in W'; \\ \text{знайти вектор } \boldsymbol{u} = \left(u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right)^T \in W \text{ такий, що:} \\ \qquad a_н\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right) = \left\langle l, \boldsymbol{w} \right\rangle \qquad \forall \boldsymbol{w} \in W. \end{cases} \tag{6.131}$$

6.4.3.2 Варіаційна задача лінійної термопружності

Формулювання лінійної варіаційної задачі, що відповідає крайовій задачі (6.123), отримано подібним чином як у п.6.4.3.1:

$$\begin{cases} \text{задано } l \in W'; \\ \text{знайти вектор } \boldsymbol{u} = \left(u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right)^T \in W \text{ такий, що:} \\ \qquad a\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right) = \left\langle l, \boldsymbol{w} \right\rangle \qquad \forall \boldsymbol{w} \in W. \end{cases} \tag{6.132}$$

Варіаційне рівняння (6.132) містить білінійну форму $a\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right)$, яка, відповідно до лінійних деформаційних співвідношень (6.78), має наступний вигляд:

$$a\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right) = \iint_{\Omega} \boldsymbol{e}^T\left(\boldsymbol{u}\right) E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{w}\right) d\Omega = \iint_{\Omega} \left(\boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u}\right)^T E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{w} \, d\Omega . \tag{6.133}$$

Більше того, використовуючи (6.78) і (6.79), запис білінійної форми (6.133) можна подати у вигляді:

$$a\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\right) = \iint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{11} b_{ij} \, \boldsymbol{e}_i\left(\boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{e}_j\left(\boldsymbol{w}\right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 . \tag{6.134}$$

6.4.3.3 Еліптичність білінійної форми.

Аргументованою базою для встановлення коректності варіаційної задачі є $W-$ еліптичність білінійної форми варіаційного рівняння. Для дослідження властивостей білінійної форми $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ скористаємось результатом праць [144, 150], який в наших позначення формулюється таким чином.

Теорема 6.1 про W – еліптичність білінійної форми $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$.

Припустимо, що:

(1) пружні характеристики матеріалу ортотропної оболонки приводять до симетричної додатно визначеної матриці B,

(2) для кожного $u \in W = \left\{ \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega) \right]^6 \;\middle|\; \boldsymbol{w} = 0 \;\; на \;\; \Gamma_u \right\}$

такого, що $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = 0$ *в* Ω*, випливає, що* $\boldsymbol{u} = 0_W$.

Тоді симетрична білінійна форма $a(\cdot,\cdot)$: $W \times W \to \mathbb{R}$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u})^T \, E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{w} \, d\Omega \tag{6.135}$$

є неперервною та W – еліптичною, тобто,

$$\left| a(\boldsymbol{u}, w) \right| \le M \, \|\boldsymbol{u}\|_W \, \|w\|_W, \qquad M = const > 0, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W, \tag{6.136}$$

$$\left| a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \right| \ge \beta \|\boldsymbol{u}\|_W^2, \qquad \beta = const > 0, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in W. \tag{6.137}$$

У даному дослідженні розглядаємо ізотропну оболонку і тому досить дослідити, що симметрична матриця пружних характеристик **B** з (6.94)

$$\mathbf{B}=\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}h\begin{bmatrix} A & D & D & & & & & & & \\ D & A & D & & & & & & & \\ D & D & A & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & AC & CD & & \\ & & & & & & CD & AC & & \\ & & & & & & & & C & \\ & & & & & & & & & C \\ & & & & & & & & & & C \end{bmatrix}, \qquad (6.138)$$

є додатно визначеною. У (6.138) для наочності виписано лише ненульові коефіцієнти матриці, і введено наступні позначення:

$$\begin{aligned} &A=\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}>0, \quad 0<\nu<\frac{1}{2}, \\ &C=\frac{h^2}{12}>0, \quad D=\frac{\nu}{(1-2\nu)}>0. \end{aligned} \qquad (6.139)$$

Щоб довести це, перейдемо до наступного запису:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\mathbf{B}\boldsymbol{x}=\frac{E}{(1+\nu)}h\Big[&y_1\left(Ay_1+Dy_2+Dy_3\right)+y_2\left(Dy_1+Ay_2+Dy_3\right)+y_3\left(Dy_1+Dy_2+Ay_3\right)+ \\ &+z_1^2+z_2^2+z_3^2+C\left\{x_1\left(Ax_1+Dx_2\right)+x_2\left(Dx_1+Ax_2\right)\right\}+C\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)\Big] \qquad (6.140) \\ &\forall\boldsymbol{x}=\left(y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)\in\mathbb{R}^{11}. \end{aligned}$$

Оскільки множник $\frac{E}{(1+\nu)}h$ – додатній, то візьмемо до уваги спочатку перші три доданки суми, що містяться у квадратних дужках з правої частини рівності (6.140):

$$y_1\left(Ay_1+Dy_2+Dy_3\right)+y_2\left(Dy_1+Ay_2+Dy_3\right)+y_3\left(Dy_1+Dy_2+Ay_3\right)=$$
$$=\frac{1}{(1-2\nu)}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\frac{1}{(1-2\nu)}\Big[(1-\nu)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+$$
$$+2\nu\left(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3\right)\Big]=\frac{1}{(1-2\nu)}\Big[(1-2\nu)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+\nu\left(y_1+y_2+y_3\right)^2\Big]\geq$$
$$\geq\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right).$$

Аналогічно для $C\left\{x_1\left(Ax_1+Dx_2\right)+x_2\left(Dx_1+Ax_2\right)\right\}$ з (6.140) отримаємо наступне:

$$\frac{h^2}{12(1-2\nu)}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu\\ \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\frac{h^2}{12(1-2\nu)}\Big\{x_1\Big[(1-\nu)x_1+\nu x_2\Big]+$$
$$+x_2\Big[\nu x_1+(1-\nu)x_2\Big]\Big\}=\frac{h^2}{12(1-2\nu)}\Big\{(1-\nu)\left(x_1^2+x_2^2\right)+2\nu x_1x_2\Big\}=$$
$$=\frac{h^2}{12(1-2\nu)}\Big\{(1-2\nu)\left[x_1^2+x_2^2\right]+\nu\left[x_1+x_2\right]^2\Big\}\geq\frac{h^2}{12}\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

Збираючи одержані вище оцінки приходимо до висновку, що:

$$\boldsymbol{x}^T\mathbf{B}\boldsymbol{x}\geq\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}h\left[y_1^2+y_2^2+y_3^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+\frac{h^2}{12}\left(x_1^2+x_2^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)\right]\geq$$
$$\geq\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}\frac{h^3}{12}\left[y_1^2+y_2^2+y_3^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+x_1^2+x_2^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right]= \qquad (6.141)$$
$$=\frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)}\frac{h^3}{12}\|\boldsymbol{x}\|^2_{\mathbb{R}^{11}}\qquad\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{11}.$$

Отже, симетрична матриця пружних сталих **B** є додатно визначеною і припущення (6.190) теореми 6.1 виконується.

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 6.2 про W – еліптичність білінійної форми $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$.

Нехай серединна поверхня Ω *ізотропної оболонки утворює обмежену область точок простору* $\mathbb{R}^2$ *з неперервною за Ліпшицем межею* Γ. *Тоді*

(1) *матриця* **B** *додатно визначена;*

(2) *симетрична білінійна форма* $a(\cdot,\cdot)$: $W \times W \to \mathbb{R}$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{C}_l \boldsymbol{u})^T \, E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{C}_l \boldsymbol{w} \, d\Omega \,, \tag{6.142}$$

— неперервна та W – еліптичність, тобто,

$$\left|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\right| \le M \|\boldsymbol{u}\|_W \|\boldsymbol{w}\|_W \,, \qquad M = const > 0, \tag{6.143}$$

$$\left|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\right| \ge \beta \|\boldsymbol{u}\|_W^2 \,, \qquad \beta = const > 0, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{w} \in W. \tag{6.144}$$

(3) *білінійна форма* (6.134) *визначає скалярний добуток на просторі кінематично допустимих векторів зміщень W і норму*

$$|\boldsymbol{w}|_W = \sqrt{a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in W, \tag{6.145}$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_W$.

6.4.4 Коректність лінійної варіаційної задачі термопружності

Підсумовуючи результати, отримані в п. 6.4.3.3 можна встановити основний результат стосовно варіаційної задачі (6.132).

Теорема 6.3 про коректність лінійної варіаційної задачі квазістатичної термопружності.

За умови, що дані задачі (6.123) задовольняють умови регулярності (6.127) та справедливості умов теореми 6.2 варіаційна задача термопружності (6.123) має єдиний розв'язок $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T \in W$ *такий, що*

$$|\boldsymbol{u}|_W \le \frac{1}{\beta} \|\boldsymbol{l}\|_* \,. \tag{6.146}$$

Тут $\beta = const > 0$.

Доведення. Теорема 6.2 забезпечує дотримання вимог щодо простору W (гільбертів із скалярним добутком (6.134) і нормою (6.145)) та білінійної форми $a(\cdot,\cdot)$: $W \times W \to \mathbb{R}$ (неперервна та W–еліптична), а неперервність лінійної форми (6.130) забезпечується умовами (6.127). Тому, відповідно до теореми Лакса–Мільграма [140] про коректність абстрактних варіаційних задач, задача вигляду (6.123) є коректно сформульована. ▲

Встановлення коректності варіаційної задачі квазістатичної термопружності для тонких оболонок підтверджує обґрунтованість розвиненої теорії для застосування та вказує на можливість використання проекційно–сіткових методів розв'язування даної проблеми, а саме методу скінченних елементів.

6.4.5 Застосування методу скінченних елементів до розв'язування задачі квазістатичної термопружності та його збіжність

Заснований на варіаційних принципах метод скінченних елементів широко використовується для числового аналізу фізичних процесів при взаємодії конструкції із зовнішніми полями, в тому числі і для розрахунку термопружних конструкцій. Оскільки метод скінченних елементів є дуже вдалим засобом практичної реалізації на практиці методу Гальоркіна, то доцільно розглянути деякі аспекти використання методу Гальоркіна до розв'язування варіаційної задачі лінійної термопружності (6.132), зважаючи на те, що доведена її коректність.

6.4.5.1 Апроксимація Гальоркіна варіаційної задачі лінійної термопружності

Оберемо в просторі W допустимих функцій послідовність скінченновимірних підпросторів $\{W_N\}$, таких, що:

$$\begin{cases} dim\, W_N = N \to \infty\ , \\ V = \bigcup\limits_{N\to\infty} W_N \text{ щільно вкладений у } W\,. \end{cases} \tag{6.147}$$

Тепер послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{u_N\} \in W$ буде розв'язком задачі вигляду:

$$\begin{cases} \textit{задано } \ N{=}const \to \infty,\ l \in W'; \\ \textit{знайти } \ \boldsymbol{u_N} \in W_N \quad \textit{такий, що} \\ a\left(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{w}\right) = \left\langle l, \boldsymbol{w}\right\rangle \quad \boldsymbol{w} \in W_N. \end{cases} \tag{6.148}$$

Тепер виберемо довільний фіксований базис $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ простору W_N, функції якого це $\boldsymbol{\varphi}_k = \left(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\right)^T$. Тоді, розв'язок задачі (6.148) шукатимемо у вигляді:

$$\boldsymbol{u}_N = \sum_{k=1}^{N} q_k\, \varphi_k\,, \tag{6.149}$$

де q_k – невідомі коефіцієнти, що утворюють вектор $\boldsymbol{q} = \{q_k\}_{k=1}^{N}$. У (6.148) покладемо $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi}_k$ та підставимо розвинення (6.149). Отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{A}\boldsymbol{q} = \mathbf{L}, \tag{6.150}$$

де компоненти матриці **A** та вектора **L** згідно (6.133) та (6.130) визначаються так:

$$A_{km} = \iint_{\Omega} \left(\boldsymbol{C_l} \varphi_k \right)^T E_0 \, \mathbf{B} \, \boldsymbol{C_l} \varphi_m \, d\Omega = a\left(\varphi_k, \varphi_{\boldsymbol{m}} \right),$$

$$L_k = -\iint_{\Omega} \left(\varphi_k \right)^T \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} \mathbf{F}_T \, d\Omega + \sum_{i=1}^{3} \iint_{\Omega} \left(\varphi_k \right)^T \mathbf{P} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \tag{6.151}$$

$$+ \int_{\Gamma_\sigma} \left(G_2 \varphi_k \right)^T \hat{Q} \, d\gamma = \left\langle l, \varphi_k \right\rangle \qquad k, m = 1, \ldots N.$$

Слід зазначити, що матриця **A** зберігає властивості симетричності та додатновизначеності матриці **B**, що підтверджує теорема 6.2.

6.4.5.2 Властивості послідовності апроксимацій Гальоркіна

Відомо з [150, 165], що апроксимації Гальоркіна володіють важливими властивостями.

З рівнянь задач (6.132) та (6.148) випливає, що

$$a\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{w} \right) = 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in W_N, \tag{6.152}$$

тобто похибка апроксимації Гальоркіна

$$e_N = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N \in W, \tag{6.153}$$

ортогональна в сенсі скалярного добутку $a(\cdot,\cdot)$ до простору апроксимацій W_N. Отже, апроксимація Гальоркіна $\boldsymbol{u}_N$ є ортогональною проекцією на W_N розв'язку $\boldsymbol{u} \in W$ варіаційної задачі (6.132). Звідки

$$\left| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N \right|_W = \inf_{w \in W_N} \left| \boldsymbol{u} - w \right|_W. \tag{6.154}$$

Тому апроксимація Гальоркіна $\boldsymbol{u}_N$ є найкращим (відносно норми $\left| \cdot \right|_W$) наближенням до розв'язку $\boldsymbol{u}$ задачі (6.132).

Якщо для кожного заданого $K<N$ виділити такий підпростір W_K, що

$$W_K \subset W_N \subset V, \tag{6.155}$$

то апроксимація $\boldsymbol{u}_K \in W_K$ є ортогональною проекцією $\boldsymbol{u}_N$ на W_K і при цьому

$$\left|\boldsymbol{u}_K\right|_W \le \left|\boldsymbol{u}_N\right|_W \le \left|\boldsymbol{u}\right|_W \qquad \forall K < N. \tag{6.156}$$

Крім цього, за теоремою Піфагора

$$\left|\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{u}_K\right|_W^2 = \left|\boldsymbol{u}_N\right|_W^2 - \left|\boldsymbol{u}_K\right|_W^2. \tag{6.157}$$

Таким чином, апроксимації Гальоркіна $\boldsymbol{u}_N \in W_N$ утворюють згідно з (6.156) при $N \to \infty$ неспадну обмежену числову послідовність $\left\{\left\|\boldsymbol{u}_N\right\|\right\}$, а також внаслідок (6.157) – фундаментальну послідовність в гільбертовому просторі. Оскільки W – повний простір, то в ньому знайдеться елемент $\boldsymbol{u}_*$ такий, що

$$\left|\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{u}_*\right|_W^2 \le \left|\boldsymbol{u}_N\right|_W^2 - \left|\boldsymbol{u}_K\right|_W^2. \tag{6.158}$$

Нарешті, рівняння (6.152) дозволяє встановити, що

$$0 = \lim_{N\to\infty} a\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{w}\right) = a\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{w}\right) \quad \forall \boldsymbol{w} \in W, \tag{6.159}$$

тобто, апроксимація Гальоркіна $\left\{\boldsymbol{u}_N\right\}$ слабко збігається до розв'язку $\boldsymbol{u}$ вихідної варіаційної задачі (6.132).

Результати вищенаведених досліджень підсумовує наступна теорема.

Теорема 6.4 про властивості апроксимацій Гальоркіна.

Якщо виконуються гіпотези теореми 6.3 та умови (6.147) просторами апроксимацій W_N, що використовуються для побудови за схемою Гальоркіна наближених розв'язків задачі (6.132), то будуть правильними такі твердження:

(1) для кожного фіксованого N>0 апроксимація Гальоркіна $u_N \in W_N$ однозначно визначається розв'язком системи лінійних алгебричних рівнянь (6.150) з симетричною додатно визначеною матрицею, компоненти якої обчислюються за правилом (6.151);

(2) апроксимація Гальоркіна $\boldsymbol{u}_N$ *є найкращим в просторі* W_N *наближенням відносно норми (6.145) до розв'язку* $\boldsymbol{u} \in W$ *задачі (6.132);*

(3) послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{\boldsymbol{u}_N\}$ *при* $N \to \infty$ *збігається до розв'язку* $\boldsymbol{u} \in W$ *варіаційної задачі (6.132).*

6.4.5.3 Апріорні оцінки швидкості збіжності апроксимацій методу скінченних елементів

Тут і нижче в межах цього параграфу символом Ω_e ми позначаємо типовий скінченний елемент тріангуляції T_h, $h_e = diam\,\Omega_e$, $h = \max_e h_e$. Простір апроксимацій зміщень, будований на тріангуляції T_h будемо позначати через W_h. Таким чином за допомогою методу Гальоркіна можна побудувати послідовність апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ) $\{\boldsymbol{u}_h\} \in W$ за допущення, що $h \to 0$.

Побудуємо оцінку швидкості збіжності послідовності апроксимацій Гальоркіна до розв'язку лінійної варіаційної задачі (6.132) за допущенням, що простори апроксимацій будуються за технологією МСЕ.

Добре відомо, що за типових для МСЕ допущень відносно просторів апроксимацій їх щільність характеризується оцінкою [164, 165]:

$$\begin{cases} \text{для кожного } \boldsymbol{w} \in V \bigcap \left[W_2^{k+1}(\Omega) \right], \quad k \ge 0, \\ \text{знайдуться } \boldsymbol{w_h} \in W_h, \quad C = const > 0 \quad \text{такі, що} \\ \left\| \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_h \right\|_{W_2^m(\Omega)} \le C h^{k+1-m} \left\| u \right\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \quad 0 \le m \le k. \end{cases} \tag{6.160}$$

Тут k – максимальний порядок повного полінома, який може бути відтворений базисними функціями φ_i на кожному скінченному елементі.

Теорема 6.5 про апріорні оцінки швидкості збіжності апроксимацій МСЕ.

Нехай виконано умови теореми 6.3 та $\boldsymbol{u} \in W$ *– розв'язок варіаційної задачі про рівновагу оболонки (6.132), причому існує таке натуральне k, що цей розв'язок задовольняє наступну умову гладкості*

$$\boldsymbol{u} \in W \bigcap W_2^{k+1}(\Omega), \quad k \geq 1. \tag{6.161}$$

Припустимо також, що послідовність апроксимацій $\{\boldsymbol{u}_h\}$ *будується методом скінченних елементів із використанням послідовності просторів* $\{W_h\}$ *із властивостями* (6.160).

Тоді послідовність знайдених апроксимацій $\{\boldsymbol{u}_h\}$ *збігається при h→0 до точного розв'язку варіаційної задачі (6.132) та її швидкість збіжності характеризується апріорною оцінкою*

$$\left|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right|_W \leq Ch^k \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \tag{6.162}$$

де $C = const > 0$ *не залежить від h.*

Доведення. Оскільки енергетична норма $\left|\cdot\right|_W$ є еквівалентною нормі $\left\|\cdot\right\|_{W_2^1(\Omega)}$, то враховуючи це, екстремальну властивість апроксимацій методу Гальоркіна (6.154) можна продовжити таким чином

$$\left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\right|_W = \inf_{w \in W_N} \left|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\right|_W \leq C \left\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \right\|_{W_2^1(\Omega)}, \qquad C=const>0.$$

І, нарешті, інтерполяційна властивість апроксимацій методу скінченних елементів (6.160) приводять до бажаної оцінки (6.162).▲

Зауваження 6.1. Для розв'язування задач деформування оболонок, податливих на зсув та стиснення, використовуються, як зазначено у п. 6.2.9.1 даної праці, квадратичні ізопараметричні апроксимації методу скінченних елементів, тому швидкість збіжності наближених розв'язків характеризуються апріорною оцінкою

$$\left|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right|_W \leq Ch^2 \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{W_2^3(\Omega)}. \tag{6.163}$$

де C не залежить від h.

6.4.6 Розв'язування геометрично нелінійних задач статики методом скінченних елементів

У даному дослідженні схема методу скінченних елементів для розв'язування нелінійних (відносно переміщень) задач термопружності будується на основі принципу можливих переміщень або варіаційного принципу Лагранжа. Принцип Лагранжа в нелінійній теорії оболонок можна трактувати лише як принцип стаціонарності варіаційного функціоналу. У загальному випадку нелінійного деформування функціонал не має єдиного мінімуму, оскільки деформації виражаються через переміщення нелінійними залежностями [121].

Із викладеної у попередньому підрозділі теорії випливає, що статична поведінка оболонки при нелінійному деформуванні в скінченно–елементному записі описується великими системами нелінійних алгебраїчних рівнянь. Оскільки методів знаходження їх точних розв'язків не існує, то будемо використовувати ітераційні методи з використанням квазілінеаризації на основі методу Ньютона, який володіє достатньо швидкою збіжністю [141, 143, 152].

6.4.6.1 Стаціонарність варіаційного функціоналу

Згідно принципу Лагранжа для статичних задач, узагальненому на випадок незв'язаної задачі термопружності [160], серед усіх кінематично допустимих зміщень $\boldsymbol{u} \in W$ на множині функцій $\left[W_2^1(\Omega)\right]^6$, які задовольняють кінематичні крайові умови (6.124), істинними будуть ті, які надають стаціонарного значення варіаційному функціоналу

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{u})\, E_0\, \mathbf{B}\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, d\Omega - \iint_{\Omega} \boldsymbol{u}^T\, \mathbf{P}\, d\Omega -$$
$$-\iint_{\Omega} \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} \mathbf{F}_T\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} (G_2 \boldsymbol{u})^T \hat{Q}\, d\gamma, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in W, \tag{6.164}$$

тобто такі $\boldsymbol{u} \in W$, що

$$\delta \mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = 0. \tag{6.165}$$

Умова стаціонарності (6.165) функціоналу (6.164), як і розв'язок варіаційної задачі (6.131), приводять до рівнянь рівноваги (6.108) та до природних (статичних) крайових умов (6.115).

6.4.6.2 Приріст функціоналу Лагранжа

Для розвинення варіаційного функціоналу позначимо через $\boldsymbol{u}^i$ та $\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}^{i+1}$ відповідно переміщення в початковому та суміжному станах оболонки. Тоді приріст функціоналу Лагранжа

$$\Delta \mathcal{J}(\boldsymbol{u}^i; \Delta \boldsymbol{u}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}) - \mathcal{J}(\boldsymbol{u}^i) \tag{6.166}$$

із врахуванням (6.164) можна подати у вигляді

$$\Delta \mathcal{J}(\boldsymbol{u}^i; \Delta \boldsymbol{u}) = -\iint_{\Omega} (\Delta \boldsymbol{u})^T\, \mathbf{P}\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} (G_2 \Delta \boldsymbol{u})^T \hat{Q}\, d\gamma -$$
$$-\iint_{\Omega} \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} \mathbf{F}_T \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i) \right] d\Omega +$$
$$+\frac{1}{2}\iint_{\Omega} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i) \right]^T E_0\, \mathbf{B} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i) \right] d\Omega +$$
$$+\iint_{\Omega} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i + \Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i) \right]^T E_0\, \mathbf{B}\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i)\, d\Omega. \tag{6.167}$$

Враховуючи, що

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^{i}+\Delta\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}^{i}\right)=C_{l}\Delta\boldsymbol{u}+\left(C_{\Omega}\boldsymbol{u}^{i}\right)_{11}^{T}E_{\Omega}\,C_{\Omega}\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\left(C_{\Omega}\Delta\boldsymbol{u}\right)_{11}^{T}E_{\Omega}\,C_{\Omega}\Delta\boldsymbol{u},$$

та, нехтуючи членами порядку $O\left(\left\|\Delta\boldsymbol{u}\right\|^{2+p}\right)$, $p>0$, отримаємо вираз для приросту варіаційного функціоналу у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}\left(\boldsymbol{u}^{i};\Delta\boldsymbol{u}\right)=&-\iint_{\Omega}\left(\Delta\boldsymbol{u}\right)^{T}\mathbf{P}\,d\Omega-\int_{\Gamma_{\sigma}}\left(G_{2}\Delta\boldsymbol{u}\right)^{T}\hat{Q}\,d\gamma-\\&-\frac{\alpha_{T}E}{(1-2\nu)}\iint_{\Omega}\left[C_{l}\Delta\boldsymbol{u}+C_{N}\left(\boldsymbol{u}^{i},\Delta\boldsymbol{u}\right)\right]^{T}\mathbf{F_T}\,d\Omega+\\&+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[C_{l}\Delta\boldsymbol{u}+C_{N}\left(\boldsymbol{u}^{i},\Delta\boldsymbol{u}\right)\right]^{T}\mathbf{T}\left(\Delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^{i}\right)d\Omega+\\&+\iint_{\Omega}\left[C_{l}\Delta\boldsymbol{u}+C_{N}\left(\boldsymbol{u}^{i},\Delta\boldsymbol{u}\right)\right]^{T}\mathbf{T}\left(\boldsymbol{u}^{i},\boldsymbol{u}^{i}\right)d\Omega+\\&+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[C_{N}\left(\Delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u}\right)\right]^{T}\mathbf{T}\left(\boldsymbol{u}^{i},\boldsymbol{u}^{i}\right)d\Omega,\end{aligned}\tag{6.168}$$

де

$$\mathbf{T}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)=E_{0}\,\mathbf{B}\left[C_{l}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}C_{N}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)\right],$$

$$C_{N}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)=\left(C_{\Omega}\,\boldsymbol{a}\right)_{11}^{T}E_{\Omega}\,C_{\Omega}\,\boldsymbol{b}\,.$$

6.4.6.3 Приріст функціоналу в термінах апроксимацій МСЕ

Конкретизуємо приріст функціоналу (6.168) на випадок апроксимацій МСЕ, зокрема, для використання квадратичних ізопараметричних базисних функцій з розділу 6.4.6.2.

Матрицю–стовбець переміщень $\boldsymbol{u}=\left(u_{1},u_{2},u_{3},\gamma_{1},\gamma_{2},\gamma_{3}\right)^{T}$ подамо на базовому елементі Ω_e у вигляді

$$\boldsymbol{u}=N^{e}\left(\zeta_{1},\zeta_{2}\right)\boldsymbol{q}_{e},\qquad\left(\zeta_{1},\zeta_{2}\right)\in\Omega^{e},\tag{6.169}$$

де $\boldsymbol{q}_e$ – матриця–стовбець невідомих вузлових переміщень і поворотів, $N^e\left(\zeta_1,\zeta_2\right)$ – відповідні базисні функції, наприклад, див. (2.82), записані в локальних координатах $\left(\zeta_1,\zeta_2\right)$, $\zeta_i \in \left[-1,1\right]$.

Тоді

$$\boldsymbol{u}^i + \Delta\boldsymbol{u} = N^e\left(\zeta_1,\zeta_2\right)\left[\boldsymbol{q}_e^i + \Delta\boldsymbol{q}_e^i\right]. \tag{6.170}$$

Підсумовуючи по всіх скінченних елементах поділу вирази (6.169), апроксимацію МСЕ можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{u} = \sum_e N^e\left(\zeta_1,\zeta_2\right)\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{N}\left(\zeta_1,\zeta_2\right)\boldsymbol{q}, \tag{6.171}$$

де $\boldsymbol{q}$ – матриця–стовбець шуканих переміщень всього ансамблю скінченних елементів.

Приймаючи до уваги, що $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\Delta\boldsymbol{q}$, перетворимо підінтегральний вираз останнього доданка в формулі (6.168) до вигляду

$$\begin{aligned}
&\left[C_N(N\Delta\boldsymbol{q},N\Delta\boldsymbol{q})\right]^T E_0\,\mathbf{B}\left[C_l N\boldsymbol{q}^i + \frac{1}{2}C_N(N\boldsymbol{q}^i,N\boldsymbol{q}^i)\right] = \\
&\qquad = \left[C_N\left(N\Delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{q}\right)\right]^T \mathbf{T}\left(Nq^i\right) = \\
&\qquad = \left(\Delta\boldsymbol{q}\right)^T\left[\sum_{j=1}^{11}\mathbf{T}_j\left(N\boldsymbol{q}^i\right)\left(C_\Omega N\right)_{11}^T E_j C_\Omega N\right]\Delta\boldsymbol{q}.
\end{aligned}$$

6.4.6.4 Умова стаціонарності функціоналу

Умову стаціонарності варіаційного функціоналу повної (потенціальної) енергії (6.165) можна записати у вигляді

$$\delta\mathcal{I}\left(\boldsymbol{u}^i + \Delta\boldsymbol{u}\right) = \delta\left(\Delta\mathcal{I}\left(\boldsymbol{u}^i;\Delta\boldsymbol{u}\right)\right) = 0\,. \tag{6.172}$$

Теорема 6.6 про умови стаціонарності функціоналу.

Умова стаціонарності функціоналу (6.165) в скінченноелементному поданні має наступний вигляд:

$$\mathbf{K}_T\left(\boldsymbol{q}^i\right)\Delta\boldsymbol{q}+\mathbf{K}\left(\boldsymbol{q}^i\right)\boldsymbol{q}^i-\mathbf{R}=0, \tag{6.173}$$

де введено наступні позначення:

- *матриця січної жорсткості*

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\left(\boldsymbol{q}^i\right)=\iint_\Omega\left[\left\{C_l+\left(C_\Omega N\boldsymbol{q}^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right\}N\right]^T E_0 B\times\\ \left[C_l+\frac{1}{2}\left(C_\Omega N\boldsymbol{q}^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right]Nd\Omega\ ;\end{aligned} \tag{6.174}$$

- *матриця тангенціальної жорсткості*

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_T\left(\boldsymbol{q}^i\right)=\iint_\Omega\left[\left(C_l+(C_\Omega N\boldsymbol{q}^i)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right)N\right]^T E_0 B\times\\ \left[C_l+\left(C_\Omega N\boldsymbol{q}^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right]Nd\Omega+\\ +\iint_\Omega\sum_{j=1}^{11}\left[\mathbf{T}_j\left(N\boldsymbol{q}^i\right)-\frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\mathbf{F}_\mathbf{T}^j\right]\left(C_\Omega N\right)_{11}^T E_j C_\Omega N d\Omega\ ;\end{aligned} \tag{6.175}$$

- *вектор зовнішнього вузлового навантаження*

$$\mathbf{R}=\iint_\Omega N^T\mathbf{P}\,d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\left(G_2N\right)^T\hat{Q}\,d\gamma+\frac{\alpha_T\mathrm{E}}{(1-2\nu)}\iint_\Omega\left[C_lN+C_N\left(N\boldsymbol{q}^i,N\right)\right]^T E_0\,\mathbf{F}_\mathbf{T}\,d\Omega. \tag{6.176}$$

Доведення. Рівняння (6.173) отримано із (6.172) наступним чином:

$$\frac{\partial\,\Delta\mathcal{J}\left(\boldsymbol{q}^i;\Delta\boldsymbol{q}\right)}{\partial\Delta\boldsymbol{q}}=0. \quad \blacktriangle$$

6.4.6.5 Ітераційна процедура знаходження стану рівноваги

При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6.173) відносно $\Delta\boldsymbol{q}$ на (i+1)–й ітерації знаходимо матрицю–стовбець вузлових переміщень і поворотів

$$\boldsymbol{q}^{i+1} = \boldsymbol{q}^{i} + \Delta\boldsymbol{q}\,, \tag{6.177}$$

при яких варіаційний функціонал в першому наближенні набуває стаціонарного значення. Розв'язуючи знову ж систему (6.173), продовжуємо уточнювати значення варіаційного функціоналу для знаходження стану рівноваги.

Алгоритм відшукання стаціонарного значення варіаційного функціоналу починається з допустимого розв'язку $\boldsymbol{q}^0$=0. До того ж, на першій ітерації отримаємо розв'язок геометрично лінійної задачі

$$\mathbf{K}_T\left(0\right)\Delta\boldsymbol{q} = \mathbf{R}. \tag{6.178}$$

Подальший хід ітераційного процесу відбувається так:

$$\begin{cases} \textit{Задано } \boldsymbol{q}^{i}. \\ \textit{Знайти } \Delta\boldsymbol{q} \ \textit{ та } \boldsymbol{q}^{i+1} \ \textit{такі, що:} \\ \mathbf{K}_T\left(\boldsymbol{q}^{i}\right)\Delta\boldsymbol{q} = \mathbf{R} - \mathbf{K}\left(\boldsymbol{q}^{i}\right)\boldsymbol{q}^{i}, \\ \boldsymbol{q}^{i+1} = \boldsymbol{q}^{i} + \Delta\boldsymbol{q}, \qquad i = 0,1,\ldots\ . \end{cases} \tag{6.179}$$

Якщо, на i–ій ітерації для наперед визначеного числа $\varepsilon > 0$ виконується наступна умова

$$\left\|\Delta\boldsymbol{q}\right\| = \left[\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{q}_j}{\boldsymbol{q}_j^{i}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon, \qquad \boldsymbol{q}_j^{i} \ne 0. \tag{6.180}$$

то ітераційний процес (6.179) закінчується. Тут k – кількість невідомих всього ансамблю скінченних елементів, $\boldsymbol{q}_j^i$ – j–та компонента матриці–стовбця вузлових переміщень і поворотів після i–ої ітерації.

6.4.6.6 Обчислювальні аспекти методу скінченних елементів

На елементі Ω_e матриці січної та тангенціальної жорсткості (6.174), (6.175) та вектор зовнішнього вузлового навантаження (6.176) після скінченноелементної апроксимації можна подати у вигляді суми [141, 164]

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{q}) = \sum_e \boldsymbol{K}^e(\boldsymbol{q}_e), \qquad \mathbf{K}_T(\boldsymbol{q}) = \sum_e \boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{q}_e), \qquad \mathbf{R} = \sum_e \boldsymbol{R}^e.$$

Конкретизуємо вигляд $\boldsymbol{K}^e(\boldsymbol{q}_e)$, $\boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{q}_e)$, $\boldsymbol{R}^e$. Для цього матрицю диференціальних операторів, яка відображає зв’язок між компонентами тензора лінійної деформації та переміщеннями подамо у вигляді

$$C_l = A_l D, \tag{6.181}$$

а матрицю, котра пов’язує компоненти тензора кутів повороту з переміщеннями запишемо наступним чином

$$C_\Omega = A_\Omega D, \tag{6.182}$$

де

$$D = \begin{bmatrix} d & & & & & \\ & d & & & & \\ & & d & & & \\ & & & d & & \\ & & & & d & \\ & & & & & d \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} 1 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{vmatrix}.$$

Тут A_l та A_Ω – матриці розмірностей 11×18 та 6×18 відповідно, з наступними ненульовими елементами:

$$A_l^{1,2} = 2A_l^{4,5} = 2A_l^{5,8} = A_l^{7,11} = 2A_l^{9,14} = 2A_l^{10,17} = \frac{1}{A_1};$$

$$A_l^{1,4} = 2A_l^{4,1} = A_l^{7,13} = -2A_l^{9,10} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}; \qquad A_l^{1,7} = -2A_l^{5,1} = A_l^{7,16} = k_1;$$

$$A_l^{2,1} = 2A_l^{4,4} = A_l^{8,10} = -2A_l^{9,13} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}; \qquad A_l^{2,7} = -2A_l^{6,4} = A_l^{8,16} = k_2;$$

$$A_l^{2,6} = 2A_l^{4,3} = 2A_l^{6,9} = A_l^{8,15} = 2A_l^{9,12} = 2A_l^{11,18} = \frac{1}{A_2}; \quad A_l^{3,16} = 2A_l^{5,10} = 2A_l^{6,13} = 1;$$

$$2A_l^{9,1} = -k_2 \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}; \qquad 2A_l^{9,3} = \frac{k_1}{A_2}; \qquad 2A_l^{9,4} = -k_1 \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}; \qquad 2A_l^{95} = \frac{k_2}{A_1};$$

$$A_\Omega^{1,4} = \frac{1}{2} A_\Omega^{4,13} = -k_2; \qquad A_\Omega^{1,13} = -A_\Omega^{2,10} = -1; \qquad A_\Omega^{1,9} = -A_\Omega^{3,3} = A_\Omega^{4,18} = -A_\Omega^{6,12} = \frac{1}{A_2};$$

$$A_\Omega^{2,1} = \frac{1}{2} A_\Omega^{5,10} = k_1; \qquad A_\Omega^{2,8} = -A_\Omega^{3,5} = A_\Omega^{5,17} = -A_\Omega^{6,14} = -\frac{1}{A_1};$$

$$A_\Omega^{3,1} = A_\Omega^{6,10} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}; \qquad A_\Omega^{3,4} = A_\Omega^{6,13} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}.$$

Використаємо (6.181), (6.182) для запису на скінченному елементі Ω_e виразів для обчислення матриць тангенціальної та січної жорсткості

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{q}_e) = \iint_{\Omega_e} & \left[A_l DN^e + \left(A_\Omega DN^e \boldsymbol{q}_e \right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e \right]^T E_0 B \times \\ & \times \left[A_l DN^e + \left(A_\Omega DN^e \boldsymbol{q}_e \right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{\Omega_e} \sum_{i=1}^{11} \left[\mathbf{T}_i \left(N^e \boldsymbol{q}_e \right) - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \mathbf{F}_\mathbf{T}^i \right] \times \left[\left(A_\Omega DN^e \right)^T \boldsymbol{E}_i \times \right. \\ & \left. \times A_\Omega DN^e \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 . \end{aligned} \tag{6.183}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^e(\boldsymbol{q}_e) = \iint_{\Omega_k} & \left[A_l DN^e + \left(A_\Omega DN^e \boldsymbol{q}_e \right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e \right]^T E_0 B \times \\ & \times \left[A_l DN^e + \frac{1}{2} \left(A_\Omega DN^e \boldsymbol{q}_e \right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 , \end{aligned} \tag{6.184}$$

Застосовуючи вже використане у п.6.4.2 квадратичне перетворення координат (2.78), проведемо інтегрування в (6.183), (6.184) за квадратурними формулами Гаусса,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^e(\boldsymbol{q}_e) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[& A_l DN^e(\zeta_1,\zeta_2) + \left(A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T \times \\
& \times E_\Omega A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\Big]^T E_0 B\Big[A_l DN^e(\zeta_1,\zeta_2) + \\
& + \frac{1}{2}\left(A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\Big] \times \\
& \times A_1 A_2 \det J_e \; d\zeta_1 d\zeta_2 \cong \\
\cong \sum_{m=1}^{r} a^m \sum_{n=1}^{r} a^n \Big[& A_l DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n) + \left(A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T \times \\
& \times E_\Omega A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)]^T E_0 B[A_l DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n) + \\
& + \frac{1}{2}\left(A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\Big] \times \\
& \times A_1 A_2 \det J_e(\varsigma^m,\varsigma^n),
\end{aligned} \tag{6.185}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{q}_e) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[& A_l DN^e(\zeta_1,\zeta_2) + \left(A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T \times \\
& \times E_\Omega A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\Big]^T E_0 B\Big[A_l DN^e(\zeta_1,\zeta_2) + \\
& + \left(A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\Big] \times A_1 A_2 \det Je \; d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{11}\left[\mathbf{T}_i\left(N^e(\zeta_1,\zeta_2)\boldsymbol{q}_e\right) - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^i \right] \times \left[A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2)\right]^T E_i \times \\
& \times A_\Omega DN^e(\zeta_1,\zeta_2) A_1 A_2 \det J_e \; d\zeta_1 d\zeta_2 \cong \\
\cong \sum_{m=1}^{r} a^m \sum_{n=1}^{r} a^n \Big\{\Big[& A_l DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n) + \left(A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T \times \\
& \times E_\Omega A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\Big]^T E_0 B\Big[A_l DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n) + \\
& + \left(A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\Big] + \\
& + \sum_{i=1}^{11}\left[\mathbf{T}_i\left(N^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\boldsymbol{q}_e\right) - \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^i \right]\left[A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\right]^T E_i \times \\
& \times A_\Omega DN^e(\varsigma^m,\varsigma^n)\Big\} A_1 A_2 \det J_e(\varsigma^m,\varsigma^n).
\end{aligned} \tag{6.186}$$

Тут вжито такі позначення: r – порядок квадратурної формул Гаусса, ς^i та a^i – вузли та коефіцієнти цієї формули відповідно [152, 154].

Подібно до вищезаписаних перетворень запишемо на елементі Ω_e вектор навантаження (6.176):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^e = &\iint_{\Omega_e}\left(N^e\right)^T \mathbf{P} A_1 A_2\, d\alpha_1\, d\alpha_2 + \int_{\Gamma}\left[G_2 N^e\right]^T \hat{Q}\, d\gamma + \\ &+\frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\iint_{\Omega_e}\left[A_l D N^e + A_\Omega D\left(N^e \boldsymbol{q}_e\right)_{11}^T E_\Omega A_\Omega D\left(N^e\right)\right]^T E_0\, \mathbf{F_T}\, A_1 A_2\, d\alpha_1\, d\alpha_2.\end{aligned} \tag{6.187}$$

Аналогічно до переміщень здійснюємо апроксимацію заданого навантаження **P** на елементі Ω_e

$$\mathbf{P} = N^e(\xi_1(\alpha_1,\alpha_2),\xi_2(\alpha_1,\alpha_2))\boldsymbol{P}^e, \tag{6.188}$$

де $\boldsymbol{P}^k = \left(P_1^1, P_2^1, P_3^1, m_1^1, m_2^1, \ldots m_3^8\right)^T$ – матриця–стовбець наперед відомих значень навантаження **P** у вузлах сітки скінченних елементів.

Після підстановки (6.188) в (6.187) та використання заміни (2.79), отримаємо формулу для обчислення вектора зовнішнього вузлового навантаження на елементі

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^e = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[N^e\left(\zeta_1,\zeta_2\right)\right]^T N^e\left(\zeta_1,\zeta_2\right)\ \boldsymbol{P}^e A_1 A_2 \det J_e\, d\zeta_1\, d\zeta_2 + \\ &+\int_{-1}^{1}\left[G_2 N^e\left(\zeta_1(\xi),\zeta_2(\xi)\right)\right]\hat{Q}\sqrt{A_1^2\left(\frac{d\alpha_1}{d\xi}\right)^2 + A_2^2\left(\frac{d\alpha_2}{d\xi}\right)^2}\, d\xi \\ &+\frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}\sum_{m=1}^{r} a^m \sum_{n=1}^{r} a^n \left\{\left[A_l D N^e\left(\varsigma^m,\varsigma^n\right) + \left(A_\Omega D N^e\left(\varsigma^m,\varsigma^n\right) q_e\right)_{11}^T \times\right.\right. \\ &\left.\left.\times E_\Omega A_\Omega D N^e\left(\varsigma^m,\varsigma^n\right) q_k\right]^T E_0\, \mathbf{F_T}\right\} A_1 A_2 \det J_e\left(\varsigma^m,\varsigma^n\right).\end{aligned} \tag{6.189}$$

де ξ–параметр дуги границі.

Для отримання максимальної точності обчислень матриць січної (6.185) і тангенціальної (6.186) жорсткостей та вектора зовнішнього навантаження (6.189) на елементі застосовуємо квадратурні формули Гауса порядку r=3.

6.4.7 Висновки та заключні зауваження

В даному розділі дисертації побудовано чисельні схеми розв’язування варіаційних задач динаміки та статичної рівноваги гнучких зсувних оболонок з деформівною нормаллю, в основу яких покладено застосування

- напівдискретизації Гальоркіна (відповідно повну дискретизацію) за просторовими змінними варіаційної задачі динаміки (відповідно статики);
- просторів апроксимацій (за просторовими змінними) з поліноміальними базисами, які будуються на послідовно вкладених сітках скінченних елементів;
- однокрокових рекурентних схем Ньюмарка для інтегрування варіаційних задач в часі;
- ітераційних процедур методу Ньютона для розв’язування нелінійних алгебраїчних рівнянь повністю дискретизованої варіаційної задачі теорії гнучких оболонок.

Шляхом побудови належних апріорних оцінок встановлено, що за певних умов гладкості на дані задачі та на властивості просторів апроксимацій методу скінченних елементів:

- послідовність напівдискретних апроксимацій (відповідно повністю дискретних апроксимацій) збігається відносно енергетичних норм до точних розв’язків варіаційних задач динаміки (відповідно статики) зсувних оболонок з деформівною нормаллю і при цьому швидкість збіжності

апроксимацій методу скінченних елементів характеризується квазіоптимальними порядками швидкості збіжності;

- серед однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі можна виділити класи безумовно стійких та умовно стійких схем, розв'язки яких збігаються до точних розв'язків при кроці інтегрування $\Delta t \to 0$ з похибкою $O(\Delta t2)$ відносно енергетичної норми.

Таким чином, основним результатом даного розділу є побудова проекційно–сіткових схем для варіаційних задач теорії гнучких зсувних оболонок з деформівною нормаллю та їх повний аналіз на предмет стійкості, ароксимації та збіжності для випадку лінійних задач цієї теорії.

Отже, в сукупності із результатами попередніх розділів дана дисертація вирішує основні теоретичні питання проведення кваліфікованого обчислювального експерименту для інженерного проектування оболонкових конструкцій з врахуванням їх гнучкості, ефектів зсуву та деформівності обтиску нормалі серединної поверхні.

6.5 Використання лінійних і квадратичних апроксимацій для розв'язування задач руслового стоку рідини

Важливу роль у вивченні кругообігу води в природі відіграють гідрологічні системи. В загальному дослідженні цілої такої системи з врахуванням всіх факторів впливу є складною і не завжди доцільною задачею для вивчення, тому досліджується лише певна частина області. Найвирогіднішим елементом частини території може виступати територія водозбору, яка характеризується подібними кліматичними умовами і знаходиться під впливом подібних факторів, що впливають на рух вологи.

Описати рух вологи на великих водозборах, які включають різні гідрологічні об'єкти, різні взаємозв'язуючі між собою етапи – задача нелегка.

Серед усіх моделей руху рідини, тут ми розглянемо рух рідини на мілководді, оскільки це один з найбільш вживаних класів задач у гідрологічному циклі. В основі теорії мілкої води лежать два основних фактори – перевага горизонтальних масштабів руху над вертикальними та гідростатичний закон для тиску. Процеси, що лежать в основі цієї теорії носять хвильовий характер з довжиною хвилі набагато більшою вертикальних масштабів руху.

У цій роботі розглянемо рух мілкої води на одному з головних елементів водозбору, а саме в притоках та головних руслах річок, причому ці русла будемо називати псевдодопризматичними. Такі русла утворюються при русі деякої кривої вздовж плоскої лінії дна, при цьому допускається, що глибина потоку є дуже малою в порівнянні з радіусом кривизни лінії дна.

Ця математична модель залежить від багатьох факторів, які можуть достатньо швидко змінюватися, тому така модель повинна бути стійкою до зовнішніх та внутрішніх впливів, які суттєво модифікують розв’язок задачі. Для апроксимації розв’язку показано використання лінійних базисних функцій. Так як задача нелінійна, то розв’язок набуває великих додатніх та від’ємних значень, особливо при різких перепадах рельєфу дна потоку. Тому збільшено порядок апроксимацій шуканого розв’язку і показано доцільність такого підходу на різних тестових прикладах.

6.5.1 Математична модель стоку рідини у відкритому псевдопризматичному руслі

Систему координат виберемо так, що координатна лінія x напрямлена вздовж лінії середнього дна, а осі y та z лежать у нормальній до лінії дна площині так, що z напрямлена вертикально (рисунок 6.9).

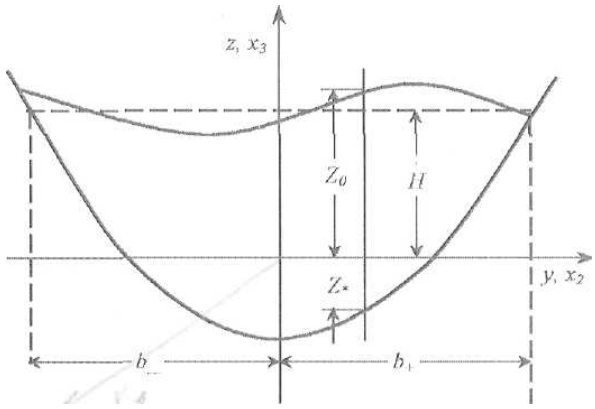


Рисунок 6.9 – Поперечний переріз потоку.

Модель одномірного невстановленого повільно змінного руху описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(UF)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}=0; \\ &\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}U\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\alpha-1}{g}\frac{U}{F}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{U^2}{C^2R}=i, \end{aligned} \tag{6.190}$$

де U–швидкість потоку та F – площа поперечного перерізу потоку; g = 9,8 м/с² – прискорення сили тяжіння; c=const – коефіцієнт Шезі; $i=\sin\delta=const$ – нахил лінії дна; $B=b_-+b_+$ – ширина вільної поверхні; R=const – гідравлічний радіус русла; α– відомий у гідравліці коректив середньої швидкості; $q = q(x;\ t)$ – бічний притік.

Доповнимо ці рівняння початковими умовами

$$U\big|_{t=0}=u_0(x), \qquad F\big|_{t=0}=f_0(x) \quad на\ \left[0,L\right]$$

та крайовими умовами

$$U\left(t,0\right)=0,\ F\left(t,0\right)=0,$$

і отримаємо початково–крайову задачу знаходження невідомих – швидкості потоку U та площі поперечного перерізу F .

6.5.2 Побудова варіаційної задачі

Виберемо простори допустимих функцій $H := L^2(\Omega)$, $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v(0) = 0\}$. Для побудови варіаційної задачі домножимо перше рівняння задачі (6.190) на довільну функцію $\phi \in V$, друге – на $\psi \in V$ і результати проінтегруємо за областю Ω.

Введемо такі білінійні форми

$$a(u, f, \phi) = \int_\Omega u \frac{\partial f}{\partial x} \phi dx \qquad b(u, \phi) = \int_\Omega u \phi dx$$

$$c(u, \phi) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \phi dx \qquad d(u, f, \phi) = \int_\Omega u f \phi dx,$$

а також лінійний оператор

$$l(\phi) = \int_\Omega i \phi dx.$$

Тоді варіаційне формулювання початково–крайової задачі (6.190) запишемо так:

$$\begin{cases} \textit{Задано}: \quad u_0, f_0 \in H, \\ \textit{знайти пару } (u, f) \in L^2(0, T; V \times V) \quad \textit{таку, що}: \\ a(u, f, \phi) + a(f, u, \phi) + b(f', \phi) = 0; \\ \dfrac{1}{g} b(u', \psi) + \dfrac{\alpha}{g} a(u, u, \psi) + \dfrac{1}{B} c(f, \psi) + \dfrac{1}{C^2 R} d(u, u, \psi) - \dfrac{\alpha - 1}{g} d(w, f', \psi) = \langle l, \psi \rangle; \\ b(u(0) - u_0, \phi) = 0, b(f(0) - f_0, \psi) = 0. \end{cases} \tag{6.191}$$

6.5.3 Дискретизація за часовою змінною

Розділимо відрізок часу [0,T] на N_T+1 рівних частин $\left[t_j,t_{j+1}\right]$ завдовжки $\Delta t=t_{j+1}-t_j,\ \ j=0,...,N_T$. На кожному відрізку $\left[t_j,t_{j+1}\right]$ шукаємо розв'язки задачі (6.191). Розв'язки $u(x,t), f(x,t)\in L^2(0,T;V)$ цієї задачі апроксимуємо поліномами вигляду

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x,t)=\left\{1-\omega(t)\right\}u^j(x)+\omega(t)u^{j+1}(x); \\ f_{\Delta t}(x,t)=\left\{1-\omega(t)\right\}f^j(x)+\omega(t)f^{j+1}(x); \\ t\in[t_j,t_{i+1}], j=0,1,...,N_T-1, \omega(t_j,t)=\dfrac{t-t_j}{\Delta t} \end{cases} \tag{6.192}$$

з невідомими функціями $u^j(x),\ f^j(x)\in V_h$.

Для функціонала $l(x,t)\in V_h^1$ задачі (6.191) будемо використовувати апроксимації вигляду

$$l_{\Delta t}(x,t)=l_{j+1/2}=l(t_{j+1/2},x). \tag{6.193}$$

6.5.4 Проекційні рівняння та рекурентна схема

У просторі $L^2(t_j,t_{j+1})$ зі скалярним добутком (.,.) виберемо функції $\xi(t),\quad \eta(t)$ такі, що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\xi(\tau)d\tau\neq 0,\qquad \int_{t_j}^{t_{j+1}}\eta(\tau)d\tau\neq 0$$

і будемо намагатися, щоб нев'язка підстановки апроксимацій (6.192), (6.193) у варіаційне рівняння задачі (6.191) була ортогональна до функцій $\xi(t),\quad \eta(t)$ відносно скалярного добутку на проміжку (t_j,t_{j+1}).

Тоді

$$\begin{cases} b\left(f^{j+1/2},\phi\right)+\Delta t\gamma\left[a\left(u^{j},f^{j+1/2},\phi\right)+a\left(u^{j+1/2},f^{j},\phi\right)+a\left(f^{j+1/2},u^{j},\phi\right)+\right. \\ \qquad\left.+a\left(f^{j},u^{j+1/2},\phi\right)\right]=-a\left(u^{j},f^{j},\phi\right)-a\left(f^{j},u^{j},\phi\right); \\ \dfrac{1}{g}b\left(u^{j+1/2},\psi\right)+\dfrac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left[a\left(u^{j},u^{j+1/2},\psi\right)+a\left(u^{j+1/2},u^{j},\psi\right)\right]+ \\ \qquad+\dfrac{1}{B}\Delta t\beta c\left(f^{j+1/2},\psi\right)+\dfrac{2}{C^{2}R}\Delta t\beta d\left(u^{j},u^{j+1/2},\psi\right)- \\ \qquad-\dfrac{\alpha-1}{g}d(w^{j},f^{j+1/2},\psi)=\left\langle l_{j+1/2},\psi\right\rangle-\dfrac{\alpha}{g}a\left(u^{j},u^{j},\psi\right)- \\ \qquad-\dfrac{1}{B}c\left(f^{j},\psi\right)-\dfrac{1}{C^{2}R}d\left(u^{j},u^{j},\psi\right), \end{cases} \tag{6.194}$$

Позначимо:

$$u^{j}=u^{j}(x),f^{j}=f^{j}(x);\ u^{j+1/2}=u^{j+1/2}(x)=\frac{u^{j+1}(x)-u^{j}(x)}{\Delta t};$$

$$f^{j+1/2}=f^{j+1/2}(x)=\frac{f^{j+1}(x)-f^{j}(x)}{\Delta t}.$$

Коефіцієнти рекурентної схеми визначені за формулами

$$\gamma=\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\omega(\tau)\xi(\tau)d\tau\right)/\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\xi(\tau)d\tau\right),\beta=\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\omega(\tau)\eta(\tau)d\tau\right)/\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\eta(\tau)d\tau\right).$$

Тоді рекурентна схема запишеться у вигляді

$$
\begin{cases}
\textit{Задано}: \quad \Delta t, \omega(t) = const > 0,\ u^j, f^j \in V \times V, \\
\textit{знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in V \times V \quad \textit{такі, що}: \\
b\left(f^{j+1/2}, \phi\right) + \Delta t \gamma \left[a\left(u^j, f^{j+1/2}, \phi\right) + a\left(u^{j+1/2}, f^j, \phi\right) + a\left(f^{j+1/2}, u^j, \phi\right) + \right. \\
\qquad \left. + a\left(f^j, u^{j+1/2}, \phi\right) \right] = -a\left(u^j, f^j, \phi\right) - a\left(f^j, u^j, \phi\right); \\
\frac{1}{g} b\left(u^{j+1/2}, \psi\right) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta \left[a\left(u^j, u^{j+1/2}, \psi\right) + a\left(u^{j+1/2}, u^j, \psi\right) \right] + \\
\qquad + \frac{1}{B} \Delta t \beta c\left(f^{j+1/2}, \psi\right) + \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d\left(u^j, u^{j+1/2}, \psi\right) - \\
\qquad - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \left\langle l_{j+1/2}, \psi \right\rangle - \frac{\alpha}{g} a\left(u^j, u^j, \psi\right) - \\
\qquad - \frac{1}{B} c\left(f^j, \psi\right) - \frac{1}{C^2 R} d\left(u^j, u^j, \psi\right); \\
u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}.
\end{cases}
\tag{6.195}
$$

Схема передбачає, що початковий розв’язок (u^0, f^0) визначений початковими умовами.

6.5.5 Дискретизація варіаційної задачі за просторовою змінною

Виберемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій V_h з простору V з властивостями $\dim V_h \xrightarrow[h \to 0]{} \infty$. Тоді $\left(u_h, f_h\right)$ – напівдискретна апроксимація розв’язку *(u, f)*.

Відрізок [*0,L*] розділимо за допомогою послідовності рівновіддалених вузлів: $x_i = i \cdot h, i = 0, ..., N, h = \dfrac{L}{N}$ на N скінченних відрізків $\left[x_i, x_{i+1}\right], i = 0, 1, ..., N-1$.

Виберемо базис $\{\phi_j\}_{j=1}^{N}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{M}$ з простору апроксимацій V_h. Неперервні кусково–визначені базисні функції $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ з простору V_h вибираємо у вигляді лінійних поліномів, а $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{M}$ – у вигляді квадратичних функцій.

Задачу знаходження розв'язку варіаційної задачі за дискретизацією Гальоркіна формулюють так:

Задано, знайти пару таку, що:

$$\begin{cases} \textit{Задано}: \quad u_0, f_0 \in V, \\ \textit{знайти пару } (u_h, f_h) \in L^2(0,T; V_h \times V_h) \quad \textit{таку, що}: \\ b\left(f_h^{j+1/2}, \phi\right) + \Delta t \gamma \left[a\left(u_h^j, f_h^{j+1/2}, \phi\right) + a\left(u_h^{j+1/2}, f_h^j, \phi\right) + a\left(f_h^{j+1/2}, u_h^j, \phi\right) + \right. \\ \qquad \left. + a\left(f_h^j, u_h^{j+1/2}, \phi\right) \right] = -a\left(u_h^j, f_h^j, \phi\right) - a\left(f_h^j, u_h^j, \phi\right); \\ \frac{1}{g} b\left(u_h^{j+1/2}, \psi\right) + \frac{\alpha}{g} \Delta t \beta \left[a\left(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi\right) + a\left(u_h^{j+1/2}, u_h^j, \psi\right) \right] + \frac{1}{B} \Delta t \beta c\left(f_h^{j+1/2}, \psi\right) + \\ \qquad + \frac{2}{C^2 R} \Delta t \beta d\left(u_h^j, u_h^{j+1/2}, \psi\right) - \frac{\alpha - 1}{g} d(w^j, f^{j+1/2}, \psi) = \\ \qquad = \left\langle l_{j+1/2}, \psi \right\rangle - \frac{\alpha}{g} a\left(u_h^j, u_h^j, \psi\right) - \frac{1}{B} c\left(f_h^j, \psi\right) - \frac{1}{C^2 R} d\left(u_h^j, u_h^j, \psi\right); \\ u_h^{j+1} = u_h^j + \Delta t u_h^{j+1/2}, f_h^{j+1} = f_h^j + \Delta t f_h^{j+1/2}. \end{cases} \tag{6.196}$$

Визначимо функції

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^{M} U_i^j \psi_i(x), \quad f_h^j(x) = \sum_{i=1}^{N} F_i^j \phi_i(x) \tag{6.197}$$

як розклад за функціями базису $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}, \{\psi_i\}_{i=1}^{M}$ і невідомими коефіцієнтами $U = \{U_i\}_{i=1}^{M}, F = \{F_i\}_{i=1}^{N}$.

З використанням матричних позначень рекурентна схема (6.195) допускає еквівалентне зображення:

$$\begin{cases} \textit{Задано}: \quad \Delta t, \omega(t) = const > 0, \quad u^j, f^j \in R^n, \\ \textit{знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in R^n \quad \textit{такі, що}: \\ \left[B1 + \Delta t\gamma A1\left(u^j\right) + \Delta t\gamma A2\left(u^j\right) \right] f^{j+1/2} + \left[\Delta t\gamma A3\left(f^j\right) + \Delta t\gamma A4\left(f^j\right) \right] u^{j+1/2} = \\ \qquad = -AP1\left(u^j, f^j\right) - AP2\left(f^j, u^j\right); \\ \left[\frac{1}{B}\Delta t\beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j) \right] f^{j+1/2} + \left[\frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left(A5\left(u^j\right) + A6\left(u^j\right)\right) + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{C^2 R} 2\Delta t\beta D1(u^j) \right] u^{j+1/2} = L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \\ \qquad - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j); \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{cases} \tag{6.198}$$

З накладанням матриць отримаємо такий вигляд рекурентної схеми:

$$\begin{cases} \textit{Задано}: \quad \Delta t, \gamma, \beta = const > 0; \quad u^j, f^j \in R^n, \\ \textit{знайти } u^{j+1}, f^{j+1} \in R^n \quad \textit{такі, що}: \\ \begin{pmatrix} B1 + \Delta t\gamma A1\left(u^j\right) + \Delta t\gamma A2\left(u^j\right) & \Delta t\gamma A3\left(f^j\right) + \Delta t\gamma A4\left(f^j\right) \\ \frac{1}{B}\Delta t\beta C + \frac{\alpha - 1}{g} D2(w^j) & \frac{1}{g} B2 + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta\left(A5\left(u^j\right) + A6\left(u^j\right)\right) + \frac{1}{C^2 R} 2\Delta t\beta D1(u^j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{j+1/2} \\ u^{j+1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -AP1\left(u^j, f^j\right) - AP2\left(f^j, u^j\right) \\ L_{j+1/2} - \frac{\alpha}{g} AP3(u^j, u^j) - \frac{1}{B} CP(f^j) - \frac{1}{C^2 R} DP(u^j, u^j) \end{pmatrix}; \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t u^{j+1/2}, f^{j+1} = f^j + \Delta t f^{j+1/2}. \end{cases} \tag{6.199}$$

Матриця системи рівнянь на двох скінченних елементах має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} A_{00} & B_{00} & B_{01} & A_{01} & B_{02} & & & \\ C_{00} & D_{00} & D_{01} & C_{01} & D_{02} & & & \\ C_{10} & D_{10} & D_{11} & C_{11} & D_{12} & & & \\ A_{10} & B_{10} & B_{11} & A_{11}+A_{20} & B_{12}+B_{20} & B_{21} & A_{21} & B_{22} \\ C_{20} & D_{20} & D_{21} & C_{21}+C_{30} & D_{22}+D_{30} & D_{31} & C_{31} & D_{32} \\ & & & C_{40} & D_{40} & D_{41} & C_{41} & D_{42} \\ & & & A_{30} & B_{30} & B_{31} & A_{31} & B_{32} \\ & & & C_{50} & D_{50} & D_{51} & C_{51} & D_{52} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_0 \\ u_0 \\ u_{1/2} \\ f_1 \\ u_1 \\ u_{3/2} \\ f_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ m_2 \\ l_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ l_3 \\ m_5 \end{bmatrix}$$

де

$$A_{ij} = b1_{ij} + \Delta t\gamma\, a1_{ij}(u^k) + \Delta t\gamma\, a2_{ij}(u^k); \quad B_{ij} = \Delta t\gamma\, a3_{ij}(f^k) + \Delta t\gamma\, a4_{ij}(f^k);$$

$$C_{ij} = \frac{1}{B}\Delta t\beta c_{ij} + \frac{\alpha - 1}{g} d2_{ij}(w^k);$$

$$D_{ij} = \frac{1}{g} b2_{ij} + \frac{\alpha}{g}\Delta t\beta(a5_{ij}(u^k) + a6_{ij}(u^k)) + \frac{1}{C^2 R} 2\Delta t\beta\, d1_{ij}(u^k).$$

6.5.6 Тестові приклади

Приклад 1. Розглянемо рух рідини на прикладі зі складним рельєфом дна зображеним на рисунку 6.10.

Для системи рівнянь записаної вище вибрані такі початкові та крайові умови:

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad f\big|_{t=0} = x^2;$$
$$u(t,0) = 0, \quad f(t,0) = 0.$$

Задані наступні вхідні параметри: коректив кількості руху α=1, довжина русла $x \in [0,1]$, $0 \le t \le 1$, $\Delta t = 0.0001$, ширина русла B=8, прискорення сили тяжіння g=9.8, коефіцієнт Шезі C=60, гідравлічний радіус русла R=1.

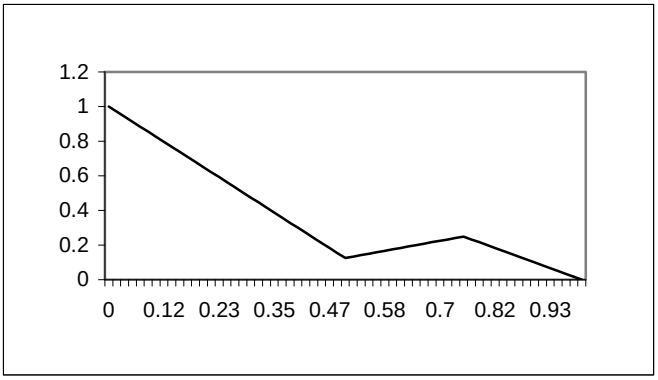


Рисунок 6.10 – Лінія дна потоку зі зміним кутом нахилу.

При розв’язуванні системи рівнянь (6.191) для апроксимації невідомих змінних використовувались лінійні та квадратичні апроксимації (6.197). Покажемо отримані результати обчислень на графіках нижче.

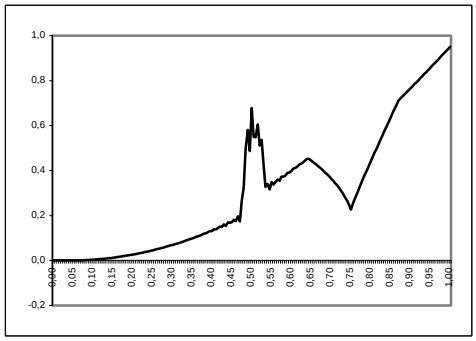


Рисунок 6.11 – Площа поперечного перерізу потоку (лінійні апроксимації 1000СЕ).

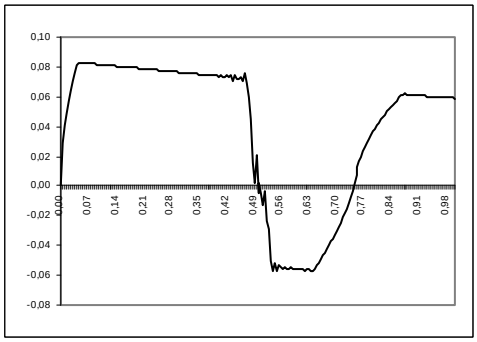


Рисунок 6.12 – Швидкість потоку (лінійні апроксимації 1000СЕ).

В результаті використання кусково–лінійних апроксимацій на графіках розв’язків появляються “осциляції”, яких не можливо уникнути навіть при збільшенні кількості скінченних елементів. Покажемо, як вплине на результат підвищення порядку апроксимацій шуканих розв’язків базисними функціями вищих порядків.

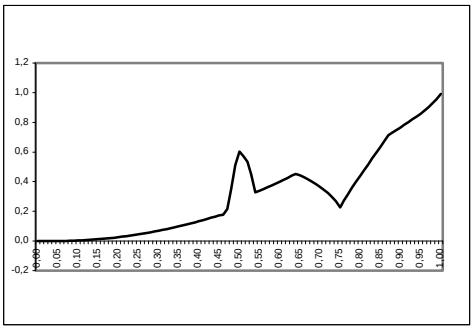


Рисунок 6.13 – Площа поперечного перерізу потоку (квадратичні апроксимації 500СЕ).

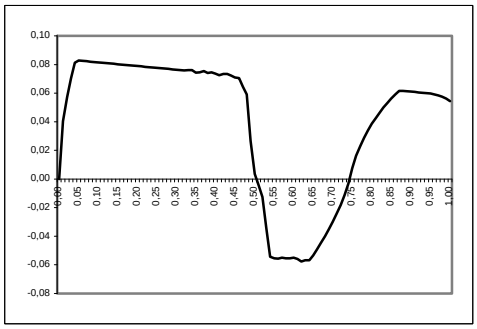


Рисунок 6.14 – Швидкість потоку.

Як видно з рисунку 6.13 і рисунку 6.14, при квадратичних апроксимаціях нам вдалося отримати гладкі (без "осциляцій") графіки розв'язків, при цьому не збільшивши кількість проміжків розбиття відрізка. Якщо виясняти природу поведінки розв’язків, то існує припущення, що вона залежить від різких змін рельєфу лінії середнього дна русла. Ми бачимо з рисунку 6.10 , що в точках x=0.5; 0.75 відбувається раптова зміна лінії русла. Наступний приклад

демонструє, що осциляції ми отримаємо для лінійних апроксимацій і у випадку плавних переходів лінії дна.

Приклад 2. Рельєф лінії дна апроксимуємо кривою, графік якої зображено на рисунку 6.15. Задані наступні вхідні дані: α=1, $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 2$, $\Delta t = 0.007$, B=8, g=9.8, C=60, R=1.

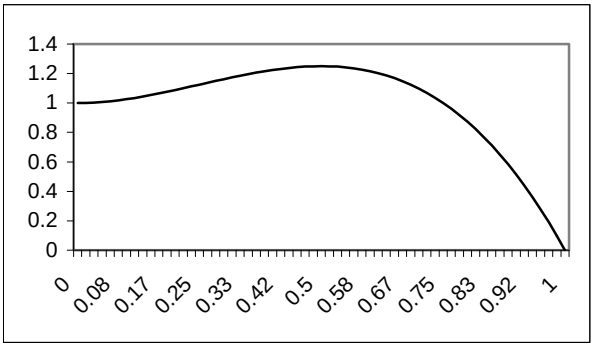


Рисунок 6.15 – Лінія дна потоку з плавним переходом кута нахилу.

Графіки зміни площі поперечного перерізу та швидкості потоку в часі зображені на рисунках 6.16–6.19. Як і в першому прикладі при використанні лінійних апроксимацій у розв’язуванні системи рівнянь на складних рельєфах виникають осциляції, які видно на рисунках 6.16, 6.17.

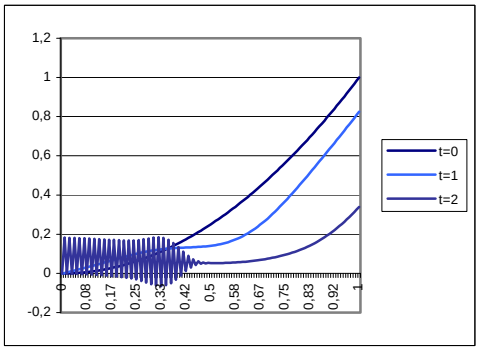


Рисунок 6.16 – Площа поперечного перерізу потоку (лінійні апроксимації).

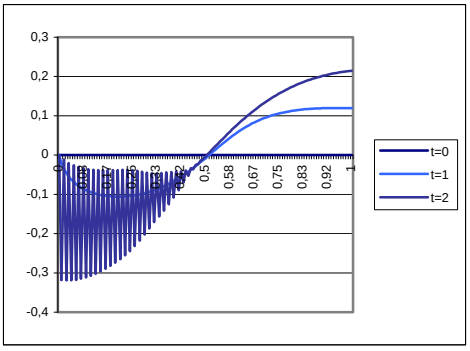


Рисунок 6.17 – Швидкість потоку (лінійні апроксимації).

Зміни площі поперечного перерізу потоку та швидкості потоку з використанням кусково–квадратичних апроксимацій при розв’язуванні системи рівнянь (6.190) зображені на графіках нижче.

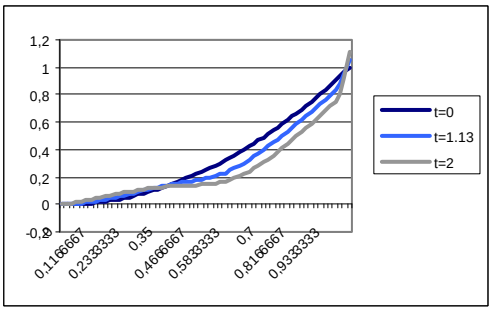


Рисунок 6.18 – Площа поперечного перерізу потоку.

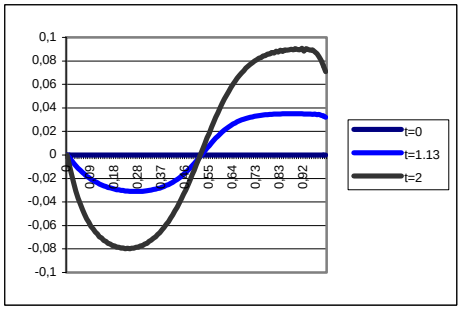


Рисунок 6.19 – Швидкість потоку.

Отже, на прикладах 1 та 2 проілюстровано рух рідини на складних рельєфах, а також проблеми які виникають при розв’язуванні системи рівнянь у

випадку використання лінійних апроксимацій. Для уникнення осциляцій у розв'язках зображених на рисунках 6.11–6.12, 6.16–6.17 було підвищено порядок апроксимаційних схем до другого, після чого були отримані гладкі графіки зміни площі поперечного перерізу та швидкості потоку (рисунки 6.13–6.14, 6.18–6.19). Слід відмітити, що були використані квадратичні апроксимації лише для наближення невідомої функції швидкості потоку, а для площі поперечного перерізу залишився лінійний порядок апроксимації. Цього виявилося достатньо для знаходження розв'язків та уникнення паразитичних осциляцій.

6.5.7 Висновки

В даному підрозділі 6.5 розглянуто задачу математичного моделювання руслового стоку рідини у відкритому псевдопризматичному руслі. Сформульовано початково–крайову задачу руху нестисливої рідини у відкритому руслі та варіаційну задачу, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. Виконано напівдискретизацію варіаційної задачі в часі та дискретизацію за просторовою змінною з використанням кусково–лінійних та кусково–квадратичних базисних функцій.

Отримані розв'язки задачі апробовано на тестових прикладах зі складним рельєфом дна русла. Показано доцільність підвищення порядку апроксимаційних схем для просторової змінної при наближенні швидкості потоку. Наведені приклади підтвердили використання такого підходу для потоків з змінним нахилом лінії середнього дна, що характерно в більшості для гірських та напівгірських рік.

ВИСНОВКИ

Для сингулярно збурених крайових задач механіки та фізики розвинуто високоточні схеми методу скінченних елементів, здатні якісно відтворювати структури примежових та внутрішніх шарів шуканих розв'язків з наперед гарантованою точністю.

З цією метою для лінійних, квадратичних та кубічних апроксимацій МСЕ сконструйовано частинами квадратичні та кубічні апостеріорні оцінювачі похибок, знаходження яких вимагає обчислень послідовним переглядом елементів тріангуляції.

Побудова *h*–адаптивних схем МСЕ ґрунтується на обчисленні розподілу апостеріорних оцінювачів похибок на скінченних елементах та критеріях системи керування структурою розрахункових тріангуляцій, здатної відшукати апроксимації з наперед заданою точністю в природних нормах розглядуваної задачі.

Ефективність та надійність запропонованих *h*–адаптивних схем ілюструється низкою розв'язків одно– та двовимірних задач міграції домішок, п'єзоелектрики тощо.

В роботі, за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь побудовано чисельні розв'язки для еволюційних задач осесиметричного слошингу; обернених граничних задач теплопровідності в частково–необмежених областях; проведено дослідження ітераційно–різницевих методів розв'язування відповідних нелінійних рівнянь. Для деяких з вище перелічених задач побудовано та досліджено відповідні наближені схеми розв'язування інтегральних рівнянь із різним характером особливостей в ядрах. Запроваджено чисельно–аналітичний метод до розв'язування суттєво просторових задач електронної оптики та теорії тріщин на основі методу інтегральних рівнянь, розв'язування відповідних одновимірних та двовимірних інтегральних рівнянь

теорії потенціалу із різними особливостями в ядрах на визначених класах контурів і поверхонь.

Досліджено методи розв'язування просторових задач електростатики; проаналізовано методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь та декомпозиція складних областей; досліджено наближені схеми розв'язування відповідних інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.

В роботі запропонований новий підхід для дослідження різницевого методу з порядком $1+\sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних рівнянь в банахових просторах. Визначені поділені різниці для типових нелінійних операторів і побудувано деякі спеціальні алгоритми для рівнянь з цими операторами. Доведені теореми про локальну і напівлокальну збіжність методів до локально єдиного розв'язку при умовах Гьольдера для поділених різниць першого порядку нелінійного оператора.

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями, фільтрація та русловий стік), прогнозування забруднення ґрунтів та атмосфери (задачі адвекції–дифузії–реакції), медична томографія та стоматологія (тривимірні задачі механіки анізотропних пружних тіл), корозія металів (обернені граничні задачі нестаціонарної теплопровідності), пєзоелектричні актуатори і сенсори, електронно–оптичні системи генерування і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмологія (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями), прогнозування забруднення грунтів та атмосфери (еволюційні задачі адвекції–дифузії), медична томографія та корозія металів (обернені граничні задачі нестаціонарної теплопровідності), розрахунок електронно–оптичних систем для генерації і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмології (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Поставлені у науково–дослідній роботі завдання виконано повністю, що відображено в 42 публікаціях у вітчизняних та міжнародних наукових журналах з прикладної математики та чисельного аналізу, а також представлено в 49 доповідях на наукових конференціях. Протягом звітного періоду за тематикою науково–дослідної роботи захищено захищено дві дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук.

П Е Р Е Л І К П О С И Л А Н Ь

1. Hsiao G. C. Boundary integral equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland. – New York : Springer–Verlag, 2008. – 640 p.
2. Kress R. Linear integral equations / R. Kress. – New York – Berlin – Heidelberg : Springer–Verlag, 1999. – 365 p.
3. Duffy D. G. Green's function with application / D. G. Duffy. – Boca Raton – London – New York – Washington : Chapman & Hall/CRC, 2001. – 404 p.
4. Chapko R. On the numerical solution of direct and inverse problems for the heat equation in a semi–infinite region // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1999. – 108. – P. 41–55.
5. Chapko R. An alternanting boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in semi–infinite regions / R. Chapko, B. T. Johansson // Inverce Problems and Imaging. – 2008. – 2. – P. 317–333.
6. Chapko R. On a hybrid method for shape reconstruction of buried object in an elastostatic half plane / R. Chapko // Inverce Problems and Imaging. – 2009. – 3. – P. 199–210.
7. Гавеля С. П. Об обном способе построения матриц Грина для сочлененных оболочек / С. П. Гавеля // ДАН УССР. Сер. А, 1969. – № 12. – С. 1107–1111.
8. Михаськів В. В. Динамічні напруження у складеному тілі з круговою тріщиною за ковзного контакту його компонент / В. В. Михаськів, В. З. Станкевич, Є. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2010. – 53. – С. 80–87.
9. Процюк Б. В. Функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально–ізотропних тіл / Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2000. – 43. – С. 80–88.
10. Melnikov Y. A. Influence functions and matrices / Y. A. Melnikov. – New York – Basel : Marcel Dekker, 1998. – 456 p.

11. Ganesh M. A high–order algorithm for obstacle scattering in three dimensions / M. Ganesh, I. G. Graham // J. Comput. Phys. – 2004. – 198. – P. 211–242.
12. Graham I. G. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in R^3 / I. G. Graham, I. H. Sloan // Numer. Math. – 2002. – 92. – P. 289–323.
13. Ivanyshyn O. Identification of sound–soft 3D obstacles from phaseless data / O. Ivanyshyn, R. Kress // Inverse Problems and Imaging. – 2010. – 4. – P. 131–149.
14. Wienert L. Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im R^3. Dissertation / L. Wienert. – Göttingen, 1990. PhD thesis, University of Göttingen.
15. Colton D. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory / D. Colton, R. Kress. – New York : Springer–Verlag, 1993.
16. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
17. Stenger F. Numerical methods based on sinc and analytic functions / F. Stenger. – New York : Springer–Verlag, 1993.
18. Chapko R. S. Rothe's Method for the Heat Equation and Boundary Integral Equations / R. S. Chapko, R. J. Kress. – Integral Equations Appl. – 9, 1997. – p. 47–69.
19. Chapko R. S. On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double–connected planar domain / R. S. Chapko, V. G. Vavrychuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – No 97, 2009. – P. 26–38.
20. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М., 1972.
21. Polyanin A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / Polyanin A. D. – Chapman & Hall/CRC, 2002.

22. Chapko R. S. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind / R. Chapko, R. Kress // In Agarwal, ed. : World Scienti_c Series in Applicable Analysis. – Vol. 2. Contributions in Numerical Mathematics. – 1993. – P. 127.
23. Chapko R. On a boundary integral equation method for numerical construction of harmonic functions in three–dimensional multilayer domains with a bounded inclusion / R. Chapko, B. T. Johansson, O. Protsyuk // Advances in Boundary Integral Methods – Proceedings of the Eight UK Conference on Boundary Integral Methods, (Ed. D. Lesnic), University of Leeds, UK. – 2011. – P. 88–94.
24. Chapko R. On an indirect integral equation approach for stationary heat transfer in semi–infinite layered domains in R^3 with cavities / R. Chapko, B. T. Johansson, O. Protsyuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2011. – 105. – P. 4–18.
25. Sybil Yu. M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschtz surface / Yu. M. Sybil // Матем. студії. – 1997. – Т. 8. № 2. – С. 79–96.
26. Смагин С. И. Решение трехмерной задачи диффракции электромагнитных волн методом потенциалов / С. И. Смагин // Численные методы в интерпретации геофизических наблюдений. – Новосибирск, 1980. – С. 109–124.
27. Полищук А. Д. О численном решении интегральных уравнений теории потенциала / А. Д. Полищук // Препринт № 743. – Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. – 1987. – 26 с. Os#27(3)
28. Захаров Е. В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 1. – С. 40–58. Os#28(4)
29. Мочурад Л. І. Дослідження наближених розв’язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого

порядку / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму «Проблеми оптимізації обчислень», 24–29.09.2009. смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В. М. Глушкова НАНУ. – Київ, 2009. – С. 117–122.

30. Morrison J. A. Charge singularity at the corner of a flat plate / J. A. Morrison, J. A. Lewis // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – Vol. 31. – No 2. – P. 233–250.
31. Mochurad L. I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, B. A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8. – № 2. – P. 149–156.
32. Eriksson K. Introduction to Adaptive Method for Differential Equation / K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson // Acta Numerica. – 1995. – P. 1–54.
33. Garasym Ya. S. On numerical appoach to solve some three–dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method / Ya. S. Garasym, B. A. Ostudin // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2003. – № 1 (88). – С. 17–28.
34. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с. Mo#34(1)
35. Mochurad L. I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, B. A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149–156. Mo#35(2)
36. Hayashi Y. The Dirichlet problem for the two–dimensional Helmholts equation for an open boundary / Y. Hayashi // J. Math. Anal. and Appl. – 1973. – Vol. 44. – P. 489–530. Mo#36(3)
37. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с. Mo#37(4)
38. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : Москва, 1960. – 299 с.

39. Серр Ж.–П. Линейные представления конечных групп / Ж.–П. Серр. – М. : РХД, 2003. – 132 с.
40. Захаров Е. В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1992. – Т. 2, № 1. – С. 40−58.
41. Мочурад Л. І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Збірник наукових праць математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Технічні науки. – 2009. – Вип. 2. – 180 с.
42. Захаров Е. В. Метод численного решения интегральных уравнений в краевых задачах с абелевой группой симметрий конечного порядка / Е. В. Захаров, С. И. Сафронов, Р. П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1990. – Т. 30, № 11. – С. 1661–1674. Os#42
43. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с. Os#43
44. Atkinson K. The numerical solution of first–kind logarithmic–kernel integral equations on smooth open arcs / K. Atkinson, I. H. Sloan // Mathematics of Computation. – 1991. – Vol. 56, № 193. – P. 119–139. Os#44
45. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с. Os#45
46. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики / В. П. Ильин. – М. : Наука. Главная редакция физико–математической литератури, 1985. – 336 с. Os#46
47. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М., 1975.
48. Шахно С. М. Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, № 1. – С. 79–86.

49. Шахно С. М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / С. М. Шахно // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 296–305.
50. Argyros I. K. On an Algorithm for Solving Nonlinear Operator Equation / I. K. Argyros // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, № 1. – P. 83–92.
51. Hernandez M. A. The Secant method and divided differences Hölder continuous / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – Vol. 124. – P. 139–149.
52. Шахно С. М. Двопараметричні методи типу хорд для розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно, С. І. Граб, Г. П. Ярмола // Вісн. Львів. уні–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип 15. – С. 117–127. Sh#53(7)
53. Шахно С. М. Застосування двопараметричних різницевих методів для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // Вісн. Львів. уні–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2010. – Вип 16. – С. 117–127. Sh#54(8)
54. Amat S. A class of quasi–Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces / S. Amat, S. Busquier, V. Candella // J. Comput. Appl. Math. – 2002. – Vol. 149. – P. 397–406. Sh#57(11)
55. Chen J. Convergence analysis of the secant type method / J. Chen, Z. Shen // AMC (Appl. Math. Comp.). – 2007. – Vol. 188. – P. 514–524. Sh#59(13)
56. Курчатов В. А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений / В. А. Курчатов // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. – 1971. – Т. 198, № 3. – С. 524–526.
57. Wang X. Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space / X. Wang // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 123–134.

58. Potra F.–A. On an iterative algorithm of order 1,839... for solving nonlinear equations / F.–A. Potra // 1984. – 85. – Vol. 7, № 1. – P. 75–106.
59. Shakhno S. M. On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations / S. M. Shakhno // PAMM – Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – Vol. 4. – P. 650–651.
60. Vaarmann O. High order iterative methods for decomposition–coordination problems / O. Vaarmann // Technological and economic developmeny of economy. – 2006. – Vol. 12, № 1. – P. 55–61.
61. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь / М. Я. Бартіш // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 5. – С. 387–391.
62. Laasonen P. Ein überquadratisch konvergenter iterativer Algorithmu / P. Laasonen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. – 1969.
63. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations / J. F. Traub. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, 1964.
64. Werner W. Some supplementary results on the $1+\sqrt{2}$ order method for the solution of nonlinear equations / W. Werner // Numer. Math. – 1982. – Vol. 38. – P. 383–392.
65. Werner W. Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung / W. Werner // Numer. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 333–342.
66. Бартіш М. Я. Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь / М. Я. Бартіш, Ю. М. Щербина // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579–582.
67. Shakhno S. M. On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations / S. M. Shakhno // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 231. – P. 222–235.

68. Lukšan L. Inexact Trust Region Method for Large Sparse Systems of Nonlinear Equations / L. Lukšan // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1994. – Vol. 81. – P. 569–590.
69. Ульм С. Алгорифмы обобщенного метода Стеффенсена / С. Ульм // Известия АН Эстонской ССР. Серия физ.–мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14. – № 3. – С. 435–443.
70. Никулин В. Л. О сходимости комбинированного варианта метода Ньютона–Канторовича и его применении для решения нелинейных операторных уравнений / В. Л. Никулин // Сборник по вычислительной математике. – Издательство Иркутского государственного педагогического института. – 1973. – С. 46–57. Sh#50(4)
71. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen I, II / J. W. Schmidt // Z. Angew. Math. Mech. – 1963. V. 43. – P. 1–8, 97–110. Sh#64(18)
72. Borovyy R. A posteriori error estimators of finite elements method for advection–diffusion–reaction problems : linear approximations on triangles / R. V.Borovyy, O. Y. Ostapov, G. A. Shynkarenko // 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics : Short Papers. – Warsaw :Warsaw University of TechnologyPress. – 2011. – P. 143–144.
73. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimator for diffusion–advection–reaction boundary value problems: piecewise linear approximations on triangles / O. Yu. Ostapov and H. A. Shynakarenko // J. Numer. Appl. Math. – No. 2(105). – 2011. – P. 111–123.
74. Абрамов Є. Кусково–лінійні апроксимації *h*–адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львівс. уні–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3–18.

75. Квасниця Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
76. Квасниця Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. уні–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 162–174.
77. Козаревська Ю. С. Аналіз критеріїв подібності та чутливості розв'язків задач мігрування субстанції до збурень її коефіцієнтів / Ю. С. Козаревська, Г. А. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 116–125.
78. Козаревська Ю. Регуляризація чисельних розв'язків задач міграції домішок: *h*–адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. / Ю. Козаревська, Г. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 153–164.
79. Abramov Y. *h*–adaptive finite element method for onedimensional boundary value problems, 18th Internat / Y. Abramov, H. Shynkarenko // Conf. on Computer Methods in Mechanics CMM 2009 : Short papers, 2009. – P. 107–109.
80. Chaban F. Constructing of h–adaptive finite element method for piezoelectricity problem / F. Chaban, H. Shynkarenko // Журнал обчисл. прикл. матем. – 2009. – № 1 (97), С. 1–9.
81. Chaban F. The construction and analysis of a posteriori error estimators for piezoelectricity stationary problems / F. Chaban, H. Shynkarenko // Operator Theory : Advances and Application, 2009. – Vol. 191. – P. 291–304.
82. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – Москва : Наука, 1977. – 440 с.
83. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

84. Шинкаренко Г. А. Проекційно–сіткові методи розв'язування початково–крайових задач / Г. А. Шинкаренко. – Київ : УМКВО, 1991. – 88 с.
85. Bermudez A. Two discretization schemes for a time–domain dissipative acoustics problem / A. Bermudez , R. Rodrigues, D. Santamarina // Math. Models and Methods Appl. Sci. – 2006. – Vol. 16, Issue 10. – P. 1559–1598.
86. Bruneau M. Fundamentals of acoustics / M. Bruneau; T. Scelo. – London : ISTE Ltd, 2006. – P. 637.
87. Pierce A. D. Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications / A. D. Pierce. – New York : ASA through AIP, 1991. – P. 678.
88. Springer Handbook of Acoustics / T. D. Rossing, ed. – New York : Springer, 2007. – P. 1036.
89. Самарский А. А. Численные методи решения задач конвекции–диффузии / П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский. – Москва : Эдиториал, 1999. – 248 с.
90. Фундак О. Барицентричне подання базисних функцій просторів апроксимацій Рав'яра–Тома / О. Фундак, Г. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 102–114.
91. Остудін Б. А. Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці / Б. А. Остудін, Г. А. Шинкаренко. – Львів : Світ поліграфії, 1998. – 184 с.
92. Якимчук Ю. П. Про адаптивну апроксимацію функцій однієї змінної методом найменших квадратів / Ю. П. Якимчук // XII Всеукр. (VII Міжнарод.) Студент. Конф. Приклад. Матем. Інформ. : Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 287–288.
93. Якимчук Ю. П. Метод найменших квадратів для числового розв'язування крайових задач / Ю. П. Якимчук // XIV Всеукр. (VIIII Міжнарод.) Студент. Конф. Прикл. Матем. Інформ. : Тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 261–263.
94. Bochev P. B. Least–Squares Finite Element Methods / P. B. Bochev // Springer, 2008. – 660 p.

95. Flaherty J. E. Finite Element Analysis / J. E. Flaherty. – New York : Troy, 2000. – 302 p.
96. Jiang B. The Least–Squares Finite Element Method / Jiang B. – Shpringer, 1998. – P. 418.
97. Raviart P. A. A mixed finite element method for second order elliptic problems / P. A. Raviart, J. M. Thomas // Lect. Notes Math. – 1977. – Vol. 606. – P. 292–315.
98. Kariya T. Generalized Least Squares / T. Kariya, H. Kurata. – Willey, 2004. – 307 p.
99. Zienkiewicz O. C. The finite element method : Its basis and fundamentals. Sixth edition / O. C. Zienkiewicz. – Barcelona, 2005. – 798 p.
100. Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами коэффициентов с использованием методов хеширования. – Режим доступу : http://www.elsevier.com/.
101. A Two–Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. – Available from : http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html.
102. Данько О. І. Чисельне дослідження одновимірних задач п’єзоелектрики / О. І. Данько, Г. А. Шинкаренко // Вісн. Львів. уні–ту. Сер. мех.–мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 17–25.
103. Шинкаренко Г. А. Проекционно–сеточные аппроксимации для вариационных задач пиро–электричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач / Г. А. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 2. – С. 317–325.
104. Чабан Ф. Числове моделювання взаємодії механічного й електричного полів у п'єзоелектрику / Ф. Чабан // Фіз.–мат. моделювання та інформаційні тех. – № 12. – 2010. – С. 170–179.
105. Rahman, S. A finite element method for modelling electromechanical wave propagation in anisotropic piezoelectric media / S. Rahman, H. P. Langtangen,

C. H. W. Barnes // Communication in computational physics. – 2008. – Vol. 2, No 2. – P. 271–292.

106. Жарий О. Ю. Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко. – Київ : Вища школа, 1989. – 184 с.

107. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1986. – 159 с.

108. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – Москва : Наука, 1988. – 472 с.

109. Чабан Ф. Розрахунок енергетичних характеристик п'єзоелектричних перетворювачів методом скінченних елементів з оцінювачем похибок / Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур. – Львів, 2007. – С. 210–213.

110. Chaban F. Finite element method approximations for the boundary value problems of piezoelectricity / F. Chaban, H. Shynkarenko // Modern Analysis and Application. Book of abstracts. – Odessa, 2007. – P. 32–33.

111. Шульга Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н .А. Шульга, А. М. Болкисев. – Київ : Наук. Думка, 1989. – 228 с.

112. Шинкаренко Г. А. Проекционно–сеточные аппроксимации для вариационных задач пиро–электричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г. А. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1252–1260.

113. Бернакевич І. Є. Дослідження стійкої рівноваги тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення / І. Є. Бернакевич, П. П. Вагін, І. Я. Шот // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 162–168.

114. Вагін П. П. Нелінійне деформування багатошарових оболонок. Постановка задачі / П. П. Вагін, Н. В. Іванова; ЛНУ ім. Івана Франка. – Львів, 1996. – 27 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.1996, № 285. – Ук96.

115. Вагін П. П. Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.

116. Вагін П. П. Аналіз напружено–деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення / П. П. Вагін, І. Я. Шот // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. – С. 135–147.

117. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – Москва : Наука, 1967. – 984 с.

118. Галимов К. З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К. З. Галимов. – Казань : Изд–во Казан. ун–та, 1977. – 211 с.

119. Григоренко Я. М. Численно–аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – Киев : Академпериодика, 2006. – 472 с.

120. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Москва–Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 211 с.

121. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс. – Рига : Зинатне, 1988. – 284 с.

122. Ciarlet P. G. Mathematical elasticity. Vol. III : Theory of Shells. / P. G. Ciarlet. – Amsterdam : North–Holland, 2000. – 666 p.

123. Libai A. The nonlinear theory of elastic shells / A. Libai, J. G. Simmonds. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.

124. Vandana K. L. Finite Element Method – Perio–Endo Concept / K. L. Vandana, M. Kartik // Endodontology. – 2004. – Vol. 16(2). – P. 38–41.

125. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method, Vol. 1 : The Basis, fifth ed. / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford : Butterworth–Heinemann. – 2000. – 707 p.

126. Provatidis C. G. A Comparative FEM–study of Tooth Mobility Using Isotropic and Anisotropic Models of the Periodontal Ligament / C. G. Provatidis et al. // Med Eng Phys. – 2000. – Vol. 22(5). – P. 359–370.

127. Гризодуб В. И. Основные биомеханические характеристики тканей пародонта / В. И. Гризодуб, А. Н. Чуйко, Н. Ю. Бахуринский // Вісник стоматології. – 2001. – № 1. – С. 59–65.

128. Лещук С. Тестування нової технології зубного протезування методами комп'ютерного моделювання / С. Лещук, В. Вовк // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2005. – Вип. 6. – С. 166–177.

129. Мандзюк Т. До моделювання біомеханічних конструкцій з м'якими прошарками / Т. Мандзюк, В. Вовк // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2011. – Вип. 17. – С. 85–93.

130. Мандзюк Т. Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології / Т. Мандзюк, В. Вовк // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 105–122.

131. Матвійчук О. Я. Некаріозні пришийкові ураження як наслідок функціональних зубо–щелепових патологій : автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. мед. наук. / О. Я. Матвійчук – Львів, 1997. – 16 с.

132. Наумович С. А. Визуализация полей напряжений в периодонте при действии произвольной силы / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский, П. П. Кожич. – Науково–дослідна робота БДМУ, 1999. – 2003.

133. Чуйко А. Н. О роли и возможностях биомеханического анализа в имплантологии / А. Н. Чуйко, В. Е. Вовк // Стоматолог. – 2004. – № 7. – С. 32–34.

134. Pavlenko N. CO–activator model for reconstructing Pt(100) surfaces : local microstructure and chemical turbulence / N. Pavlenko // Phys. Rev. – E 77, 026203 (2008). – 10 p.

135. Вовк О. В. Проблеми застосування методу скінченних елементів до аналізу задач конвекції–дифузії–реакції / О. В. Вовк // XI Всеукраїнська (VI міжнародна) СНКПМІ, 2008. – С. 56.

136. Вовк О. В. Чисельний аналіз моделі процесу окиснення чадного газу з реконструкцією поверхні Pt(100) / О. В. Вовк // XII Всеукраїнська (VII міжнародна) СНКПМІ, 2009. – С. 58.

137. Гачкевич О. Числове розв’язування нелінійних задач перенесення зарядів у напівпровідникових структурах / О. Гачкевич, О. Смірнов, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – Вип. 10. – 2005. – С. 98–110.

138. Куркина Е. С. Математическое моделирование автоколебаний скорости реакций окисления окиси углерода на металлических катализаторах / Е. С. Куркина, С. М. Макарова, М. М. Слинько // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, N. 1. – С. 14–26.

139. Макеев А. Г. Автоколебания скорости гетерогенной каталитической реакции : сравнение стохастического и детерминистического подходов к моделированию / А. Г. Макеев, Н. Л. Семендяєва // Математическое моделирование. – 1996. – Т. 8, N. 8. – С. 76–96.

140. Necas J. Mathematical Theory of Elasticity and Elastic–Plasstic Bodies : An Introduction / J. Necas, I. Hlavacek. – Amsterdam : Elsevier, 1981. – 342 с.

141. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М. : Стройиздат, 1982. – 447 с.

142. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М. : Мир, 1968. – 184 с.

143. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н.Бронштейн , К. А. Семендяев; пер. с нем. – М. : Наука, 1981. – 720 с.

144. Вагін П. П. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статики зсувних оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Матем. методи та фіз.–мат. поля. 1999. – 42, № 2. – С. 53–61.

145. Вагін П. П. Квазілінеаризація задачі термопружності для гнучких оболонок з деформівною нормаллю / П. П. Вагін, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко // Вісник Львів. ун–та. Сер. мех.–мат. задачі та методи прикладної математики. – 1999. – Вип. 52. – С. 8–15.

146. Вагін П. П. Моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок при термосиловому навантаженні / П. П. Вагін, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко; ЛНУ ім. Івана Франка. – Львів, 1998. – 29 с. – Деп. в ДНТБ України 13.04.98 , №186. – Ук98.

147. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – Киев : Вища школа, 1983. – 286 с.

148. Зенкевич О. Метод конечних элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.

149. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

150. Іванова Н. В. Чисельне моделювання поводження гнучких зсувних оболонок з деформівною нормаллю : дис... канд. наук : 01.01.07 / Н. В. Іванова. – Львів, 2000. – 140 с.

151. Іванова Н. В. Чисельне моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок / Н. В. Іванова, Р. Б.Малець // Комп’ютерне моделювання. Тез. доп. Міждерж. наук.–метод. конф. Дніпродзержинськ, 24–26 червня 1998. – Дніпродзержинськ, 1998. – С. 12–13.

152. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

153. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Высш. шк., 1975. – 217 с.

154. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн , Т. Корн . – М. : Наука, 1984. – 831 с.

155. Лейбензон Л. С. Теория упругости : собр. трудов / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд–во АН СССР, 1951. – Т. 1. – 346 с.

156. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий, перевод с польського Б. Е. Победри. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

157. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек / Б. Л. Пелех. – Львов : Вища школа, 1978. – 159 с.

158. Победря Б. Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений / Б. Е. Победря // Изв. АН Армянской ССР. Механика. – 1987. – 40, N 4. – С. 15–26.

159. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1969. – 176 с.

160. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – Киев : Наукова думка, 1978. – 344 с.

161. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М. : Стройиздат, 1977. – 129 с.

162. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула. – Київ : НМК ВО, 1993. – 100 с.

163. Савула Я. Г. Некоторые приложения метода конечных єлементов / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, В. М. Вовк. – Львов : Изд–во Львов. ун–та, 1981. – 88 с.

164. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.

165. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М. : Мир, 1980. – 512 с.

166. Венгерський П. С. Застосування кусково–квадратичних апроксимацій для розв’язування задач руслового стоку рідини / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Математичні проблеми механіки неоднордних структур. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 314–316.

167. Венгерський П. С. Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2009. – Вип. 15. – С.178–195.

168. Картвелишвили Н. А. Неустановившиеся открытые потоки / Н. А. Картвелишвили. – Л. : Гидрометеоиздат, 1968. – 126 с.

169. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко. – Львів, 1999. – 80 с.